**Ejemplos:**

1. Sea la ecuación
$$3x + 5 = x - 3$$
veamos que:

   $c \in \mathbb{R}$ es solución de la ecuación $\Leftrightarrow 3c + 5 = c - 3 \Leftrightarrow 3c + (-c) = (-5) - 3 \Leftrightarrow 2c = -8 \Leftrightarrow c = -\frac{8}{2} = -4$.

   Así que el conjunto solución es: $\{-4\}$.

2. Sea la ecuación
$$x^2 - 5 = -4x$$

   $c$ es solución de $x^2 - 5 = -4x \Leftrightarrow c^2 + 4c - 5 = 0 \Leftrightarrow (c+5)(c-1) = 0 \Leftrightarrow c + 5 = 0$ o $c - 1 = 0 \Leftrightarrow c = -5$ o $c = 1$

   Así que el conjunto solución es: $\{-5,\, 1\}$

3. Veamos en general una ecuación del tipo
$$x^2 + px + q = 0,$$
donde $p,\, q \in \mathbb{R}$

   $c$ será solución de ella $\Leftrightarrow c^2 + pc + q = 0 \Leftrightarrow c^2 + 2\left(\frac{p}{2}\right)c + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \Leftrightarrow \left(c + \frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(c + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ y $\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0 \text{ o } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0 \text{ o } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0\right)$ (tricotomía) $\Leftrightarrow \left(c + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ y $\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0 \text{ o } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0\right)$.

   Note que si $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, entonces no puede ser el cuadrado de un número real, entonces los $c \in \mathbb{R}$ que sean solución de la ecuación, no existen y el conjunto solución será el $\varnothing$.

   Pero también
$$c + \frac{p}{2} > 0 \text{ o } c + \frac{p}{2} = 0 \text{ o } c + \frac{p}{2} < 0$$

   Usando la definición de raíz y el ejercicio 5 de los ejercicios 1 de esta sección, tendremos

a) $\left(c+\frac{p}{2}>0 \text{ o } c+\frac{p}{2}=0\right)$ y $\left(\left(c+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right)$
y $\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0 \text{ o } \left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0\right)$
$\Leftrightarrow c+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ o sea $c=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$
o bien

b) $\left(c+\frac{p}{2}<0\right)$ y $\left(\left(c+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right)$
y $\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0 \text{ o } \left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0\right)$

$\Leftrightarrow c+\frac{p}{2}=-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ o sea $c=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$

Resumiendo:

I) El conjunto solución de $x^2+px+q=0$ es el conjunto vacío $\Leftrightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$

II) El conjunto solución de $x^2+px+q=0$ es $\left\{-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},\ -\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right\} \Leftrightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0$ o $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0$

4. Ahora sea la ecuación

$$ax^2+bx+c=0,$$

con $a\neq 0$. Entonces

$d$ es solución de $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow ad^2+bd+c=0 \Leftrightarrow$ (como $a\neq 0$) $\frac{1}{a}(ad^2+bd+c)=0 \Leftrightarrow d^2+\frac{b}{a}d+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow d$ es solución de $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$.

Ahora, usando lo anterior tenemos:

El conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0$ es el conjunto vacío

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} < 0$$

o bien, el conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0$ es el conjunto

$$\left\{ -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}},\ -\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \right\}.$$

## Ejercicios 1.

1. Demuestre que si $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$ entonces:

   *a*) $a - b = -(b - a)$.

   *b*) $(a + b)(a - b) - a(a - b) + b(b - a) = 0$.

   *c*) $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0$.

   *d*) $(-a)(c - d) = ad - ac$.

   *e*) Si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$ y $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$.

   *f*) $a^{-1} = 1 \Rightarrow a = 1$.

   *g*) $(-a)^2 = a^2$.

   *h*) $(ab)^2 = a^2b^2$.

   *i*) $-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{(-a)}{b} = \frac{a}{(-b)}$.

   *j*) $1^{-1} = 1$.

   *k*) $-0 = 0$.

   *l*) Demuestre que 0 es el único real tal que $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = a$ y que 1 es el único real tal que $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = a$.

   *m*) $a > 0$, $b > 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

   *n*) Si $a > 0$, $b > 0$ ¿Cuándo $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$?.