BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Profr. Carlos Alberto López Andrade
Materia: Introducción a las Estructuras Algebraicas

Tarea # 1

1. Probar que el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente.

2. Demostrar que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ acotado superiormente, tiene un máximo.

3. Demostrar que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}$ acotado superiormente, tiene un máximo.

4. Evalúe la expresión
$$\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{1 + 2 + \cdots + n}$$
para $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Conjeture una fórmula para este cociente.

5. Use inducción matemática para probar que: $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^{n} i^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$.

6. Probar que el cubo de cualquier entero puede escribirse como la diferencia de dos cuadrados. (Sugerencia: Observese que
$$n^3 = (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) - (1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3.)$$

7. Demuestre el "Principio de recursión ": Si $p(n)$ es una proposición abierta en $\mathbb{N}$ y si

   a) $p(1)$ es verdadera

   b) [Para cada $n \in \mathbb{N}$, $(p(1) \wedge p(2) \wedge \ldots \wedge p(n) \Rightarrow p(n+1))$] es verdadera.
   Entonces también es verdadera: Para todo $n \in \mathbb{N},\ p(n)$.

8. Use el segundo principio de inducción matemática para establecer que
$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$$
para toda $n \geq 1$. [Sugerencia: $a^{n+1} - 1 = (a+1)(a^n - 1) - a(a^{n-1} - 1)$]

9. Definimos una función recursivamente para todos los enteros positivos n de la siguiente manera: $f(1) = 1$, $f(2) = 5$, y para $n > 2$, $f(n+1) = f(n) + 2f(n-1)$. Mostrar que $f(n) = 2^n + (-1)^n$, usando el segundo principio de inducción matemática.

---

10. Supóngase que $a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_2 = 9$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ para $n \geq 3$. Mostrar que $a_n \leq 3^n$ para cada entero no negativo n.

Puebla, Pue., a 22 de agosto de 2013