Topología y sus aplicaciones 8

Editores literarios
Juan Angoa, Agustín Contreras, Raúl Escobedo, Manuel Ibarra

Cuerpo Académico de Topología y sus Aplicaciones

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Primera edición: 2021
ISBN: 978-607-525-767-9

Dr© Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
4 sur 104, Centro Histórico, Puebla, Pue., CP 72000
Tel.: 01 (222) 229 55 00
www.buap.mx

Dirección General de Publicaciones
2 norte 1404, Centro Histórico, Puebla, Pue., CP 72000
Tels.: 222 246 85 59
222 229 55 00
Ext. 5768
publicaciones.buap.mx
librosdgp@correo.buap.mx

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Rectora: María Lilia Cedillo Ramírez ◆ Secretario General: José Manuel Alonso Orozco ◆ Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura: José Carlos Bernal Suárez ◆ Director de Publicaciones: Luis Antonio Lucio Venegas

Impreso y hecho en México
Printed and made in Mexico

Presentación

Estimado lector, el cuerpo académico de Topología y sus Aplicaciones, de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, publica un nuevo libro, en este caso virtual, de la serie topología y sus aplicaciones; en este volumen incluimos temas de funciones cardinales, teoría de Categorías, teoría de continuos, teoría de conjuntos, topología general, sistemas dinámicos, así como una importante discusión de nuevas líneas de abordar lo continuo. Es de destacar la unión lograda entre autores y editores gracias al lazo que los une, los árbitros y los lectores. Todo esto forma parte de una comunidad interesada en la visión topológica de la matemática, así como de sus métodos y aplicaciones. Nuevamente, nos percatamos con orgullo del gran mosaico humano que se congrega para la realización de este libro: matemáticos de Oaxaca, Tlaxcala, Ciudad de México, Zacatecas, Chiapas y Puebla, nos han apoyado enviando sus trabajos a este comité editorial. Es de destacar, la participación de matemáticos de otros paises, y la ya importante influencia que hemos obtenido en colegas de otros paises que se interesan por este proyecto, tenemos aportaciones de matemáticos de: España, Perú y Estados Unidos; esperamos aumentar nuestra área de influencia, que esto a final de cuentas, expresa la acumulación de nuevas relaciones humanas. También resaltamos que nuestro libro poco a poco se adentra en las vias de la investigación, tenemos artículos que aportan resultados novedosos. Aunque no es el grueso de los artículos los que tienen este perfil, subrayamos la presencia ya de algunos de este tipo, que son expresión de la madurez de este trabajo editorial.

En el estado actual del país y de la universidad, estos esfuerzos, más alla de una actividad acádemica, son una actividad de esperanza y confianza de que la ciencia tiene una carga salvadora. Todo esto nos impele a continuar con este trabajo, ya que su dimensión nacional se ha asegurado, y se trabaja en una influencia internacional. La pemanencia y disciplina de los participantes en este proyecto, así como de una comunidad que se siente interesada en él, nos confirma la gran responsabilidad que se nos ha delegado. Sentimos que hemos asumido la gran responsabilidad, pese a todo, de continuarlo, tal vez no con la misma frecuencia, pero sí con la misma calidad que hasta ahora hemos tenido.

Los editores
Enero de 2021

Contenido

Capítulo 6

Algunos ejemplos de subobjetos clasificadores

Juan Angoa-Amador, Carlos Alberto López-Andrade
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Introducción

Es conocido que en algunas categorías donde es posible encontrar subobjetos clasificadores se puede hacer una teoría de los subobjetos de los objetos en ella que se parece a la de la teoría de conjuntos (**Set**). Así se pueden hacer analogías entre ellas y algunas cualidades que se observan en **Set**. Nuestra intención es desarrollar al detalle dos categorías conocidas en álgebra y describir sus subobjetos clasificadores.

2. Preliminares

Una categoría es una estructura matemática que consiste de dos clases una la llamada clase de objetos de la categoría, otra la clase de los morfismos de la categoría, además de un par de funciones una que asocia a cada morfismo un objeto llamado dominio del morfismo y otra que asocia a cada morfismo un objeto llamado el codominio del morfismo, junto con una función composición que asocia a dos morfismo con codominio y dominio común un tercer morfismo llamado composición de estos morfismos con dominio el primero (de izquierda a derecha) y codominio el segundo, y, dicha composición es asociativa, finalmente a cada objeto le asocia un morfismo llamado el morfismo identidad que es el neutro bajo esta composición.

Formalmente; sea $\mathscr{C}$ una categoría, denotamos por $Mor(\mathscr{C})$ a su clase de morfismos, por $Ob(\mathscr{C})$ su clase de objetos. Si $f, g \in Mor(\mathscr{C})$, $Dom(f)$ y $Cod(g)$ son los objetos dominio y codominio de f y g respectivamente; si $Dom(f) = Cod(g)$, denotamos por fg a su composición y ahora $Dom(fg) = Dom(g)$ y $Cod(fg) = Cod(f)$, si $A \in Ob(\mathscr{C})$, denotamos por Id_A al morfismo identidad y cumple $Dom(I_A) = Cod(I_A) = A$ y si $f, g \in Mor(\mathscr{C})$, $Dom(f) = A$ y $Cod(g) = A$, entonces $fId_A = f$ y $Id_A g = g$, además para $f, g, h \in Mor(\mathscr{C})$, con $Dom(f) = Cod(g)$ y $Dom(g) = Cod(h)$, entonces $(fg)h = f(gh)$. En adelante si $M, N \in Ob(\mathscr{C})$ y $f \in Mor(\mathscr{C})$ con $Dom(f) = M$ y $Cod(f) = N$, denotamos esto con $f : M \to N$.

