

---

**Tarea # 1(Repaso)**

1. Encuentre la matriz  $[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$  de la transformación lineal  $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  con respecto a las bases  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  respectivamente. Además verifique que  $[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{C}}$  para cada  $v \in \mathcal{V}$ .

a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a - 3b \\ a + 4b \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

( $[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} := [T]_{\mathcal{B}}$  siempre que  $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ .)

b)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a - 3b \\ a + 4b \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

c)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a - 3b \\ a + 4b \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

d)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a + 2b \\ -a \\ b \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

---

e)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a - b + c \\ 2a + b - 3c \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

f)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2b + c \\ a - 4b \\ 3a \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

( $[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} := [T]_{\mathcal{B}}$  siempre que  $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ .)

g)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2b + c \\ a - 4b \\ 3a \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

h)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2b + c \\ a - 4b \\ 3a \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

---

i) Sea  $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  definida por

$$T(p(x)) = xp(x),$$

$$\mathcal{B} = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\} \quad \mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\} \quad \text{y} \quad v = p(x) = a + bx + cx^2.$$

j) Sea  $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  definida por  $T(A) = A^t$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$  y

$$v = A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

k) Sea  $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  definida por  $T(A) = MA$ , donde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\} \quad \text{y}$$

$$v = A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

2. Encuentre los vectores coordenados  $[v]_{\mathcal{B}}$  y  $[v]_{\mathcal{C}}$  de  $v \in \mathcal{V}$  con respecto a las bases  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$ , respectivamente. Encuentre la matriz de cambio de base  $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$  de  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$ . Encuentre la matriz de cambio de base  $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$  de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{B}$ . Verifique que  $\forall v \in \mathcal{V} : P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}}$  y  $\forall v \in \mathcal{V} : P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}[v]_{\mathcal{C}} = [v]_{\mathcal{B}}$ .

a)

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

en  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ .

b)

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

en  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ .

c)  $\mathcal{B} = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$ ,  $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$  en  $\mathcal{V} = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

---

3. Verifique que  $[T]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$  y  $[T]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$  si

a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a - 3b \\ a + 4b \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

b)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2b + c \\ a - 4b \\ 3a \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Puebla, Pue., a 20 de febrero de 2012