



Los capítulos del presente libro son co-creados por los autores al poner su atención e intención en su participación en la Novena Gran Semana Nacional de la Matemática (9GSNM). La 9GSNM emana de la fortuna de contar con el mejor comité organizador que ha puesto la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, he aquí los resultados que promueven la riqueza matemática, trabajos tenaces que lograron sobreponerse a los inexorables jueces y fueron autorizados después de un arbitraje riguroso.

BUAP

FCFM

CSMA



textos
Científicos



Matemáticas y sus Aplicaciones 4

Matemáticas y sus Aplicaciones 4

Fernando Macías Romero
Editor

Matemáticas y sus Aplicaciones 4



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Fernando Macías Romero
Editor

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

José Alfonso Esparza Ortiz

Rector

René Valdiviezo Sandoval

Secretario General

Ygnacio Martínez Laguna

Vicerrector de Investigación y Estudios de Posgrado

Flavio Marcelino Guzmán Sánchez

E. D. Vicerrectoría de Extensión y Difusión de la Cultura

Ana María Dolores Huerta Jaramillo

Directora de Fomento Editorial

José Ramón Enrique Arrazola Ramírez

Director de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Primera edición, 2014

ISBN: 978 607 487 791 5

© Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Dirección de Fomento Editorial

2 Norte 1404, C.P. 72000

Puebla, Pue.

Teléfono y fax: 01 222 246 8559

Impreso y hecho en México

Printed and made in Mexico

Matemáticas y sus Aplicaciones 4

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos trabajos presentados en la Novena Gran Semana Nacional de la Matemática 2013, FCFM, BUAP.

Editor

Fernando Macías Romero

Comité científico internacional

María de la Paz Álvarez Scherer (UNAM), Sergey Antonyan (UNAM), Jorge Bustamante González (BUAP), Miguel Ángel García Ariza (BUAP), David Herrera Carrasco (BUAP), Alejandro Illanes Mejía (UNAM), Judy Kennedy (LU, USA), José Luis León Medina (BUAP), María de Jesús López Toriz (BUAP), Fernando Macías Romero (BUAP), Jorge Marcos Martínez Montejano (UNAM), Javier Mendoza Torres (BUAP), Cándido Piñeiro Gómez (UHU, ESP), Ricardo Podestá (UNC, ARG), José Gregorio Rodríguez Nieto (UNC, CO), Guillermo Sienra Loera (UNAM), Gerardo Torres del Castillo (BUAP), Roberto Torres Hernández (UAQ), Teresa de Jesús Valerio López (UAQ).

Contenido

Presentación	1
Álgebra	
Capítulo 1. Códigos de Hamming	5
<i>Carlos Alberto López Andrade</i>	
Análisis matemático	
Capítulo 2. Relaciones Canónicas de Conmutación en el Cálculo Estocástico Cuántico	37
<i>Slaviša Djordjević, Julio César García Corte, Héctor Manuel Garduño Castañeda</i>	
Capítulo 3. Condiciones que implican la continuidad de una función real de variable real	65
<i>Manuel Ibarra Contreras, Armando Martínez García</i>	
Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y modelación matemática	
Capítulo 4. Dinámica de las familias $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ y $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z + 1/z$	89
<i>Patricia Domínguez, Josué Vázquez</i>	
Geometría	
Capítulo 5. El misterio del triángulo de Feynman	109
<i>Aarón Aparicio Hernández</i>	
Topología	
Capítulo 6. G-fibraciones regulares	131
<i>Alexander Bykov, Raúl Juárez Flores, Aura Lucina Kantún Montiel</i>	

Capítulo 7. Gráficas finitas con hiperespacio único $C_n(X)$	159
<i>Vianey Córdova Salazar, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero</i>	
Capítulo 8. Dendritas C-determinadas	183
<i>David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Germán Montero Rodríguez</i>	
Capítulo 9. Introducción a la función \mathcal{T} de Jones	209
<i>María de Jesús López Toriz</i>	
Capítulo 10. Espacios de dimensión cero y su relación con los espacios totalmente desconexos	227
<i>Fernando Macías Romero, Arturo Sánchez González</i>	
Índice de autores	247

Presentación

La felicidad que propone este libro por su divulgación, investigación e intercambio de ideas se debe a la audacia de muchísimos matemáticos que participaron en la denominada Novena Gran Semana Nacional de la Matemática (9GSNM), un esfuerzo profesional, consolidado que ha permitido la participación de personajes de diversas universidades nacionales y extranjeras tanto en el desarrollo de la 9GSNM como en su memoria escrita, que es el presente libro.

La base ha sido un comité organizador vigoroso emanado de la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas trabajando con tanto entusiasmo (semejante a los niños con golosinas), este resultado no es ni siquiera setemesino, es normal, de por lo menos nueve meses de trabajo constante, todo por el amor a la matemática es que ha nacido un ejemplar que nos brinda la sabiduría necesaria para mostrarles parte de nuestros quehaceres cotidianos.

Los capítulos de este libro están agrupados por secciones de acuerdo al área de inspiración en la 9GSNM, dichos capítulos fueron sometidos a arbitraje riguroso. Agradecemos, con toda el alma, a todos los árbitros su amabilidad, gentileza, dedicación y trabajo científico.

Fernando Macías Romero
Editor

Álgebra

Capítulo 1

Códigos de Hamming

Carlos Alberto López Andrade

FCFM, BUAP

Resumen

Los códigos detectores-correctores de errores son el medio por el cual los errores que pueden ser introducidos en los datos digitales, como resultado de la transmisión a través de un canal de comunicación, pueden ser corregidos en base a los datos recibidos. Los códigos de Hamming son probablemente entre los códigos correctores de errores los más famosos. Fueron descubiertos de forma independiente por Marcel Golay en 1949 y Richard Hamming en 1950. Son códigos correctores de un sólo error, muy fáciles de codificar y decodificar. En este trabajo, a través de un código binario de Hamming, se introducen los conceptos básicos de la Teoría de Códigos Lineales Detectores-Correctores de Errores y posteriormente se describen los códigos de Hamming, cabe señalar que este es un capítulo de libro de divulgación, enfocado a introducir en el tema, de una manera sencilla, a los alumnos de los primeros semestres de las licenciaturas en Matemáticas, Matemáticas Aplicadas, Física, Física Aplicada y Ciencias de la Computación, entre otros. Este no es un material nuevo, se puede consultar en los diversos textos citados en las referencias, más sí la forma en que se divulga.

1. Introducción

Todo dispositivo de lectura o grabación de CD's o DVD's o unidad de disco duro, emplea códigos detectores-correctores de errores para proteger los datos grabados, cada llamada telefónica hecha a través del teléfono móvil los emplea, así como cada fotografía transmitida desde una nave espacial a la Tierra. Cada paquete transmitido a través de internet tiene una envoltura protectora de codificación utilizada para determinar si el paquete ha sido recibido correctamente. Incluso en el comercio cotidiano están presentes los códigos detectores-correctores de errores; por ejemplo, los códigos de barras que identifican los distintos productos en los supermercados y el ISBN (International Standard Book Number) para la catalogación de libros.

Varias familias de códigos lineales fueron construidas en los años 50's y principios de los años 60's del siglo XX, entre las cuales se encuentran los códigos de Hamming, Golay, Reed-Muller y los códigos cíclicos, entre otros.

La leyenda dice que Richard Hamming estaba tan frustrado de que la computadora se parara cada vez que detectaba un error, que se ensimismó en una pila de tarjetas perforadas, pensó en una forma en la que la computadora fuera capaz no sólo de detectar el error sino también de corregirlo automáticamente y volvió con su hoy en día famoso código de Hamming.

La idea en los códigos correctores de errores consiste en añadir información redundante de tal manera que es posible detectar o incluso corregir errores después de la transmisión. La adición de un símbolo de chequeo de paridad permite detectar un error tal como sucede con el código ISBN para los libros, y el Código Universal de Producto (UPC) para los productos.

En esta sección introductoria ilustramos las ideas centrales de la teoría de la información (cf. [3]) por medio de un par específico de modelos matemáticos, la fuente simétrica binaria y el canal simétrico binario.

