Esto se puede expresar en forma simbólica como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x\, [(0 < |x - a| < \delta) \rightarrow (|f(x) - L| < \epsilon)].$$

[En este caso, el universo comprende los números reales, y sólo consideramos aquellos valores reales de x para los que $f(x)$ esté definida. Además, los cuantificadores $\forall \epsilon > 0$ y $\exists \delta > 0$ contienen ahora alguna información restrictiva.] Entonces, para negar esta definición, haremos lo siguiente (hemos resumido algunos pasos):

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to a} f(x) \neq L \\
\Leftrightarrow\; &\neg[\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x\, [(0 < |x - a| < \delta) \rightarrow (|f(x) - L| < \epsilon)]] \\
\Leftrightarrow\; &\exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x\, \neg[(0 < |x - a| < \delta) \rightarrow (|f(x) - L| < \epsilon)] \\
\Leftrightarrow\; &\exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x\, \neg[\neg(0 < |x - a| < \delta) \vee (|f(x) - L| < \epsilon)] \\
\Leftrightarrow\; &\exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x\, [\neg\neg(0 < |x - a| < \delta) \wedge \neg(|f(x) - L| < \epsilon)] \\
\Leftrightarrow\; &\exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x\, [(0 < |x - a| < \delta) \wedge (|f(x) - L| \geq \epsilon)]
\end{aligned}$$

Traducido en palabras, tenemos que $\lim_{x \to a} f(x) \neq L$ si (y sólo si) existe un número (real) positivo ϵ tal que para cada número (real) positivo δ, existe un valor x [donde $f(x)$ está definida] tal que $0 < |x - a| < \delta$ (es decir, $x \neq a$ y su distancia de a es menor que δ) pero $|f(x) - L| \geq \epsilon$ [es decir, el valor de $f(x)$ difiere del de L por al menos ϵ].

EJERCICIOS 2.4

1. Sean $p(x)$, $q(x)$ las siguientes proposiciones abiertas.

$$p(x):\; x \leq 3 \qquad q(x):\; x + 1 \;\text{ es impar.}$$

Si el universo consta de todos los enteros, ¿cuáles son los valores de verdad de las siguientes proposiciones?

a) $p(1)$	**b)** $q(1)$	**c)** $\neg p(3)$
d) $q(6)$	**e)** $p(7) \vee q(7)$	**f)** $p(3) \wedge q(4)$
g) $p(4)$	**h)** $\neg(p(-4) \vee q(-3))$	**i)** $\neg p(-4) \wedge \neg q(-3)$

2. Sean $p(x)$, $q(x)$ las proposiciones definidas en el ejercicio 1. Sea $r(x)$ la proposición abierta "$x > 0$". De nuevo, el universo está formado por todos los enteros.
   a) Determine los valores de verdad de las siguientes proposiciones.

i) $p(3) \vee [q(3) \vee \neg r(3)]$	**ii)** $\neg p(3) \wedge [q(3) \vee r(3)]$
iii) $p(2) \rightarrow [q(2) \rightarrow r(2)]$	**iv)** $[p(2) \wedge q(2)] \rightarrow r(2)$
v) $p(0) \rightarrow [\neg q(-1) \leftrightarrow r(1)]$	**vi)** $[p(-1) \leftrightarrow q(-2)] \leftrightarrow r(-3)$

   b) Determine todos los valores de x para los cuales $[p(x) \wedge q(x)] \wedge r(x)$ da como resultado una proposición verdadera.
   c) Encuentre los cinco enteros positivos x más pequeños para los que la proposición abierta $p(x) \rightarrow [\neg q(x) \wedge r(x)]$ da como resultado una proposición verdadera.

