

Tarea # 1

- I) Probar que el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente.
- II) Demostrar que todo subconjunto no vacío de \mathbb{N} acotado superiormente, tiene un máximo.
- III) Demostrar que todo subconjunto no vacío de \mathbb{Z} acotado superiormente, tiene un máximo.
- IV) Sean $n, r \in \mathbb{N}$ y supóngase que para cada $n \geq r$, $p(n)$ es una proposición abierta. Demuestre que: si
- a) $p(r)$ es verdadera, y
 - b) $[p(r) \wedge p(r+1) \wedge \dots \wedge p(t-1) \Rightarrow p(t)]$ es verdadera, entonces $p(n)$ es verdadera para toda $n \geq r$.

Definición 1. La sucesión de Fibonacci está definida recursivamente por $f_1 = 1, f_2 = 1$, y $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geq 3$. Los términos de esta sucesión son llamados los **números de Fibonacci**.

- v) Considérese la sucesión de Fibonacci $\{f_n\}$. Demuestre que:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n f_k = f_{n+2} - 1.$$

- VI) Considérese la sucesión de Fibonacci $\{f_n\}$. Usando el Ejercicio IV, demuestre que: $f_n > \alpha^{n-2}$ para toda $n \geq 3$ donde $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$. [Sugerencia: Observe que α es una solución de $x^2 - x - 1 = 0$.]
- VII) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0 \neq c$. Probar que: si $a|b$ y $c|d$ entonces $ac|bd$.
- VIII) Use el segundo principio de inducción matemática para probar que todo entero mayor que 1 es primo o el producto de dos o más primos.
- IX) Sea p un número primo tal que $p|a^n$, probar que $p^n|a^n$.
- X) Sean p y q números primos y $n, m \in \mathbb{N}$. Probar que

$$p^n|q^m \text{ si y sólo si } p = q \text{ y } m \geq n.$$

XI) Sean $a, x \in \mathbb{N}$ tales que $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}$ y $x = u_1^{m_1} u_2^{m_2} \cdots u_s^{m_s}$ donde p_1, p_2, \dots, p_r son números primos diferentes entre sí, u_1, u_2, \dots, u_s son números primos diferentes entre sí y $n_1, n_2, \dots, n_r, m_1, m_2, \dots, m_s \in \mathbb{N}$. Probar que: $x|a$ si y sólo si

a) $\{u_1, u_2, \dots, u_s\} \subseteq \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ y

b) para cada $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, si $u_i = p_j$ entonces $m_i \leq n_j$.

XII) Sean $a, b \in \mathbb{N}$ y sea $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ la unión de todos los números primos que aparecen en las factorizaciones primas de a y b de manera que podemos escribir $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$ y $b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_n^{b_n}$ donde $a_i, b_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (con exponentes iguales a cero si es necesario). Demuestre que:

$$\begin{aligned} \text{mcd}(a, b) &= \prod_{i=1}^n p_i^{\min\{a_i, b_i\}}, \\ \text{mcm}(a, b) &= \prod_{i=1}^n p_i^{\max\{a_i, b_i\}}. \end{aligned}$$

XIII) Encuentre la factorización prima de cada uno de los enteros dados

a) 729

b) 1001

c) 1111

d) 909,090

e) 10!

XIV) Encuentre la factorización prima de cada uno de los enteros dados y determine el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo para cada par de enteros.

a) 148,500

b) 7,114,800

c) 7,882,875

XV) Encuentre el $\text{mcd}(1000, 625)$, el $\text{mcm}(1000, 625)$ y verifique que

$$\text{mcd}(1000, 625)\text{mcm}(1000, 625) = 1000 \cdot 625$$

XVI) Encuentre el $mcd(92928, 123552)$, el $mcm(92928, 123552)$ y verifique que

$$mcd(92928, 123552)mcm(92928, 123552) = 92928 \cdot 123552$$

XVII) Si el producto de dos enteros es $2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 7^{11}$ y su máximo común divisor es $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$ ¿Cuál es su mínimo común múltiplo?

XVIII) Use el Algoritmo Euclidiano para encontrar el máximo común divisor de:

a) (14, 35)

b) (180, 252)

c) (2873, 6643)

d) (4148, 7684)

e) (1001, 7655)

XIX) Escribir (a, b) en la forma $sa + tb$ (con $s, t \in \mathbb{Z}$) para los cuatro primeros incisos del ejercicio anterior.

XX) Si $a > 0$, probar que $(ab, ac) = a(b, c)$

Puebla, Pue., a 20 de agosto de 2018