La *fente simétrica binaria* (la fuente, para abreviar) es un objeto que emite uno de dos posibles símbolos, los cuales tomamos como “0” y “1”, a una tasa de R símbolos por unidad de tiempo. Llamaremos a estos símbolos bits, una abreviación de dígitos binarios. Los bits emitidos por la fuente son aleatorios, y un “0” es igualmente probable de ser emitido que un “1”.

El *canal simétrico binario* (CSB para abreviar) es un objeto a través del cual es posible transmitir un bit por unidad de tiempo. Sin embargo el canal no es completamente fiable; hay una probabilidad fija p (llamada la probabilidad de errores de bits en bruto), $0 \leq p < \frac{1}{2}$, de que el bit de salida no sea el mismo bit de entrada Figura 1.

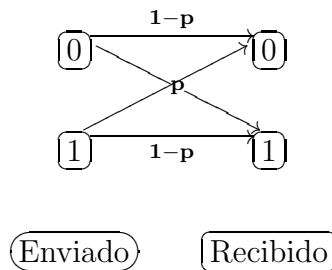


Figura 1: Canal simétrico binario (CBS)

Ahora imaginemos a dos individuos, el remitente (emisor) y el receptor. El remitente debe tratar de transmitir al receptor con la mayor precisión posible la salida de la fuente, y el único vínculo de comunicación permitido entre los dos es el CSB descrito arriba.

2. Codificación

Los códigos detectores correctores de errores fueron inventados para detectar y corregir errores producidos por el ruido en los canales de comunicación (cf. [2]). Vamos a codificar mensajes para darles alguna protección contra errores en el canal. En la Figura 2 se muestra un sistema general de transmisión de información.

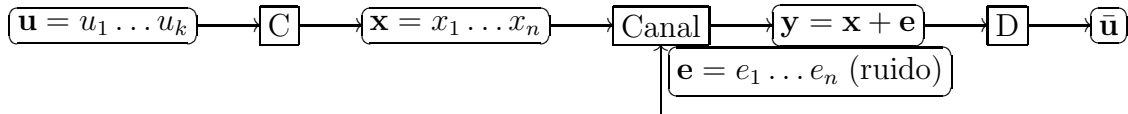


Figura 2: Sistema general de transmisión de información

Un campo es una estructura algebraica en donde se puede sumar, restar, multiplicar y dividir. Formalmente un campo es un conjunto \mathbb{F} junto con dos operaciones binarias, “+” y “·”, tales que

1. \mathbb{F} es un grupo abeliano bajo “+”, cuyo elemento neutro es 0.
2. Los elementos distintos de cero de \mathbb{F} forman un grupo abeliano bajo “·”, cuyo elemento neutro es 1.
3. La ley distributiva $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ se cumple.

Un campo es llamado finito o infinito dependiendo de si el conjunto es finito o infinito. Como ejemplos de campos infinitos tenemos al campo de los números reales, al campo de los números racionales, al campo de los números complejos y al campo de las funciones racionales definidas sobre un campo.

Un campo finito extremadamente interesante en todas las aplicaciones digitales es $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, definido a través de las operaciones binarias “+” y “·” dadas por las Tablas de Cayley,

+	0	1
0	0	1
1	1	0

y

·	0	1
0	0	0
1	0	1

es decir, en \mathbb{F}_2 , realizamos aritmética módulo 2.

Sea \mathbb{F}_2^n el conjunto de n -adas de elementos de \mathbb{F}_2 , \mathbb{F}_2^n es un espacio vectorial sobre \mathbb{F}_2 . Se dice que \mathcal{C} es un *código de longitud n sobre \mathbb{F}_2* o que \mathcal{C} es un *código binario de longitud n* si \mathcal{C} es un

subconjunto de \mathbb{F}_2^n . Un (n, M) -código \mathcal{C} sobre \mathbb{F}_2 es un código de longitud n y tamaño M . A los elementos de un código \mathcal{C} se les llama *palabras-código*.

Un bloque de mensaje de k símbolos $\mathbf{u} = u_1u_2 \dots u_k$ ($u_i \in \mathbb{F}_2$) será codificado en una palabra-código $\mathbf{x} = x_1x_2 \dots x_n$ ($x_i \in \mathbb{F}_2$) donde $n \geq k$.

Si utilizamos un método de codificación sistemático la primera parte de la palabra-código consistirá del mensaje mismo $x_1 = u_1, x_2 = u_2, \dots, x_k = u_k$, seguida por $n - k$ símbolos comprobadores o chequeadores de paridad -bits de redundancia- x_{k+1}, \dots, x_n . Los símbolos comprobadores son escogidos de manera que las palabras-código \mathbf{x} satisfagan

$$H\mathbf{x}^t = \mathbf{0} \quad (1)$$

donde $H \in \mathcal{M}_{(n-k) \times n}$ es la *matriz comprobadora de paridad estándar* o *matriz de chequeo de paridad estándar* del código, dada por

$$H = [A|I_{n-k}], \quad (2)$$

donde $A \in \mathcal{M}_{(n-k) \times k}(\mathbb{F}_2)$ fija e $I_{n-k} \in \mathcal{M}_{(n-k) \times (n-k)}(\mathbb{F}_2)$ es la matriz identidad, la aritmética en la ecuación (1) es realizada módulo 2.

Podemos usar la ecuación (1) como nuestra definición general de código lineal binario.

Definición 2.1. Sea $H \in \mathcal{M}_{(n-k) \times n}(\mathbb{F}_2)$ arbitraria. Llamamos código lineal binario \mathcal{C} con matriz de chequeo de paridad H al conjunto que consiste de todos los vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n$ tales que $H\mathbf{x}^t = \mathbf{0}$, i.e.,

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n : H\mathbf{x}^t = \mathbf{0}\}.$$

Es conveniente, pero no esencial, que H tenga la forma mostrada en (2). A lo largo de este trabajo desarrollamos un ejemplo que nos será útil para ilustrar los distintos conceptos que se presentarán.

Ejemplo 2.2. Sea

$$H = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (3)$$

en $\mathcal{M}_{3 \times 7}(\mathbb{F}_2)$ la matriz de chequeo de paridad del código lineal \mathcal{H} dada como en (2) donde

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad (4)$$

$n = 7$ y $k = 4$. Cada palabra-código contiene cuatro símbolos de mensaje x_1, x_2, x_3, x_4 y tres símbolos chequeadores x_5, x_6, x_7 tales que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_4 + x_5 &= 0 \\x_1 + x_3 + x_4 + x_6 &= 0 \\x_2 + x_3 + x_4 + x_7 &= 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Las ecuaciones (5) son llamadas las *ecuaciones de chequeo de paridad*, o simplemente *chequeos de paridad del código lineal* \mathcal{H} . Observemos que la suma de las componentes de toda palabra-código involucradas en cada una de las ecuaciones debe ser igual a un número par, es decir, debe sumar 0 módulo 2.

Si el mensaje es $\mathbf{u} = 0110$ entonces los símbolos de mensaje son $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0$ y los símbolos chequeadores son $x_5 = 1, x_6 = 1, x_7 = 0$, así, el mensaje $\mathbf{u} = 0110$ está codificado en la palabra-código $\mathbf{x} = 0110110$, como se puede apreciar la palabra-código comienza con el mensaje. Como cada uno de los 4 símbolos de mensaje es 0 o 1, hay 2^4 mensajes y por ende 2^4 palabras-códigos.

En la siguiente tabla se exhiben todos y cada uno de los posibles mensajes con su palabra-código correspondiente y el peso de cada palabra-código, el cual se define como el número de componentes de \mathbf{x} distintas de cero, del código lineal \mathcal{H} .

