

Demostración: Demostraremos la propiedad 3), las restantes las dejamos de tarea.

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
 &= n! \left(\frac{k!(n-k)! + (k-1)!((n-k)+1)!}{(k-1)!((n-k)+1)!k!(n-k)!} \right) \\
 &= n! \left(\frac{k + (n-k) + 1}{((n-k)+1)!k!} \right) = \frac{n!(n+1)}{(n+1-k)!k!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Ejercicios 2.

1. Demostrar $n! = \left(\prod_{i=1}^{i=n} i \right) \left(\prod_{i=1}^i (s+i) \right)$ donde $n = s + t$.

2. Calcular $\sum_{i=1}^{i=n} \left(\prod_{j=1}^{j=i} (j+1) \right)$. Aquí $a_i = \prod_{j=1}^{j=i} (j+1)$.

3. Calcular $\sum_{i=1}^{i=4} \left(\sum_{j=0}^{j=i} \frac{1}{j+1} \right)$, $4 \left(\sum_{i=1}^{i=3} i^2 + \sum_{i=1}^{i=3} (-1) \right)$.

4. Demostrar

a) Si $a_i \geq 0$ con $i = 1, \dots, n$, entonces

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i \geq 0.$$

b) Si $a_i < 0$, con $i = 1, \dots, n$, entonces

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i < 0.$$

c) Si $a_i \geq 0$, con $i = 1, \dots, n$, entonces

$$\prod_{i=1}^{i=n} a_i \geq 0.$$

d) Si $a_i < 0$, con $i = 1, \dots, n$, con n impar, entonces

$$\prod_{i=1}^{i=n} a_i < 0.$$

(Sugerencia: n es de la forma $2m + 1$ con $m \in \mathbb{N}$).

e) Si $a_i > 1$, con $i = 1, \dots, n$, entonces

$$\prod_{i=1}^{i=n} a_i > 1.$$

5. Demostrar:

a) $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$

b) $\sum_{i=1}^n ii! = (n+1)! - 1.$

c) $\sum_{i=1}^n (2i-1)^3 = n^2(2n^2-1).$

d) $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

e) $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$

6. $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^n a_i = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1}.$

$$7. \quad a) \quad \sum_{i=1}^n (a_i + c) = \sum_{i=1}^n a_i + nc.$$

$$b) \quad \sum_{i=s}^n (a_i + c) = \sum_{i=s}^n a_i + ((n - s) + 1)c.$$

8. $\forall n \in \mathbb{N}$: Si a_1, \dots, a_n son todos reales del mismo signo y mayores que -1 , entonces

$$\prod_{i=1}^n (a_i + 1) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i.$$

$$9. \quad \forall n \in \mathbb{N}: \prod_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{b_i} \right) = \frac{\prod_{i=1}^n a_i}{\prod_{i=1}^n b_i} \quad (\text{con } b_i \neq 0 \text{ para } i = 1, \dots, n).$$

$$10. \quad \text{Determinar } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 3 \binom{n}{4} = 5 \binom{n-1}{5}.$$

$$11. \quad \text{Demuestre } \binom{m}{k} \in \mathbb{N} \text{ para } k \leq m, \quad k, m \in \mathbb{N}.$$

§4

1.4. Binomio de Newton

Estudiaremos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} (a+b)^1 &= a+b, \\ (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2, \\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \\ (a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4. \end{aligned}$$

En el desarrollo de cada potencia de los binomios, la suma de los exponentes de los factores que aparecen, suma la potencia a la que está elevada