BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Prof. Carlos Alberto López Andrade
Materia: Introducción a las Estructuras Algebraicas

Tarea $\#\ 5$ *Relaciones de equivalencia*

1. Determine si la relación dada es una relación de equivalencia en $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Si la relación es de equivalencia, indique las clases de equivalencia.

   a) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1)\}$

   b)

   $$\begin{aligned}\mathcal{R} \ = \ & \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 5), (5, 1), (3, 5), (5, 3), \\ & (1, 3), (3, 1)\}\end{aligned}$$

   c) $\mathcal{R} = \{(x, y)|$ 3 divide a $x + y\}$.

2. Enuncie los elementos de la relación de equivalencia en $X = \{1, 2, 3, 4\}$ definida por la partición dada y determine las clases de equivalencia.

   a) $\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$

   b) $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$

   c) $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3, 4\}\}$

   d) $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}\}$

3. Enuncie los elementos de la relación de equivalencia en $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ definida por la partición $\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}\}$ y determine las clases de equivalencia.

4. Sea $\mathcal{R}$ la relación definida en el conjunto de cadenas de ocho bits de manera que $b_1 \mathcal{R} b_2$ si y sólo si coinciden los cuatro primeros bits de b_1 y b_2.

   a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

   b) ¿Cuántas clases de equivalencia hay?

   c) Escriba un representante de cada clase de equivalencia.

5. Proporcione un ejemplo, mediante una lista de pares ordenados, de una relación de equivalencia en $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que tenga exactamente cuatro clases de equivalencia.

6. Demostrar que la familia $\mathcal{F} = \{[n, n + 1) : n \in \mathbb{Z}\}$ es una partición de $\mathbb{R}$.

7. $\mathcal{R} = \{(m,n) : m,n \in \mathbb{Z}, m \equiv n \pmod 2\}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0+2\mathbb{Z}, 1+2\mathbb{Z}\}$. Usar lo anterior para demostrar que para todo $m \in \mathbb{Z}$ se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

   a) $2|m$

   b) $\exists\, n \in \mathbb{Z} : m = 2n+1$

8. Supóngase que X es un conjunto no vacío y sea f una función que tiene al conjunto X como su dominio. Sea $\mathcal{R}$ la relación en X dada por:

$$\mathcal{R} = \{(x,y) | f(x) = f(y)\}$$

   a) Mostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en X.

   b) ¿Cuáles son las clases de equivalencia de $\mathcal{R}$?

9. Sea $\mathcal{R}$ la relación en el conjunto de pares ordenados de enteros positivos definida por $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ *ssi* $ad = bc$. Mostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

10. Mostrar que la relación $\mathcal{R}$ en el conjunto de todas las funciones diferenciables de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ dada por:

$$\mathcal{R} = \{(f,g) |\ \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g'(x)\}$$

es una relación de equivalencia. ¿Qué funciones están en la misma clase de equivalencia que la función $f(x) = x^2$?

Puebla, Pue., a 3 de octubre de 2018