3. Sea $p(x)$ la proposición abierta "$x^2 = 2x$", donde el universo comprende todos los enteros. Determine si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa.

a) $p(0)$	**b)** $p(1)$	**c)** $p(2)$
d) $p(-2)$	**e)** $\exists x\, p(x)$	**f)** $\forall x\, p(x)$

4. Considere el universo de todos los polígonos con tres o cuatro lados y defina las siguientes proposiciones abiertas para este universo.

c) Todo estudiante de la clase está en la especialidad de matemáticas o física.
d) Ningún estudiante de posgrado en la clase está en la especialidad de física.
e) En la clase, todo estudiante del último año está en la especialidad de física o de ingeniería eléctrica.
f) Algún estudiante de posgrado de esta universidad no está en la especialidad de matemáticas ni en la de física.

6. Sean $p(x, y)$, $q(x, y)$ las siguientes proposiciones abiertas:

$$p(x, y): \quad x^2 \geq y \qquad\qquad q(x, y): \quad x + 2 < y$$

Si el universo para cada x, y está formado por todos los números reales, determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones.

a) $p(2, 4)$ b) $q(1, \pi)$ c) $p(-3, 8) \wedge q(1, 3)$
d) $p(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \vee \neg q(-2, -3)$ e) $p(2, 2) \rightarrow q(1, 1)$ f) $p(1, 2) \leftrightarrow \neg q(1, 2)$

7. Para el universo de los enteros, sean $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$ y $t(x)$ las siguientes proposiciones abiertas.

$p(x)$: $x > 0$
$q(x)$: x es par
$r(x)$: x es un cuadrado perfecto
$s(x)$: x es (exactamente) divisible entre 4
$t(x)$: x es (exactamente) divisible entre 5

a) Escriba las siguientes proposiciones en forma simbólica.
  i) Al menos un entero es par.
  ii) Existe al menos un entero positivo que es par.
  iii) Si x es par, entonces x no es divisible entre 5.
  iv) Ningún entero par es divisible entre 5.
  v) Existe al menos un entero par divisible entre 5.
  vi) Si x es par y x es un cuadrado perfecto, entonces x es divisible entre 4.
b) Determine si cada una de las seis proposiciones de la parte (a) es verdadera o falsa. Para cada proposición falsa, dé un contraejemplo.
c) Exprese en palabras cada una de las siguientes representaciones simbólicas.
  i) $\forall x\,[r(x) \rightarrow p(x)]$ ii) $\forall x\,[s(x) \rightarrow q(x)]$
  iii) $\forall x\,[s(x) \rightarrow \neg t(x)]$ iv) $\exists x\,[s(x) \wedge \neg r(x)]$
  v) $\forall x\,[\neg r(x) \vee \neg q(x) \vee s(x)]$
d) Proporcione un contraejemplo para cada proposición falsa de la parte (c).

8. Sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ las siguientes proposiciones abiertas.

$$p(x): \quad x^2 - 8x + 15 = 0$$
$$q(x): \quad x \text{ es impar}$$
$$r(x): \quad x > 0$$

Para el universo de los enteros, determine la verdad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Si una proposición es falsa, dé un contraejemplo.

a) $\forall x\,[p(x) \rightarrow q(x)]$ b) $\forall x\,[q(x) \rightarrow p(x)]$
c) $\exists x\,[p(x) \rightarrow q(x)]$ d) $\exists x\,[q(x) \rightarrow p(x)]$
e) $\exists x\,[r(x) \wedge p(x)]$ f) $\forall x\,[p(x) \rightarrow r(x)]$
g) $\exists x\,[r(x) \rightarrow p(x)]$ h) $\forall x\,[\neg q(x) \rightarrow \neg p(x)]$
i) $\exists x\,[p(x) \rightarrow (q(x) \wedge r(x))]$ j) $\forall x\,[(p(x) \vee q(x)) \rightarrow r(x)]$

9. Sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ las siguientes proposiciones abiertas.

$$p(x): \quad x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$q(x): \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$r(x): \quad x < 0$$