$\mathbf{u} = u_1u_2u_3u_4$	$\mathbf{x} = x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$	$wt(\mathbf{x})$	$\mathbf{u} = u_1u_2u_3u_4$	$\mathbf{x} = x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$	$wt(\mathbf{x})$
0000	0000000	0	1000	1000110	3
0001	0001111	4	1001	1001001	3
0010	0010011	3	1010	1010101	4
0011	0011100	3	1011	1011010	4
0100	0100101	3	1100	1100011	4
0101	0101010	3	1101	1101100	4
0110	0110110	4	1110	1110000	3
0111	0111001	4	1111	1111111	7

□

De la Definición 2.1 se desprende que \mathcal{C} es un subespacio vectorial de \mathbb{F}_2^n ya que si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C}$ y $\lambda \in \mathbb{F}_2$ entonces $H(\mathbf{x} + \mathbf{y})^t = H\mathbf{x}^t + H\mathbf{y}^t = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ y $H(\lambda\mathbf{x})^t = H\lambda\mathbf{x}^t = \lambda H\mathbf{x}^t = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$, i.e., $H(\mathbf{x} + \mathbf{y})^t = \mathbf{0}$ y $H(\lambda\mathbf{x})^t = \mathbf{0}$ para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C}$ y $\lambda \in \mathbb{F}_2$, por consiguiente, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C}$ y $\lambda \in \mathbb{F}_2$ entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{C}$ y $\lambda\mathbf{x} \in \mathcal{C}$. De hecho, \mathcal{C} es el espacio vectorial de las soluciones de la ecuación matricial $H\mathbf{x}^t = \mathbf{0}$ o equivalentemente es el espacio vectorial de las soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneas que tiene a la matriz de chequeo de paridad H como la matriz asociada al sistema de ecuaciones lineales homogéneas o equivalentemente es el espacio nulo de la matriz H .

Ejemplo 2.3. Continuación del Ejemplo 2.2. Sea H la matriz del Ejemplo 2.2, dicha matriz es equivalente a la matriz escalonada reducida por filas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Deseamos resolver el sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuya matriz asociada al sistema es (6), para ello, tenemos que x_3, x_5, x_6 y x_7 son variables libres entonces el sistema de ecuaciones lineales homogéneas (5) es equivalente a

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 + x_5 + x_7 \\ x_2 &= x_3 + x_5 + x_6 \\ x_4 &= x_5 + x_6 + x_7 \end{aligned} \quad (7)$$

cuyo espacio vectorial de soluciones tiene al conjunto

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)\}$$

como una base, tomemos a estos vectores como los vectores fila de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

la matriz (8) es equivalente a la matriz escalonada reducida por filas

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

luego la matriz (9) genera al espacio de soluciones de la ecuación matricial $H\mathbf{x}^t = \mathbf{0}$ donde H es la matriz dada por (3). Tal espacio de soluciones es el código lineal \mathcal{H} cuyas palabras-código están enlistadas en la Tabla del Ejemplo 2.2, luego la matriz G es una matriz generadora del código lineal \mathcal{H} , la matriz dada por (8) también es una matriz generadora del mismo código lineal. Obsérvese que la matriz G tiene la forma $[I_4 | -A^t]$, i.e.,

$$G = [I_4 | -A^t] \quad (10)$$

donde A es la matriz dada por (4) y toda $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ es tal que $\mathbf{x} = \mathbf{u}G$.

□

Si un código lineal \mathcal{C} , usando el método de codificación sistemático, tiene como matriz generadora a $G = [I_k | -A^t]$ donde $A \in \mathcal{M}_{(n-k) \times k}(\mathbb{F}_2)$ se dice que G es la *matriz generadora estándar* del código lineal \mathcal{C} .

Proposición 2.4. *Si \mathcal{C} es un código lineal binario con matriz de chequeo de paridad $H = [A | I_{n-k}] \in \mathcal{M}_{(n-k) \times n}(\mathbb{F}_2)$, entonces su matriz generadora está dada por $G = [I_k | -A^t]$ y viceversa.*

Demostración. Si el mensaje es $\mathbf{u} = u_1 \cdots u_k$, entonces $\mathbf{x} = x_1 \cdots x_n \in \mathcal{C}$ es tal que $x_1 = u_1, \dots, x_k = u_k$, de ahí que,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = I_k \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}.$$

A partir de (1) y (2), tenemos que

$$[A | I_{n-k}] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

entonces

$$\mathbf{0} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} + I_{n-k} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

esto implica que,

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = -A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$$

por consiguiente,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} \\ -A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k \\ -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}, \text{ i.e., } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k \\ -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix},$$

trasponiendo la última ecuación, obtenemos $\mathbf{x} = [x_1 x_2 \dots x_n] = [u_1 \dots u_k][I_k | -A^t] = \mathbf{u}G$, donde $G = [I_k | -A^t]$.

Por lo tanto,

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}G, \quad (11)$$

“ \mathbf{u} ” es el mensaje y “ \mathbf{x} ” la palabra-código correspondiente. \square

De (11) se sigue que un código lineal binario \mathcal{C} es el espacio fila de su matriz generadora.

Proposición 2.5. *Si \mathcal{C} es un código lineal binario con matriz de chequeo de paridad $H = [A|I_{n-k}] \in \mathcal{M}_{(n-k) \times n}(\mathbb{F}_2)$, entonces $\dim \mathcal{C} = k$ y $|\mathcal{C}| = 2^k$.*

Demostración. Como $\text{rango}(H) = n - k$ entonces $\text{nulidad}(H) = n - (n - k) = k$, por consiguiente, $\dim \mathcal{C} = k$ y toda palabra-código se puede escribir como combinación lineal de k vectores en \mathcal{C} , i.e., $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i$ donde $\alpha_i \in \mathbb{F}_2$ y $\mathbf{x}_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, \dots, k$. Hay 2^k de tales combinaciones lineales, por lo tanto, $|\mathcal{C}| = 2^k$. \square

Definición 2.6. Un $[n, k]$ -código lineal sobre \mathbb{F}_2 es un subespacio k -dimensional del espacio vectorial n -dimensional \mathbb{F}_2^n ; n es llamado la longitud del código y k la dimensión.

Usualmente la matriz de chequeo de paridad H de un $[n, k]$ -código lineal \mathcal{C} es una matriz de tamaño $(n - k) \times n$ de la forma $H = [A|I_{n-k}]$, sin embargo, H no necesariamente debe tener esta forma ya que si H es equivalente a una matriz escalonada reducida por filas H' , entonces el espacio nulo de H' es igual al espacio nulo de H , a saber, \mathcal{C} . Así H' también es una matriz de chequeo de paridad del $[n, k]$ -código lineal \mathcal{C} .

Un chequeo de paridad en un $[n, k]$ -código lineal \mathcal{C} es cualquier vector fila \mathbf{h} tal que $\mathbf{h}\mathbf{x}^t = 0$ para cada palabra-código $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$. Cualquier conjunto maximal de $n - r$ chequeos de paridad linealmente independientes pueden ser usados como las filas de una matriz de chequeo de paridad H de \mathcal{C} . Por otro lado, cualquier conjunto maximal de k palabras-código linealmente independientes tomadas de un código dado \mathcal{C} pueden ser usadas como las filas de una matriz generadora para ese código.

Definición 2.7. Sea \mathcal{C} un $[n, k]$ -código lineal sobre \mathbb{F}_2 . Una matriz G cuyo espacio fila es igual a \mathcal{C} es llamada una matriz generadora para \mathcal{C} . Recíprocamente, si G es una matriz con entradas en \mathbb{F}_2 , su espacio fila es llamado el código lineal generado por G .

Hay una estrecha relación entre la matriz de chequeo de paridad y la matriz generadora de un código lineal como se puede observar a través de la siguiente proposición.

Proposición 2.8. *Si \mathcal{C} es un $[n, k]$ -código lineal sobre \mathbb{F}_2 con matriz de chequeo de paridad H y matriz generadora G entonces $HG^t = 0$ o $GH^t = 0$.*

Demostración. Como $\mathbf{x} = \mathbf{u}G$ para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ y $\mathbf{u} \in \mathbb{F}_2^k$ entonces $\mathbf{x}^t = G^t \mathbf{u}^t$, pero $H\mathbf{x}^t = \mathbf{0}$, de ahí que, $\mathbf{0} = H\mathbf{x}^t = HG^t \mathbf{u}^t$, i.e., $\mathbf{0} = HG^t \mathbf{u}^t$ para cada $\mathbf{u} \in \mathbb{F}_2^k$, por consiguiente, $HG^t = 0$ o bien, $GH^t = 0$. \square

3. Decodificación

Supóngase que el mensaje $\mathbf{u} = u_1 \dots u_k$ es codificado en la palabra-código $\mathbf{x} = x_1 \dots x_n$ la cual es enviada por el canal, debido al ruido del canal, el vector recibido $\mathbf{y} = y_1 \dots y_n$ quizá sea diferente de \mathbf{x} . Definimos el *vector error*

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{x} = e_1 \dots e_n. \quad (12)$$

Si al recibir la palabra codificada después del envío por el canal de comunicación el i -ésimo símbolo es correcto, $e_i = 0$ y tiene probabilidad $1 - p$, por otro lado, si el i -ésimo símbolo es equivocado $e_i = 1$ con probabilidad p donde p es tal que $0 \leq p < \frac{1}{2}$. Así, describimos la acción del canal diciendo que distorsiona la palabra-código \mathbf{x} al sumarle el vector error \mathbf{e} .

