$$= 5(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 5\left(1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) + 2\left(0 - 5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}\right) + 4\left(0 - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\right) + 1\left(0 - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}\right.$$

$$\left. + 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 5(1-5-4) + 2(-20-2) + 4(-4+14) + 1(1+35)$$
$$= -40 - 44 + 40 + 36$$
$$= -8$$

Ejercicio: Calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$
$$= 0A_{11} + 0A_{12} + 0A_{13} + 1A_{14}$$
$$= A_{14}$$
$$= 1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -1\left(0 + 0 + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right)$$
$$= -1(-1)$$
$$= 1 \qquad \det A = 1$$

Ejercicio Calcular el determinante de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

14·03·18

$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$

$= 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 3(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

$= 1\left(5\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\right) + 1\left(2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)$

$-3\left(2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\right)$

$= 1(-2+12) + 1(0) - 3(4-0-2)$

$= 10 - 6$

$= 4$ i.e $\det A = 4$

Teorema (Laplace)

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, el determinante de A es igual a la suma de los productos de los elementos de una de sus filas(columnas) cualesquiera por los correspondientes complementos algebráicos o cofactores. i.e,

$\det A = a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{in}A_{in}$

(desarrollo por los cofactores de la i-ésima fila) o bien,

$\det A = a_{1j}A_{1j} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{nj}A_{nj}$

(desarrollo por los cofactores de la j-ésima columna)

+Ejemplo Calcular.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{(Teorema de laplace)}}{=} a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34}.$

$= 0 + 1A_{32} + 0 + 0$

$= 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= -1\left(1\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)$

$= -(-10+0+6)$

$= -(-4)$

$= 4$

14.03.18.

Ejercicio - Tarea Calcular el determinante de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \det A = 12$$

$$\det A = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43} + a_{53}A_{53}$$
$$= 0 + 1 \cdot A_{23} + 0 + 0 + 0$$
$$= A_{23}$$
$$= (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -\left[3\begin{vmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right]$$
$$= -\left[3\left(2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right) - 2\left(2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\right) + \left(2\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right) - 3(0)\right]$$
$$= -[3(2(-1)) - 2(2(1)) + 2(-1)]$$
$$= -[-6 - 4 - 2]$$
$$= -[-12] = 12$$

15.03.18.

Teorema: Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$. Si $\det A \neq 0$, entonces A es invertible y $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A$ donde la adjunta de A se denota por $\operatorname{adj} A$ y se define como:

$$\operatorname{adj} A = (A_{ij})^t$$

→ Demostración (más adelante)

Ejemplo: Hallar la inversa de $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ si existe.

Solución:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 8 - 4 = 4$$

Como $\det A = 4 \neq 0$ entonces A es invertible.

Luego,

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

3° parcial: 1 ejercicio por Met. Gauss Jordan y uno por adjunta

15·03·18.

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&0\\3&1\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&2\\3&1\end{vmatrix}=-4$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}4&1\\3&1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}4&0\\3&1\end{vmatrix}=-4$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&1\\2&0\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}4&1\\2&0\end{vmatrix}=2$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}4&0\\2&2\end{vmatrix}=8$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\1&1&-4\\-2&2&8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{adj}(A)=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}^{t}=\begin{bmatrix}2&1&-2\\-2&1&2\\-4&-4&8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2&1&-2\\-2&1&2\\-4&-4&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2&1/4&-1/2\\-1/2&1/4&1/2\\-1&-1&2\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1/2&1/4&-1/2\\-1/2&1/4&1/2\\-1&-1&2\end{bmatrix}$$

Ejercicio: Determinar A^{-1} para A del ejemplo, por el mét. Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}4&0&1&1&0&0\\2&2&0&0&1&0\\3&1&1&0&0&1\end{array}\right](-2)\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&-4&1&1&-2&0\\2&2&0&0&1&0\\3&1&1&0&0&1\end{array}\right](1/2)\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&-4&1&1&-2&0\\1&1&0&0&1/2&0\\3&1&1&0&0&1\end{array}\right]$$

15·03·18

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -4 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -3/2 & 1 \end{array}\right] (2) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -3/2 & 1 \end{array}\right] (-1) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -1/2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-1) \\ \\ (-1/2) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] (-1) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 1/4 & 1/2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

→ Propiedades de los determinantes.

