BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Profr. Carlos Alberto López Andrade
Materia: Álgebra Lineal

Tarea $\# 6$

1. Determine si T es una transformación lineal

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

   $$T(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x - y + z \\ 2x + y - 3z \end{bmatrix}.$$

   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

   $$T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x + 1 \\ y - 1 \end{bmatrix}.$$

   c) $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

   $$T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a + b & 0 \\ 0 & c + d \end{bmatrix}.$$

   d) $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

   $$T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & a - d \\ b - c & 1 \end{bmatrix}.$$

   e) $T : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = AB$ donde B es una matriz fija de tamaño $n \times n$.

   f) $T : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $T(A) = tr(A)$.

   g) $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ definida por

   $$T(a + bx + cx^2) = (a + 1) + (b + 1)x + (c + 1)x^2.$$

   h) $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ definida por

   $$T(a + bx + cx^2) = xp(x).$$

   i) $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ definida por

   $$T(a + bx + cx^2) = (a + 1) + (b + 1)x + (c + 1)x^2.$$

j) $T : \mathcal{MS}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}) = (a-b) + (b-c)x + (c-a)x^2$$

donde $\mathcal{MS}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de las matrices simétricas de tamaño 2×2.

2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal para la cual

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}) \quad \text{y} \quad T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}).$$

Encuentre

$$T(\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}) \quad \text{y} \quad T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}).$$

3. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal para la cual

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = 1 - 2x \quad \text{y} \quad T(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}) = x + 2x^2.$$

Encuentre

$$T(\begin{bmatrix} -7 \\ 9 \end{bmatrix}) \quad \text{y} \quad T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}).$$

4. Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ la transformación lineal definida por

$$T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

a) ¿Cuáles, si es el caso, de las siguientes matrices se encuentran en el $ker(T)$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

b) ¿Cuáles, si es el caso, de las matrices del inciso a) se encuentran en la $Im(T)$?

c) Describa el $ker(T)$ y la $Im(T)$.

5. Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ la transformación lineal definida por $T(A) = tr(A)$.

   a) ¿Cuáles, si es el caso, de las siguientes matrices se encuentran en el $ker(T)$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

   b) ¿Cuáles, si es el caso, de los siguientes escalares se encuentran en la $Im(T)$?

$$0,\ -2\ \frac{1}{\sqrt{2}}$$

   c) Describa el $ker(T)$ y la $Im(T)$.

6. Sea $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} a - b \\ b + c \end{bmatrix}$$

   a) ¿Cuáles, si es el caso, de los siguientes polinomios se encuentran en el $ker(T)$?

$$1 + x,\ x - x^2,\ 1 + x - x^2.$$

   b) ¿Cuáles, si es el caso, de los siguientes vectores se encuentran en la $Im(T)$?

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   c) Describa el $ker(T)$ y la $Im(T)$.

7. Encuentre ya sea la nulidad o bien el rango de T y posteriormente utilice el teorema del rango para encontrar al otro.

   a) Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

b) Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a-b \\ c-d \end{bmatrix}.$$

c) Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = AB$, donde

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $T(A) = tr(A)$.

e) Sea $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} a-b \\ b+c \end{bmatrix}.$$

f) Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = A - A^t$.

Puebla, Pue., a 11 de abril de 2011