La decodificación Figura 2 debe decidir a partir de \mathbf{y} que mensaje \mathbf{u} o (usualmente más simple) que palabra-código \mathbf{x} fue transmitida. Por supuesto es suficiente si la decodificación encuentra \mathbf{e} , pues $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{e}$. Ahora bien, la decodificación nunca puede ser positiva si no sabemos lo que \mathbf{e} fue. Por consiguiente, la estrategia será escoger el vector error \mathbf{e} más probable dado que \mathbf{y} fue recibido. Dadas las palabras-código todas son igualmente probables, esta estrategia es óptima en el sentido de que minimiza la probabilidad de que la decodificación hecha sea equivocada, y es llamada *decodificación probabilística máxima*. Para describir cómo funciona el decodificador, necesitamos las siguientes definiciones y sus derivados.

Definición 3.1. La *distancia de Hamming* entre dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ en \mathbb{F}_2^n , lo cual denotamos por $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, se define como

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\{i | 1 \leq i \leq n, x_i \neq y_i\}| \quad (13)$$

Definición 3.2. El *peso de Hamming* de un vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_2^n$, lo cual denotamos por $wt(\mathbf{x})$, se define como

$$wt(\mathbf{x}) = |\{i | 1 \leq i \leq n, x_i \neq 0\}| \quad (14)$$

De las definiciones 3.1 y 3.2 se sigue que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = wt(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, ya que si $s = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, entonces hay s coordenadas en las que \mathbf{x} y \mathbf{y} difieren y $n - s$ coordenadas en las que \mathbf{x} y \mathbf{y} coinciden luego en la diferencia $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ hay $n - s$ ceros y s coordenadas distintas de cero, así $wt(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = s$.

Definición 3.3. Definimos la *intersección de vectores binarios* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ como el vector $\mathbf{x} * \mathbf{y} = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n)$, el cual tiene 1's sólo donde \mathbf{x} y \mathbf{y} los tienen.

Lema 3.4. Si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{F}_2^n$ entonces

$$wt(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = wt(\mathbf{x}) + wt(\mathbf{y}) - 2wt(\mathbf{x} * \mathbf{y}).$$

Demostración. Sean $wt(\mathbf{x}) = p$ y $wt(\mathbf{y}) = q$, supóngase, sin pérdida de generalidad que $0 \leq p \leq q \leq n$. Si $0 = p = q$ entonces $\mathbf{x} = \mathbf{0} = \mathbf{y}$ y el resultado es trivialmente cierto. Si $0 = p < q$ entonces $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y}$, de ahí que, $wt(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = q$, además $\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathbf{0}$ y $wt(\mathbf{x} * \mathbf{y}) = 0$, por consiguiente, $wt(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = q = 0 + q - 2 \cdot 0 = wt(\mathbf{x}) + wt(\mathbf{y}) - 2wt(\mathbf{x} * \mathbf{y})$, i.e., $wt(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = wt(\mathbf{x}) + wt(\mathbf{y}) - 2wt(\mathbf{x} * \mathbf{y})$. Si $0 < p \leq q$ y $r = wt(\mathbf{x} * \mathbf{y})$ entonces \mathbf{x} y \mathbf{y} coinciden en r coordenadas, de ahí que, $r \leq p \leq q$. Hay $p - r$ coordenadas con 1's en \mathbf{x} ninguna de las cuales coincide con $q - r$ coordenadas con 1's en \mathbf{y} . Entonces, al sumar \mathbf{x} y \mathbf{y} se obtienen r coordenadas con 0's y hay $(p - r) + (q - r)$ coordenadas con 1's, las coordenadas restantes tienen 0's, así, $wt(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = p + q - 2r$, por otro lado, $wt(\mathbf{x}) + wt(\mathbf{y}) - 2wt(\mathbf{x} * \mathbf{y}) = p + q - 2r$, por lo tanto, $wt(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = wt(\mathbf{x}) + wt(\mathbf{y}) - 2wt(\mathbf{x} * \mathbf{y})$, con lo cual queda establecido el resultado. \square

Teorema 3.5. *La función $d : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ dada por $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ satisface las siguientes propiedades para toda $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ en \mathbb{F}_2^n .*

1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ y $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ sí y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$,
2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$,
3. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

Por lo tanto, (\mathbb{F}_2^n, d) es un espacio métrico.

Demostración. Sean \mathbf{x}, \mathbf{y} en \mathbb{F}_2^n , si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ entonces $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Si $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ entonces \mathbf{x} y \mathbf{y} difieren en al menos una coordenada, de ahí que, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 1 > 0$. De cualquier forma, para cualquier \mathbf{x}, \mathbf{y} en \mathbb{F}_2^n , $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$. Ahora bien, si $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, esto significa que hay cero coordenadas en las que \mathbf{x} y \mathbf{y} difieren, es decir, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Por consiguiente, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ sí y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Por otro lado, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\{i | 1 \leq i \leq n, x_i \neq y_i\}| = |\{i | 1 \leq i \leq n, y_i \neq x_i\}| = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, i.e., $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Finalmente, como $wt(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = wt(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ y $2\mathbf{z} = \mathbf{0}$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
 d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= wt(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= wt(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \\
 &= wt(\mathbf{x} + 2\mathbf{z} + \mathbf{y}) \\
 &= wt((\mathbf{x} + \mathbf{z}) + (\mathbf{z} + \mathbf{y})) \\
 &= wt(\mathbf{x} + \mathbf{z}) + wt(\mathbf{z} + \mathbf{y}) - 2wt((\mathbf{x} + \mathbf{z}) * (\mathbf{z} + \mathbf{y})) \\
 &\leq wt(\mathbf{x} + \mathbf{z}) + wt(\mathbf{z} + \mathbf{y}) \\
 &= wt(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + wt(\mathbf{z} - \mathbf{y}) \\
 &= d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})
 \end{aligned}$$

de ahí que, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$. Por lo tanto, d es una distancia, llamada distancia de Hamming y (\mathbb{F}_2^n, d) resulta un espacio métrico. \square

Los errores en cada coordenada ocurren con probabilidad p , si consideramos las palabras-código \mathbf{x} del $[7, 4]$ -código lineal \mathcal{H} del Ejemplo 2.2 y si \mathbf{v} es algún vector fijo de peso a , $0 \leq a \leq 7$, entonces la probabilidad de que $\mathbf{e} = \mathbf{v}$ es $p^a(1-p)^{7-a}$, i.e.,

$$\text{Prob}\{\mathbf{e} = \mathbf{v}\} = p^a(1-p)^{7-a} \quad (15)$$

por ejemplo;

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{\mathbf{e} = 0000000\} &= (1-p)^7 && (0 \text{ errores o } 7 \text{ éxitos en los siete símbolos}), \\ \text{Prob}\{\mathbf{e} = 0100000\} &= p(1-p)^6 && (1 \text{ error o } 6 \text{ éxitos en los siete símbolos}), \\ \text{Prob}\{\mathbf{e} = 0110000\} &= p^2(1-p)^5 && (2 \text{ errores o } 5 \text{ éxitos en los siete símbolos}). \end{aligned}$$

Como $p < \frac{1}{2}$, tenemos $2p < 1$, i.e., $p < 1-p$, o bien, $1-p > p$, de donde, $(1-p)^7 = (1-p)^6(1-p) > (1-p)^6p$, i.e., $(1-p)^7 > p(1-p)^6$ pero $p(1-p)^6 = p(1-p)^5(1-p) > p(1-p)^5p = p^2(1-p)^5$ entonces $p(1-p)^6 > p^2(1-p)^5$, etc.