Veamos las siguientes definiciones:

Definición 2.1. Sea $\mathscr{C}$ una categoría.
1. Sean $M \in Ob(\mathscr{C})$, I un conjunto, para todo $i \in I$ $X_i \in Ob(\mathscr{C})$ y $c_i : M \to X_i$ morfismos de $\mathscr{C}$, la clase $\{c_i : M \to X_i : i \in I\}$ será llamada una M-$\mathscr{C}$-fuente. Análogamente, si $N \in Ob(\mathscr{C})$ y

para todo $i \in I$, $l_i : X_i \to N$ es un morfismo de $\mathscr{C}$, llamaremos a la colección $\{l_i : X_i \to N : i \in I\}$ un N-$\mathscr{C}$-pozo.

2. Una categoría es pequeña si la clase de sus objetos es un conjunto. Sea $\mathscr{D}$ una categoría pequeña y $D : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ un funtor, el funtor D será llamado un diagrama en $\mathscr{C}$.

3. Sean $D : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ un diagrama en $\mathscr{C}$ y $(c_i : M \to D(i))_{i \in Ob(\mathscr{D})}$ una M-$\mathscr{C}$-fuente tal que, si $\alpha : i \to j$ es un morfismo de $\mathscr{D}$, entonces:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "c_i"'] \arrow[dr, "c_j"'] & D(i) \arrow[d, "D(\alpha)"'] \\ & D(j) \end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathscr{C}$. Si todo lo anterior ocurre, diremos que la M-$\mathscr{C}$-fuente es D-natural.

4. Sea $(c_i : M \to D(i))_{i \in Ob(\mathscr{D})}$ una M-$\mathscr{C}$-fuente D-natural, diremos que $(c_i : M \to D(i))_{i \in Ob(\mathscr{D})}$ es un D-límite si dada $(d_i : M' \to D(i))_{i \in Ob(\mathscr{D})}$ otra M'-$\mathscr{C}$-fuente D-natural, existe un único morfismo $k : M' \to M$ tal que

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[rr, "k"'] \arrow[dr, "d_i"'] & & M \arrow[dl, "c_i"'] \\ & D(i) & \end{tikzcd}$$

conmuta.

5. Diremos que $\mathscr{C}$ tiene límites finitos si para toda categoría finita $\mathscr{D}$, i.e., categoría que consiste de un conjunto finito de objetos y un conjunto finito de morfismos, y $D : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtor, existe un D-límite.

Definición 2.2. 1. Sean $\mathscr{C}$ categoría e I un conjunto. Si $\{X_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq Ob(\mathscr{C})$, diremos que la P-$\mathscr{C}$-fuente $(p_\alpha : P \to X_\alpha)_{\alpha \in I}$ es un producto de $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$, si para toda M-$\mathscr{C}$-fuente $(c_\alpha : M \to X_\alpha)_{\alpha \in I}$, existe un único $k : M \to P$ $\mathscr{C}$-morfismo, tal que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "k"'] \arrow[dr, "c_\alpha"'] & & P \arrow[dl, "p_\alpha"'] \\ & X_\alpha & \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $\alpha \in I$.

2. Diremos que $\mathscr{C}$ tiene productos finitos si para todo $\{X_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq Ob(\mathscr{C})$ con I conjunto finito, existe el producto de $\{X_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq Ob(\mathscr{C})$.

Definición 2.3. Sean $f, g : X \to Y$ morfismos de $\mathscr{C}$. Diremos que la pareja (E, i), donde $E \in Ob(\mathscr{C})$ $i : E \to X$ morfismo en $\mathscr{C}$, es un igualador de f y g, si

i) $fi = gi$.

ii) Si $h : M \to X$ tal que $fh = gh$, entonces existe un único $l : M \to E$ tal que el triángulo conmuta en el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "l"'] & X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & Y \\
& E \arrow[u, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Diremos que una categoría tiene igualadores si para todo par de morfismos $f, g : X \to Y$, existe (E, i) un igualador para ellos.

Definición 2.4. Sean $f : X \to Y$, $g : Z \to Y$, decimos que los morfismos $h : N \to Z$ y $t : N \to X$ son un jalador de f y g, si:

1. El diagrama:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "t"'] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, y

2. Si $h' : M \to Z$ y $t' : M \to X$ son tales que:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "t'"'] \arrow[d, "h'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, entonces existe un único $k : M \to N$ tal que:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[drr, "t'"] \arrow[dr, "k"] \arrow[ddr, "h'"'] & & \\
& N \arrow[r, "t"'] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& Z \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Una categoría tiene jaladores si todo par de morfismos con codominio común, tiene un jalador.

Definición 2.5. Un objeto X es un objeto terminal en $\mathscr{C}$ si para todo $M \in Ob(\mathscr{C})$, existe un único morfismo $T_M : M \to X$.

