

---

**Tarea # 7**

1. Encuentre la matriz  $[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$  de la transformación lineal  $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  con respecto a las bases  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  respectivamente. Además verifique que  $[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{C}}$  para cada  $v \in \mathcal{V}$ .

- a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a - 3b \\ a + 4b \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

( $[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} := [T]_{\mathcal{B}}$  siempre que  $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ .)

- b)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a - 3b \\ a + 4b \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

- c)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a - 3b \\ a + 4b \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

- d)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a + 2b \\ -a \\ b \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

---

e)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a - b + c \\ 2a + b - 3c \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

f)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2b + c \\ a - 4b \\ 3a \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

( $[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} := [T]_{\mathcal{B}}$  siempre que  $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ .)

g)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2b + c \\ a - 4b \\ 3a \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

h)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2b + c \\ a - 4b \\ 3a \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

---

i) Sea  $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  definida por

$$T(p(x)) = xp(x),$$

$$\mathcal{B} = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\} \quad \mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\} \quad \text{y} \quad v = p(x) = a + bx + cx^2.$$

j) Sea  $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  definida por  $T(A) = A^t$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$  y

$$v = A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

k) Sea  $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  definida por  $T(A) = MA$ , donde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\} \quad \text{y}$$

$$v = A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

2. Sean  $\mathcal{W} = \text{gen}(\{e^{2t}, e^{2t} \cos t, e^{2t} \sin t\}) \subseteq \mathcal{D}$  y  $D : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$  el operador derivación.

a) Encuentre la matriz de  $D$  con respecto a la base

$$\mathcal{B} = \{e^{2t}, e^{2t} \cos t, e^{2t} \sin t\}.$$

b) Calcule la derivada de  $f(t) = 3e^{2t} - e^{2t} \cos t + 2e^{2t} \sin t$  de manera indirecta y verifique que concuerda con  $f'(t)$  al calcularla de manera directa.

3. Sean  $\mathcal{W} = \text{gen}(\{\cos t, \sin t, t \cos t, t \sin t\}) \subseteq \mathcal{D}$  y  $D : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$  el operador derivación.

a) Encuentre la matriz de  $D$  con respecto a la base

$$\mathcal{B} = \{\cos t, \sin t, t \cos t, t \sin t\}.$$

b) Calcule la derivada de  $f(t) = \cos t + 2t \cos t$  de manera indirecta y verifique que concuerda con  $f'(t)$  al calcularla de manera directa.

- 
4. Sean  $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  y  $S : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  transformaciones lineales,  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  bases para  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  respectivamente. Calcule  $[S \circ T]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}}$  de dos maneras: primera, encuentre  $S \circ T$  de manera directa para posteriormente calcular su matriz, y segunda, determine las matrices de  $S$  y  $T$  por separado y multiplíquelas.

a)  $T : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix},$$

$S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$S\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a - 2b \\ 2a - b \end{bmatrix},$$

$\mathcal{B} = \{1, x\}$  y  $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \{e_1, e_2\}$ .

b)  $T : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  definida por  $T(p(x)) = p(x + 1)$ ,  $S : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  definida por  $S(p(x)) = p(x + 1)$ ,  $\mathcal{B} = \{1, x\}$  y  $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \{1, x, x^2\}$ .

5. Determine si la transformación lineal  $T$  es invertible considerando su matriz con respecto a las bases estándar. Si  $T$  es invertible determinar  $T^{-1}$ .

a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = a + (a + b)x.$$

b)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2b + c \\ a - 4b \\ 3a \end{bmatrix}.$$

c)  $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  definida por  $T(A) = A^t$ .

d)  $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} 2a - b \\ a + b - 3c \\ c - a \end{bmatrix}.$$

---

e)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{MS}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a + b + c & b - 2c \\ b - 2c & a - c \end{bmatrix}.$$

6. Encuentre los vectores coordenados  $[v]_{\mathcal{B}}$  y  $[v]_{\mathcal{C}}$  de  $v \in \mathcal{V}$  con respecto a las bases  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$ , respectivamente. Encuentre la matriz de cambio de base  $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$  de  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$ . Encuentre la matriz de cambio de base  $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$  de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{B}$ . Verifique que  $\forall v \in \mathcal{V} : P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}}$  y  $\forall v \in \mathcal{V} : P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}[v]_{\mathcal{C}} = [v]_{\mathcal{B}}$ .

a)

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

en  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ .

b)

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

en  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ .

c)  $\mathcal{B} = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$ ,  $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$  en  $\mathcal{V} = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

7. Verifique que  $[T]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$  y  $[T]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$  si

a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a - 3b \\ a + 4b \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

b)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2b + c \\ a - 4b \\ 3a \end{bmatrix},$$

---

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

c)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3a + c \\ -2a + b \\ -a + 2b + 4c \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Puebla, Pue., a 20 de octubre de 2013