28. Demuestre que si AB y BA están definidas, entonces AB y BA son matrices cuadradas.

Una matriz cuadrada se denomina ***triangular superior*** *si todas las entradas por debajo de la diagonal principal son cero. De este modo, la forma de una matriz triangular superior es*

$$\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix}$$

donde las entradas marcadas con un $*$ son arbitrarias. Una definición más formal de una matriz $A = [a_{ij}]$ de esta clase, es que $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

29. Demuestre que el producto de dos matrices triangulares superiores de $n \times n$ es triangular superior.

30. Demuestre el teorema 3(a)-(c).

31. Demuestre el teorema 3(e).

32. Mediante el empleo de la inducción, demuestre que $(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)^T = A_1^T + A_2^T + \cdots + A_n^T$ para toda $n \geq 1$.

33. Utilice la inducción para demostrar que para toda $(A_1 A_2 \cdots A_n)^T = A_n^T \cdots A_2^T A_1^T$, $n \geq 1$.

34. Demuestre el teorema 4(b).

35. (a) Demuestre que si A y B son matrices simétricas de $n \times n$, entonces $A + B$ también lo es.
(b) Demuestre que si A es una matriz simétrica de $n \times n$, entonces también lo es kA, para cualquier escalar k.

36. (a) Proporcione un ejemplo para demostrar que si A y B son matrices simétricas de $n \times n$, entonces AB no necesita ser simétrica.
(b) Demuestre que si A y B son matrices simétricas de $n \times n$, entonces AB es simétrica si y sólo si $AB = BA$.

Una matriz cuadrada se llama ***antisimétrica*** *si $A^T = -A$.*

37. ¿Cuáles de las siguientes matrices son antisimétricas?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

38. Proporcione una definición con base en las componentes de una matriz antisimétrica.