BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Prof. Carlos Alberto López Andrade
Materia: Matemáticas Básicas+Problemas de Matemáticas Básicas

---

Tarea $\#\ 10$ *(Números Naturales, Números Enteros, Racionales e Irracionales)*

Parte I

Resolver los ejercicios $1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 17, 18$ del bloque de Ejercicios 5 de la sección 3.5 (páginas 143,144,145) del Capítulo 3 **Números Reales** del libro de texto Matemáticas Elementales [1].

Parte II

Resolver los ejercicios $1, 2, 3, 6, 12, 24, 25, 32$ del bloque de Ejercicios 6 de la sección 3.6 (páginas 161,162,166) del Capítulo 3 **Números Reales** del libro de texto Matemáticas Elementales [1].

Parte III

I) Pruébese que si $\xi \in \mathbb{R}$ es irracional y $r \neq 0$ es racional entonces $r + \xi$ y $r\xi$ son irracionales.

II) Si x y y son números irracionales, probar que no se infiere que $x + y$ y xy son irracionales.

[1] J. Angoa, A. Contreras, et. al., Matemáticas Elementales, Dirección de Fomento Editorial, BUAP, Segunda Edición, 2010.

Puebla, Pue., a 24 de noviembre de 2020

lo cual es falso. Por lo tanto $\alpha = n_0$. ■

Esta prueba hace uso del axioma del supremo, pero se pueden dar demostraciones del principio del buen orden que no dependan de este axioma (ver ejercicio 16 de Ejercicios 5.).

En secciones posteriores apreciaremos lo trascendente de este principio. Mientras tanto, ahí les van los

Ejercicios 5.

1. Demuestre que $\mathbb{R}_+$, $(-3, \infty)$ y todo intervalo de la forma $[a, \infty]$ con $a \leq 1$, son inductivos.

2. Si A y B son inductivos, pruebe que $A \cap B$ también lo es. ¿Qué puede decir de $A \cup B$?

3. Pruebe que $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 - 2^{n+2} + 2 \cdot 3^{n+1} - 4^{n+1} + 5^n = 0\}$ no es inductivo. (*Sugerencia*: ¿$4 \in A$?)

4. Demuestre (2) del teorema 3.5.4.

5. Demuestre (2), (3) y (4) del corolario del teorema 3.5.5.

6. Use el principio de inducción matemática para demostrar que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \ \forall\, m \in \mathbb{N}: \ n < m \Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{N}: \ n + r = m.$$
(*Sugerencia*: Pruebe que es inductivo el conjunto
$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall\, m \in \mathbb{N}: \ n < m \Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{N}: \ n + r = m\})$$

7. Demuestre que $\forall\, n,\, m \in \mathbb{N}: \ (n < m \Rightarrow m - n \in \mathbb{N})$. (*Sugerencia*: Use el ejercicio 6)

8. Pruebe el teorema 3.5.8

9. Demuestre que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ acotado superiormente, tiene máximo.

10. Probar que $\forall\, n \in \mathbb{N}: \; 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

11. Observar que

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1-4 &= -(1+2) \\ 1-4+9 &= 1+2+3 \\ 1-4+9-16 &= -(1+2+3+4). \end{aligned}$$

Conjeturar una ley general sugerida por estos ejemplos, expresarla en una conveniente notación matemática y probarla.

12. Evalúe la expresión
$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n}$$
para $n = 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6$.

Conjeture una fórmula para este cociente.

Usando el problema (9), obtenga una fórmula para $1^2+2^2+\cdots+n^2$ y pruébela. (*Sugerencia*: $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

13. Hallar el error en la siguiente "prueba por inducción" de que *cualesquiera n muchachas tienen ojos del mismo color*.

Sea $P(n)$: Si $m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_n$ son n muchachas, entonces $m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_n$ tienen ojos del mismo colos.

$P(1)$ es obviamente cierta. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $P(n)$ es cierta. Para probar $P(n+1)$ sean $m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_{n+1}$ cualesquiera $n+1$ muchachas. Como se vale $P(n)$, $m_1,\, \ldots,\, m_n$ tienen el mismo color de ojos entre sí y $m_2,\, \ldots,\, m_{n+1}$ también. Por consiguiente todas tienen el mismo color de ojos.

