BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Profr. Carlos Alberto López Andrade
Materia: Matemáticas Básicas+Problemas de Matemáticas Básicas

---

Tarea $\#\ 8$ *Números Reales*

Parte I

Resolver todos los ejercicios del bloque de Ejercicios 1 de la sección 3.2 (páginas 88, 89 y 90) del Capítulo 3 **Números Reales** del libro de texto Matemáticas Elementales [1].

Parte II

Resolver los ejercicios $1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$ y 22 del bloque de Ejercicios 2 de la sección 3.3 (páginas 105, 106 y 107) del Capítulo 3 **Números Reales** del libro de texto Matemáticas Elementales [1].

[1] J. Angoa, A. Contreras, et. al., Matemáticas Elementales, Dirección de Fomento Editorial, BUAP, Segunda Edición, 2010.

Parte III

I) Resuelva las siguientes inecuaciones lineales:

a) $4x + 1 < 2x + 3$,
b) $11x - 7 < 4x + 2$.

II) Resuelva las siguientes inecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 > 3x + 4$,
b) $x^2 - 5x + 6 < 0$,
c) $2x^2 - x > 10$,
d) $3x^2 < 7x - 4$.

III) Resuelva las siguientes inecuaciones:

a) $1 < x^2 < 4$,
b) $\frac{1}{x} < x$,
c) $\frac{3x-2}{x+1} < 4$,
d) $\frac{4}{14x} < \frac{2}{1-x}$.

Puebla, Pue., a 14 de octubre de 2020

El conjunto solución de $ax^2+bx+c=0$ es el conjunto vacío

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} < 0$$

o bien, el conjunto solución de $ax^2+bx+c=0$ es el conjunto

$$\left\{ -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}},\ -\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \right\}.$$

Ejercicios 1.

1. Demuestre que si a, b, $c \in \mathbb{R}$ entonces:

    a) $a - b = -(b-a)$.
    b) $(a+b)(a-b) - a(a-b) + b(b-a) = 0$.
    c) $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0$.
    d) $(-a)(c-d) = ad - ac$.
    e) Si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$ y $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$.
    f) $a^{-1} = 1 \Rightarrow a = 1$.
    g) $(-a)^2 = a^2$.
    h) $(ab)^2 = a^2b^2$.
    i) $-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{(-a)}{b} = \frac{a}{(-b)}$.
    j) $1^{-1} = 1$.
    k) $-0 = 0$.
    l) Demuestre que 0 es el único real tal que $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = a$ y que 1 es el único real tal que $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = a$.
    m) $a > 0$, $b > 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
    n) Si $a > 0$, $b > 0$ ¿Cuándo $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$?.

ñ) Si $b \neq 0$, $c \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

o) Si $b \neq 0$, $c \neq 0$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

p) ¿Cuándo $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$.

2. Halle el conjunto solución de las siguientes ecuaciones

   a) $\frac{3x}{2} + (x - 5) = 0$.

   b) $\frac{x-4}{x} + \frac{x^{-1}}{3} = -2$.

   c) $x^{-1}(x - 3) + x(2x^{-1} + 5) = 9$.

   d) $\frac{(3-2x)^{-1}}{x^{-1}} + \left[\frac{x}{3-2x}\right]^{-1} = 4$.

   e) $(x - 7)x^{-1} + (x^{-1} - 7)x = 0$.

3. Halle la base de un rectángulo de altura 7cm y cuya área es el tripe de la longitud de su perímetro.

4. Un padre de familia de 22 años tiene un hijo de 2. ¿Dentro de cuánto tiempo la edad del padre será el triple de la del hijo?.

5. Demuestre:

$$b > 0 \text{ y } a < 0 \text{ tal que } a^2 = b \Leftrightarrow a = -\sqrt{b}.$$

6. Demostrar que existen números reales a y b $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

7. Cuál o cuáles de las afirmaciones siguientes es verdadera:

   a) $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$.

   b) $a^2 = b^2 \Rightarrow a = -b$.

   c) $a^2 = b^2 \Rightarrow a^3 = b^3$ $(a^3 = a^2 \cdot a)$.

8. Demostrar que $a^3 = 1 \Leftrightarrow a = 1$.

9. Demostrar que $a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$.

10. Hallar el error en la "demostración" de la afirmación:

    Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $a = 0$.

