BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Prof. Carlos Alberto López Andrade
Materia: Introducción a las Estructuras Algebraicas

Tarea # 1

I) Probar que el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente.

II) Demostrar que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ acotado superiormente, tiene un máximo.

III) Demostrar que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}$ acotado superiormente, tiene un máximo.

IV) Sean $n, r \in \mathbb{N}$ y supóngase que para cada $n \geq r$, $p(n)$ es una proposición abierta. Demuestre que: si

a) $p(r)$ es verdadera, y

b) $[p(r) \wedge p(r+1) \wedge \cdots \wedge p(t-1) \Rightarrow p(t)]$ es verdadera,

entonces $p(n)$ es verdadera para toda $n \geq r$.

Definición 1. *La* **sucesión de Fibonacci** *está definida recursivamente por* $f_1 = 1, f_2 = 1$, *y* $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ *para* $n \geq 3$. *Los términos de esta sucesión son llamados los* **números de Fibonacci**.

V) Considérese la sucesión de Fibonacci $\{f_n\}$. Demuestre que:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1.$$

VI) Considérese la sucesión de Fibonacci $\{f_n\}$. Usando el Ejercicio IV, demuestre que: $f_n > \alpha^{n-2}$ para toda $n \geq 3$ donde $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$. [Sugerencia: Observe que α es una solución de $x^2 - x - 1 = 0$.]

VII) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0 \neq c$. Probar que: si $a|b$ y $c|d$ entonces $ac|bd$.

VIII) Use el segundo principio de inducción matemática para probar que todo entero mayor que 1 es primo o el producto de dos o más primos.

IX) Sea p un número primo tal que $p|a^n$, probar que $p^n|a^n$.

X) Sean p y q números primos y $n, m \in \mathbb{N}$. Probar que

$$p^n|q^m \text{ si y sólo si } p = q \text{ y } m \geq n.$$

XI) Sean $a, x \in \mathbb{N}$ tales que $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}$ y $x = u_1^{m_1} u_2^{m_2} \cdots u_s^{m_s}$ donde $p_1, p_2, \ldots, p_r$ son números primos diferentes entre sí, $u_1, u_2, \ldots, u_s$ son números primos diferentes entre sí y $n_1, n_2, \ldots, n_r, m_i, m_2, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$. Probar que: $x|a$ si y sólo si

a) $\{u_1, u_2, \ldots, u_s\} \subseteq \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ y

b) para cada $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, si $u_i = p_j$ entonces $m_i \leq n_j$.

XII) Sean $a, b \in \mathbb{N}$ y sea $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ la unión de todos los números primos que aparecen en las factorizaciones primas de a y b de manera que podemos escribir $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$ y $b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_n^{b_n}$ donde $a_i, b_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (con exponentes iguales a cero si es necesario). Demuestre que:

$$\begin{aligned} mcd(a,b) &= \Pi_{i=1}^{n} p_i^{min\{a_i,b_i\}}, \\ mcm(a,b) &= \Pi_{i=1}^{n} p_i^{max\{a_i,b_i\}}. \end{aligned}$$

XIII) Encuentre la factorización prima de cada uno de los enteros dados

a) 729

b) 1001

c) 1111

d) $909,090$

e) $10!$

XIV) Encuentre la factorización prima de cada uno de los enteros dados y determine el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo para cada par de enteros.

a) $148,500$

b) $7,114,800$

c) $7,882,875$

XV) Encuentre el $mcd(1000, 625)$, el $mcm(1000, 625)$ y verifique que

$$mcd(1000, 625) mcm(1000, 625) = 1000 \cdot 625$$

XVI) Encuentre el $mcd(92928, 123552)$, el $mcm(92928, 123552)$ y verifique que

$$mcd(92928, 123552)mcm(92928, 123552) = 92928 \cdot 123552$$

XVII) Si el producto de dos enteros es $2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 7^{11}$ y su máximo común divisor es $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$ ¿Cuál es su mínimo común múltiplo?

XVIII) Use el Algoritmo Euclidiano para encontrar el máximo común divisor de:

a) $(14, 35)$

b) $(180, 252)$

c) $(2873, 6643)$

d) $(4148, 7684)$

e) $(1001, 7655)$

XIX) Escribir (a, b) en la forma $sa + tb$ (con $s, t \in \mathbb{Z}$) para los cuatro primeros incisos del ejercicio anterior.

XX) Si $a > 0$, probar que $(ab, ac) = a(b, c)$

Puebla, Pue., a 28 de agosto de 2020