# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
## FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

***Prof. Carlos Alberto López Andrade***
***Materia: Álgebra Lineal I***

---

# *Tarea* # 3

I) Determinar si el vector dado $u$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores del conjunto $S$.

*a*) $u = (5, 2, 4) \in \mathbb{R}^3$,

$$S = \{u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (-3, 2, 1), u_3 = (4, 5, -3), u_4 = (-2, 1, 0)\}.$$

*b*) $u = (-1, 7, 2) \in \mathbb{R}^3$,

$$S = \{u_1 = (1, 3, 5), u_2 = (2, -1, 3), u_3 = (-3, 2, -4)\}.$$

*c*) $u = (10, 1, 4) \in \mathbb{R}^3$,

$$S = \{u_1 = (2, 3, 5), u_2 = (1, 2, 4), u_3 = (-2, 2, 3)\}.$$

*d*) $u = (-5, 1, 3, -2) \in \mathbb{R}^4$,

$$S = \{u_1 = (2, 9, 5, 6), u_2 = (-4, 3, 2, -5), u_3 = (7, 2, -3, 4), u_4 = (4, -7, 1, -3)\}.$$

II) ¿Es $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ generado por

$$S = \{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\}?$$

III) ¿Es $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ generado por

$$S = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\}?$$

IV) ¿Es $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ generado por $S = \{1 + x + 2x^2, 2 + x + 2x^2, -1 + x + 2x^2\}$?

V) Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en $\mathbb{R}^4$ generan a $\mathbb{R}^4$ y son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

*a*) $S = \{(1, 1, 0, 1), (1, -1, 1, 1), (2, 2, 1, 2), (0, 1, 0, 0)\}$.
*b*) $S = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$.
*c*) $S = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$.
*d*) $S = \{(1, 2, 3, 3), (-2, 1, 4, -11), (2, -2, -6, 12)\}$.

---

*e*) $S = \{(1,1,2,4),(2,-1,-5,2),(1,-1,-4,0),(2,1,1,6)\}$.

VI) Determine si los conjuntos de matrices son linealmente independientes en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Para aquéllos que sean linealmente dependientes, exprese una de las matrices como una combinación lineal de las otras.

*a*)
$$S = \{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}\}$$

*b*)
$$S = \{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\}$$

VII) Determine si los conjuntos de polinomios son linealmente independientes. Para aquéllos que sean linealmente dependientes, exprese uno de los polinomios como una combinación lineal de los otros.

*a*) $S = \{1+x, 1+x^2, 1-x+x^2,\}$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

*b*) $S = \{x, 2x-x^2, 3x+2x^2\}$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

*c*) $S = \{2x, x-x^2, 1+x^3, 2-x^2+x^3\}$ en $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

VIII) Determine si los conjuntos de funciones son linealmente independientes. Para aquéllas que sean linealmente dependientes, exprese una de las funciones como una combinación lineal de las otras.

*a*) $S = \{1, \cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t\}$ en $\mathcal{F}$

*b*) $S = \{e^t, \operatorname{sen} t, t^2\}$ en $\mathcal{F}$

*c*) $S = \{e^t, e^{2t}, t\}$ en $\mathcal{F}$

*d*) $S = \{e^t, \operatorname{sen} t, \cos t\}$ en $\mathcal{F}$

IX) Sean $\mathcal{V} = \mathcal{F} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y $S = \{e^{at} \in \mathcal{F} | a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{V}$. Muestre que $S$ es un conjunto linealmente independiente.

X) Mostrar que el conjunto dado es una base para $\mathbb{R}^3$. Expresar a cada uno de los vectores de la base canónica como combinación lineal de los vectores de la base dada.

*a*) $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.

*b*) $\{(1,0,-1),(1,2,1),(0,-3,2)\}$.

*c*) $\{(1,0,-1),(1,1,1),(1,0,0)\}$.