17. Escriba la negación de cada una de las siguientes proposiciones verdaderas. Para las partes (a), (b) y (c), el universo consta de todos los enteros; para las partes (d) y (e), el universo abarca todos los números reales.
   a) Para todo entero n, si n no es (exactamente) divisible entre 2, entonces n es impar.
   b) Si el cuadrado de un entero es impar, entonces el entero es impar.
   c) Si k, m, n son enteros tales que $k - m$ y $m - n$ son impares, entonces $k - n$ es par.
   d) Si x es un número real tal que $x^2 > 16$, entonces $x < -4$ o $x > 4$.
   e) Para todo número real x, si $|x - 3| < 7$, entonces $-4 < x < 10$.

18. Niegue y simplifique lo siguiente.
   a) $\exists x\,[p(x) \vee q(x)]$
   b) $\forall x\,[p(x) \wedge \neg q(x)]$
   c) $\forall x\,[p(x) \rightarrow q(x)]$
   d) $\exists x\,[(p(x) \vee q(x)) \rightarrow r(x)]$

19. Para cada una de las siguientes proposiciones (y universos) enuncie la recíproca, la inversa y la contrapositiva. Determine también el valor de verdad de cada proposición dada, así como los valores de verdad de su recíproca, su inversa y su contrapositiva. (En éste caso, "divide" significa "divide exactamente" y "divisible" significa "divisible exactamente".)
   a) [El universo comprende todos los enteros positivos.]
   Si $m > n$, entonces $m^2 > n^2$.
   b) [El universo comprende todos los enteros.]
   Si $a > b$, entonces $a^2 > b^2$.
   c) [El universo comprende todos los enteros.]
   Si m divide a n y n divide a p, entonces m divide a p.
   d) [El universo comprende todos los números reales.]
   $\forall x[(x > 3) \rightarrow (x^2 > 9)]$
   e) [El universo comprende todos los enteros.]
   Todo entero que es divisible entre 12 también es divisible entre 4.
   f) [El universo comprende todos los números reales.]
   Para todo número real x, si $x^2 + 4x - 21 > 0$, entonces $x > 3$ o $x < -7$.

20. Vuelva a escribir cada una de las siguientes proposiciones (con los universos dados) como una implicación de la forma si–entonces. Escriba después la recíproca, la inversa y la contrapositiva de la implicación. Para cada resultado de las partes (a) y (d), dé el valor de verdad de la implicación y los valores de verdad de la recíproca, la inversa y la contrapositiva. (En la parte (a), "divisibilidad" significa tener un resto 0.)
   a) [El universo comprende todos los enteros positivos.]
   La divisibilidad entre 21 es una condición suficiente para la divisibilidad entre 7.
   b) [El universo abarca todos los residentes actuales de Estados Unidos.]
   Contar con un paquete considerable de acciones en la bolsa es una condición necesaria para que una persona sea feliz.
   c) [El universo comprende todas las serpientes que reptan actualmente en las selvas de Asia.]
   El hecho de ser una cobra es una condición suficiente para que una serpiente sea peligrosa.
   d) [El universo está formado por todos los números complejos.]
   Para cada número complejo z, el hecho de que z sea real es necesario para que z^2 sea real.

21. Para las siguientes proposiciones, el universo abarca todos los enteros distintos de cero. Determine el valor de verdad de cada proposición.
   a) $\exists x\,\exists y\,[xy = 1]$
   b) $\exists x\,\forall y\,[xy = 1]$
   c) $\forall x\,\exists y\,[xy = 1]$
   d) $\forall x\,\forall y\,[\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y]$
   e) $\exists x\,\exists y\,[(2x + y = 5) \wedge (x - 3y = -8)]$
   f) $\exists x\,\exists y\,[(3x - y = 7) \wedge (2x + 4y = 3)]$

22. Repita el ejercicio 21 para el universo de todos los números reales diferentes de cero.

23. En la aritmética de los números reales, existe un número real, 0, llamado el neutro de la suma, puesto que $a + 0 = 0 + a = a$ para cada número real a. Esto se puede expresar en forma simbólica como

$$\exists z\, \forall a\, [a + z = z + a = a].$$

(En este caso, el universo abarca todos los números reales.)