A continuación enunciamos un teorema importante:

Teorema 2.6. [**1**, 12.4 Theorem] Si $\mathscr{C}$ es una categoría, son equivalentes los siguientes enunciados:

1. En $\mathscr{C}$ existen límites finitos.
2. En $\mathscr{C}$ existen productos finitos e igualadores
3. En $\mathscr{C}$ existen jaladores y objetos terminales.

Si tenemos una categoría que cumpla alguna de las propiedades del teorema previo, tal categoría podría tener cierta cercanía a **Set**, que es lo que desarrollaremos en la siguiente sección.

3. Subobjetos clasificadores

Dada una categoría $\mathscr{C}$, y $f : Z \to X$ un morfismo, diremos que f es un monomorfismo si f es cancelable por la izquierda, i.e., si siempre que $fh = ft$, podemos implicar que $h = t$ para toda $h, t \in Mor(Y, Z)$. En una categoría $\mathscr{C}$, se llaman subojetos de X a todo monomorfismo con codominio X (cf. [**2**, Definition 6.9]). Dada la equivalencia del Teorema 2.6, si una categoría tiene límites finitos, entonces tiene jaladores y objetos terminales.

Hechos estos señalamientos, veamos la siguiente definición:

Definición 3.1. Sea $\mathscr{C}$ una categoría con límites finitos. Un subobjeto clasificador Ω es

1. Un monomorfismo $true : 1 \to \Omega$ donde 1 es un objeto terminal y además:

2. Si $f : N \to X$ es un subobjeto de X, entonces existe un único morfismo $\chi_f : X \to \Omega$ tal que:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "T_N"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\ X \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es jalador.

El ejemplo motivador de esta definición es **Set**. Ya que en este caso $1 = \{0\}$, $\Omega = \{0, 1\}$ $true : 1 \to \Omega$ es definida como $true(0) = 0$, y si $f : N \to X$, es un monomorfismo, definimos:

$$\chi_f(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in Imf, \\ 1 & \text{si } y \notin Imf \end{cases}$$

está claro que $T_N(z) = 0$ para todo $z \in N$.

Sólo veamos que

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "T_N"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\ X \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es jalador y que χ_f es única. Para esto, sea $T_{N'} : N' \to 1$, $\alpha : N' \to X$ tal que
$$\begin{tikzcd} N' \arrow[r, "T_{N'}"'] \arrow[d, "\alpha"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\ X \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$
conmuta. Como $\chi_f(\alpha(w)) = 0$ ya que $true(T_{N'}(w)) = true(0) = 0$ y el diagrama conmuta, entonces $\alpha(w) \in Imf$, se puede demostrar que en **Set**, los monomorfismos son funciones inyectivas, luego, dado que $\alpha(w) \in Imf$ existe $n \in N$ tal que $f(n) = \alpha(w)$, dicho n es único, puesto que si existe $n' \in N$ tal que $f(n') = \alpha(w)$ tenemos que $f(n) = f(n')$ pero f es un monomorfismo luego es inyectivo de ahí que, $n = n'$, así, existe un único $n \in N$ tal que $f(n) = \alpha(w)$. Definimos $\overline{\alpha} : N' \to N$ dada por $\overline{\alpha}(w) = n$ para cada $w \in N'$ con $\alpha(w) = f(n)$. El diagrama:

$$\begin{tikzcd} N' \arrow[dr, "\overline{\alpha}"] \arrow[drr, bend left, "T_{N'}"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha"'] & & \\ & N \arrow[r, "T_N"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\ & X \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es conmutativo, en efecto, sólo veamos que $T_N\overline{\alpha} = T_{N'}$ y $f\overline{\alpha} = \alpha$, como $T_N(\overline{\alpha}(w)) = T_N(n) = 0 = T_{N'}(w)$, mientras que $f(\overline{\alpha}(w)) = f(n) = \alpha(w)$ para cada $w \in N'$, tenemos que, $T_N\overline{\alpha}(w) = T_{N'}(w)$

y $f\overline{\alpha}(w) = \alpha(w)$ para cada $w \in N'$. Ahora $\overline{\alpha}$ es única, ya que si α' cumple que $f\alpha' = \alpha = f\overline{\alpha}$, por ser f monomorfismo, $\alpha' = \overline{\alpha}$. Supongase que θ_f cumple que $\theta_f f = trueT_N = 0$. Si $x \in Imf$, existe $n \in N$ tal que $x = f(n)$, luego $\theta_f(x) = \theta_f(f(n)) = trueT_N(n) = 0$, i.e., $\theta_f(x) = 0$, pero si $\theta_f(x) = 1$, $x \notin Imf$, ya que siempre que $x \in Imf$, se cumple que $\theta_f(x) = 0$, así:

$$\theta_f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in Imf, \\ 1 & \text{si } x \notin Imf \end{cases}$$

por tanto $\theta_f(x) = \chi_f(x)$ para cada $x \in X$, luego χ_f es única y en **Set**, existe un subobjeto clasificador.

