BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Profr. Carlos Alberto López Andrade
Materia: Álgebra Lineal II (Formas Canónicas)

Tarea $\#$ 3 *(Vectores propios y valores propios (2a Parte))*

1. Mostrar que $\lambda = 0$ es un eigenvalor de una matriz A si y sólo si A es singular.

2. Mostrar que si T es no-singular y λ es un eigenvalor de T entonces λ^{-1} es un eigenvalor de T^{-1}.

Polinomio característico y Polinomio mínimo

3. Mostrar que las matrices semejantes tienen los mismos valores propios.

4. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial $\mathcal{V}$ de dimensión finita. Mostrar que T es no-singular sí y sólo si el término constante del polinomio mínimo de T es diferente de cero.

5. Supongamos que $dim\mathcal{V} = n$. Sea $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un operador no-singular. Mostrar que T^{-1} es igual a un polinomio en T de grado menor que n.

6. Sea $\mathcal{P}_3$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3 y sea $\mathcal{D}$ el operador derivación. Determine el polinomio característico y el polinomio mínimo para $\mathcal{D}$. ¿Cuáles son los eigenvectores de $\mathcal{D}$?

7. Para cada matriz, verifique que la multiplicidad geométrica de cada valor propio no excede su multiplicida algebraica:
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Sea A la matriz real de 4×4
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Demostrar que el polinomio característico de A es $t^2(t-1)^2$ y que es al mismo tiempo el polinomio mínimo.

9. ¿Es la matriz A del ejercicio anterior semejante, sobre el cuerpo de los números complejos, a una matriz diagonal?

10. Hallar el polinomio mínimo $m(t)$ de cada matriz (donde $a \neq 0$):

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \lambda & a \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda & a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & a \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

11. Sea
$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$
donde A_1 y A_2 son matrices cuadradas. Mostrar que el polinomio mínimo $m(t)$ de A es el mínimo común múltiplo de los polinomios mínimos $m_1(t)$ y $m_2(t)$ de A_1 y A_2 respectivamente. Generalizar el resultado. [Sugerencia: Utilice que: si $f(t)$ es un polinomio y A es la matriz dada entonces
$$f(A) = \begin{bmatrix} f(A_1) & 0 \\ 0 & f(A_2) \end{bmatrix}.$$

12. Hallar los polinomios mínimo y característico de cada matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

13. Sea

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Mostrar que $P_A(t) = (t - \lambda)^n$ es el polinomio mínimo y característico de A.

14. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mostrar que A y B tienen diferente polinomio característico (y, por tanto, no son semejantes), pero tienen el mismo polinomio mínimo. Luego matrices no semejantes pueden tener el mismo polinomio mínimo.

Puebla, Pue., a 10 de marzo de 2012