a) Además de la existencia de un neutro aditivo, existen los inversos aditivos. Escriba una proposición cuantificada que exprese "Todo número real tiene un inverso aditivo". (No se debe utilizar el signo menos en la proposición.)

b) Escriba una proposición cuantificada que trate de la existencia de un neutro multiplicativo para la aritmética de los números reales.

c) Escriba una proposición cuantificada relativa a la existencia de inversos multiplicativos para los números reales diferentes de cero. (No se debe usar el exponente -1 en la proposición.)

d) ¿Cambian de alguna forma los resultados de las partes (b) y (c) cuando el universo se restringe a los enteros?

24. Considere la proposición cuantificada $\forall x\, \exists y[x + y = 17]$. Determine si esta proposición es verdadera o falsa para cada uno de los siguientes universos: (a) los enteros; (b) los enteros positivos; (c) los enteros para x, los enteros positivos para y; (d) los enteros positivos para x, los enteros para y.

25. En el caso de las siguientes proposiciones, el universo para cualquiera de sus variables está formado por los números reales. En cada caso, niegue y simplifique la proposición dada.

a) $\forall x\, \forall y\, [(x > y) \rightarrow (x - y > 0)]$
b) $\forall x\, \forall y\, [[(x > 0) \wedge (y = \log_{10} x)] \rightarrow (x = 10^y)]$
c) $\forall x\, \forall y\, [(x < y) \rightarrow \exists z\, (x < z < y)]$
d) $\forall x\, \forall y\, [(|x| = |y|) \rightarrow (y = \pm x)]$
e) $[\forall x\, \forall y\, ((x > 0) \wedge (y > 0))] \rightarrow [\exists z\, (xz > y)]$

26. En matemáticas, con frecuencia se desea afirmar no sólo la existencia de un objeto a (ya sea un número, un triángulo, etcétera) que satisfaga una proposición abierta $p(x)$, sino también el hecho de que este objeto a es el único para el que se satisface $p(x)$ (es verdadera). Entonces, el objeto es *único*. Esto se denota con el cuantificador $\exists! x\, p(x)$, que se lee como "Existe un único x". Este cuantificador puede definirse en términos de los cuantificadores existencial y universal:

$$[\exists! x\, p(x)] \Leftrightarrow \{[\exists x\, p(x)] \wedge [\forall x\, \forall y\, [(p(x) \wedge p(y)) \rightarrow (x = y)]]\}$$

Esta definición indica que "una demostración de existencia y unicidad" requiere "una demostración de la existencia", que con frecuencia se realiza construyendo un ejemplo que satisfaga $p(x)$, y "una demostración de la unicidad".

a) Escriba lo siguiente en forma simbólica, usando este nuevo cuantificador. (El universo consta de todos los números reales.)

i) Todo número real diferente de cero tiene un único inverso multiplicativo.
ii) La suma de dos números reales cualesquiera es única.
iii) Para cada coordenada x, la coordenada y correspondiente en la recta $y = 3x + 7$ es única.

b) Sea $p(x, y)$ la proposición abierta "$y = -2x$"; el universo está formado por todos los enteros. Determine cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas.

i) $[\forall x\, \exists! y\, p(x,y)] \rightarrow [\exists! y\, \forall x\, p(x,y)]$
ii) $[\exists! y\, \forall x\, p(x,y)] \rightarrow [\forall x\, \exists! y\, p(x,y)]$

c) Responda la parte (b) para la proposición abierta $p(x, y)$: $x + y$ es par.

d) Considere la proposición $\exists! x\, (x > 1)$. Dé un ejemplo de un universo en el que p sea verdadera y un ejemplo de otro universo donde p sea falsa.

Cuantifica
y la demost
Ejemplo 2.5