P_1) El valor de un determinante no varía si este se transpone.

P_2) Si se cambian entre sí dos filas (o bien dos columnas) de un determinante el valor del determinante sólo cambia de signo, "su valor absoluto no cambia".

→ (Corolario de P_2)

Un determinante que tiene dos filas o dos columnas iguales, es igual a 0

P_3) Si se multiplican todos los elementos de una fila o de una columna de un determinante por un mismo número el valor del determinante queda multiplicado por este número.

P_4) Si todo elemento de la k-ésima columna de un determinante viene dado como la suma de dos sumandos, i.e. $a_{ik} = b_{ik} + c_{ik}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ entonces, el valor del determinante es igual a la suma de dos determinantes, donde cada determinante tiene en la k-ésima columna a

$$\begin{bmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} c_{1k} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{bmatrix}$$ respectivamente.

Una afirmación análoga también es válida para las filas, además este resultado se puede generalizar

→ Corolario: El valor de un determinante no varía si a

-matriz inversa, Gauss, determinantes
determinantes.
-Regla de Cramer.

15.03.18

todos los elementos de una de sus filas o una de sus columnas cualesquiera se suman los elementos correspondientes de una fila paralela multiplicados por un mismo número. → El determinante no varía si hago operaciones elementales en las filas de tipo 3.

22.03.18

P1) Demostración:

$\vdash \det A = \det A^t$

(Por inducción sobre el tamaño de la matriz A)

Si $n=1$, nada hay

Si $n=2$, entonces

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Por otro lado,

$$\det A^t = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

de ahí que, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A^t$

$\therefore \det A = \det A^t$.

Supongamos que el resultado se cumple para $n-1$ y demostremos que se cumple para n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$y \quad A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{i1} & & a_{n1} \\ a_{ij} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{nj} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{in} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & \dots & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & \dots & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & \dots & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

22·03·18

$$M'_{ji} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i-1,1} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{1,j-1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i+1,j-1} & \cdots & a_{n,j-1} \\ a_{1,j+1} & \cdots & a_{i-1,j+1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{n,j+1} \\ a_{1n} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i+1,n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Por hipotesis inductiva

$M_{ij} = M'_{ji}$ para cada $i,j \in \{1, \dots, n\}$

luego, $\det A^t = a'_{1i} A'_{1i} + \dots + a'_{ji} A'_{ji} + \dots + a'_{ni} A'_{ni}$

(desarrollo de los elementos de la i-ésima columna).

Pero $\det A^t = a_{i1} (-1)^{1+i} M'_{1i} + \dots + a_{ij} (-1)^{j+i} M'_{ji} + \dots + a_{in} (-1)^{i+n} M'_{ni}$

$= a_{i1} (-1)^{i+1} M_{i1} + \dots + a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij} + \dots + a_{in} (-1)^{i+n} M_{in}$

$= \det A$ (teorema de laplace)

$\therefore \boxed{\det A^t = \det A.}$

⇒ P2)

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

A es una matriz con dos filas idénticas.