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{R} \quad &\Rightarrow \quad a^2 = a^2 \\ &\Rightarrow \quad a^2 - a^2 = a^2 - a^2 \\ &\Rightarrow \quad (a-a)(a+a) = a(a-a) \\ &\Rightarrow \quad a + a = a \\ &\Rightarrow \quad a = 0 \end{aligned}$$

§3

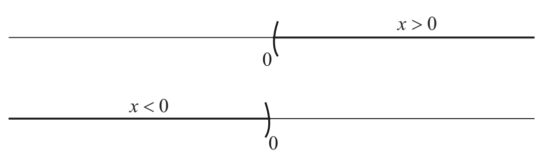
3.3. Consecuencias de los Axiomas de Orden

En esta sección demostraremos algunas consecuencias de los axiomas de orden, ya enunciados antes, pero previamente comentaremos la llamada recta numérica.

Un auxiliar en la solución de problemas matemáticos, es la descripción gráfica del problema. Así pues, en los conjuntos el uso de diagramas, permitía entender el problema con mayor facilidad.

En el caso de los números reales, usaremos una recta "horizontal", como descripción de este conjunto (a la que llamaremos **recta numérica**), en la que la propiedad $x < y$ para números, significará geométricamente que el punto correspondiente al número x está a la "izquierda" del punto correspondiente al número y.

Así, si queremos describir todos lo números mayores que cero, estos formarán la semirrecta de la recta numérica (sin incluir al cero) que se extiende a la derecha del punto correspondiente al cero. Para menores que cero, será la semirrecta complementaria, sin incluir el punto inicial.



Como en cualquiera de los cuatro casos obtenemos que:

$$|xy| = |x||y|.$$

podemos concluir que: $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |xy| = |x||y|.$ ■

Ejercicios 2.

1. ¿Es cierto que si $a = b$ y $c < d \Rightarrow a - d < b - c$?
2. ¿Es cierto que si $a = b$ y $c < d \Rightarrow a - c < b - d$?
3. Demuestre: no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que si $c > 0$, entonces $x^2 + c = 0$.
4. Si $0 < a < b$ demuestre: $a < \sqrt{a\,b} < \frac{a+b}{2} < b$.

   A $\sqrt{ab}$ se le llama el promedio geométrico de a y b y a $\frac{a+b}{2}$ se le llama el promedio aritmético de a y b.
5. Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 = b$.
6. Demuestre que no existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq z\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
7. Demuestre que no existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq z\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
8. Demuestre $-1 < 0$.
9. Determinar cuáles son los números reales que satisfacen:

   a) $|x^2 - 6x - 2| = 0$.
   b) $|x^2 + 1| = 0$.
   c) $|4x - 6| = 3x - 7$.
10. Demostrar que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:

    a) $|-a| = |a|$.
    b) $\sqrt{a^2} = |a|$.
    c) $|a - b| = |b - a|$.
    d) $|a^2| = |a|^2$.
    e) $|a - b| \leq |a| + |b|$
    f) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.
    g) $a \neq 0$, $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$.
    h) $b \neq 0$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

11. Si $x,\, y \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces

    a) Si $x,\, y$ tienen igual signo, entonces $xy \in \mathbb{R}_+$.

    b) $x,\, y \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow xy,\, x + y \in \mathbb{R}_+$.

    c) Si $x,\, y$ tienen signos contrarios, entonces $xy \in \mathbb{R}_-$.

    d) $x,\, y \in \mathbb{R}_- \Rightarrow\; x + y \in \mathbb{R}_-$.

12. Demostrar que $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$

13. ¿Existe $x \in \mathbb{R}$ que sea solución de la ecuación $x^6 + 2x^2 + 1 = 0$? ¿Por qué?

14. Sea $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Demostrar que si $x\ \frac{1}{x} < 2$, entonces $x < 0$

15. Pruebe que si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a}$.

16. Pruebe que si $b > a$ y $c > 0$, entonces $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b}$.

17. Si $x \neq 2$, ¿es cierto que los siguientes números están en $\mathbb{R}_+$?

    a) $\frac{x^2}{|x-2|}$, *c*) $\frac{x+2}{|x-2|}$, *e*) $\frac{x-2}{|x-2|}$,

    b) $\frac{x}{|x-2|}$, *d*) $\frac{1}{|x-2|}$,

18. Demuestre que si $a \leq r \leq a$, entonces $r = a$.

19. Si $c < 0$, ¿existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq c$ y $a \geq -c$

20. (a) Niegue ambos lados de la bicondicional:

$$a^2 < b \Leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$$

    ¿Qué teorema obtiene?

(b) Niegue ahora ambos lados de la bicondicional:

$$a^2 < b \Longleftrightarrow a > \sqrt{b} \quad \vee \quad a < -\sqrt{b}$$

¿Qué teorema obtiene?

21. Probar los Teoremas 3.3.10 y 3.3.12.

22. Probar que

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x|^2 = x^2$$

.