4. Las categorías Act-M y Act-G

Sea M un monoide, sabemos que X es un conjunto sobre el que actúa M por la derecha, si existe $\psi : X \times M :\to X$ una función (la acción derecha de M sobre X) entre los conjuntos $X \times M$ y X tal que

1. $\psi(x, e) = x$ para todo $x \in X$ y e el neutro de M.
2. Para todo $x \in X$ y para todo $m, n \in M$, se cumple que $\psi(\psi(x, n), m) = \psi(x, nm)$.

Si denotamos por $\psi(x, n) = xn$, tenemos que:

M actúa por la derecha sobre X si existe una operación entre elementos de X con elementos de M tal que

1. Para todo $x \in X$ y e el neutro de M, se cumple que $xe = x$
2. Para todo $x \in X$ y para todo $m, n \in M$, se cumple que $(xn)m = x(nm)$.

Sea X un conjunto y M un monoide, siempre podemos hacer actuar a M sobre X por la derecha, mediante la acción $\psi(x, m) = x$ definida para todo $x \in X$ y $m \in M$. Otro conjunto que acepta una única acción de un monoide arbitrario es el conjunto vacío, ya que existe la función vacía y tal función define una acción de cualquier monoide sobre el conjunto vacío.

Queremos dar una estructura de categoría a este tipo de objetos, los conjuntos con una acción de un monoide fijo por la derecha, así que denotaremos por: **Act**-M a la categoría con objetos los conjuntos con una acción de M por la derecha sobre ellos. Ahora, definamos los morfismos de la categoría, sean $(X, \psi), (Y, \phi) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}M)$ con sus respectivas acciones ψ y ϕ. Sea $f : X \to Y$ una función entre los conjuntos X e Y, diremos que $f \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}M)$ si $f(\psi(x, m)) = \phi(f(x), m)$ para todo $x \in X$ y $m \in M$, en otras palabras, para todo $x \in X$ y $m \in M$ se cumple que $f(xm) = f(x)m$.

No es difícil demostrar que con esta definición **Act**-M es categoría. Ahora veamos un teorema importante.

Teorema 4.1. La categoría **Act**-M, tiene jaladores y objetos terminales.

Demostración. Sean $(X, \psi), (\{*\}, c) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}M)$ donde $c : \{*\} \times M \to \{*\}$ está dada por $c(*, m) = *$ para cada $m \in M$, i.e., $*m = *$ para cada $m \in M$ y sea $\theta \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}M)$ tal que $\theta : (X, \psi) \to (\{*\}, c)$, veamos que $(\{*\}, c)$ es un objeto terminal en **Act**-M, en efecto, como $\theta : X \to \{*\}$ es función tenemos que $\theta(x) = *$ para cada $x \in X$, i.e., θ es una función constante, además si $\tau \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}M)$ tal que $\tau : (X, \psi) \to (\{*\}, c)$ está dada por $\tau(x) = *$ para cada $x \in X$, ya que τ es función entre X y $\{*\}$, entonces $* = \tau(xm) = \tau(x)m = *m$, i.e., $*m = *$ para cada $m \in M$.

Veamos que **Act**-M tiene jaladores, sean $f : (X, \psi) \to (Y, \phi)$ y $g : (Z, \gamma) \to (Y, \phi)$ morfismos de **Act**-M. Primero construimos el objeto $(X \times Z, \psi \times \gamma)$, la acción definida como $(\psi \times \gamma)((x, z), n) = (\psi(x, n), \gamma(z, n))$ (es decir: $(x, z)n = (xn, zn)$) para todo $x \in X$, $z \in Z$ y $n \in M$. No es difícil demostrar que esta función es una acción de M sobre $X \times Z$. Sea $T = \{(x, z) : f(x) = g(z)\}$, en el caso en que $T = \emptyset$ se puede ver que satisface los axiomas de la definición. Si $T \neq \emptyset$, sea $(x, z) \in T$ y $n \in M$, entonces $f(xn) = f(x)n = g(z)n = g(zn)$, así que $(xn, zn) \in T$, pero $(x, z)n = (xn, zn)$, así que $(T, (\psi \times \gamma)|_T) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}M)$. De hecho se puede demostrar que si

$(X,\psi) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}M)$ y $S \subseteq X$ tal que para todo $s \in S$ y todo $n \in M$ se cumple que $sn \in S$, entonces $(S, \psi|_{S\times M}) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}M)$ (aquí $\psi|_{S\times M} : S \times M \to S$ es la restricción de ψ al dominio S).

Ahora definimos $h : T \to X$ como $h(x,z) = x$ y $l : T \to Z$ como $l(x,z) = z$, veamos que

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "h"'] \arrow[d, "l"'] & X \arrow[d, "f"'] \\ Z \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

es un jalador en $\mathbf{Act}$-M. Primero, está claro que $h((x,z)n) = xn = h((x,z))n$ y también que $l((x,z)n) = zn = l((x,z))n$, así que $h, l \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}M)$, además $fh((x,z)) = f(x) = g(z) = gl((x,z))$, de ahí que el diagrama es conmutativo. Sea

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"'] & X \arrow[d, "f"'] \\ Z \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo en $\mathbf{Act}$-M. Definimos $k : T' \to T$ para $t \in T'$, como $k(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ y $f(\alpha(t)) = g(\beta(t))$, entonces $(\alpha(t), \beta(t)) \in T$, está claro que $k(tn) = (\alpha(tn), \beta(tn)) = (\alpha(t)n, \beta(t)n) = (\alpha(t), \beta(t))n = k(t)n$, así que $k \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}M)$. Comprobemos que