Sea B la matriz que se obtiene de la matriz intercambiando la fila i-ésima por la j-ésima

i.e, $B = A$.

entonces: $\det A = \det B \overset{\text{propiedad 2)}}{=} -\det A$

$\Rightarrow \det A = -\det A$

$\Rightarrow \det A = 0$

→ Lema *

Sea B la matriz que se obtiene de A reemplazando la i-ésima fila de A por la fila

$[b_{i1} \; b_{i2} \dots b_{in}]$ Entonces

$\det B = b_{i1} A_{i1} + b_{i2} A_{i2} + \dots + b_{in} A_{in}$

→ Demostración:

Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ luego

$B =$

22·03·18

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \leftarrow \text{i-ésima fila}$$

$$\Rightarrow \det B = b_{i1}B_{i1} + \dots + b_{ij}B_{ij} + \dots + b_{in}B_{in}$$

$$= b_{i1}(-1)^{i+1}M^A_{i1} + \dots + b_{ij}(-1)^{i+j}M^A_{ij} + \dots + b_{in}(-1)^{i+n}M^A_{in}$$

$$= b_{i1}A_{i1} + \dots + b_{ij}A_{ij} + \dots + b_{in}A_{in}$$

$$\therefore \det B = b_{i1}A_{i1} + \dots + b_{ij}A_{ij} + \dots + b_{in}A_{in}$$

02·04·18

$\Rightarrow$ B3)

Sea $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{F})$ y sea B la matriz que se obtiene a partir de la matriz multiplicando por el término constante λ en la i-ésima fila, es decir,

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{ij} & \cdots & \lambda a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Por el lema anterior.

$$\det B = \lambda a_{i1}A_{i1} + \dots + \lambda a_{ij}A_{ij} + \dots + \lambda a_{in}A_{in}$$

$$\Rightarrow \det B = \lambda(a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{in}A_{in})$$

i.e. $\det B = \lambda \det A$

o bien:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{ij} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\lambda \neq 0)$$

CP3 → Considérese:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{i-ésima fila} \rightarrow \\ \\ \text{j-ésima fila} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{ij} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Omega$$

2·04·18

Obsérvese que la i-ésima y j-ésima fila del determinante son proporcionales. Luego:

$$\Omega = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda 0 = 0$$

$\therefore \Omega = 0$

→ Corolario. Sea $A=(a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ y sea B la matriz que se obtiene a partir de A reemplazando la i-ésima fila por la suma de sí misma con un múltiplo escalar de la j-ésima fila de A, luego:

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & \cdots & a_{ij}+\lambda a_{jj} & \cdots & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(Aunque se hagan operaciones elementales en las filas del tipo 3, el valor del determinante no va a cambiar)

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{j1} & \cdots & \lambda a_{jj} & \cdots & \lambda a_{jn} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\to 0} = \det A.$$

→ Teorema: Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ entonces

$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = 0$

Para cada i, k, $i \neq k$

$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \dots + a_{nj}A_{nk} = 0$ para cada j, k, $j \neq k$

Demostración:

Sea B la matriz que se obtiene a partir de A reemplazando la k-ésima fila de A por la i-ésima fila de A, i.e.

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow 0 = \det B = a_{i1}A_{k1} + \dots + a_{ij}A_{kj} + \dots + a_{in}A_{kn}$

(desarrollo por los cofactores de la k-ésima fila)

$\therefore a_{i1}A_{k1} + \dots + a_{ij}A_{kj} + \dots + a_{in}A_{kn} = 0.$

→ Ejercicio. Sea $n \geq 2$ y sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ una matriz triangular superior (triangular inferior). Demostrar que $\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

Demostración

Sea A la matriz de la forma

$$A \begin{bmatrix} a & a_{1j} & a_{1n} \\ 0 & a_{ij} & a_{in} \\ 0 \ldots & 0 \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

+ P(2) es verdadera

Sea $n=2$, entonces $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - 0 = a_{11} a_{22}$

es decir, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22}$, así el resultado se cumple para $n=2$

Supongamos que el resultado se cumple para n y demostremos que es cierto para $n+1$

Entonces $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2,n+1} \\ 0 & 0 & a_{ii} & a_{i,n+1} \\ 0 & \ldots 0 & \ldots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11}$

$$= a_{11} (-1)^{1+1} M_{11} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2,n+1} \\ 0 & a_{33} & a_{3,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 \ldots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix}$$