De ahí que, $(1-p)^7 > p(1-p)^6 > p^2(1-p)^5 > \dots$. Por consiguiente, un vector error particular de peso 1 es más probable que un vector error particular de peso 2, y así sucesivamente.

Así, la estrategia de decodificación consiste en decodificar \mathbf{y} como la palabra-código \mathbf{x} más cercana (más cercana con respecto a la distancia de Hamming), esto es, escoger el vector error \mathbf{e} que tiene peso más pequeño, esto es llamado *decodificación de vecino más cercano*. Por consiguiente, en un CSB, decodificación probabilística máxima y decodificación de vecino más cercano son equivalentes.

Un esquema de decodificación de fuerza bruta para un $[n, k]$ -código lineal binario \mathcal{C} consiste en comparar \mathbf{y} con todas las 2^k palabras-código y escoger la más cercana, esto es viable para códigos pequeños pero si k es grande ¡esto es imposible!

El tercer parámetro importante de un código \mathcal{C} , además de la longitud y dimensión, es la distancia mínima de Hamming entre sus palabras-código.

Definición 3.6. La *distancia mínima de Hamming* (ó *distancia mínima*) de \mathcal{C} , lo cual denotamos por d (ó $d_{\min}(\mathcal{C})$), se define como

$$d = \min\{d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}, \mathbf{u} \neq \mathbf{v}\}, \quad (16)$$

o bien,

$$d = \min\{wt(\mathbf{u} - \mathbf{v}) : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}, \mathbf{u} \neq \mathbf{v}\} \quad (17)$$

Un código lineal \mathcal{C} de longitud n , dimensión k y distancia mínima d será llamado un $[n, k, d]$ -código lineal.

Teorema 3.7. *La distancia mínima de un código lineal \mathcal{C} es el peso mínimo de cada palabra-código diferente de cero.*

Demostración. Sea d la distancia mínima de un código lineal \mathcal{C} , i.e., $d = \min\{d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}, \mathbf{u} \neq \mathbf{v}\} = \min\{wt(\mathbf{u} - \mathbf{v}) : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}, \mathbf{u} \neq \mathbf{v}\}$, como $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}$ y $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ entonces $\mathbf{w} := \mathbf{u} - \mathbf{v} \in \mathcal{C}$ y $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, de ahí que, $\min\{wt(\mathbf{u} - \mathbf{v}) : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}, \mathbf{u} \neq \mathbf{v}\} = \min\{wt(\mathbf{w}) : \mathbf{w} \in \mathcal{C}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}\}$, por lo tanto, $d = \min\{wt(\mathbf{w}) : \mathbf{w} \in \mathcal{C}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}\}$. \square

La distancia mínima del código lineal \mathcal{H} de los Ejemplos 2.2 y 2.3 es $d = 3$, por consiguiente, el código lineal \mathcal{H} es un $[7, 4, 3]$ -código lineal.

La distancia mínima del código juega un papel esencial en la respuesta a la pregunta ¿cuántos errores puede corregir un código?, pero antes de responder dicha pregunta damos la siguiente definición.

Definición 3.8. *La esfera (ó esfera de Hamming) de radio r y centro \mathbf{u} , lo cual denotamos por $B_r(\mathbf{u})$, se define como*

$$B_r(\mathbf{u}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}_2^n : d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq r\}. \quad (18)$$

Teorema 3.9. *Un código \mathcal{C} con distancia mínima d (o peso mínimo d) puede corregir $\lfloor \frac{1}{2}(d - 1) \rfloor$ o menos errores.*

Demostración. Sea $t = \lfloor \frac{1}{2}(d - 1) \rfloor$ (t es el mayor entero menor o igual a $\frac{1}{2}(d - 1)$), si una palabra-código \mathbf{x} es transmitida y ocurren t o menos errores, la palabra recibida \mathbf{y} se encontrará en la esfera de radio t alrededor de la palabra-código transmitida \mathbf{x} , para que el código pueda corregir t errores o menos verifiquemos que las esferas de radio t con centro en las palabras-código son disjuntas. Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{C}$ y supóngase que $B_t(\mathbf{x}_1) \cap B_t(\mathbf{x}_2) \neq \emptyset$, entonces existe $\mathbf{v} \in \mathbb{F}$ tal que $\mathbf{v} \in B_t(\mathbf{x}_1)$ y $\mathbf{v} \in B_t(\mathbf{x}_2)$, por consiguiente,

$$d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \leq d(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{x}_2) \leq t + t = 2t,$$

i.e., $d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \leq 2t$ pero $d \leq d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \leq 2t$ entonces $d \leq 2t$. Dado que $t \leq \frac{1}{2}(d - 1)$, puesto que $t = \lfloor \frac{1}{2}(d - 1) \rfloor$, tenemos que $2t \leq d - 1$ luego $d \leq 2t \leq d - 1$, de ahí que, $d \leq d - 1$, lo cual es absurdo. En consecuencia, las esferas de radio t con centro en las palabras-código son disjuntas. De manera que, la palabra recibida \mathbf{y} está más cerca de \mathbf{x} que de cualquier otra palabra-código \mathbf{u} . Así, la decodificación de vecino más cercano corregirá estos errores. \square

El código lineal \mathcal{C} es un $[7, 4, 3]$ -código lineal corrector de un único error.

La matriz de chequeo de paridad H de un $[n, k]$ -código lineal \mathcal{C} resulta ser una herramienta útil para la decodificación. Si \mathbf{x} es transmitida, \mathbf{x} es una palabra código luego $H\mathbf{x}^t = \mathbf{0}$. Si el canal provoca algunos errores, esto es, si $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ entonces es muy probable que $H\mathbf{y}^t \neq \mathbf{0}$ donde \mathbf{y} es la palabra recibida. El vector $\mathbf{s} = H\mathbf{y}^t$ es llamado el *síndrome*. El síndrome depende sólo del vector error \mathbf{e} y no de la palabra código transmitida ya que si $\mathbf{s} = H\mathbf{y}^t = H(\mathbf{x} + \mathbf{e})^t = H\mathbf{x}^t + H\mathbf{e}^t = H\mathbf{e}^t$, i.e., $\mathbf{s} = H\mathbf{e}^t$. El síndrome proporciona cierta información sobre \mathbf{e} , pero no la suficiente. Esto es debido a que para un $\mathbf{s} \in \mathbb{F}_2^n$ fijo, el conjunto de soluciones de $H\mathbf{e}^t = \mathbf{s}$ forma una *clase* del código \mathcal{C} .

Definición 3.10. Sea \mathcal{C} un $[n, k]$ -código lineal sobre \mathbb{F}_2 , para cualquier vector $\mathbf{a} \in \mathbb{F}_2^n$, el conjunto

$$\mathbf{a} + \mathcal{C} = \{\mathbf{a} + \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathcal{C}\} \quad (19)$$

es llamado una *clase* de \mathcal{C}

Proposición 3.11. Sea \mathcal{C} un $[n, k]$ -código lineal binario. Entonces

1. Todo vector $\mathbf{b} \in \mathbb{F}_2^n$ está en alguna clase.
2. Dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} están en la misma clase sí y sólo si $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathcal{C}$
3. Cada clase contiene 2^k vectores.