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "\alpha"] \arrow[ddr, "\beta"'] & & \\ & T \arrow[r, "h"'] \arrow[d, "l"'] & X \arrow[d, "f"'] \\ & Z \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

es conmutativo, pero $hk(t) = h(\alpha(t), \beta(t)) = \alpha(t)$ y $lk((t)) = l(\alpha(t), \beta(t)) = \beta(t)$ y por tanto es conmutativo. Finalmente veamos la unicidad de k, sea $k' : T' \to T$ tal que $hk'(t) = \alpha(t)$ y $l(k'(t)) = \beta(t)$, si $k'(t) = (x,z)$, entonces $\alpha(t) = h(k'(t)) = x$ y $\beta(t) = l(k'(t)) = z$, luego $k'(t) = k(t)$. $\square$

Si G es un grupo y X un conjunto, una acción de G sobre X por la derecha, es análogamente una función $\psi : X \times G \to X$, tal que: para todo $x \in X$ y e el neutro de G, se cumple que $\psi(x,e) = x$ y para todo $x \in X$ y $m, n \in G$ se cumple que $\psi(x,n)m = \psi(x, nm)$.

También se define una estructura categórica para estos conjuntos, donde los objetos son conjuntos con una acción de G por la derecha en ellos y los morfismos son funciones de conjuntos $f : (X,\psi) \to (Y,\phi)$ tales que $f(\psi(x,n)) = \phi((f(x),n)$.

Los mismos candidatos que en el caso de los monoides serán los objetos terminales y los jaladores para un par de morfismos $f : (X,\psi) \to (Y,\gamma)$ y $g : (Z,\phi) \to (Y,\gamma)$, para así obtener la propiedad: si $\mathbf{Act}$-G es nuestra categoría de conjuntos con una acción por la derecha del grupo G entonces la categoría $\mathbf{Act}$-G tiene un objeto terminal y jaladores.

5. Subobjetos clasificadores en Act-M y en Act-G

Sean $(X,\psi), (Y,\phi) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}G)$ o $(X,\psi), (Y,\phi) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}M)$ y $h : (Y,\phi) \to (X,\psi)$ tal que $h \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}G)$ o $h \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}M)$, si h es monomorfismo, tenemos que h es una función inyectiva. En efecto, sean $y_1, y_2 \in Y$ tales que $h(y_1) = h(y_2)$, definimos $t_1 : Y \to \{y_1\}$ como

$t_1(y) = y_1$ y $t_2 : Y \to \{y_2\}$ como $t_2(y) = y_2$ para todo $y \in Y$. Definimos la acción de G o la de M en $\{y_i\}$ como $y_i g = y_i$ para todo $g \in G$. Veamos que $t_1, t_2 \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}G)$, sea $y \in Y$ y $g \in G$, entonces $t_i(yg) = y_i$ por otro lado $t_i(y)g = y_i g = y_i$, de manera similar se exhibe que $t_1, t_2 \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}M)$. Está claro que $h(t_i(y)) = h(y_i)$ para cada $y \in Y$ y como $h(y_1) = h(y_2)$, entonces $h(t_1(y)) = h(t_2(y))$ para cada $y \in Y$. Así tenemos que $h \circ t_1 = h \circ t_2$ y dado que h es monomorfismo, entonces $t_1 = t_2$, luego $t_1(y) = t_2(y)$, i.e., $y_1 = y_2$, de ahí que h es inyectiva.

Vamos a resumir lo anterior en los resultados del lema siguiente:

Lema 5.1. 1. Sean $\{*\}$ y M monoide (o G grupo), definimos $*g = *$ para cada g en M (o en G) una acción de M (o de G) sobre $\{*\}$, entonces $\{*\}$ es objeto terminal en **Act**-G (o **Act**-M).

2. Si $h : (Y, \phi) \to (X, \psi)$ es monomorfismo en **Act**-M o en **Act**-G, entonces h es inyectiva.

3. En **Act**-M o en **Act**-G existen jaladores.

4. Si $(X, \psi) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}M)$ o $(X, \psi) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}G)$, si $X_0 \subseteq X$ tal que $xg \in X_0$ para todo $g \in M$ o $g \in G$. Entonces $(X_0, \psi|_{X_0 \times M}) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}M)$ o $(X_0, \psi|_{X_0 \times G}) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}G)$.

5. El conjunto $\emptyset$ con la acción vacía es un objeto de **Act**-M o de **Act**-G.

6. Si $(X, \psi), (Y, \psi)$ objetos de **Act**-M o de **Act**-G, entonces $X \times Y$ con la acción $(\psi \times \phi)((x, y), n) = (\psi(x, n), \phi(y, n))$ es un objeto de **Act**-M o de **Act**-G.

7. Dado (X, ψ) objeto de **Act**-M o de **Act**-G un subobjeto de (X, ψ) es una función $h : (Y, \phi) \to (X, \psi)$ inyectiva.

Ahora veamos un objeto clasificador en **Act**-G.

