Prof. Carlos Alberto López Andrade
Materia: Álgebra Lineal I

Tarea $\# 3$

I) ¿Es $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ generado por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}?$$

II) ¿Es $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ generado por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}?$$

III) ¿Es $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ generado por $1 + x + 2x^2, 2 + x + 2x^2, -1 + x + 2x^2$?

IV) Determine si los conjuntos de matrices son linealmente independientes en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Para aquéllos que sean linealmente dependientes, exprese una de las matrices como una combinación lineal de las otras.

a)

$$S = \{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \}$$

b)

$$S = \{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \}$$

V) Determine si los conjuntos de polinomios son linealmente independientes. Para aquéllos que sean linealmente dependientes, exprese uno de los polinomios como una combinación lineal de los otros.

a) $S = \{1 + x, 1 + x^2, 1 - x + x^2, \}$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

b) $S = \{x, 2x - x^2, 3x + 2x^2\}$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

c) $S = \{2x, x - x^2, 1 + x^3, 2 - x^2 + x^3\}$ en $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

VI) Determine si los conjuntos de funciones son linealmente independientes. Para aquéllas que sean linealmente dependientes, exprese una de las funciones como una combinación lineal de las otras.

a) $S = \{1, \cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t\}$ en $\mathcal{F}$

b) $S = \{e^t, \operatorname{sen} t, t^2\}$ en $\mathcal{F}$

c) $S = \{e^t, e^{2t}, t\}$ en $\mathcal{F}$

d) $S = \{e^t, \operatorname{sen} t, \cos t\}$ en $\mathcal{F}$

VII) Determine si el conjunto $\mathcal{B}$ es una base del espacio vectorial $\mathcal{V}$

a) $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\}$$

b) $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\}$$

c) $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\}$$

d) $\mathcal{V} = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}),\ \mathcal{B} = \{1 - x, 1 - x^2, x - x^2\}$

e) $\mathcal{V} = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}),\ \mathcal{B} = \{1, 2 - x, 3 - x^2, x + 2x^2\}$

VIII) Proporcione una base para el espacio vectorial $\mathcal{V}$ y determine la dimensión de $\mathcal{V}$.

a) $\mathcal{V} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A$ es triangular superior $\}$

b) $\mathcal{V} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A$ es simétrica $\}$

c) $\mathcal{V} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A$ es antisimétrica $\}$

d) $\mathcal{V} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : tr(A) = 0\}$

IX) Mostrar que los vectores $u = (1 + i, 2i)$ y $v = (1, 1 + i)$ en $\mathbb{C}^2$ son linealmente dependientes sobre el campo complejo $\mathbb{C}$ pero linealmente independientes sobre el campo $\mathbb{R}$.

X) Mostrar que los vectores $u = (1 - i, i)$ y $v = (2, -1 + i)$ en $\mathbb{C}^2$ son linealmente dependientes sobre el campo complejo $\mathbb{C}$ pero linealmente independientes sobre el campo $\mathbb{R}$.

XI) Mostrar que el campo complejo $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial de dimensión 2 sobre el campo real $\mathbb{R}$.

XII) Mostrar que los vectores $u = (2i, 1, 0),\ v = (2, -1, 1)$ y $w = (0, 1+i, 1-i)$ en $\mathbb{C}^3$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.

XIII) Sea $\mathcal{W} = gen(\{v_1, v_2\})$ donde $v_1 = (1, 0, i)$ y $v_2 = (1 + i, 1, -1)$.

a) Demostrar que v_1 y v_2 forman una base de $\mathcal{W}$.

b) Demostar que los vectores $u_1 = (1, 1, 0)$ y $u_2 = (1, i, 1+i)$ pertenecen a $\mathcal{W}$ y forman otra base de $\mathcal{W}$.

Puebla, Pue., a 4 de septiembre de 2016