BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Profr. Carlos Alberto López Andrade
Materia: Introducción a las Estructuras Algebraicas

Tarea # 2

1. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0 \neq c$. Probar que: si $a|b$ y $c|d$ entonces $ac|bd$.

2. Determine si el entero 701 es primo probando todos los primos $p \leq \sqrt{701}$ como posibles divisores. Hacer lo mismo para el entero 1009.

3. Empleando la Criba de Eratóstenes obtener todos los primos entre 100 y 200

4. Sea p un número primo tal que $p|a^n$, probar que $p^n|a^n$.

5. Sean p y q números primos y $n, m \in \mathbb{N}$. Probar que
$$p^n|q^m \text{ si y sólo si } p = q \text{ y } m \geq n.$$

6. Sean $a, x \in \mathbb{N}$ tales que $a = p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_r^{n_r}$ y $x = u_1^{m_1}u_2^{m_2}\cdots u_s^{m_s}$ donde $p_1, p_2, \ldots, p_r$ son números primos diferentes entre sí, $u_1, u_2, \ldots, u_s$ son números primos diferentes entre sí y $n_1, n_2, \ldots, n_r, m_i, m_2, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$. Probar que: $x|a$ si y sólo si
   a) $\{u_1, u_2, \ldots, u_s\} \subseteq \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ y
   b) para cada $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, si $u_i = p_j$ entonces $m_i \leq n_j$.

7. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ y sea $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ la unión de todos los números primos que aparecen en las factorizaciones primas de a y b de manera que podemos escribir $a = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_n^{a_n}$ y $b = p_1^{b_1}p_2^{b_2}\cdots p_n^{b_n}$ donde $a_i, b_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ (con exponentes iguales a cero si es necesario). Entonces
$$mcd(a,b) = \Pi_{i=1}^{n} p_i^{min\{a_i,b_i\}}$$
$$mcm(a,b) = \Pi_{i=1}^{n} p_i^{max\{a_i,b_i\}}.$$

8. Encuentre la factorización prima de cada uno de los enteros dados
   a) 729
   b) 1001
   c) 1111
   d) $909, 090$
   e) $10!$

---

9. Encuentre la factorización prima de cada uno de los enteros dados y determine el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo para cada par de enteros.

   a) $148, 500$
   b) $7, 114, 800$
   c) $7, 882, 875$

10. Encuentre el $mcd(1000, 625)$, el $mcm(1000, 625)$ y verifique que

$$mcd(1000, 625)mcm(1000, 625) = 1000 \cdot 625$$

11. Encuentre el $mcd(92928, 123552)$, el $mcm(92928, 123552)$ y verifique que

$$mcd(92928, 123552)mcm(92928, 123552) = 92928 \cdot 123552$$

12. Si el producto de dos enteros es $2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 7^{11}$ y su máximo común divisor es $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$ ¿Cuál es su mínimo común múltiplo?

13. Use el Algoritmo Euclidiano para encontrar el máximo común divisor de:

   a) $(14, 35)$
   b) $(180, 252)$
   c) $(2873, 6643)$
   d) $(4148, 7684)$
   e) $(1001, 7655)$

14. Escribir (a, b) en la forma $sa + tb$ ($s, t \in \mathbb{Z}$) para los cuatro primeros incisos del ejercicio anterior.

15. Si $a > 0$, probar que $(ab, ac) = a(b, c)$

Puebla, Pue., a 4 de septiembre de 2013