Teorema 5.2. Dado G un grupo, existe un subobjeto clasificador en **Act**-G.

Demostración. El conjunto $1 = \{0\}$ con la acción $c(0, g) = 0$ para cada g en G es un objeto terminal de **Act**-G y el conjunto $\{0, 1\}$ con la acción $\gamma(0, g) = 0$ y $\gamma(1, g) = 1$ para cada $g \in G$, i.e., $0g = 0$ y $1g = 1$ para cada $g \in G$, es un objeto de **Act**-G, veamos que esto último es cierto, $0e = 0$ y $1e = 1$ para e el neutro de G y además $(0g_1)g_2 = 0g_2 = 0 = 0(g_1 g_2)$ y $(1g_1)g_2 = 1g_2 = 1 = 1(g_1 g_2)$, i.e., $(0g_1)g_2 = 0(g_1 g_2)$ y $(1g_1)g_2 = 1(g_1 g_2)$ para cada $g_1, g_2 \in G$, así $(\{0, 1\}, \gamma) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}G)$. Ahora sea $f : (Y, \phi) \to (X, \psi)$ un subobjeto de (X, ψ), debemos definir Ω y un morfismo $\chi_f : X \to \Omega$ para construir un jalador. En este sentido, sea $\Omega = \{0, 1\}$ con la acción γ, definimos $true : 1 \to \Omega$ y $T_Y : Y \to 1$ dadas por $true(0) = 0$ y $T_Y(y) = 0$ para toda $y \in Y$, respectivamente. Además, sea

$$\chi_f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in Imf. \\ 1 & \text{si} \quad x \notin Imf \end{cases}$$

Veamos que χ_f es morfismo. Sea $x \in X$, $g \in G$, primero supongamos que $x \in Imf$, i.e., $x = f(y)$ para algún $y \in Y$, entonces $xg = f(y)g = f(yg)$, de ahí que $xg \in Imf$, por consiguiente, $\chi_f(xg) = 0 = 0g = \chi_f(x)g$, así $\chi_f(xg) = \chi_f(x)g$. Ahora supongamos que $x \notin Imf$, si $xg \in Imf$, entonces $xg = f(y)$ para algún $y \in Y$, luego $f(y)g^{-1} = x$, pero $f(y)g^{-1} = f(yg^{-1})$, de ahí que $x \in Imf$, por tanto $xg \notin Imf$, así que $\chi_f(xg) = 1 = 1g = \chi_f(x)g$, por consiguiente, $\chi_f(xg) = \chi_f(x)g$, en consecuencia $\chi_f \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}G)$. Ya con estas definiciones, resta demostrar que:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "T_Y"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "true"] \\ X \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es jalador. Es fácil ver que el diagrama previo es conmutativo. Ahora si

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "T_N"'] \arrow[d, "f'"'] & 1 \arrow[d, "true"] \\ X \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es conmutativo, entonces $\chi_f(f'(n)) = true(T_N(n)) = 0$, así que $f'(n) \in Imf$, luego existe un único $y \in Y$ tal que $f(y) = f'(n)$, por un argumento similar al dado en el ejemplo en **Set**, ya que f es inyectiva. Definimos $k : N \to Y$, como $k(n) = y$ para cada $n \in N$ con $f'(n) = f(y)$. Veamos que $k \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}G)$, sea $g \in G$, entonces $k(ng) = y_0$ con $f'(ng) = f(y_0)$. Como $f'(n) = f(y)$ tenemos que $f'(ng) = f'(n)g = f(y)g = f(yg)$, entonces $f(yg) = f(y_0)$, otra vez por la inyectividad de f, $yg = y_0$, luego $k(n)g = k(ng)$, por consiguiente, $k \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}G)$. No es difícil mostrar que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "T_N"] \arrow[ddr, "f'"'] & & \\
& Y \arrow[r, "T_Y"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\
& X \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

conmuta. Para la unicidad de k, si $k' : N \to Y$, tal que $fk' = f' = fk$, como f es monomorfismo, tenemos que $k = k'$. Finalmente, veamos la unicidad de χ_f, supongamos que θ_f cumple que:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "T_N"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\
X \arrow[r, "\theta_f"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es jalador. Por la conmutatividad, $\theta_f(f(y)) = true(T_N(y)) = 0$, así que para todo $x \in Imf$, se cumple que $\theta_f(x) = 0 = \chi_f(x)$, por otro lado, si $\theta_f(x) = 1$ y $x \in Imf$ existe $y \in Y$ tal que $x = f(y)$, entonces $0 = true(T_N(y)) = \theta_f(f(y)) = \theta_f(x)$, i.e., $\theta_f(x) = 0$, así que $x \notin Imf$, luego $\theta_f(x) = 1 = \chi_f(x)$, siempre que $x \notin Imf$, por consiguiente, $\theta_f = \chi_f$ y por tanto, existe un subobjeto clasificador en $\mathbf{Act}$-G. □

Ahora, describiremos el subobjeto clasificador en $\mathbf{Act}$-M, tal categoría no cumple que el complemento de la imagen de un morfismo pueda aceptar la acción restringida como acción para así convertirse en objeto de la categoría, así que debemos construir otro objeto.

