se conoce como la ***adjunta*** de A y se denota por adj A. El resultado que acabamos de demostrar puede ser establecido como sigue.

◆ **TEOREMA 12**

Sea A una matriz invertible de $n \times n$. Entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

EJEMPLO 10 Utilice el método de la adjunta para calcular la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN: Calculamos $\det A = -2$ y los nueve cofactores

$$C_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -18 \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 10 \quad C_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 3 \quad C_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6 \quad C_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

La adjunta es la *transpuesta* de la matriz de cofactores, a saber,

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -18 & 10 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \\ 10 & -6 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -18 & 3 & 10 \\ 10 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -18 & 3 & 10 \\ 10 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -\frac{3}{2} & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

que es la misma respuesta que obtuvimos (con menos trabajo) en el ejemplo 8 de la sección 3.3. ◆

Demostración del teorema de expansión de Laplace

Desafortunadamente, no existe una demostración corta ni fácil del teorema de expansión de Laplace. La que ofrecemos tiene el mérito de ser relativamente sencilla. La desglosaremos en varios pasos, el primero de los cuales es demostrar que el desarrollo por cofactores a lo largo del primer renglón de una matriz es lo mismo que el desarrollo por cofactores a lo largo de la primera columna.

◆ **LEMA 13**

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

$$a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n} = \det A = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + \cdots + a_{n1}C_{n1} \quad (7)$$

DEMOSTRACIÓN: Demostraremos este lema mediante inducción sobre n. Para $n = 1$, el resultado es trivial. Ahora supongamos que el resultado es verdadero para matrices de $(n-1) \times (n-1)$; ésta es nuestra hipótesis de inducción. Nótese que, por la definición de cofactor (o menor), todos los términos que contienen a_{11} están justificados por el sumando $a_{11}C_{11}$. Por tanto, podemos ignorar los términos que contienen a_{11}.

El i-ésimo sumando del lado derecho de la ecuación (7) es $a_{i1}C_{i1} = a_{i1}(-1)^{i+1} \det A_{i1}$. Ahora desarrollaremos $\det A_{i1}$ a lo largo del primer renglón:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & ⋰ & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & ⋰ & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

El j-ésimo término de este desarrollo de $\det A_{i1}$ es $a_{1j}(-1)^{1+j-1} \det A_{1i,1j}$, donde la notación $A_{kl,rs}$ denota la submatriz de A que se obtiene al eliminar los renglones k y l, así como las columnas r y s. Si combinamos todo ello, vemos que el término que contiene $a_{i1}a_{1j}$ en el lado derecho de la ecuación (7) es

$$a_{i1}(-1)^{i+1}a_{1j}(-1)^{1+j-1} \det A_{1i,1j} = (-1)^{i+j+1}a_{i1}a_{1j} \det A_{1i,1j}$$

¿Qué es el término que contiene $a_{i1}a_{1j}$ en el lado izquierdo de la ecuación (7)? El factor a_{1j} aparece en el j-ésimo sumando, $a_{1j}C_{1j} = a_{1j}(-1)^{1+j} \det A_{1j}$. De acuerdo con la hipótesis de inducción, podemos desarrollar A_{1j} a lo largo de su primera columna:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots \\ a_{i1} & & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & & a_{in} \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

El i-ésimo término en este desarrollo de A_{1j} es $a_{i1}(-1)^{(i-1)+1} \det A_{1i,1j}$, de modo que el término que contiene $a_{i1}a_{1j}$ en el lado izquierdo de la ecuación (7) es

$$a_{1j}(-1)^{1+j}a_{i1}(-1)^{(i-1)+1} \det A_{1i,1j} = (-1)^{i+j+1}a_{i1}a_{1j} \det A_{1i,1j}$$

lo que establece que los lados izquierdo y derecho de la ecuación (7) son equivalentes. ◆

A continuación, demostraremos la propiedad (b) del teorema 3.

◆ LEMA 14

Sea A una matriz de $n \times n$ y tratemos de obtener B mediante el intercambio de cualesquiera dos renglones (columnas) de A. Entonces

$$\det B = -\det A$$

DEMOSTRACIÓN: Una vez más, la prueba es por inducción sobre n. El resultado puede ser fácilmente verificado cuando $n = 2$, de modo que supongamos que es verdadero para matrices de $(n-1) \times (n-1)$. Demostraremos que el resultado es verdadero para matrices de $n \times n$. En primer lugar, comprobaremos que mantiene su validez cuando dos renglones adyacentes de A son intercambiados, digamos, los renglones r y $r+1$.

De acuerdo con el lema 13, podemos evaluar el det B mediante desarrollo por cofactores a lo largo de su primera columna. El i-ésimo término en este desarrollo es $(-1)^{1+i} b_{i1} \det B_{i1}$. Si $i \neq r$ e $i \neq r+1$, entonces $b_{i1} = a_{i1}$ y B_{i1} es una submatriz de $(n-1) \times (n-1)$ que es idéntica a A_{i1} excepto en que dos renglones adyacentes han sido intercambiados.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,n} \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

De esta manera, según la hipótesis de inducción, $\det B_{i1} = -\det A_{i1}$ si $i \neq r$ e $i \neq r+1$.

