BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Profr. Carlos Alberto López Andrade
Materia: Álgebra Lineal II (Formas Canónicas)

Tarea $\#\ 2$ *(Vectores propios y valores propios (1a Parte))*

I) Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathcal{K}$ y sea $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ una aplicación lineal. Sea $v \in \mathcal{V}$ un vector propio de A con valor propio λ, i.e., $Av = \lambda v$. Demostrar que: Si $f(t)$ es un polinomio en $\mathcal{K}[t]$ entonces $f(A)v = f(\lambda)v$.

II) Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathcal{K}$. Sean A y B aplicaciones lineales de $\mathcal{V}$ en sí mismo. Supóngase que $AB = BA$. Demostrar que si v es un vector propio de A con valor propio λ, entonces Bv es un vector propio de A con valor propio λ siempre que $Bv \neq 0$.

III) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathcal{K})$. Mostrar que AB y BA tienen los mismos valores propios.

IV) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathcal{K})$ y supóngase que B es invertible. Demostrar que $(B^{-1}AB)^n = B^{-1}A^nB$.

V) Sea $f(t) \in \mathcal{K}[t]$. Sean A y B tal y como aparecen en el ejercicio anterior. Demostrar que $f(B^{-1}AB) = B^{-1}f(A)B$.

VI) Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que A no puede ser diagonalizada.

VII) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathcal{K})$. Demostrar que los valores propios de A^t son los mismos que los de A.

VIII) Sean $\mathcal{V} = gen(sent, cost)$ y $\mathcal{D} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ el operador derivación. ¿Tiene $\mathcal{D}$ vectores propios en $\mathcal{V}$? En caso afirmativo, ¿cuáles son?

IX) Para cada matriz, hallar los valores propios y una base para cada espacio propio:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix},$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

¿Qué matriz puede diagonalizarse y por qué ?

X) Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Hallar todos los valores propios y los vectores propios correspondientes de A y B, considerados como matrices sobre:

a) el cuerpo real $\mathbb{R}$,

b) el cuerpo complejo $\mathbb{C}$.

XI) Hallar todos los valores propios y una base de cada espacio propio del operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por:

$$T(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ y - z \\ 2y + 4z \end{bmatrix}.$$

Puebla, Pue., a 23 de febrero de 2012