Demostración. Sea $\mathbf{b} \in \mathbb{F}_2^n$, $\mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{0} \in \mathbf{b} + \mathcal{C}$, ya que $\mathbf{0} \in \mathcal{C}$, i.e., $\mathbf{b} \in \mathbf{b} + \mathcal{C}$. Así, todo vector $\mathbf{b} \in \mathbb{F}_2^n$ está en alguna clase. Supóngase que $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{u} + \mathcal{C}$ para algún $\mathbf{u} \in \mathbb{F}_2^n$ entonces $\mathbf{a} = \mathbf{u} + \mathbf{x}_1$ y $\mathbf{b} = \mathbf{u} + \mathbf{x}_2$ para algunos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{C}$ luego $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (\mathbf{u} + \mathbf{x}_1) - (\mathbf{u} + \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathcal{C}$, i.e., $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathcal{C}$. Recíprocamente, si $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathcal{C}$ entonces $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{x}$ para algún $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, luego $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{x} \in \mathbf{b} + \mathcal{C}$, de ahí que, $\mathbf{a} \in \mathbf{b} + \mathcal{C}$ pero $\mathbf{b} \in \mathbf{b} + \mathcal{C}$, por consiguiente, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{b} + \mathcal{C}$. Finalmente, como \mathcal{C} tiene 2^k palabras-código distintas entonces $\mathbf{a} + \mathcal{C}$ tiene 2^k vectores distintos, ya que si $\mathbf{a} + \mathbf{x}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{x}_2$ para $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ en \mathcal{C} entonces $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$, lo cual es absurdo. \square

Definición 3.12. Sea \mathcal{C} un $[n, k]$ -código lineal binario, se define la relación \sim en \mathbb{F}_2^n , de la siguiente manera, $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ sí y sólo si $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathcal{C}$.

Proposición 3.13. La relación \sim en \mathbb{F}_2^n es una relación de equivalencia.

Demostración. Veamos que:

1. Para cada $\mathbf{a} \in \mathbb{F}_2^n$, $\mathbf{a} \sim \mathbf{a}$.
2. $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ implica que $\mathbf{b} \sim \mathbf{a}$

3. $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ y $\mathbf{b} \sim \mathbf{c}$ implica $\mathbf{a} \sim \mathbf{c}$

Para cada $\mathbf{a} \in \mathbb{F}_2^n$, $\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0} \in \mathcal{C}$ entonces $\mathbf{a} - \mathbf{a} \in \mathcal{C}$, por consiguiente, $\mathbf{a} \sim \mathbf{a}$. Supóngase que $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ entonces $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathcal{C}$, esto implica que, $-(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \in \mathcal{C}$ luego $\mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathcal{C}$, de ahí que, $\mathbf{b} \sim \mathbf{a}$. Finalmente, supóngase que $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ y $\mathbf{b} \sim \mathbf{c}$ entonces $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathcal{C}$ y $\mathbf{b} - \mathbf{c} \in \mathcal{C}$ luego $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \in \mathcal{C}$, i.e., $\mathbf{a} - \mathbf{c} \in \mathcal{C}$, por consiguiente, $\mathbf{a} \sim \mathbf{c} \in \mathcal{C}$, en consecuencia, la relación \sim en \mathbb{F}_2^n es una relación reflexiva, simétrica y transitiva. Por lo tanto, \sim es una relación de equivalencia. \square

Definición 3.14. La *clase de equivalencia* de \mathbf{a} para la relación de equivalencia \sim en \mathbb{F}_2^n , lo cual se denota por $[\mathbf{a}]$, se define como

$$[\mathbf{a}] = \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}_2^n : \mathbf{v} \sim \mathbf{a}\}$$

Proposición 3.15. Para cada $\mathbf{a} \in \mathbb{F}_2^n$, $[\mathbf{a}] = \mathbf{a} + \mathcal{C}$

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in [\mathbf{a}] &\Leftrightarrow \mathbf{v} \sim \mathbf{a} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{v} - \mathbf{a} \in \mathcal{C} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{v} - \mathbf{a} = \mathbf{x} \text{ para algún } \mathbf{x} \in \mathcal{C} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{x} \text{ para algún } \mathbf{x} \in \mathcal{C} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{v} \in \mathbf{a} + \mathcal{C} \end{aligned}$$

\square

La relación de equivalencia \sim en \mathbb{F}_2^n induce una partición de \mathbb{F}_2^n en clases de equivalencia no vacías y disjuntas por parejas.

Como $|\mathbb{F}_2^n| = 2^n$, $|\mathbf{a} + \mathcal{C}| = 2^k$ y $\mathbb{F}_2^n = \cup\{\mathbf{a} + \mathcal{C} : \mathbf{a} \in \mathbb{F}_2^n\}$, tenemos que, $2^n = |\cup\{\mathbf{a} + \mathcal{C} : \mathbf{a} \in \mathbb{F}_2^n\}| = r2^k$ donde r es el número de clases de equivalencia en \mathbb{F}_2^n , luego $2^n = r2^k$, de ahí que, $r = 2^{n-k}$. Hay 2^{n-k} clases de \mathcal{C} , correspondientes a los 2^{n-k} posibles síndromes \mathbf{s} . Así, una vez que el receptor calcula \mathbf{s} , reduce su búsqueda para \mathbf{e} de 2^n a 2^k posibilidades, a saber, los elementos de la clase correspondiente a \mathbf{s} .

El Algoritmo 1 muestra cómo funciona el síndrome en el decodificador, al menos en principio. Por supuesto el paso 2 en este algoritmo representa una gran cantidad de trabajo. Sin embargo, si k y $n - k$ son relativamente pequeños, es posible implementar el paso 2 vía un procedimiento de una tabla de búsqueda, el cual describimos abajo.

Así la estrategia del decodificador es, dado \mathbf{y} , escoger un vector de peso mínimo $\hat{\mathbf{e}}$ en la clase que contiene a \mathbf{s} , y decodificar a \mathbf{y} como $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{e}}$. El vector de peso mínimo en una clase es

Algoritmo 1 Algoritmo de la función del síndrome en la decodificación para un CBS**Input:** Palabra recibida \mathbf{y} **Output:** Estimado de la palabra-código transmitida $\hat{\mathbf{x}}$

- 1: Calcular el síndrome $\mathbf{s} = H\mathbf{y}^t$
- 2: Encontrar el vector de peso mínimo en la clase que contiene a \mathbf{s} y lo denotamos por $\hat{\mathbf{e}}$
- 3: Calcular el estimado de la palabra-código transmitida $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{e}}$

llamado *líder de clase*. (Si hay más de un vector de peso mínimo en la clase se escoge uno de manera aleatoria y se le llama líder de clase.)

La *tabla de búsqueda* o también llamada *arreglo estándar* se construye de la siguiente manera; la primera fila consiste del código \mathcal{C} (la clase $\mathbf{0} + \mathcal{C}$), con la palabra código $\mathbf{0}$ en la izquierda:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^{(2)}, \quad \dots, \quad \mathbf{x}^{(j)} \quad (j = 2^k)$$

y las otras filas son las $2^{n-k} - 1$ clases $\mathbf{a}_i + \mathcal{C}$, arregladas en el mismo orden y con el líder de clase en la izquierda:

$$\mathbf{a}_i + \mathbf{x}^{(1)}, \quad \mathbf{a}_i + \mathbf{x}^{(2)}, \quad \dots, \quad \mathbf{a}_i + \mathbf{x}^{(j)} \quad (i = 1, \dots, 2^{n-k} - 1)$$

El decodificador usa la tabla de búsqueda de la siguiente manera: cuando \mathbf{y} es recibido su posición en la tabla es ubicada, entonces el decodificador decide que el vector error $\hat{\mathbf{e}}$ es el líder de la clase encontrada en el extremo izquierdo de \mathbf{y} , y \mathbf{y} es decodificada como la palabra-código $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{e}}$ encontrada en la cima de la columna que contiene a \mathbf{y}

Teorema 3.16. (*Propiedades del síndrome*) Para un $[n, k]$ -código lineal binario \mathcal{C} con matriz de chequeo de paridad $H \in \mathcal{M}_{(n-k) \times n}$, sea $\mathbf{s} = H\mathbf{y}^t$ el síndrome de la palabra recibida \mathbf{y} . Entonces

1. \mathbf{s} es un vector columna de longitud $n - k$.
2. Si $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n) \in \mathbb{F}_2^n$ y $e_{i_j} = 1$ para $i_j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j = 1, \dots, t$, es tal que $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e}$ entonces

$$\mathbf{s} = \sum_{j=1}^t \mathbf{H}_{i_j} \tag{20}$$

donde $(\mathbf{H}_{i_j}$ es la i_j -ésima columna de H), i.e., el síndrome \mathbf{s} es igual a la suma de las columnas de H en donde los errores ocurren.

3. Dos vectores están en la misma clase de \mathcal{C} si y sólo si ellos tienen el mismo síndrome.
4. Hay una correspondencia uno a uno entre los síndromes y las clases.