(H I)

$$= a_{11} (a_{22} a_{33} \cdots a_{n+1,n+1})$$

$$= \prod_{i=1}^{n+1} a_{ii} \quad (l.q.q.d)$$

Por lo tanto, queda establecido el resultado

→ Teorema Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ con $\det A \neq 0$ entonces A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

Demostración

+ $A \operatorname{adj} A = (\operatorname{adj} A) A = \det A (I_n)$

Ya que si esto se cumple, tendremos que

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A\right) = \left(\frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A\right) A = I_n$$

02 04 18

$\Rightarrow \frac{1}{\det A}$ adj A actúa como la inversa de A. Por la unicidad de la inversa $A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ adj A.

Veamos que $A \operatorname{adj} A = (\operatorname{adj} A) A = I_n$

La i-ésima fila de la matriz A es el vector fila $[a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}]$. Por otro lado.

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{j1} & A_{j2} & \cdots & A_{jn} \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{cccc} & & j\text{-ésima columna} & \\ & \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{j1} & A_{n1} \\ A_{12} & & A_{j2} & A_{n2} \\ A_{1n} & & A_{jn} & A_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Sea $A \operatorname{adj} A = C$ donde $C = (C_{ij})$

$$C_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$$

$$C_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \det A & \text{si } i = j \end{cases}$$

entonces
$$A \operatorname{adj} A = C = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix} = \det A \, I_n$$

Así $A \operatorname{adj} A = \det A \, I_n$

De manera análoga se prueba que
$$(\operatorname{adj} A) A = \det A \, I_n$$
Con lo cual concluimos la prueba

→ Regla de Cramer:

Sea $AX = b$ un sistema de n-ecuaciones lineales con n-incógnitas. Si $D = \det A \neq 0$ entonces el sistema $AX = b$ tiene solución única dada por

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad j = 1, \ldots, n$$

Donde
$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (*)$$

con $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $\quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

Demostración:

Como $AX = b$ esto es equivalente

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

02·04·18

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Sea D_j como en (*) entonces

j-ésima fila.

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

04·04·18.

$$= \sum_{j'=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j'}x_{j'} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2j'}x_{j'} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{nj'}x_{j'} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j'=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j'} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2j'} & a_{2,j+1} & & a_{2,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{nj'} & a_{n,j+1} & & a_{nn} \end{vmatrix} x_{j'}$$

$$= 0 + \dots + 0 + Dx_j + 0 + \dots + 0.$$ ya que para todos los demás valores, habría dos columnas iguales y el det = 0

$$= Dx_j$$

luego, $D_j = Dx_j$

$\Rightarrow x_j = \frac{D_j}{D}$ donde $D = \det A \neq 0$

→ Ejemplo: Resolver el sistema lineal usando la regla de Cramer, si es posible.

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

-Solución:

Como $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 3(-5) - 2(5) + 4(5) = -15 - 10 + 20$

$= -5 \neq 0$

02·04·18

$\Rightarrow \frac{1}{\det A}$ adj A actúa como la inversa de A. Por la unicidad de la inversa $A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ adj A.

Veamos que $A \operatorname{adj} A = (\operatorname{adj} A) A = I_n$

La i-ésima fila de la matriz A es el vector fila $[a_{i1} \; a_{i2} \; \dots \; a_{in}]$. Por otro lado.

$$\operatorname{adj} A = \begin{array}{r} \\ \text{j-ésima fila} \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{j1} & A_{j2} & \dots & A_{jn} \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} & \text{j-ésima columna} & \\ & \downarrow & \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{j1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & \dots & A_{j2} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & & A_{jn} & & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Sea $A \operatorname{adj} A = C$ donde $C = (C_{ij})$

$$C_{ij} = a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \dots + a_{in} A_{jn}$$

$$C_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \det A & \text{si } i = j \end{cases}$$

entonces $A \operatorname{adj} A = C = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix}$

$= \det A \, I_n$

Así $A \operatorname{adj} A = \det A \, I_n$

De manera análoga se prueba que

$$(\operatorname{adj} A) A = \det A \, I_n$$

Con lo cual concluimos la prueba

→ Regla de Cramer:

Sea $AX = b$ un sistema de n-ecuaciones lineales con n-incógnitas. Si $D = \det A \neq 0$ entonces el sistema $AX = b$ tiene solución única dada por.

