**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

***Prof. Carlos Alberto López Andrade***
***Materia: Álgebra Lineal II (Formas Canónicas)***

# ***Tarea*** $\#\ 1$

1. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ y supóngase que $B$ es invertible. Demostrar que $(B^{-1}AB)^n = B^{-1}A^nB$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

2. Sea $f(t) \in \mathbb{F}[t]$. Sean $A$ y $B$ tal y como aparecen en el ejercicio anterior. Demostrar que $f(B^{-1}AB) = B^{-1}f(A)B$.

3. Mostrar que si $v$ es un eigenvector de $T$ entonces $v$ también es un eigenvector de $T^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $\lambda$ es el eigenvalor de $T$ correspondiente a $v$, ¿Cuál es el eigenvalor de $T^n$ correspondiente a $v$?

4. Mostrar que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de una matriz $A$ entonces los valores propios de la matriz $f(A)$, donde $f(t)$ es un polinomio, serán iguales a $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)$.

5. Mostrar que $\lambda = 0$ es un eigenvalor de una matriz $A$ si y sólo si A es singular.

6. Mostrar que si $T$ es no-singular y $\lambda$ es un eigenvalor de $T$ entonces $\lambda^{-1}$ es un eigenvalor de $T^{-1}$.

7. Mostrar que las matrices semejantes tienen los mismos valores propios.

8. Sea $T$ un operador lineal sobre un espacio vectorial $\mathcal{V}$ de dimensión finita. Mostrar que T es no-singular sí y sólo si el término constante del polinomio mínimo de $T$ es diferente de cero.

9. Supongamos que $dim\mathcal{V} = n$. Sea $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un operador no-singular. Mostrar que $T^{-1}$ es igual a un polinomio en $T$ de grado menor que $n$.

10. Sea $\mathcal{P}_3$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3 y sea $\mathcal{D}$ el operador derivación. Determine el polinomio característico y el polinomio mínimo para $\mathcal{D}$. ¿Cuáles son los eigenvectores de $\mathcal{D}$?

11. Para cada matriz, verifique que la multiplicidad geométrica de cada valor propio no excede su multiplicida algebraica:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

12. Sea $A$ la matriz real de $4\times 4$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Demostrar que el polinomio característico de $A$ es $t^2(t-1)^2$ y que es al mismo tiempo el polinomio mínimo.

13. ¿Es la matriz $A$ del ejercicio anterior semejante, sobre el cuerpo de los números complejos, a una matriz diagonal?

14. Hallar el polinomio mínimo $m(t)$ de cada matriz (donde $a\neq 0$):

$$A=\begin{bmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \lambda & a \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix} \lambda & a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & a \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

15. Sea

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

donde $A_1$ y $A_2$ son matrices cuadradas. Mostrar que el polinomio mínimo $m(t)$ de $A$ es el mínimo común múltiplo de los polinomios mínimos $m_1(t)$ y $m_2(t)$ de $A_1$ y $A_2$ respectivamente. Generalizar el resultado. [Sugerencia: Utilice que: si $f(t)$ es un polinomio y $A$ es la matriz dada entonces

$$f(A)=\begin{bmatrix} f(A_1) & 0 \\ 0 & f(A_2) \end{bmatrix}.$$

16. Hallar los polinomios mínimo y característico de cada matriz:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

17. Sea

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Mostrar que $P_A(t) = (t - \lambda)^n$ es el polinomio mínimo y característico de $A$.

18. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mostrar que $A$ y $B$ tienen diferente polinomio característico (y, por tanto, no son semejantes), pero tienen el mismo polinomio mínimo. Luego matrices no semejantes pueden tener el mismo polinomio mínimo.

Puebla, Pue., a 9 de febrero de 2014