Profr. Carlos Alberto López Andrade
Materia: Álgebra Lineal

Tarea # 7

1. Determine si la transformación lineal T es *(a)* inyectiva y *(b)* sobreyectiva

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{bmatrix}.$$

   b) $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} 2a - b \\ a + b - 3c \\ c - a \end{bmatrix}.$$

2. Demuestre que los espacios vectoriales $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son isomorfos

   a) $\mathcal{V} = \mathcal{MS}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (matrices simétricas de tamaño 2×2), $\mathcal{W} = \mathcal{TS}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (matrices triangular superior de tamaño 2×2)

   b) $\mathcal{V} = \mathcal{D}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ (matrices diagonales de tamaño 3×3), $\mathcal{W} = \mathbb{R}^3$

3. Encuentre la matriz $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ de la transformación lineal $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ con respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ respectivamente. Además verifique que $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{C}}$ para cada $v \in \mathcal{V}$.

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$T(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2a - 3b \\ a + 4b \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$
   ($[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} := [T]_{\mathcal{B}}$ siempre que $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.)

   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$T(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2a - 3b \\ a + 4b \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\}.$$

c) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2a-3b \\ a+4b \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}=\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\},\quad \mathcal{C}=\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\}.$$

d) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a+2b \\ -a \\ b \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}=\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\},\quad \mathcal{C}=\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

e) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a-b+c \\ 2a+b-3c \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}=\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\},\quad \mathcal{C}=\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

f) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2b+c \\ a-4b \\ 3a \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}=\mathcal{C}=\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

($[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}:=[T]_{\mathcal{B}}$ siempre que $\mathcal{B}=\mathcal{C}$.)

g) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2b+c \\ a-4b \\ 3a \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}.$$

h) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2b+c \\ a-4b \\ 3a \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}, \quad \mathcal{C} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}.$$

i) Sea $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ definida por

$$T(p(x)) = xp(x),$$

$\mathcal{B} = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$ $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $v = p(x) = a + bx + cx^2$.

j) Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = A^t$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ y

$$v = A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

k) Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = MA$, donde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ y

$$v = A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

4. Encuentre los vectores coordenados $[v]_{\mathcal{B}}$ y $[v]_{\mathcal{C}}$ de $v \in \mathcal{V}$ con respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, respectivamente. Encuentre la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$. Encuentre la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$. Verifique que $\forall v \in \mathcal{V} : P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}}$ y $\forall v \in \mathcal{V} : P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[v]_{\mathcal{C}} = [v]_{\mathcal{B}}$.

   a)
$$\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}, \quad \mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\}.$$
   en $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$.

   b)
$$\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}, \quad \mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}.$$
   en $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$.

   c) $\mathcal{B} = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\},\ \mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ en $\mathcal{V} = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

5. Verifique que $[T]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ y $[T]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ si

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$T(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2a - 3b \\ a + 4b \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}, \quad \mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\}.$$
   [Sugerencia: Utilice los resultados de los ejercicios $III)\ a), b)$ y $IV)\ a)$]

   b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$T(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2b + c \\ a - 4b \\ 3a \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}, \quad \mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}.$$
   [Sugerencia: Utilice los resultados de los ejercicios $III)\ f), g)$ y $IV)\ b)$]

Puebla, Pue., a 18 de abril de 2011