Así que $\forall\, n \in \mathbb{N}: \; P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Por consiguiente

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \; P(n).$$

14. A continuación se "demuestra" que $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ n = n + 1$.

    "Sea $A = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n = n + 1\}$.

    $1 \in A$ por definición de A.

    Probaremos que $\forall\, n \in \mathbb{R}:\ n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$.

    Sea $n \in \mathbb{R}$. Entonces

    $$\begin{aligned} n \in A \ &\Rightarrow\ n = n + 1 \quad \text{y} \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 = n + 2 \quad \text{y} \quad n + 1 \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow\ n + 1 = (n + 1) + 1 \quad \text{y} \quad n + 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in A. \end{aligned}$$

    Por lo tanto A es inductivo y como $A \subseteq \mathbb{N}$, por el principio de inducción matemática, se tiene $A = \mathbb{N}$". ¿En dónde esta el error?

15. Demuestre el "principio de recursión":

    Si $P(n)$ es una proposición abierta en $\mathbb{N}$ y si:

    a) $P(1)$ es verdadera.
    b) $[\forall\, n \in \mathbb{N}:\ P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(n) \Rightarrow P(n + 1)]$ es verdadera, entonces también es verdadera:

    $$\forall\, n \in \mathbb{N}:\ P(n).$$

    (*Sugerencia*: Defina $q(n)$ como $P(1) \wedge P(2) \ldots \wedge P(n)$ y pruebe por inducción matemática que $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ q(n)$.)

16. Usando el principio de recursión pruebe el principio del buen orden. (*Sugerencia*: pruebe por recursión que si $S \subseteq \mathbb{N}$ y $S \neq \varnothing$, entonces $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ n \in S \Rightarrow S$ tiene mínimo)

17. Demuestre que si $\varepsilon > 0$, $\exists\, n \in \mathbb{N}:\ \ \frac{1}{n} < \varepsilon$. (*Sugerencia*: Use la propiedad Arquimediana.)

18. Pruebe que $1 = \sup\left\{\frac{n-1}{n}:\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

tentos con los estigmas causados por su ira en Hipasso de Metaponto, dos fuertes hombres lo echaron a un estanque repleto de pirañas hambrientas, muriendo Hipasso inmediatamente ... o antes.

Como era de esperarse, el descubrimiento de la existencia del número irracional, constituyó una seria conmoción para la escuela Pitagórica y se cree que contribuyó a su destrucción. A partir del momento en que se descubrieron los irracionales, los griegos se apartaron de los números y dedicaron su atención a las líneas y superficies, entre las cuales no se suscitaban esas dificultades lógicas. El resultado fué el desarrollo de una geometría de las medidas que es tal vez la principal aportación de los griegos a las matemáticas.

Ejercicios 6.

1. Demuestre que $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}$; $a + b \in \mathbb{Z}$, $a - b \in \mathbb{Z}$ y $a \cdot b \in \mathbb{Z}$.

2. Pruebe que $\forall\, r, s \in \mathbb{Q}$; $r + s \in \mathbb{Q}$, $r \cdot s \in \mathbb{Q}$, y si $s \neq 0$, $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$.

3. Probar que si $a \in \mathbb{Z}$ y $a < 0$, entonces $(a, a+1) \cap \mathbb{Z} = \varnothing$.

4. Demuestre que si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a < b$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a + n = b$.

5. Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $(a, b) \cap \mathbb{Z} = \varnothing$, entonces $b = a + 1$.

6. Demuestre que $\mathbb{Z}$ no está acotado superiormente y no está acotado inferiormente.

7. Pruebe que si $A \subseteq \mathbb{Z}$, $A \neq \varnothing$ y A está acotado superiormente, entonces A tiene máximo (Usar ejercicio 5.9).

8. Pruebe que si $A \subseteq \mathbb{Z}$, $A \neq \varnothing$ y A está acotado inferiormente, entonces A tiene máximo.

9. Si $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, definimos $|x^0 = 1|$ y, si $n \in \mathbb{N}$, $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$,

   (a) Compruebe que si $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$

(b) Demuestre las "leyes de los exponentes enteros" (puede usar el teorema 5.5): Sean $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $a, b \in \mathbb{Z}$. Entonces

i) $x^a x^b = x^{a+b}$.

ii) $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$.

iii) $(xy)^a = x^a x^b$.

iv) $(x^a)^b = x^{ab}$.