Si $i = r$, entonces $b_{i1} = a_{r+1,1}$ y $B_{i1} = A_{r+1,1}$.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{Renglón } i \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,n} \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Por consiguiente el r-ésimo sumando en det B es

$$(-1)^{r+1} b_{r1} \det B_{r1} = (-1)^{r+1} a_{r+1,1} \det A_{r+1,1} = -(-1)^{(r+1)+1} a_{r+1,1} \det A_{r+1,1}$$

De manera semejante, si $i = r + 1$, entonces $b_{i1} = a_{r1}$, $B_{i1} = A_{r1}$ y el $(r + 1)$-ésimo sumando de det B es

$$(-1)^{(r+1)+1} b_{r+1,1} \det B_{r+1,1} = (-1)^{r} a_{r1} \det A_{r1} = -(-1)^{r+1} a_{r1} \det A_{r1}$$

En otras palabras, los términos r-ésimo y $(r + 1)$-ésimo del desarrollo por cofactores de la primera columna del det B son los *negativos* de los términos $(r + 1)$-ésimo y r-ésimo, respectivamente, del desarrollo por cofactores de la primera columna del det A.

Si sustituimos todos estos resultados en el det B y nuevamente aplicamos el lema 13, obtenemos

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} b_{i1} \det B_{i1} \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r, r+1}}^{n} (-1)^{i+1} b_{i1} \det B_{i1} + (-1)^{r+1} b_{r1} \det B_{r1} + (-1)^{(r+1)+1} b_{r+1,1} \det B_{r+1,1} \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r, r+1}}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1}(-\det A_{i1}) - (-1)^{(r+1)+1} a_{r+1,1} \det A_{r+1,1} - (-1)^{r+1} a_{r1} \det A_{r1} \\
&= -\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} \\
&= -\det A
\end{aligned}$$

Esto demuestra el resultado para matrices de $n \times n$ si son intercambiados renglones adyacentes. Para comprobar que mantiene su validez para intercambios de renglón arbitrarios, sólo necesitamos advertir que, por ejemplo, los renglones r y s, donde $r < s$, pueden intercambiarse al realizar $2(s - r) - 1$ intercambios de renglones adyacentes (véase el ejercicio 67). Debido a que el número de intercambios es *impar* y cada uno cambia el signo del determinante, el efecto neto es un cambio de signo, como se deseaba.

La demostración para intercambios de columna es análoga, excepto el hecho de que desarrollamos a lo largo del renglón 1 en lugar de hacerlo a lo largo de la columna 1. ◆

Podemos ahora demostrar el teorema de expansión de Laplace.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1: Sea B la matriz que se obtiene al mover el renglón i de A hacia la parte superior, mediante $i - 1$ intercambios de renglones adyacentes. De acuerdo con el lema 14, $\det B = (-1)^{i-1} \det A$. Pero $b_{1j} = a_{ij}$ y $B_{1j} = A_{ij}$ para $j = 1, \ldots, n$.

$$\det B = \begin{vmatrix}
a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}$$

De esta forma,

$$\det A = (-1)^{i-1} \det B = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} \det B_{1j}$$

$$= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

lo que nos da la fórmula para el desarrollo por cofactores a lo largo del renglón i.

Si aplicamos el lema 13, la demostración del desarrollo por columnas es semejante, de manera que podemos desarrollar por columnas en lugar de hacerlo por renglones (véase el ejercicio 68). ◆

Una breve historia de los determinantes

Como advertimos al principio de esta sección, la historia de los determinantes precede a la de las matrices. En realidad, fueron presentados por primera vez, de manera independiente, por Seki, en 1683, y por Leibniz en 1693. En 1748, los determinantes aparecieron en el *Treatise on Algebra*, de Maclaurin, que incluía un tratamiento de la regla de Cramer hasta el caso de 4 × 4. En 1750, Cramer demostró el caso general de esta regla, aplicándolo al ajuste de curvas, y en 1772, Laplace ofreció una demostración de su teorema de expansión.

El término *determinante* no fue acuñado sino hasta 1801, cuando fue utilizado por Gauss. Cauchy, en 1812, fue el primero que utilizó los determinantes en el sentido moderno. En realidad, Cauchy fue responsable del desarrollo de gran parte de la joven teoría de los determinantes, incluyendo varios resultados importantes que hemos mencionado: la regla del producto para determinantes, el polinomio característico y la noción de matriz diagonalizable. Los determinantes no llegaron a ser ampliamente conocidos sino hasta 1841, cuando Jacobi los popularizó, aunque en el contexto de las funciones de varias variables, tales como las que se encuentran en un curso de cálculo de variables múltiples. (Estos tipos de determinantes fueron llamados "jacobianos" por James J. Silvester alrededor de 1850, un término que todavía se utiliza hasta la fecha.)

El niño prodigio autodidacta, **Takakazu Seki Kowa (1642-1708)**, descendía de una familia de guerreros samurai. Además de descubrir los determinantes, escribió acerca de ecuaciones diofantinas, cuadrados mágicos y números de Bernoulli (antes de Bernoulli) y muy probablemente hizo descubrimientos en cálculo.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) nació en Leipzig y estudió leyes, teología, filosofía y matemáticas. Probablemente es mejor conocido por el desarrollo (de manera independiente, junto con Newton) de las principales ideas del cálculo diferencial e integral. Sin embargo, sus contribuciones a otras ramas de las matemáticas también son impresionantes. Desarrolló la noción de un determinante, versiones conocidas de la regla de Cramer y el teorema del desarrollo de Laplace antes que a otros se les diera crédito por ellos, y puso los fundamentos de la teoría de matrices a través del trabajo que realizó sobre las formas cuadráticas. Leibniz también fue el primero en desarrollar el sistema binario de aritmética. Creía en la importancia de una buena notación y, junto con la notación familiar para las derivadas e integrales, introdujo una forma de notación con subíndices para los coeficientes de un sistema lineal que es esencialmente la notación que utilizamos en la actualidad. (*Fotografía:* © CORBIS)