XI) Mostrar que los vectores $u_1=(1,1,0,0), u_2=(0,0,1,1), u_3=(1,0,0,4)$ y $u_4=(0,0,0,2)$ forman una base de $\mathbb{R}^4$.

XII) ¿ $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,1,0),(0,1,0,-1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$?

XIII) Determine si el conjunto $\mathcal{B}$ es una base del espacio vectorial $\mathcal{V}$

*a*) $\mathcal{V}=\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{B}=\{\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\}$$

*b*) $\mathcal{V}=\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{B}=\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\}$$

*c*) $\mathcal{V}=\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{B}=\{\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&3\\-3&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&3\\3&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\\3&2\end{bmatrix}\}$$

*d*) $\mathcal{V}=\mathbb{P}_2(\mathbb{R}),\ \mathcal{B}=\{1-x,1-x^2,x-x^2\}$

*e*) $\mathcal{V}=\mathbb{P}_2(\mathbb{R}),\ \mathcal{B}=\{1,2-x,3-x^2,x+2x^2\}$

XIV) Sean $\mathbb{F}$ un campo, $\mathcal{V}=\mathbb{F}[t]$ y $S=\{1,t,t^2,\ldots,t^n,\ldots\}\subseteq\mathcal{V}$, ¿Es $S$ un conjunto generador de $\mathcal{V}$?, ¿Es $S$ un conjunto linealmente independiente?, ¿Es $S$ una base del espacio vectorial $\mathcal{V}$?.

XV) Mostrar que los vectores $u=(1+i,2i)$ y $v=(1,1+i)$ en $\mathbb{C}^2$ son linealmente dependientes sobre el campo complejo $\mathbb{C}$ pero linealmente independientes sobre el campo $\mathbb{R}$.

XVI) Mostrar que los vectores $u=(1-i,i)$ y $v=(2,-1+i)$ en $\mathbb{C}^2$ son linealmente dependientes sobre el campo complejo $\mathbb{C}$ pero linealmente independientes sobre el campo $\mathbb{R}$.

XVII) Mostrar que el campo complejo $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial de dimensión 2 sobre el campo real $\mathbb{R}$.

XVIII) Mostrar que los vectores $u = (2i, 1, 0),\ v = (2, -1, 1)$ y $w = (0, 1+i, 1-i)$ en $\mathbb{C}^3$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.

XIX) Sea $\mathcal{W} = gen(\{v_1, v_2\})$ donde $v_1 = (1, 0, i)$ y $v_2 = (1 + i, 1, -1)$.

*a*) Demostrar que $v_1$ y $v_2$ forman una base de $\mathcal{W}$.

*b*) Demostar que los vectores $u_1 = (1, 1, 0)$ y $u_2 = (1, i, 1+i)$ pertenecen a $\mathcal{W}$ y forman otra base de $\mathcal{W}$.

XX) Proporcione una base para el espacio vectorial $\mathcal{V}$ y determine la dimensión de $\mathcal{V}$.

*a*) $\mathcal{V} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A$ es triangular superior $\}$

*b*) $\mathcal{V} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A$ es simétrica $\}$

*c*) $\mathcal{V} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A$ es antisimétrica $\}$

*d*) $\mathcal{V} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : tr(A) = 0\}$

XXI) Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de todas las soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Encontrar una base para $\mathcal{U}$ y la dimensón de $\mathcal{U}$.

XXII) Sea $\mathcal{V}$ el conjunto de todas las soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 5x_1 - 10x_2 + 7x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Encontrar una base para $\mathcal{V}$ y la dimensón de $\mathcal{V}$.

XXIII) Sea $\mathcal{W}$ el conjunto de todas las soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 + 0x_5 &= 0 \\ x_1 + 0x_2 + \frac{2}{3}x_3 + 0x_4 + x_5 &= 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Encontrar una base para $W$ y la dimensón de $\mathcal{W}$.

Puebla, Pue., a 27 de agosto de 2019