En otras palabras, sea $(X, \phi) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}M)$, si $S \subseteq X$ tal que para todo $x \in S$ y $n \in M$, se cumple que $xn \in S$, a este tipo de subconjuntos de X se les llama multiplicativamente cerrados, para los que puede suceder que para $z \in X \setminus S$ exista algún $n \in M$ tal que $xn \in S$, notar que en el caso de $(X, \psi) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}G)$, se tiene que para $S \subseteq X$ multiplicativamente cerrado se cumple que $X \setminus S$ también es multiplicativamente cerrado.

Definición 5.3. Sea $I \subseteq M$, diremos que I es un ideal derecho de M si para todo $w \in I$ y para todo $n \in M$, se cumple que $wn \in I$ (cf. [**2**, Definition 2.20]. Denotamos por $\mathcal{I}_M$ a la colección de ideales derechos de M.

Lema 5.4. Existe una acción de M sobre $\mathcal{I}_M$

Demostración. Ahora definamos una acción de M sobre $\mathcal{I}_M$. Sea $m \in M$ e $I \in \mathcal{I}_M$, definimos $Im = \{k \in M : mk \in I\}$. Veamos que es una acción de M sobre $\mathcal{I}_M$. Primero veamos que $Im \in \mathcal{I}_M$, sea $k \in Im$ y $n \in M$, veamos que $kn \in Im$, para esto $m(kn) = (mk)n$, pero $mk \in I$, luego $(mk)n \in I$, por tanto $kn \in Im$. Ahora, si $I \in \mathcal{I}_M$, entonces $Ie = \{k : ek \in I\} = I$, finalmente, sea $n, m \in I$ con $I \in \mathcal{I}_M$, verifiquemos que $(Im)n = I(mn)$. Tenemos que $k \in (Im)n$ si y sólo si $nk \in Im$ si y sólo si $m(nk) \in I$ si y sólo si $(mn)k \in I$ si y sólo si $k \in I(mn)$, por tanto $(Im)n = I(mn)$. □

En el camino de construir un subobjeto clasificador en $\mathbf{Act}$-M, veamos el siguiente lema:

Lema 5.5. Sean $(X,\psi) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}M)$, y $S \subseteq X$ un conjunto multiplicativamente cerrado, entonces:

1. Para todo $x \in X$, el conjunto $\langle S, x\rangle := \{m \in M : xm \in S\} \in \mathcal{I}_M$.
2. La función $\phi_S : X \to \mathcal{I}_M$, definida como $\phi_S(x) = \langle S, x\rangle$ es un morfismo de **Act**-M, donde M actúa sobre $\mathcal{I}_M$ como se definió en el Lema 5.4.

Demostración. 1. Sea $n \in \langle S, x\rangle$ y $m \in M$, por demostrar que $nm \in \langle S, x\rangle$, o sea $x(nm) \in S$, pero $x(nm) = (xn)m$ y como $xn \in S$ entonces $(xn)m \in S$, luego $nm \in \langle S, x\rangle$.

2. Sea $x \in X$ y $n \in M$, por demostrar que $\phi_S(xn) = \phi_S(x)n$, es decir $\langle S, xn\rangle = \langle S, x\rangle n$. Ahora $k \in \langle S, xn\rangle$ si y sólo si $(xn)k \in S$, pero $(xn)k = x(nk)$, luego $x(nk) \in S$, así que $nk \in \langle S, x\rangle$, por tanto $k \in \langle S, x\rangle n$. □

Sea $f : (Y,\psi) \to (X,\phi)$ un morfismo de **Act**-M, está claro que Imf es multiplicativamente cerrado, ya que $f(yn) = f(y)n$. Con estos preliminares podemos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 5.6. En **Act**-M, existe un subobjeto clasificador.

Demostración.

1. Definamos $\Omega = \mathcal{I}_M$ con la acción definida antes. Sea $true : 1 \to \Omega$, definida como $true(0) = M$, $true$ es morfismo ya que $true(0n) = M$, pero $true(0)n = Mn = \{k \in M : nk \in M\} = M$, i.e., $true(0n) = true(0)n$.

2. Ahora, dado $f : (Y,\gamma) \to (X,\psi)$ un monomorfismo de **Act**-M, debemos definir un único morfismo: $\chi_f : X \to \Omega$ de tal manera que

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "T_Y"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\ X \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

sea jalador.

Consideremos $S = Imf$, así que S es multiplicativamente cerrado, luego $\phi_S : X \to \Omega$ definida en el Lema 5.5 es un morfismo de **Act**-M, hagamos $\chi_f = \phi_S$. Primero veamos que el diagrama anterior es conmutativo. Sea $y \in Y$, entonces $\chi_f(f(y)) = \langle S, f(y)\rangle = \{k \in M : f(y)k \in S\}$, es decir $k \in \chi_f(f(y))$ si y sólo si $f(y)k \in Imf$ si y sólo si $f(yk) \in Imf$, lo cual muestra que $\chi_f(f(y)) = M = true(0) = true(T_Y(y)))$.