Demostración. La primera propiedad es inmediata a partir de la definición del síndrome. Sea $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$ la base canónica de \mathbb{F}_2^n , dado $\mathbf{e} \in \mathbb{F}_2^n$ tenemos que $\mathbf{e} = \sum_{i=1}^n e_i \mathbf{v}_i$ donde $e_i \in \mathbb{F}_2$. Entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s} &= H\mathbf{y}^t \\
 &= H\mathbf{e}^t \\
 &= H\left(\sum_{i=1}^n e_i \mathbf{v}_i\right)^t \\
 &= H\left(\sum_{j=1}^t e_{i_j} \mathbf{v}_{i_j}\right)^t \\
 &= H\left(\sum_{j=1}^t e_{i_j} \mathbf{v}_{i_j}^t\right) \\
 &= \sum_{j=1}^t e_{i_j} H\mathbf{v}_{i_j}^t \\
 &= \sum_{j=1}^t \mathbf{H}_{i_j}
 \end{aligned}$$

donde \mathbf{H}_{i_j} es la i_j -ésima columna de H . Sean \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 dos vectores en \mathbb{F}_2^n denotamos $\text{syn}(\mathbf{u}_1)$ y $\text{syn}(\mathbf{u}_2)$ los síndromes de \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 respectivamente.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{u}_1 + \mathcal{C} &\Leftrightarrow \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in \mathcal{C} \\
 &\Leftrightarrow H(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^t = \mathbf{0} \\
 &\Leftrightarrow H\mathbf{u}_1^t = H\mathbf{u}_2^t \\
 &\Leftrightarrow \text{syn}(\mathbf{u}_1) = \text{syn}(\mathbf{u}_2).
 \end{aligned}$$

La última propiedad se sigue de que como hay 2^{n-k} clases distintas hay 2^{n-k} síndromes distintos. \square

Observación 3.17. De la segunda propiedad del Teorema 3.16 tenemos que \mathbf{s} es llamado el síndrome debido a que da los síntomas de los errores.

Ejemplo 3.18. Continuación del Ejemplo 2.3. En la Figura 3 exhibimos la tabla de búsqueda del $[7, 4, 3]$ -código lineal binario \mathcal{H} de nuestro Ejemplo (2.2 y 2.3). Cuando $\mathbf{y} = 1111100$ es recibido el decodificador decide que el vector error líder de la clase $\hat{\mathbf{e}}$ es el vector 0010000 que se encuentra en la segunda columna de la fila que contiene a \mathbf{y} , i.e., $\hat{\mathbf{e}} = 0010000$, así, \mathbf{y} es decodificada como $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{e}} = 1111100 - 0010000 = 1101100$ que está ubicada en la segunda fila de la columna que contiene a \mathbf{y} , de ahí que, el estimado del mensaje correspondiente a esa palabra-código es $\hat{\mathbf{u}} = 1101$.



mensaje	0000	1000	1100	0100	0110	1110	1010	1011	0011	1011	1111	0111	0101	1101	1001	0001	síndrome
e	0000000	1000110	1100011	0100101	0110110	1110000	1010101	0011100	0011001	1011010	1111111	0111001	0101010	1101100	1001001	0001111	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
1000000 + e	0000110	0100011	1100101	1100101	0110110	0110000	0010101	1011100	1011001	0011010	0111111	1111001	1101010	0101100	0001001	1001111	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
0100000 + e	0100000	1100110	1000011	0000101	0010110	1010000	1110101	0111100	0111001	1111010	1011111	0011001	0001010	1001100	1101001	0101111	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
0010000 + e	0010000	1010110	1110011	0110101	0100110	1100000	1000101	0000011	0000110	1001010	1101111	0101001	0111010	1111100	1011001	0011111	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
0001000 + e	0001000	1001110	1101011	0101101	0111110	1111000	1011101	0011011	0011010	1010010	1110111	0110001	0100010	1100100	1000001	0000111	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
0000100 + e	0000100	1000010	1100111	0100001	0110010	1110100	1010001	0010111	0011000	1011110	1111011	0111101	0101110	1101000	1001101	0001011	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
0000010 + e	0000010	1000100	1100001	0100111	0110100	1110010	1010111	0010001	0011110	1011000	1111101	0111011	0101000	1101110	1001011	0001101	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
0000001 + e	0000001	1000111	1100010	0100100	0110111	1110001	1010101	0010010	0011101	1011011	1111110	0111000	0101011	1101101	1001000	0001110	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

líder de clase

Figura 3: Tabla de búsqueda del $[7, 4, 3]$ -código lineal binario \mathcal{H}

Definición 3.19. Se dice que dos códigos \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 son *equivalentes* si uno se obtiene a partir del otro por una permutación de sus coordenadas.

Ejemplo 3.20. Continuación del Ejemplo 2.3. Las columnas de la matriz de chequeo de paridad

$$H = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

del $[7, 4, 3]$ -código lineal binario \mathcal{H} son los vectores columna (síndromes) que aparecen en la Figura 3, excepto el primero, tomados siguiendo el orden de arriba hacia abajo, estas columnas corresponden a todos los vectores distintos de cero en \mathbb{F}_2^3 . Consideremos los números $1, 2, \dots, 7$ en su representación binaria, i.e.,

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 \\ 2 &= 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 \\ 3 &= 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 \\ 4 &= 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 \\ 5 &= 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 \\ 6 &= 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 \\ 7 &= 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 \end{aligned}$$

tomando los bits de las representaciones binarias de estos números vamos a construir los vectores columna de una matriz de chequeo de paridad

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Las matrices H y H_3 dadas arriba generan el mismo código (salvo equivalencia), a saber, el famoso $[7, 4, 3]$ -código lineal binario de Hamming \mathcal{H}_3 . En la Figura 4 exhibimos las palabras-código de los códigos lineales \mathcal{H} y \mathcal{H}_3 asociados a las matrices de chequeo de paridad H y H_3 respectivamente, \mathcal{H}_3 se puede obtener a partir de \mathcal{H} permutando en \mathcal{H} la quinta coordenada por la séptima.

□

\mathcal{H}	\mathcal{H}_3
0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0
1 0 0 0 1 1 0	1 0 0 0 0 1 1
1 1 0 0 0 1 1	1 1 0 0 1 1 0
0 1 0 0 1 0 1	0 1 0 0 1 0 1
0 1 1 0 1 1 0	0 1 1 0 0 1 1
1 1 1 0 0 0 0	1 1 1 0 0 0 0
1 0 1 0 1 0 1	1 0 1 0 1 0 1
0 0 1 0 0 1 1	0 0 1 0 1 1 0
0 0 1 1 1 0 0	0 0 1 1 0 0 1
1 0 1 1 0 1 0	1 0 1 1 0 1 0
1 1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1 1
0 1 1 1 0 0 1	0 1 1 1 1 0 0
0 1 0 1 0 1 0	0 1 0 1 0 1 0
1 1 0 1 1 0 0	1 1 0 1 0 0 1
1 0 0 1 0 0 1	1 0 0 1 1 0 0
0 0 0 1 1 1 1	0 0 0 1 1 1 1

Figura 4: Los códigos lineales \mathcal{H} y \mathcal{H}_3 son equivalentes

4. Códigos binarios de Hamming

A continuación se definen los códigos binarios de Hamming. Sean $r \geq 2$, $n = 2^r - 1$ y \mathbb{F}_2^r , como $|\mathbb{F}_2^r \setminus \{\mathbf{0}\}| = 2^r - 1$, hay $2^r - 1$ r -tuples binarios distintos de cero.

Definición 4.1. Definimos la $r \times (2^r - 1)$ matriz de chequeo de paridad H_r cuyas columnas, en orden, son los bits de las representaciones binarias de los números $1, 2, \dots, 2^r - 1$ (i.e., H_r está formada por el conjunto de todos los r -tuples binarios distintos de cero como sus columnas). El *código lineal binario de Hamming* \mathcal{H}_r de longitud $n = 2^r - 1$ ($r \geq 2$) es el espacio de soluciones del sistema lineal homogéneo dado por la matriz H_r .

