Demostración: Demostraremos la propiedad 3), las restantes las dejamos de tarea.

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!}+\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\\
&= n!\left(\frac{k!\,(n-k)!+(k-1)!\,((n-k)+1)!}{(k-1)!\,((n-k)+1)!\,k!\,(n-k)!}\right)\\
&= n!\left(\frac{k+(n-k)+1}{((n-k)+1)!\,k!}\right)=\frac{n!\,(n+1)}{(n+1-k)!\,k!}\\
&= \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}=\binom{n+1}{k}. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Ejercicios 2.

1. Demostrar $n! = \left(\prod\limits_{i=1}^{i=s} i\right)\left(\prod\limits_{i=1}^{t}(s+i)\right)$ donde $n = s+t$.

2. Calcular $\sum\limits_{i=1}^{i=5}\left(\prod\limits_{j=1}^{j=i}(j+1)\right)$. Aquí $a_i = \prod\limits_{j=1}^{j=i}(j+1)$.

3. Calcular $\sum\limits_{i=1}^{i=4}\left(\sum\limits_{j=0}^{j=i}\frac{1}{j+1}\right)$, $4\left(\sum\limits_{i=1}^{i=3} i^2 + \sum\limits_{i=1}^{i=3}(-1)\right)$.

4. Demostrar

   a) Si $a_i \geq 0$ con $i = 1, \ldots, n$, entonces

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i \geq 0.$$

b) Si $a_i < 0$, con $i = 1, \ldots, n$, entonces

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i < 0.$$

c) Si $a_i \geq 0$, con $i = 1, \ldots, n$, entonces

$$\prod_{i=1}^{i=n} a_i \geq 0.$$

d) Si $a_i < 0$, con $i = 1, \ldots, n$, con n impar, entonces

$$\prod_{i=1}^{i=n} a_i < 0.$$

(*Sugerencia:* n es de la forma $2m+1$ con $m \in \mathbb{N}$).

e) Si $a_i > 1$, con $i = 1, \ldots, n$, entonces

$$\prod_{i=1}^{i=n} a_i > 1.$$

5. Demostrar:

a) $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

b) $\sum\limits_{i=1}^{n} ii! = (n+1)! - 1$.

c) $\sum\limits_{i=1}^{n} (2i-1)^3 = n^2(2n^2-1)$.

d) $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

e) $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

6. $\forall n \in \mathbb{N} : \sum\limits_{i=0}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n+1} a_{i-1}$.

7. a) $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+c)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i+nc.$

   b) $\sum\limits_{i=s}^{n}(a_i+c)=\sum\limits_{i=s}^{i=n}a_i+((n-s)+1)c.$

8. $\forall n\in\mathbb{N}$: Si $a_1,\ldots,a_n$ son todos reales del mismo signo y mayores que -1, entonces

$$\prod_{i=1}^{i=n}(a_i+1)\geq 1+\sum_{i=1}^{i=n}a_i.$$

9. $\forall n\in\mathbb{N}:\prod\limits_{i=1}^{i=n}\left(\dfrac{a_i}{b_i}\right)=\dfrac{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}{\prod\limits_{i=1}^{n}b_i}$ (con $b_i\neq 0$ para $i=1,\ldots,n$).

10. Determinar $n\in\mathbb{N}$ tal que $3\begin{pmatrix}n\\4\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}n-1\\5\end{pmatrix}$.

11. Demuestre $\begin{pmatrix}m\\k\end{pmatrix}\in\mathbb{N}$ para $k\leq m,\ \ k,m\in\mathbb{N}$.

§4

1.4. Binomio de Newton

Estudiaremos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}(a+b)^1 &= a+b,\\ (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2,\\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\\ (a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.\end{aligned}$$

En el desarrollo de cada potencia de los binomios, la suma de los exponentes de los factores que aparecen, suma la potencia a la que está elevada

$$=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}a^{(n+1)-i}b^{i}. \qquad \text{¡Puf!} \blacksquare$$

(Suplicamos al educando localizar las propiedades de sumatoria y productos usadas en esta demostración. Este simple ejercicio le reportará algo de práctica y gran tranquilidad).

En seguida algunas consecuencias de esta fórmula:

1. $2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^{n-i}1^i = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$.

2. $(b+a)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}b^{n-i}a^i$. Entonces

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}b^{n-i}a^i = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i.$$

3. $0 = (1-1)^n = (1+(-1))^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^{n-i}(-1)^i = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i$.

Ejercicios 3.

1. $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 3 \Longrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$

2. $\forall n \in \mathbb{N} : n > 1 \Longrightarrow n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$

3. Demostrar que en el desarrollo de $(a+b)^n$, la suma de los coeficientes de las potencias pares de a es igual a la suma de los coeficientes de las potencias impares de b.

4. $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$ con $n \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq -1$.