Ahora multiplicamos ambos lados de la ecuación (1) por λ_{k+1} para obtener

$$\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = c_1\lambda_{k+1}\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_{k+1}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\lambda_{k+1}\mathbf{v}_k \tag{3}$$

Cuando restamos la ecuación (3) de la ecuación (2), obtenemos

$$\mathbf{0} = c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_k$$

La independencia lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ implica que

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) = \cdots = c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$$

Debido a que todos los eigenvalores λ_i son distintos, los términos entre paréntesis $(\lambda_i - \lambda_{k+1}, i = 1, \ldots, k)$ también son distintos de cero. Por tanto, $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$. Esto implica que

$$\mathbf{v}_{k+1} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

lo cual es imposible, puesto que el eigenvector $\mathbf{v}_{k+1}$ no puede ser cero. De esta forma, hemos llegado a una contradicción, lo que significa que nuestra suposición de que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ son linealmente dependientes es falsa. Por ello se exige que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ sean linealmente independientes. ◆

◆ EJERCICIOS 4.3 ◆

En los ejercicios 1 a 12, calcule (a) el polinomio característico de A, (b) los eigenvalores de A, (c) una base de cada eigenespacio de A, y (d) la multiplicidad algebraica y la multiplicidad geométrica de cada eigenvalor.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

13. Demuestre el teorema 4(b).

14. Demuestre el teorema 4(c). [*Sugerencia*: combine las demostraciones de los incisos (a) y (b), y ponga atención a la cuarta “Observación” que sigue al teorema 4 en la sección 3.3 (página 168).]

En los ejercicios 15 y 16, A es una matriz de 2×2 con eigenvectores $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ correspondientes a los eigenvalores $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ y $\lambda_2 = 2$, respectivamente, y $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

15. Encuentre $A^{10}\mathbf{x}$.

16. Encuentre $A^k\mathbf{x}$. ¿Qué es lo que ocurre si k crece (es decir, $k \to \infty$)?