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad j = 1, \dots, n$$

Donde $D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & a_{nn} \end{vmatrix}$ (*)

con $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

Demostración:

Como $AX = b$ esto es equivalente.

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

02-04-18

$\cdots$

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n$

Sea D_j como en (*) entonces

j-ésima fila.

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

04-04-18.

$$= \sum_{j'=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1j'}x_{j'} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & a_{2j'}x_{j'} & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{nj'}x_{j'} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j'=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1j'} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & a_{2j'} & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{nj'} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} x_{j'}$$

$= 0 + \ldots + 0 + D x_j + 0 + \ldots + 0.$ ← ya que para todos los demás valores, habría dos columnas iguales y el det = 0

$= D x_j$

Luego, $D_j = D x_j$

$\Rightarrow x_j = \frac{D_j}{D}$ donde $D = \det A \neq 0$

→ Ejemplo: Resolver el sistema lineal usando la regla de Cramer, si es posible.

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

-Solución:

Como $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 3(-5) - 2(5) + 4(5) = -15 - 10 + 20 = -5 \neq 0$

FIRST CLASS

04·04·18.

i.e. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ entonces, el sistema tiene solución única y está dada por $x_1 = \frac{D_1}{D}$, $X_2 = \frac{D_2}{D}$, $X_3 = \frac{D_3}{D}$

donde $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

luego,

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{1}{5}\left[1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 1(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right]$$

$$= -\frac{1}{5}[-5+6] = -\frac{1}{5}$$

i.e. $X_1 = -\frac{1}{5}$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{1}{5}\left[2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right]$$

$$= -\frac{1}{5}[-2(-1) - 1(2)] = -\frac{1}{5}[0] = 0$$

i.e. $x_2 = 0$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{1}{5}\left[\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right]$$

$$= -\frac{1}{5}[5+(-7)] = \frac{2}{5}.$$

$X_3 = \frac{2}{5}$

∴ El vector columna solución del sistema lineal dado es

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 0 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

→ Ejercicio: Resolver el sistema lineal por regla de cramer, si es posible.

$$5x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$
$$3x_1 + 2x_2 = 3$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

∴ Solución

Como $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0$

$$= -3(1) + 2(-6) = -15 \neq 0$$

i.e. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ entonces el sistema tiene solución única y está dada por $x_1 = \frac{D_1}{D}$, $x_2 = \frac{D_2}{D}$, $x_3 = \frac{D_3}{D}$

donde $D = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

04 04 18

Llego.

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-15} = -\frac{1}{15}\left[0 - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right]$$

$$= -\frac{1}{15}\left[-(-3) - (8)\right] = -\frac{1}{15}(-5) = \frac{1}{3}$$

i.e. $x_1 = \frac{1}{3}$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-15} = -\frac{1}{15}\left[\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 0 - \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}\right]$$

$$= -\frac{1}{15}\left[-3 - (12)\right] = 1$$

i.e. $x_2 = 1$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-15} = -\frac{1}{15}\left[\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}\right]$$

$$= -\frac{1}{15}\left[-8 - (12)\right] = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

El vector columna solución es:

$$\begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

→ Ejercicio:

Resolver los siguientes sistemas lineales por regla de Cramer si es posible, sino es posible resolver el sistema por el método anterior.

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 14. \end{aligned}$$

a) Solución:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

$= -2 - 3(1) + 5(1) = 0$

i.e. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$, el sistema no se puede resolver por el método de Cramer, veamos con el método de Gauss-Jordan.