BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Prof. CARLOS ALBERTO LÓPEZ ANDRADE
Materia: ÁLGEBRA LINEAL 1

Tarea # 7

I) Encuentre la matriz $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ de la transformación lineal $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ con respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ respectivamente. Además verifique que $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{C}}$ para cada $v \in \mathcal{V}$.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2a-3b \\ a+4b \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

($[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} := [T]_{\mathcal{B}}$ siempre que $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.)

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2a-3b \\ a+4b \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2a-3b \\ a+4b \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\}.$$

d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a+2b \\ -a \\ b \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\}, \quad \mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

e) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a-b+c \\ 2a+b-3c \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}, \quad \mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

f) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2b+c \\ a-4b \\ 3a \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

($[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} := [T]_{\mathcal{B}}$ siempre que $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.)

g) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2b+c \\ a-4b \\ 3a \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}.$$

h) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2b+c \\ a-4b \\ 3a \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}, \quad \mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}.$$

i) Sea $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ definida por

$$T(p(x)) = xp(x),$$

$\mathcal{B} = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$ $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $v = p(x) = a + bx + cx^2$.

j) Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = A^t$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ y

$$v = A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

k) Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = MA$, donde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ y

$$v = A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

II) Sean $\mathcal{W} = gen(\{e^{2t}, e^{2t}\cos t, e^{2t}\operatorname{sen} t\}) \subseteq \mathcal{D}$ y $D : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ el operador derivación.

a) Encuentre la matriz de D con respecto a la base

$$\mathcal{B} = \{e^{2t}, e^{2t}\cos t, e^{2t}\operatorname{sen} t\}.$$

b) Calcule la derivada de $f(t) = 3e^{2t} - e^{2t}\cos t + 2e^{2t}\operatorname{sen} t$ de manera indirecta y verifique que concuerda con $f'(t)$ al calcularla de manera directa.

III) Sean $\mathcal{W} = gen(\{\cos t, \operatorname{sen} t, t\cos t, t\operatorname{sen} t\}) \subseteq \mathcal{D}$ y $D : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ el operador derivación.

a) Encuentre la matriz de D con respecto a la base

$$\mathcal{B} = \{\cos t, \operatorname{sen} t, t\cos t, t\operatorname{sen} t\}.$$

b) Calcule la derivada de $f(t) = \cos t + 2t\cos t$ de manera indirecta y verifique que concuerda con $f'(t)$ al calcularla de manera directa.

IV) Sean $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ y $S : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ transformaciones lineales, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ bases para $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ respectivamente. Calcule $[S \circ T]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}}$ de dos maneras: primera, encuentre $S \circ T$ de manera directa para posteriormente calcular su matriz, y segunda, determine las matrices de S y T por separado y multiplíquelas.

a) $T : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix},$$

$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$S(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a - 2b \\ 2a - b \end{bmatrix},$$

$\mathcal{B} = \{1, x\}$ y $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \{e_1, e_2\}$.

b) $T : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ definida por $T(p(x)) = p(x+1)$, $S : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ definida por $S(p(x)) = p(x+1)$, $\mathcal{B} = \{1, x\}$ y $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \{1, x, x^2\}$.

V) Determine si la transformación lineal T es invertible considerando su matriz con respecto a las bases estándar. Si T es invertible determinar T^{-1}.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) = a + (a+b)x.$$

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2b + c \\ a - 4b \\ 3a \end{bmatrix}.$$

c) $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = A^t$.

d) $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} 2a - b \\ a + b - 3c \\ c - a \end{bmatrix}.$$

e) $T:\mathbb{R}^3\to\mathcal{MS}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a+b+c & b-2c\\ b-2c & a-c\end{bmatrix}.$$

VI) Encuentre los vectores coordenados $[v]_{\mathcal{B}}$ y $[v]_{\mathcal{C}}$ de $v\in\mathcal{V}$ con respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, respectivamente. Encuentre la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$. Encuentre la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$. Verifique que $\forall v\in\mathcal{V}: P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}=[v]_{\mathcal{C}}$ y $\forall v\in\mathcal{V}: P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[v]_{\mathcal{C}}=[v]_{\mathcal{B}}$.

a)

$$\mathcal{B}=\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad \mathcal{C}=\{\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\}.$$

en $\mathcal{V}=\mathbb{R}^2$.

b)

$$\mathcal{B}=\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\},\quad \mathcal{C}=\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\}.$$

en $\mathcal{V}=\mathbb{R}^3$.

c) $\mathcal{B}=\{1+x+x^2, x+x^2, x^2\},\ \mathcal{C}=\{1,x,x^2\}$ en $\mathcal{V}=\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

VII) Verifique que $[T]_{\mathcal{C}}=P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ y $[T]_{\mathcal{B}}=P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ si

a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a\\ b\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2a-3b\\ a+4b\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}=\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad \mathcal{C}=\{\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\}.$$

b) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2b+c\\ a-4b\\ 3a\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}=\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\},\quad \mathcal{C}=\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\}.$$

c) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por

$$T(\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}3a+c\\-2a+b\\-a+2b+4c\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}=\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\},\quad \mathcal{C}=\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\}.$$

Puebla, Pue., a 26 de octubre de 2014