Prof. Carlos Alberto López Andrade
Materia: Álgebra Lineal I

Tarea 1

Sea $\mathbb{F}$ un campo, por ejemplo, $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ ó $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ ó $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{F}_2$ ó $\mathbb{F}_3$.

I) Sea $G = M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Probar que G con la operación binaria usual de suma de matrices es un grupo conmutativo.

II) Sea $MTS_{n\times n}(\mathbb{F}) = \{A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{F}) : a_{ij} = 0, i > j\}$. Probar que $MTS_{n\times n}(\mathbb{F})$ es un grupo conmutativo con la operación binaria usual de suma de matrices.

III) Sea $MS_{n\times n}(\mathbb{F}) = \{A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{F}) : A^t = A\}$. Probar que $MS_{n\times n}(\mathbb{F})$ es un grupo conmutativo con la operación binaria usual de suma de matrices.

IV) Sea $C([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ es continua en $[a,b]\}$. Probar que $C([a,b])$ es un grupo con la operación binaria usual de suma de funciones.

V) Sea $G = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} | f$ es derivable en $\mathbb{R}\}$. Probar que G es un grupo con la operación binaria usual de suma de funciones.

VI) Sea $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Probar que G con la operación binaria usual de multiplicación de números complejos es un grupo conmutativo.

VII) Sea $G = \mathbb{F}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{F}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$. Definimos la operación binaria de adición en G por:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Probar que G, junto con esta operación binaria, es un grupo.

VIII) ¿Es $G = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{F}, ad - bc \neq 0\}$ un grupo con la operación binaria usual de suma de matrices?

IX) Sea $GL(2, \mathbb{F}) = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{F}, ad - bc \neq 0\}$. Probar que $GL(2, \mathbb{F})$ es un grupo no conmutativo con la operación binaria usual de multiplicación de matrices.

X) Sea $SL(2, \mathbb{F}) = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{F}, ad - bc = 1\}$. Probar que $SL(2, \mathbb{F})$ es un grupo no conmutativo con la operación binaria usual de multiplicación de matrices.

XI) Probar que $G = \{\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c, \in \mathbb{F}\}$ es un grupo con la operación binaria usual de multiplicación de matrices.

XII) Sea $G = \{\omega_k = e^{(2k\pi/n)i} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} : k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ el conjunto de las raíces n-ésimas de la unidad. Probar que G es un grupo con la operación binaria usual de multiplicación de números complejos.

XIII) Mostrar que $M_{n\times n}(\mathbb{F})$, junto con las operaciones binarias usuales de suma y multiplicación de matrices, es un anillo con identidad.

XIV) Sea $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$. Mostrar que el conjunto $\mathbb{Z}[i]$, junto con las operaciones binarias usuales de suma y multiplicación de números complejos, es un anillo conmutativo con identidad.

XV) Mostrar que el conjunto $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$, junto con las operaciones binarias de suma y multiplicación de números reales, es un anillo conmutativo con identidad pero no es un campo.

XVI) Sea $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$. Mostrar que el conjunto $\mathbb{Q}[i]$, junto con las operaciones binarias usuales de suma y multiplicación de números complejos, es un campo.

XVII) Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $G = \mathbb{F}\times\mathbb{F}$. Definimos las operaciones de adición y multiplicación en G por:

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$

respectivamente. ¿Es G, junto con estas operaciones binarias, un campo?. ¿Es G, junto con estas operaciones binarias un anillo conmutativo con identidad?.

XVIII) Sea $\mathbb{F} = \{\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{F}_3\} \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{F}_3)$. Mostrar que el conjunto F, junto con las operaciones binarias usuales de adición y mulplicación de matrices, es un campo.

XIX) ¿$\mathbb{K} = \{a + bi \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ es un subcampo de $\mathbb{C}$?.

XX) Probar que, si a, b, c son elementos de un campo $\mathbb{F}$ entonces:

a) $0_{\mathbb{F}}a = 0_{\mathbb{F}}$;

b) $(-1_{\mathbb{F}})a = -a$;

c) $a(-b) = -ab = (-a)b$;

d) $-(-a) = a$;

e) $(-a)(-b) = ab$;

f) $-(a + b) = -a - b$;

g) $a(b - c) = ab - ac$;

h) Si $a \neq 0_{\mathbb{F}}$ entonces $(a^{-1})^{-1} = a$;

i) Si $a, b \neq 0_{\mathbb{F}}$ entonces $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$;

j) Si $a+b=a+c$ entonces $b=c$;

k) Si $c\neq 0_{\mathbb{F}}$ y $ac=bc$ entonces $a=b$;

l) Si $ab=0_{\mathbb{F}}$ entonces $a=0_{\mathbb{F}}$ ó $b=0_{\mathbb{F}}$.

Puebla, Pue., a 14 de agosto de 2019