BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Profr. Carlos Alberto López Andrade
Materia: Álgebra Lineal II (Formas Canónicas)

Tarea # 4

1. Para cada uno de los siguientes operadores lineales T sobre el espacio vectorial $\mathcal{V}$, determine si el subespacio dado $\mathcal{W}$ es un subespacio T-invariante de $\mathcal{V}$.

    a) $\mathcal{V} = \mathbb{P}_3(\mathbb{R}), T(f(t)) = f'(t)$ y $\mathcal{W} = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

    b) $\mathcal{V} = \mathbb{P}(\mathbb{R}), T(f(t)) = tf(t)$ y $\mathcal{W} = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

    c) $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3, T(a,b,c) = (a+b+c, a+b+c, a+b+c)$ y $\mathcal{W} = \{(t,t,t) : t \in \mathbb{R}\}$.

    d) $\mathcal{V} = \mathcal{C}([0,1]), T(f(t)) = [\int_0^1 f(t)dt]t$ y $\mathcal{W} = \{f(t) \in \mathcal{V} : f(t) = at+b, a, b \in \mathbb{R}\}$.

    e) $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,
    $$T(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A$$
    y $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{V} : A^t = A\}$.

2. Sea $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un operador lineal. Mostrar que cada uno de los subespacios dados es T-invariante:

    a) $\{0\}$.

    b) $\mathcal{V}$.

    c) $ker(T)$.

    d) $Im(T)$.

3. Sea $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un operador lineal y sea $\mathcal{W}$ un subespacio T-invariante de $\mathcal{V}$. Demostrar que $\mathcal{W}$ es un subespacio $f(T)$-invariante de $\mathcal{V}$ para cualquier $f(t) \in \mathcal{K}[t]$.

4. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial $\mathcal{V}$ y sea $\{\mathcal{W}_i\}$ una colección de subespacios T-invariantes de $\mathcal{V}$. Mostrar que $\bigcap_i \mathcal{W}_i$ es un subespacio T-invariante de $\mathcal{V}$.

5. Supongamos que $\mathcal{W}$ es invariante por $S : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ y $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Mostrar que $\mathcal{W}$ también es invariante por $S+T$ y ST.

6. Sea $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un operador lineal y sea $\mathcal{W}$ el espacio propio correspondiente a un valor propio λ de T. Mostrar que $\mathcal{W}$ es T-invariante.

7. Hallar todos los subespacios invariantes de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

considerada como un operador sobre $\mathbb{R}^2$.

8. Determinar los subespacios invariantes de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix},$$

considerada como un operador lineal sobre:

   a) $\mathbb{R}^2$.
   b) $\mathbb{C}^2$.

9. Sea $dim(\mathcal{V}) = n$. Mostrar que el operador lineal $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ tiene una representación en una matriz triangular si y sólo si existen subespacios T-invariantes $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2 \cdots \subseteq \mathcal{W}_n = \mathcal{V}$ tales que $dim(\mathcal{W}_k) = k$, $k = 1, \ldots, n$.

10. Supongamos que $A \neq I$ es una matriz cuadrada tal que $A^3 = I$. Determinar si A es semejante a una matriz diagonal cuando A es una matriz sobre:

   a) el cuerpo real $\mathbb{R}$
   b) el cuerpo complejo $\mathbb{C}$

11. ¿Son diagonalizables las siguientes matrices ?

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. Sea A una matriz nilpotente. Mostrar que $\lambda = 0$ es el único eigenvalor de A.

13. Sea A una matriz idempotente (esto es, $A^2 = A$). Mostrar que $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ son los únicos eigenvalores posibles de A.

14. Supongamos que S y T son operadores nilpotentes que se pueden conmutar, esto es, $ST = TS$. Mostrar que $S + T$ y ST también son nilpotentes.

15. Sea $\mathcal{V}$ el espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq n$. Mostrar que el operador derivación sobre $\mathcal{V}$ es nilpotente de índice $n + 1$.

Puebla, Pue., a 2 de abril de 2012