Sea

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "T_Z"'] \arrow[d, "\alpha"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\ X \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo en **Act**-M. Definamos $\beta : Z \to Y$, para esto notemos que para todo $z \in Z$, como $true(T_Z(z)) = true(0) = M$, entonces $\chi_f(\alpha(z)) = M$, es decir $\langle S, \alpha(z)\rangle = M$, entonces $\alpha(z)e \in Imf$, luego $\alpha(z) \in Imf$, sea $y \in Y$, tal que $\alpha(z) = f(y)$, notar que como f es inyectiva y es única, así que definimos $\beta(z) = y$, por lo que β es función. Veamos que $\beta \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}M)$. Sea $z \in Z$ y $n \in M$, calculemos $\beta(zn) = y_0$, es decir $f(y_0) = \alpha(zn) = \alpha(z)n$, si $y_1 \in Y$, tal que $f(y_1) = \alpha(z)$, entonces $f(y_1)n = f(y_1 n)$, pero $f(y_1)n = \alpha(z)n = \alpha(zn)$, luego $f(y_1 n) = f(y_0)$, luego $y_1 n = y_0$, por tanto $\beta(z)n = \beta(zn)$. Veamos que

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, "T_Z"] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[ddr, "\alpha"'] & & \\
& Y \arrow[r, "T_Y"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\
& X \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Solo resta demostrar que $f(\beta(z)) = \alpha(z)$, pero si $\beta(z) = y$, entonces $f(y) = \alpha(z)$, luego $f(\beta(z)) = f(y) = \alpha(z)$. Veamos la unicidad de β. Sea $\beta' : Z \to Y$, tal que $f\beta' = \alpha = f\beta$, como f es monomorfismo, concluimos que $\beta = \beta'$. Finalmente, veamos que χ_f es única. Sea $\theta : X \to \Omega$ tal que:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "T_Y"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\
X \arrow[r, "\theta"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

sea jalador en **Act**-M.

Sea $x \in X$, por demostrar que $\theta(x) = \langle S, x\rangle = \chi_f(x)$. Observemos que:

1) $xk \in Imf$ si y sólo si $k \in \langle S, x\rangle$ si y sólo si $\langle S, xk\rangle = M$.
2) $k \in \theta(x)$ si y sólo si $\theta(xk) = M$.

En efecto, veamos 1), sea $k \in \langle S, x\rangle$, entonces $xk \in Imf$, como $\chi_f(x) = \langle S, x\rangle$, $\langle S, x\rangle k = \chi_f(x)k = \chi_f(xk) = \langle S, xk\rangle$, pero $\langle S, x\rangle k = \{l \in M : kl \in \langle S, x\rangle\}$, por tanto, para toda $l \in M$, se tiene que $(xk)l \in Imf$, ya que $xk \in Imf$, luego $\langle S, xk\rangle = M$. Si $\langle S, xk\rangle = M$, entonces $(xk)e \in Imf$, luego $xk \in Imf$, por tanto $k \in \langle S, x\rangle$.

Veamos 2), sea $k \in \theta(x)$, $\theta(x)k = \theta(xk) = \{l \in M : kl \in \theta(x)\}$, pero $\theta(x) \in \mathfrak{I}_M$, luego $\theta(xk) = M$. Inversamente, si $\theta(xk) = M$, entonces $\{l \in M : kl \in \theta(x)\} = M$, luego $ke \in \theta(x)$, así que $k \in \theta(x)$.

Ahora, veamos la igualdad $\theta(x) = \langle S, x\rangle = \chi_f(x)$, $k \in \langle S, x\rangle$ si y sólo si $\langle S, xk\rangle = M$ si y sólo si $xk \in Imf$ si y sólo si existe $y \in Y$ tal que $f(y) = xk$, por otro lado, $\theta(f(y)) = \theta(xk) = M$ si y sólo si $k \in \theta(x)$. Y así concluimos que **Act**-M tiene un subobjeto clasificador. □

6. Conclusiones

Resulta muy elaborada la demostración de que las categorías **Act**-M y **Act**-G tienen un subobjeto clasificador, pero esto nos muestra las propiedades comunes que tienen y que en esencia las hace parecerse a la categoría **Set**. El camino para hallar tales analogías resultó muy largo pero lo común es lo suficientemente robusto como para aceptar que se encontró una esencia que antes no era visible. Cabe señalar que toda categoría de pregavillas es un topos y es claro que la categoría **Act**-M es isomorfa a la categoría Set^M con M la categoría monoide. Por lo que, de manera inmediata se tendría que **Act**-M es un topos. Pero creemos que es interesante exhibir un subobjeto clasificador en esta categoría.

Agradecimientos: Nos gustaría agradecer al árbitro por sus valiosos comentarios y sugerencias que contribuyeron significativamente a mejorar la calidad de nuestro manuscrito.

Referencias

[1] Jiří Adámek, Horst Herrlich and George E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories The Joy of Cats*, GNU Free Documentation License, Version 1.2, 2004.

[2] Mati Kilp, Ulrich Knauer and Alexander V. Mikhalev, *Monoids, Acts and Categories*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2000.

[3] Saunders Mac Lane, Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic (A First Introduction to Topos Theory)*, Springer Science+Business Media, New York, 1992.

Correos electrónicos:
`jangoa@fcfm.buap.mx` (Juan Angoa-Amador),
`clopez@fcfm.buap.mx` (Carlos Alberto López-Andrade)