
Tarea # 2

1. Para cada uno de los siguientes operadores lineales T sobre el espacio vectorial \mathcal{V} , determine si el subespacio dado \mathcal{W} es un subespacio T -invariante de \mathcal{V} .

a) $\mathcal{V} = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $T(f(t)) = f'(t)$ y $\mathcal{W} = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

b) $\mathcal{V} = \mathbb{P}(\mathbb{R})$, $T(f(t)) = tf(t)$ y $\mathcal{W} = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

c) $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$, $T(a, b, c) = (a + b + c, a + b + c, a + b + c)$ y $\mathcal{W} = \{(t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

d) $\mathcal{V} = \mathcal{C}([0, 1])$, $T(f(t)) = [\int_0^1 f(t)dt]t$ y $\mathcal{W} = \{f(t) \in \mathcal{V} : f(t) = at + b, a, b \in \mathbb{R}\}$.

e) $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$,

$$T(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A$$

y $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{V} : A^t = A\}$.

2. Sea $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ un operador lineal. Mostrar que cada uno de los subespacios dados es T -invariante:

a) $\{0\}$.

b) \mathcal{V} .

c) $\ker(T)$.

d) $\text{Im}(T)$.

3. Sea $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ un operador lineal y sea \mathcal{W} un subespacio T -invariante de \mathcal{V} . Demostrar que \mathcal{W} es un subespacio $f(T)$ -invariante de \mathcal{V} para cualquier $f(t) \in \mathcal{K}[t]$.

4. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial \mathcal{V} y sea $\{\mathcal{W}_i\}$ una colección de subespacios T -invariantes de \mathcal{V} . Mostrar que $\bigcap_i \mathcal{W}_i$ es un subespacio T -invariante de \mathcal{V} .

5. Supongamos que \mathcal{W} es invariante por $S : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ y $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. Mostrar que \mathcal{W} también es invariante por $S + T$ y ST .

6. Sea $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ un operador lineal y sea \mathcal{W} el espacio propio correspondiente a un valor propio λ de T . Mostrar que \mathcal{W} es T -invariante.

7. Hallar todos los subespacios invariantes de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

considerada como un operador sobre \mathbb{R}^2 .

8. Determinar los subespacios invariantes de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix},$$

considerada como un operador lineal sobre:

a) \mathbb{R}^2 .

b) \mathbb{C}^2 .

9. Sea $\dim(\mathcal{V}) = n$. Mostrar que el operador lineal $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ tiene una representación en una matriz triangular si y sólo si existen subespacios T -invariantes $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2 \cdots \subseteq \mathcal{W}_n = \mathcal{V}$ tales que $\dim(\mathcal{W}_k) = k$, $k = 1, \dots, n$.

10. Supongamos que $A \neq I$ es una matriz cuadrada tal que $A^3 = I$. Determinar si A es semejante a una matriz diagonal cuando A es una matriz sobre:

a) el cuerpo real \mathbb{R}

b) el cuerpo complejo \mathbb{C}

11. ¿Son diagonalizables las siguientes matrices ?

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

-
12. Sea A una matriz nilpotente. Mostrar que $\lambda = 0$ es el único eigenvalor de A .
 13. Sea A una matriz idempotente (esto es, $A^2 = A$). Mostrar que $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ son los únicos eigenvalores posibles de A .
 14. Supongamos que S y T son operadores nilpotentes que se pueden conmutar, esto es, $ST = TS$. Mostrar que $S + T$ y ST también son nilpotentes.
 15. Sea \mathcal{V} el espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq n$. Mostrar que el operador derivación sobre \mathcal{V} es nilpotente de índice $n + 1$.

Puebla, Pue., a 22 de febrero de 2014