39. Demuestre que la diagonal principal de una matriz antisimétrica debe estar compuesta enteramente por ceros.

40. Demuestre que si A y B son matrices antisimétricas de $n \times n$, entonces $A + B$ también lo es.

41. Si A y B son matrices antisimétricas de 2×2, ¿bajo qué condiciones AB es antisimétrica?

42. Demuestre que si A es una matriz de $n \times n$, entonces $A - A^T$ es antisimétrica.

43. (a) Demuestre que cualquier matriz cuadrada A puede escribirse como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica. (*Sugerencia*: considere el teorema 4 y el ejercicio 42.)

(b) Ilustre el inciso (a) de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

*La **traza** de una matriz $A = [a_{ij}]$ de $n \times n$, es la suma de las entradas sobre su diagonal principal y se denota como $\mathrm{tr}(A)$. Es decir,*

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

44. Si A y B son matrices de $n \times n$, demuestre las siguientes propiedades de la traza:
(a) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$
(b) $\mathrm{tr}(kA) = k\mathrm{tr}(A)$, donde k es un escalar

45. Demuestre que si A y B son matrices de $n \times n$, entonces $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

46. Si A es una matriz cualquiera, ¿a qué será igual $\mathrm{tr}(AA^T)$?

47. Demuestre que no hay matrices A y B de 2×2 tales que $AB - BA = I_2$.

3.3 Inversa de una matriz

En esta sección regresaremos a la descripción de la matriz $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de un sistema de ecuaciones lineales e investigaremos maneras para utilizar el álgebra de matrices para resolver el sistema. A modo de analogía, considere la ecuación $ax = b$, donde a, b y x representan números reales y queremos resolverla para x. Podemos rápidamente comprender que queremos $x = b/a$ como la solución, pero debemos recordar que ello es cierto sólo si $a \neq 0$. Si continuamos más lentamente y suponemos que $a \neq 0$, alcanzaremos la solución mediante la siguiente serie de pasos:

$$ax = b \Rightarrow \frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(b) \Rightarrow \left(\frac{1}{a}(a)\right)x = \frac{b}{a} \Rightarrow 1 \cdot x = \frac{b}{a} \Rightarrow x = \frac{b}{a}$$

(¡Este ejemplo muestra cuánto elucubramos en nuestra mente y cuántas propiedades de aritmética y álgebra damos por supuestas!)

Para imitar este procedimiento para la ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ¿qué es lo que necesitamos? Necesitamos hallar una matriz A' (análoga a $1/a$) tal que $A'A = I$, una matriz identidad (análoga al 1). *Si* una matriz así existe (análoga para el requerimiento de que $a \neq 0$), entonces podemos efectuar la siguiente secuencia de cálculos:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow A'(A\mathbf{x}) = A'\mathbf{b} \Rightarrow (A'A)\mathbf{x} = A'\mathbf{b} \Rightarrow I\mathbf{x} = A'\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = A'\mathbf{b}$$

(¿Por qué cada uno de estos pasos está justificado?)

Nuestro objetivo en esta sección será determinar con precisión cuándo podemos encontrar una matriz A' de esa clase. De hecho, vamos a insistir en ello un poco más: no sólo queremos $A'A = I$ sino que también $AA' = I$. Este requerimiento obliga a que A y A' sean matrices cuadradas. (¿Por qué?)