

---

**Tarea # 6**

- I) Sea  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial y sean  $\phi_1 : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \phi_2 : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  dos transformaciones lineales. Sea  $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la transformación definida por  $T(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v))$ . Demostrar que  $T$  es lineal. Generalizar el resultado.
- II) Sea  $\mathcal{V} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f \text{ tiene derivadas de todos los órdenes}\}$  y sea  $D : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  el operador derivación. ¿Cuál es el núcleo de  $D^2$ ? ¿Cuál es el núcleo de  $D^n$ ?
- III) Sea  $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{F})$  y sea  $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  la aplicación definida por

$$T(A) = \frac{A + A^t}{2}$$

- a) Demostrar que  $T$  es lineal.  
b) Determinar el  $\text{nu}(T)$ .  
c) ¿Cuál es la dimensión del  $\text{nu}(T)$ ?
- IV) Sea  $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{F})$  y sea  $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  la aplicación definida por

$$T(A) = \frac{A - A^t}{2}$$

- a) Demostrar que  $T$  es lineal.  
b) Determinar el  $\text{nu}(T)$ .  
c) ¿Cuál es la dimensión del  $\text{nu}(T)$ ?
- V) Sea  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación lineal tal que  $T \neq 0$  pero  $T^2 = T \circ T = 0$ . Demostrar que existe una base  $\{v_1, v_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $T(v_1) = v_2$  y  $T(v_2) = 0$ .
- VI) Sea  $\dim(\mathcal{V}) > \dim(\mathcal{W})$  y sea  $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  una aplicación lineal. Demostrar que el núcleo de  $T$  no es  $\{0\}$ .
- VII) Sean  $S$  y  $T$  aplicaciones lineales invertibles de un espacio vectorial  $\mathcal{V}$  en sí mismo. Demostrar que

$$(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}.$$

- VIII) Determine si la transformación lineal  $T$  dada es (i) inyectiva e (ii) sobreyectiva

---

a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{bmatrix}.$$

b)  $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} 2a - b \\ a + b - 3c \\ c - a \end{bmatrix}.$$

IX) Sean  $S, T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  las transformaciones lineales definidas por

$$S(x, y) = (x + y, x - y) \text{ y } T(x, y) = (2x + y, 3x - 5y),$$

respectivamente. Demostrar que  $S$  y  $T$  son invertibles.

X) Sean  $S, T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  las transformaciones lineales definidas por

$$S(x, y, z) = (x - y, x + z, x + y + 2z) \text{ y } T(x, y, z) = (2x - y + z, x + y, 3x + y + z),$$

respectivamente. Demostrar que  $S$  y  $T$  son invertibles.

XI) Sea  $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  una transformación lineal tal que  $T^2 = 0$ . Demostrar que  $I_{\mathcal{V}} - T$  es invertible.

XII) Sean  $T_1 : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  y  $T_2 : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$  isomorfismos de espacios vectoriales sobre  $\mathbb{F}$ . Demostrar que  $T_2 \circ T_1 : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  es un isomorfismo.

XIII) Demuestre que los espacios vectoriales  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  son isomorfos, exhibiendo un isomorfismo explícito  $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ .

a)  $\mathcal{V} = \mathcal{MS}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  (matrices simétricas de tamaño  $2 \times 2$ ),  $\mathcal{W} = \mathcal{TS}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  (matrices triangulares superiores de tamaño  $2 \times 2$ )

b)  $\mathcal{V} = \mathcal{D}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  (matrices diagonales de tamaño  $3 \times 3$ ),  $\mathcal{W} = \mathbb{R}^3$

c)  $\mathcal{V} = \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$

XIV) ¿Es  $\mathcal{V} = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : \text{tr}(A) = 0\}$  isomorfo a  $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$ ?

Puebla, Pue., a 7 de Octubre de 2013