Tabla 2.5

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \wedge (\neg p \wedge q)$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0

Definición 2.1 Una proposición compuesta es una *tautología* si es verdadera para todas las asignaciones de valores de verdad para sus proposiciones componentes. Si una proposición compuesta es falsa para todas estas asignaciones, entonces es una *contradicción*.

En este capítulo usaremos el símbolo T_0 para denotar una tautología y el símbolo F_0 para denotar una contradicción.

Podemos usar las ideas de tautología e implicación para describir lo que entendemos por un argumento válido. Esto tendrá un interés primordial para nosotros en la sección 2.3, y nos ayudará a desarrollar la capacidad necesaria para demostrar teoremas matemáticos. En general, un argumento comienza con una lista de proposiciones *dadas* llamadas *premisas* y una proposición que se conoce como la *conclusión* del argumento. Debemos examinar estas premisas, $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ e intentar demostrar que la conclusión q se sigue lógicamente de estas proposiciones dadas; es decir, intentamos demostrar que si cada una de las premisas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ es una proposición verdadera, entonces la proposición q también es verdadera. Una forma de hacer esto consiste en analizar la implicación

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n)\dagger \rightarrow q,$$

donde la hipótesis es la conjunción de las n premisas. Si cualquiera de las premisas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ es falsa, entonces no importa el valor de verdad de q, pues, en este caso, la implicación $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$ es verdadera. En consecuencia, si partimos de las premisas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ (cada una con valor de verdad 1) y vemos que en estas circunstancias q también tiene el valor 1, entonces la implicación

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$$

es una *tautología* y tenemos un *argumento válido*.

EJERCICIOS 2.1

1. Determine cuáles de las siguientes oraciones son proposiciones.
   a) En 1990, George Bush era el presidente de Estados Unidos.
   b) $x + 3$ es un entero positivo.
   c) ¡Si todas las mañanas fueran tan soleadas y despejadas como ésta!

† En este momento, sólo trabajamos con la conjunción de dos proposiciones, así que debemos señalar que la conjunción $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n$ de n proposiciones es verdadera si y sólo si cada p_i, $1 \leq i \leq n$, es verdadera. Analizaremos con detalle esta conjunción generalizada en el ejemplo 4.14 de la sección 4.2.

d) Quince es un número par.
e) Si Josefina tarda en llegar a la fiesta, su primo Zacarías podría enojarse.
f) ¿Qué hora es?
g) De la corte de Moctezuma a las playas de Trípoli.
h) Hasta el 30 de junio de 1986, Christine Marie Evert había ganado el abierto de Francia siete veces.

2. Identifique las proposiciones primitivas en el ejercicio 1.

3. Sean p, q proposiciones primitivas para las que la implicación $p \rightarrow q$ es falsa. Determine los valores de verdad de

a) $p \wedge q$ b) $\neg p \vee q$ c) $q \rightarrow p$ d) $\neg q \rightarrow \neg p$

4. Sean p, q, r, s las siguientes proposiciones: p: Termino de escribir mi programa de computación antes de la comida; q: Jugaré tenis en la tarde; r: El sol está brillando; s: La humedad es baja. Escriba lo siguiente en forma simbólica.

a) Si el sol está brillando, jugaré tenis esta tarde.
b) Terminar de escribir mi programa antes de la comida es necesario para que juegue tenis esta tarde.
c) La humedad baja y el sol brillante son suficientes para que juegue tenis esta tarde.

5. Sean p, q, r las siguientes proposiciones acerca de un triángulo ABC particular; p: El triángulo ABC es isósceles; q: El triángulo ABC es equilátero; r: El triángulo ABC es equiangular. Traduzca cada una de las siguientes proposiciones en una frase en español.

a) $q \rightarrow p$ b) $\neg p \rightarrow \neg q$ c) $q \leftrightarrow r$
d) $p \wedge \neg q$ e) $r \rightarrow p$

6. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes implicaciones.

a) Si 3 + 4 = 12, entonces 3 + 2 = 6.
b) Si 3 + 3 = 6, entonces 3 + 6 = 9.
c) Si 3 + 3 = 6, entonces 3 + 4 = 9.
d) Si Thomas Jefferson fue el tercer presidente de Estados Unidos, entonces 2 + 3 = 5.

7. Vuelva a escribir cada una de las siguientes proposiciones como una implicación de la forma si-entonces.

a) La práctica diaria de su servicio es una condición suficiente para que Daniela tenga una buena posibilidad de ganar el torneo de tenis.
b) Arregle mi aire acondicionado o no pagaré la renta.
c) María puede subir a la motocicleta de Luis sólo si usa el casco.

8. Construya una tabla de verdad para cada de las siguientes proposiciones compuestas; p, q, r denotan proposiciones primitivas.

a) $\neg(p \vee \neg q) \rightarrow \neg p$ b) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ c) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
d) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ e) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ f) $(p \wedge q) \rightarrow p$
g) $q \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ h) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

9. ¿Cuáles de las proposiciones compuestas del ejercicio 8 son tautologías?

10. Verifique que $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$ es una tautología.

11. a) ¿Cuántas filas se necesitan para la tabla de verdad de la proposición compuesta $(p \vee \neg q) \leftrightarrow [(\neg r \wedge s) \rightarrow t]$, donde p, q, r, s y t son proposiciones primitivas?

b) Sean $p_1, p_2, \ldots, p_n$ proposiciones primitivas. Sea p una proposición compuesta que contiene al menos una ocurrencia de cada p_i, para $1 \leq i \leq n$ (y p no contiene otra proposición primitiva). ¿Cuántas filas se necesitan para construir la tabla de verdad de p?

12. Determine todas las asignaciones de valores de verdad, si es que existen, para las proposiciones primitivas p, q, r, s, t que hacen que todas las siguientes proposiciones compuestas sean falsas.

a) $[(p \wedge q) \wedge r] \rightarrow (s \vee t)$
b) $[p \wedge (q \wedge r)] \rightarrow (s \veebar t)$