Prof. Carlos Alberto López Andrade
Materia: Matemáticas Básicas+Problemas de Matemáticas Básicas

---

Tarea # 9

Parte A

Resolver los ejercicios $1, 2, 3(b), (c), (d), 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 27(a), (b), (c)$ del bloque de Ejercicios 4 de la sección 3.4 (páginas 130,131,132) del Capítulo 3 **Números Reales** del libro de texto Matemáticas Elementales [1].

[1] J. Angoa, A. Contreras, et. al., Matemáticas Elementales, Dirección de Fomento Editorial, BUAP, Segunda Edición, 2010.

Parte B

I) Sea S un conjunto acotado de $\mathbb{R}$ y sea S_0 un subconjunto no vacío de S. Demostrar que

$$\inf S \leq \inf S_0 \leq \sup S_0 \leq \sup S.$$

II) Sea S un conjunto acotado no vacío de $\mathbb{R}$.

a) Sea $a > 0$ y sea $aS := \{as : s \in S\}$. Demostrar que:

$$\inf(aS) = a \inf S \text{ y } \sup(aS) = a \sup S.$$

b) Sea $b < 0$ y sea $bS := \{bs : s \in S\}$. Demostrar que:

$$\inf(bS) = b \sup S \text{ y } \sup(bS) = b \inf S.$$

III) Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$ que están acotados, y sea

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Demostrar que:

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \text{ y que } \inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

Puebla, Pue., a 10 de noviembre de 2020

Ejercicios 4.

1. ¿Cuál es el máximo de $(2,3) \cup \{4\}$? ¿Cuál es el supremo?

2. Demuestre que si $A \subset \mathbb{R}$, x_0 es una cota superior de A y $y > x_0$, entonces y también es una cota superior de A.

3. Sean I, J dos intervalos tales que $I \cap J \neq \varnothing$.

   (a) Probar que $I \cap J$ es un intervalo que sí tiene más de un punto.

   (b) Dé un ejemplo que muestre que $I \cap J$ puede ser un conjunto de un solo punto.

   (c) Suponga que I y J son intervalos abiertos y acotados. Probar que $I \cap J$ es un intervalo abierto acotado.

   (d) Dar un ejemplo de intervalos semi-abiertos I y J tales que $I \cap J$ sea un intervalo cerrado.

4. Sean $A = (a,b)$ y $B = [a,b]$, donde $a < b$. Demuestre que $a = \operatorname{ínf} A = \operatorname{ínf} B$.

5. Si $\sup A = \sup B$ e $\operatorname{ínf} A = \operatorname{ínf} B$. ¿Es cierto que $A = B$?

6. Si $\sup A = \operatorname{ínf} A$. ¿Qué puede decir acerca del conjunto A?

7. Si $A \neq \varnothing$ y acotado tal que $\operatorname{ínf} A > 0$, entonces pruebe que $\sup\{\frac{1}{a} : A\} = \frac{1}{\operatorname{ínf} A}$

8. Demuestre que el ínfimo de un conjunto A no necesariamente es un elemento del conjunto A (Dé un ejemplo).

9. Demuestre que el ínfimo de un conjunto de cotas inferiores de $\varnothing$ es $\mathbb{R}$, pero $\varnothing$ no tiene ínfimo.

10. ¿Tiene mínimo un conjunto finito? ¿Cuál sería?

11. Pruebe que $0 = \sup \mathbb{R}_-$, pero que $\mathbb{R}_-$ no tiene ínfimo.

12. Compruebe que $\mathbb{R}_+$ no tiene supremo ¿tiene ínfimo?

13. Demuestre que el conjunto $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ tiene ínfimo pero no tiene mínimo.

14. Demuestre que $A \subseteq \mathbb{R}$ tien a lo más un máximo, tiene a lo más un mínimo y tiene a lo más un ínfimo.

15. Si A y B están acotados superiormente, demuestre que

$$A \cup B \quad \text{y} \quad A \cap B \text{ están acotados superiormente.}$$

16. Si $A \neq \varnothing \neq B$ y A y B están acotados superiormente, entonces

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A,\, \sup B\}.$$

17. Si $A \neq \varnothing \neq B$ y A y B están acotados superiormente y $A \cap B \neq \varnothing$, entonces
$$\sup(A \cap B) \leq \text{mín}\{\sup A,\, \sup B\}.$$

18. Si $A \neq \varnothing \neq B$, acotados superiormente y $A \subseteq B$, entonces

$$\sup A \leq \sup B.$$

19. Si $A \neq \varnothing \neq B$, acotados inferiormente y $A \subseteq B$, entonces

$$\text{ínf}\, A \geq \text{ínf}\, B.$$

20. Si A está acotado, existen $a_1,\, a_2 \in \mathbb{R}$ tales que $A \subseteq [a_1,\, a_2]$.

21. Si A y B están acotados, ¿qué puede decir de $A - B$?

22. A acotado superiormente $\Leftrightarrow \mathbb{R} - A$ acotado inferiormente, ¿es siempre verdadera?

23. Demuestre el Teorema 3.4.7

24. Demuestre el Corolario 3.4.8

25. Demuestre el Teorema 3.4.9

26. Sean $A, \subseteq \mathbb{R}$ y $-A = \{-a : a \in A\}$ Demuestre que

    (a) A está acotado inferiormente sí y solo sí $-A$ está acotado superiormente

    (b) $x_0 = \text{ínf}\, A$ sí y solo sí $-x_0 = \sup(-A)$

    (c) $x_0 = \text{mín}\, A$ sí y solo sí $-x_0 = \max(-A)$

27. Describir los siguiente subconjuntos de $\mathbb{R}$ y cuando existan dé el ínfimo y el supremo y de ser posible discuta la geometría del conjunto

    (a) $\{x \in \mathbb{R} |\, |x+3| < 4\}$

    (b) $\{x \in \mathbb{R} |\, |x-1| < \frac{1}{x}\}$

    (c) $\{x \in \mathbb{R} |\, |1-2x| < x+1\}$

    (d) $\{x \in \mathbb{R} |\, |x^3| < 3\}$