Tarea # 5

I) **Determine si T es una transformación lineal**

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ **definida por**

$$T(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x - y + z \\ 2x + y - 3z \end{bmatrix}.$$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **definida por**

$$T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x + 1 \\ y - 1 \end{bmatrix}.$$

c) $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ **definida por**

$$T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a + b & 0 \\ 0 & c + d \end{bmatrix}.$$

d) $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ **definida por**

$$T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & a - d \\ b - c & 1 \end{bmatrix}.$$

e) $T : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ **definida por** $T(A) = AB$ **donde** B **es una matriz fija de tamaño** $n \times n$**.**

f) $T : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ **definida por** $T(A) = tr(A)$**.**

g) $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ **definida por**

$$T(a + bx + cx^2) = (a + 1) + (b + 1)x + (c + 1)x^2.$$

h) $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ **definida por**

$$T(a + bx + cx^2) = xp(x).$$

i) $T : \mathcal{MS}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ **definida por**

$$T(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}) = (a - b) + (b - c)x + (c - a)x^2$$

donde $\mathcal{MS}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ **es el espacio vectorial de las matrices simétricas de tamaño** 2×2**.**

II) **Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal para la cual**

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{y} \quad T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Encuentre

$$T(\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}) \quad \textbf{y} \quad T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}).$$

III) **Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal para la cual**

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = 1 - 2x \quad \textbf{y} \quad T(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}) = x + 2x^2.$$

Encuentre

$$T(\begin{bmatrix} -7 \\ 9 \end{bmatrix}) \quad \textbf{y} \quad T(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}).$$

IV) **Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ la transformación lineal definida por**

$$T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

a) **¿Cuáles, si es el caso, de las siguientes matrices se encuentran en el $ker(T)$?**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

b) **¿Cuáles, si es el caso, de las matrices del inciso $a)$ se encuentran en la $Im(T)$?**

c) **Describa el $ker(T)$ y la $Im(T)$.**

V) **Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la transformación lineal definida por $T(A) = tr(A)$.**

a) **¿Cuáles, si es el caso, de las siguientes matrices se encuentran en el $ker(T)$?**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

***b*) ¿Cuáles, si es el caso, de los siguientes escalares se encuentran en la $Im(T)$?**

$$0, \ -2 \ \frac{1}{\sqrt{2}}$$

***c*) Describa el $ker(T)$ y la $Im(T)$.**

VI) Sea $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} a - b \\ b + c \end{bmatrix}$$

***a*) ¿Cuáles, si es el caso, de los siguientes polinomios se encuentran en el $ker(T)$?**

$$1 + x, \ x - x^2, \ 1 + x - x^2.$$

***b*) ¿Cuáles, si es el caso, de los siguientes vectores se encuentran en la $Im(T)$?**

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

***c*) Describa el $ker(T)$ y la $Im(T)$.**

VII) Encuentre ya sea la nulidad o bien el rango de T y posteriormente utilice el teorema del rango para encontrar al otro.

***a*) Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por**

$$T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

***b*) Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definida por**

$$T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a - b \\ c - d \end{bmatrix}.$$

***c*) Sea** $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ **definida por** $T(A) = AB$**, donde**

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

***d*) Sea** $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ **definida por** $T(A) = tr(A)$**.**

***e*) Sea** $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ **definida por**

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} a - b \\ b + c \end{bmatrix}.$$

***f*) Sea** $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ **definida por** $T(A) = A - A^t$**.**

Puebla, Pue., a 26 de septiembre de 2013