Prof. Carlos Alberto López Andrade
Materia: Álgebra Lineal 1

Tarea # 6

I) Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial y sean $\phi_1 : \mathcal{V} \to \mathbb{R}, \phi_2 : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ dos transformaciones lineales. Sea $T : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^2$ la transformación definida por $T(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v))$. Demostrar que T es lineal. Generalizar el resultado.

II) Sea $\mathcal{V} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f$ tienen derivadas de todos los órdenes $\}$ y sea $D : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ el operador derivación. ¿Cuál es el núcleo de D^2? ¿Cuál es el núcleo de D^n?

III) Sea $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ y sea $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ la aplicación definida por

$$T(A) = \frac{A + A^t}{2}$$

a) Demostrar que T es lineal.

b) Determinar el nuT.

c) ¿Cuál es la dimensión del nuT?

IV) Sea $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ y sea $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ la aplicación definida por

$$T(A) = \frac{A - A^t}{2}$$

a) Demostrar que T es lineal.

b) Determinar el nuT.

c) ¿Cuál es la dimensión del nuT?

V) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que $T \neq 0$ pero $T^2 = T \circ T = 0$. Demostrar que existe una base $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $T(v_1) = v_2$ y $T(v_2) = 0$.

VI) Sea $dim\mathcal{V} > dim\mathcal{W}$ y sea $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una aplicación lineal. Demostrar que el núcleo de T no es $\{0\}$.

VII) Sean S y T aplicaciones lineales invertibles de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ en sí mismo. Demostrar que

$$(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}.$$

VIII) Determine si la transformación lineal T dada es *(i)* inyectiva e *(ii)* sobreyectiva *a*) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{bmatrix}.$$

b) $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} 2a - b \\ a + b - 3c \\ c - a \end{bmatrix}.$$

IX) Sean $S, T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ las transformaciones lineales definidas por

$$S(x, y) = (x + y, x - y) \text{ y } T(x, y) = (2x + y, 3x - 5y),$$

respectivamente. Demostrar que S y T son invertibles.

X) Sean $S, T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ las transformaciones lineales definidas por

$$S(x, y, z) = (x-y, x+z, x+y+2z) \text{ y } T(x, y, z) = (2x-y+z, x+y, 3x+y+z),$$

respectivamente. Demostrar que S y T son invertibles.

XI) Sea $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ una transformación lineal tal que $T^2 = 0$. Demostrar que $I_{\mathcal{V}} - T$ es invertible.

XII) Sean $T_1 : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ y $T_2 : \mathcal{W} \to \mathcal{U}$ isomorfismos de espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$. Demostrar que $T_2 \circ T_1 : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ es un isomorfismo.

XIII) Demuestre que los espacios vectoriales $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son isomorfos, exhibiendo un isomorfismo explícito $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$.

a) $\mathcal{V} = \mathcal{MS}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (matrices simétricas de tamaño 2×2), $\mathcal{W} = \mathcal{TS}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (matrices triangulares superiores de tamaño 2×2)

b) $\mathcal{V} = \mathcal{D}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ (matrices diagonales de tamaño 3×3), $\mathcal{W} = \mathbb{R}^3$

c) $\mathcal{V} = \mathbb{C}$, $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$

XIV) ¿Es $\mathcal{V} = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : tr(A) = 0\}$ isomorfo a $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$?

Puebla, Pue., a 23 de octubre de 2016