En los ejercicios 17 y 18, A es una matriz de 3×3 *con eigenvectores* $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *correspondientes a los eigenvalores* $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ *y* $\lambda_3 = 1$, *respectivamente, y* $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

17. Encuentre $A^{20}\mathbf{x}$.

18. Determine $A^k\mathbf{x}$. ¿Qué pasa cuando k crece (es decir, $k \to \infty$)?

19. (a) Demuestre que, para cualquier matriz cuadrada A, A^T y A tienen el mismo polinomio característico y por lo tanto los mismos eigenvalores.

(b) Proporcione un ejemplo de una matriz A de 2×2 en la cual A^T y A tengan eigenespacios diferentes.

20. Demuestre que $\lambda = 0$ es el único eigenvalor de una matriz nilpotente (es decir, una matriz que se convierte en la matriz cero cuando se eleva a alguna potencia).

21. Demuestre que $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ son los únicos eigenvalores posibles de una matriz idempotente (es decir, una matriz que es igual a sí misma cuando se eleva al cuadrado).

22. Si $\mathbf{v}$ es un eigenvector de A con eigenvalor correspondiente λ y c es un escalar, demuestre que $\mathbf{v}$ es un eigenvector de $A - cI$ con eigenvalor correspondiente $\lambda - c$.

23. (a) Determine los eigenvalores y eigenespacios de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Utilizando el teorema 4 y el ejercicio 22, encuentre los eigenvalores y eigenespacios de A^{-1}, $A - 2I$ y $A + 2I$.

24. Sean A y B matrices de $n \times n$ con eigenvalores λ y μ, respectivamente.

(a) Proporcione un ejemplo para demostrar que $\lambda + \mu$ no necesita ser un eigenvalor de $A + B$.

(b) Proporcione un ejemplo que demuestre que $\lambda\mu$ no necesita ser un eigenvalor de AB.

(c) Supongamos que λ y μ corresponden al *mismo* eigenvector $\mathbf{x}$. Demuestre que, en este caso, $\lambda + \mu$ es un eigenvalor de $A + B$ y que $\lambda\mu$ es un eigenvalor de AB.

25. Si A y B son dos matrices por renglón equivalente, ¿tendrán necesariamente los mismos eigenvalores? Demuestre si éste es el caso o proporcione un contraejemplo.

Sea p(x) el polinomio

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

La ***matriz compañera*** *de p(x) es la matriz de* $n \times n$

$$C(p) = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

26. Determine la matriz compañera de $p(x) = x^2 - 7x + 12$ y luego el polinomio característico de $C(p)$.

27. Encuentre la matriz compañera de $p(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 12$ y luego el polinomio característico de $C(p)$.

28. (a) Muestre que la matriz compañera $C(p)$ de $p(x) = x^2 + ax + b$ tiene el polinomio característico $\lambda^2 + a\lambda + b$.

(b) Demuestre que si λ es un eigenvalor de la matriz compañera $C(p)$ en el inciso (a), entonces $\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}$ es un eigenvector de $C(p)$ correspondiente a λ.

29. (a) Demuestre que la matriz compañera $C(p)$ de $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene el polinomio característico $-(\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c)$.

(b) Demuestre que si λ es un eigenvalor de la matriz compañera $C(p)$ en el inciso (a), entonces $\begin{bmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix}$ es un eigenvector de $C(p)$ correspondiente a λ.

30. Construya una matriz de 2×2 no diagonal con eigenvalores 2 y 5. (*Sugerencia*: utilice el ejercicio 28.)

31. Construya una matriz de 3×3 no diagonal con eigenvalores -2, 1 y 3. (*Sugerencia*: utilice el ejercicio 29.)

32. (a) Utilice inducción matemática para demostrar que, para $n \geq 2$, la matriz compañera $C(p)$ de $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ tiene el polinomio característico $(-1)^n p(\lambda)$. [*Sugerencia*: desarrolle mediante cofactores a lo largo de la última columna. A usted le puede ser útil introducir el polinomio $q(x) = (p(x) - a_0)/x$.]

(b) Demuestre que si λ es un eigenvalor de la matriz compañera $C(p)$ en la ecuación (4), entonces un eigenvector correspondiente a λ está dado por