
Tarea # 8

1) Encuentre la matriz $[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ de la transformación lineal $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ con respecto a las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} de \mathcal{V} y \mathcal{W} respectivamente. Además verifique que $[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{C}}$ para cada $v \in \mathcal{V}$.

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a - 3b \\ a + 4b \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

($[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} := [T]_{\mathcal{B}}$ siempre que $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.)

b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a - 3b \\ a + 4b \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

c) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a - 3b \\ a + 4b \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

d) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a + 2b \\ -a \\ b \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

e) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a - b + c \\ 2a + b - 3c \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

f) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2b + c \\ a - 4b \\ 3a \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

($[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} := [T]_{\mathcal{B}}$ siempre que $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.)

g) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2b + c \\ a - 4b \\ 3a \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

h) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2b + c \\ a - 4b \\ 3a \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

i) Sea $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ definida por

$$T(p(x)) = xp(x),$$

$$\mathcal{B} = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\} \quad \mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\} \quad \text{y} \quad v = p(x) = a + bx + cx^2.$$

j) Sea $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = A^t$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ y

$$v = A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

k) Sea $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = MA$, donde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\} \quad \text{y}$$

$$v = A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

II) Sean $\mathcal{W} = \text{gen}(\{e^{2t}, e^{2t} \cos t, e^{2t} \sin t\}) \subseteq \mathcal{D}$ y $D : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ el operador derivación.

a) Encuentre la matriz de D con respecto a la base

$$\mathcal{B} = \{e^{2t}, e^{2t} \cos t, e^{2t} \sin t\}.$$

b) Calcule la derivada de $f(t) = 3e^{2t} - e^{2t} \cos t + 2e^{2t} \sin t$ de manera indirecta y verifique que concuerda con $f'(t)$ al calcularla de manera directa.

III) Sean $\mathcal{W} = \text{gen}(\{\cos t, \sin t, t \cos t, t \sin t\}) \subseteq \mathcal{D}$ y $D : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ el operador derivación.

a) Encuentre la matriz de D con respecto a la base

$$\mathcal{B} = \{\cos t, \sin t, t \cos t, t \sin t\}.$$

b) Calcule la derivada de $f(t) = \cos t + 2t \cos t$ de manera indirecta y verifique que concuerda con $f'(t)$ al calcularla de manera directa.

IV) Sean $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ y $S : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ transformaciones lineales, \mathcal{B}, \mathcal{C} y \mathcal{D} bases para \mathcal{U}, \mathcal{V} y \mathcal{W} respectivamente. Calcule $[S \circ T]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}}$ de dos maneras: primera, encuentre $S \circ T$ de manera directa para posteriormente calcular su matriz, y segunda, determine las matrices de S y T por separado y multiplíquelas.

a) $T : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix},$$

$S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$S\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a - 2b \\ 2a - b \end{bmatrix},$$

$\mathcal{B} = \{1, x\}$ y $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \{e_1, e_2\}$.

b) $T : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ definida por $T(p(x)) = p(x + 1)$, $S : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ definida por $S(p(x)) = p(x + 1)$, $\mathcal{B} = \{1, x\}$ y $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \{1, x, x^2\}$.

v) Determine si la transformación lineal T es invertible considerando su matriz con respecto a las bases estándar. Si T es invertible determinar T^{-1} .

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = a + (a + b)x.$$

b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2b + c \\ a - 4b \\ 3a \end{bmatrix}.$$

c) $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = A^t$.

d) $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} 2a - b \\ a + b - 3c \\ c - a \end{bmatrix}.$$

e) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a + b + c & b - 2c \\ b - 2c & a - c \end{bmatrix}.$$

VI) Encuentre los vectores coordenados $[v]_{\mathcal{B}}$ y $[v]_{\mathcal{C}}$ de $v \in \mathcal{V}$ con respecto a las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} , respectivamente. Encuentre la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ de \mathcal{B} a \mathcal{C} . Encuentre la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ de \mathcal{C} a \mathcal{B} . Verifique que $\forall v \in \mathcal{V} : P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}}$ y $\forall v \in \mathcal{V} : P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}[v]_{\mathcal{C}} = [v]_{\mathcal{B}}$.

a)

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

en $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$.

b)

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

en $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$.

c) $\mathcal{B} = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$, $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ en $\mathcal{V} = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

VII) Verifique que $[T]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ y $[T]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ si

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a - 3b \\ a + 4b \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2b + c \\ a - 4b \\ 3a \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3a + c \\ -2a + b \\ -a + 2b + 4c \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Puebla, Pue., a 21 de octubre de 2019