10. Calcule $\left[\frac{3}{7}\right]$, $\left[3\frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{-85}{3}\right]$, $[-3.1416]$, $\left[\sqrt{2}\right]$, $[-2^{15}]$.

11. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Demuestre las siguientes afirmaciones:

(a) $x - 1 < [x] \leqslant x$.

(b) $\forall\, a \in \mathbb{Z}\ : [x + a] = [x] + a$.

(c) $-[-x]$ es el elemento más pequeño no menor que x.

(d) $[x] + [y] \leqslant [x + y] \leqslant [x] + [y] + 1$ (use que $[x + +y]$ es el mayor entero menor o igual que $x + y \leqslant [x + y]$).

(e) $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

(f) $[2x] - 2[x] \in \{0, 1\}$ (use (d)).

(g) $\forall\, a \in \mathbb{Z} : \left[\frac{a}{2}\right] - \left[-\frac{a}{2}\right] = a$

12. Si $r, s \in \mathbb{Q}$ y $r < s$, halle explícitamente un racional t tal que $r < s < t$ (¿Qué tal "el promedio" de r y s?).

13. Compruebe que $4| - 8$, que $-3| - 6$, que $7|0$ y que $3 \not| 5$.

14. Demuestre (1), (2), (3), (4), (5) y (7) del teorema 3.6.4 (checar Enrique 2010).

15. **Definición 3.6.9** Sean a y b enteros que no son cero al mismo tiempo. El **Máximo Común Divisor** de a y b es el máximo de todos los divisores comunes de a y b . Este número se denotará como m.c.d.(a, b).

    Sean a y b enteros que no son cero al mismo tiempo. Pruebe que:

c) He aquí otra prueba de que $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ \sqrt{n} \in \mathbb{Z}$ o $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$, sin usar divisibilidad. Justifique cada paso.
Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Z}$ pero que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{Z} \text{ y } b \in \mathbb{N} \text{ tales que } \sqrt{n} = \frac{a}{b} \text{ y } b > 1.$$

Sea $m_0 = \text{mín}\, A$, donde

$$A = \left\{ m \in \mathbb{N} \,|\, m > 1 \text{ y } \exists\, l \in \mathbb{Z} : \sqrt{n} = \frac{l}{m} \right\}.$$

Sea $l \in \mathbb{Z}$ tal que $\sqrt{n} = \frac{l}{m_0}$ y $t = \left[\frac{l}{m_0}\right]$; entonces

$$\begin{aligned} l^2 = nm_0^2 \ &\Rightarrow\ l^2 - tlm_0 = nm_0^2 - tlm_0 \\ &\Rightarrow\ l(l - tm_0) = m_0(n - tl) \\ &\Rightarrow\ \sqrt{n} = \tfrac{l}{m_0} = \tfrac{n-tl}{l-tm_0}. \end{aligned}$$

Pero $l - tm_0 \neq 1$ y $t < \frac{l}{m_0} < t + 1 \Rightarrow m_0 t < l < m_0 t + m_0 \Rightarrow 0 < l - m_0 t < m_0$. Por lo tanto $l - m_0 t \in A$ y $l - m_0 t < m_0$ lo cual es una contradicción.

24. a) Pruebe que si $r \in \mathbb{Q} - \{0\}$, $\sqrt{2}\, r \notin \mathbb{Q}$.

    b) Pruebe que si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x < y$ existe α irracional tal que $x < \alpha < y$. (*Sugerencia*: $x < y \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}}$ y use la densidad de $\mathbb{Q}$).

25. Ahora sí, pruebe que $\sqrt{2}$ existe, es decir, que existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\beta \geq 0$ y $\beta^2 = 2$.

    (*Sugerencia*: Sea $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0 \ \text{ y } \ x^2 < 2\}$. Demuestre que B tiene supremo. Sea $\beta = \sup B$; pruebe que $\beta^2 = 2$. Le pueden ser útiles muchísimas ideas de la prueba de que $\alpha = \sup\{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0 \text{ y } x^2 < 2\}$, ver páginas 157 y 158).

26. Evalúe la validez de la demostración del siguiente resultado.

    Si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $y \in \mathbb{Q}$, entonces $z = x - y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

    Demostración: Supongamos que la conclusión no es cierta, es decir, que $z = x - y \in \mathbb{Q}$, entonces existen $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$ tales que