Teorema 4.2. \mathcal{H}_r es un $[n = 2^r - 1, k = 2^r - 1 - r, 3]$ -código lineal binario.

Demostración. Sabemos que el $\text{rango}(H) \leq r$ pero hay r columnas linealmente independientes, entonces $\text{rango}(H) = r$, por consiguiente, $\dim(\text{nulidad}(H)) = n - r = 2^r - 1 - r$. Ahora veamos que \mathcal{H}_r tiene peso mínimo mayor o igual a 3. Sea $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$ la base canónica de \mathbb{F}_2^n donde $n = 2^r - 1$ y sea $\mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^n$. Si $\text{wt}(\mathbf{y}) = 1$ tenemos que $\mathbf{y} = \mathbf{v}_i$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ entonces $\text{syn}(\mathbf{y}) = H\mathbf{y}^t = \mathbf{H}_i$, por (20), donde \mathbf{H}_i es alguna columna de H , en consecuencia, $\mathbf{H}_i \neq \mathbf{0}$ ya que $\mathbf{H}_i \in \mathbb{F}_2^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, de ahí que, $\text{syn}(\mathbf{y}) \neq \mathbf{0}$. Por lo tanto, si $\text{wt}(\mathbf{y}) = 1$ entonces $\mathbf{y} \notin \mathcal{H}_r$. Si $\text{wt}(\mathbf{y}) = 2$

entonces $\mathbf{y} = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j$ con $i \neq j$ luego $\text{syn}(\mathbf{y}) = H\mathbf{y}^t = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_j$, otra vez por (20), donde $\mathbf{H}_i, \mathbf{H}_j$ son columnas distintas de H . Supongamos que $\text{syn}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_j = \mathbf{0}$, por consiguiente, $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_j$, lo cual es absurdo, en consecuencia, $\text{syn}(\mathbf{y}) \neq \mathbf{0}$. Por lo tanto, si $\text{wt}(\mathbf{y}) = 2$ entonces $\mathbf{y} \notin \mathcal{H}_r$. Sólo resta demostrar que para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{H}_r$, $\text{wt}(\mathbf{x}) \geq 3$, para esto vamos a exhibir que \mathcal{H}_r tiene una palabra-código de peso 3. Sean \mathbf{H}_1 y \mathbf{H}_2 las dos primeras columnas de la matriz de chequeo de paridad H . Como $\mathbf{H}_1 \neq \mathbf{H}_2$ tenemos que $\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 \neq \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_i$ para alguna $i \in \{3, \dots, n\}$. Si $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_i$ entonces $\text{wt}(\mathbf{x}) = 3$ y $\text{syn}(\mathbf{x}) = H\mathbf{x}^t = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_i$, una vez más por (20), i.e., $\text{wt}(\mathbf{x}) = 3$ y $\text{syn}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, por consiguiente, $\mathbf{x} \in \mathcal{H}_r$ y $\text{wt}(\mathbf{x}) = 3$. Así para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{H}_r$, $\text{wt}(\mathbf{x}) \geq 3$ y existe una palabra-código de peso 3. En consecuencia, $d_{\min}(\mathcal{H}_r) = 3$. Por lo tanto, \mathcal{H}_r es un $[n = 2^r - 1, k = 2^r - 1 - r, 3]$ -código lineal binario. \square

Cualquier reordenamiento de las columnas de H_r da un código equivalente, y por lo tanto uno cualquiera de estos códigos equivalentes será llamado el código binario de Hamming de longitud $n = 2^r - 1$ y denotado por \mathcal{H}_r o $\mathcal{H}_2(r)$.

Los códigos lineales binarios de Hamming pertenecen a una clase de códigos extremadamente exclusiva, los *códigos perfectos*. Los únicos otros códigos lineales binarios perfectos son los códigos de repetición y el $[23, 12, 7]$ código de Golay \mathcal{G}_{23} (cf. [3],[2],[4],[1]).

Definición 4.3. Sea $\mathcal{C} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\}$ un código de longitud n sobre \mathbb{F}_2 , se dice que \mathcal{C} es un código perfecto si existe un entero positivo t tal que las esferas de Hamming de radio t y centro en las palabras-código cubren a \mathbb{F}_2^n sin traslaparse, i.e., si existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{F}_2^n = \cup_{i=1}^M B_t(\mathbf{x}_i)$ y $B_t(\mathbf{x}_i) \cap B_t(\mathbf{x}_j) = \emptyset$ siempre que $i \neq j$.

Teorema 4.4. *Los códigos lineales binarios de Hamming \mathcal{H}_r son códigos perfectos.*

Demostración. Como la $\dim(\mathcal{H}_r) = n - r = 2^r - 1 - r$ tenemos que $|\mathcal{H}_r| = 2^{n-r} = 2^{2^r-1-r}$ y dado que $d_{\min}(\mathcal{H}_r) = 3$ entonces el código lineal binario de Hamming \mathcal{H}_r puede corregir $t = 1$ error, de la demostración del teorema 3.9 se sigue que $B_t(\mathbf{x}_i) \cap B_t(\mathbf{x}_j) = \emptyset$ siempre que $i \neq j$. Ahora bien, $|B_t(\mathbf{0})| = n + 1 = 2^r - 1 + 1 = 2^r$, de ahí que, $|B_t(\mathbf{x}_i)| = 2^r$ para cada $i \in \{1, \dots, 2^{n-r}\}$. Entonces

$$\begin{aligned} |\cup_{i=1}^{2^{n-r}} B_t(\mathbf{x}_i)| &= \sum_{i=1}^{2^{n-r}} |B_t(\mathbf{x}_i)| \\ &= \sum_{i=1}^{2^{n-r}} 2^r \\ &= 2^{n-r} \cdot 2^r \\ &= 2^n \\ &= |\mathbb{F}_2^n|. \end{aligned}$$

Así, $\cup_{i=1}^{2^{n-r}} B_t(\mathbf{x}_i) = \mathbb{F}_2^n$, con lo cual queda demostrado el teorema. \square

\mathcal{H}_r es un código lineal binario corrector de error-único y es único salvo equivalencia, fácil de codificar y decodificar.

5. Códigos de Hamming sobre \mathbb{F}_q

De manera similar, los códigos de Hamming $H_{q,k}$ (ó $\mathcal{H}_q(k)$) pueden ser definidos sobre un campo finito arbitrario \mathbb{F}_q , donde $q = p^n$, p -primo y $n \in \mathbb{N}$.

Para construir los códigos de Hamming sobre \mathbb{F}_q se dan algunas definiciones básicas.

Definición 5.1. Sea $H \in \mathcal{M}_{(n-k) \times n}(\mathbb{F}_q)$ arbitraria. Llamamos código lineal de longitud n sobre \mathbb{F}_q con matriz de chequeo de paridad H al conjunto \mathcal{C} que consiste de todos los vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_q^n$ tales que $H\mathbf{x}^t = \mathbf{0}$, i.e.,

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_q^n : H\mathbf{x}^t = \mathbf{0}\}.$$

Definición 5.2. Sea \mathcal{C} un código lineal sobre \mathbb{F}_q . Una matriz G cuyo espacio fila es igual a \mathcal{C} es llamada una matriz generadora para \mathcal{C} . Recíprocamente, si G es una matriz con entradas en \mathbb{F}_q , su espacio fila es llamado el código lineal sobre \mathbb{F}_q generado por G .

Se enuncian sin demostración las siguientes proposiciones ya que sus pruebas son análogas a las dadas en la Sección 1

Proposición 5.3. Si \mathcal{C} es un código lineal sobre \mathbb{F}_q con matriz de chequeo de paridad estándar $H = [A|I_{n-k}] \in \mathcal{M}_{(n-k) \times n}(\mathbb{F}_q)$, entonces su matriz generadora estándar está dada por $G = [I_k|-A^t]$ y viceversa.

Proposición 5.4. Si \mathcal{C} es un código lineal con matriz de chequeo de paridad $H = [A|I_{n-k}] \in \mathcal{M}_{(n-k) \times n}(\mathbb{F}_q)$, entonces $\dim \mathcal{C} = k$ y $|\mathcal{C}| = q^k$.

Definición 5.5. Un $[n, k]$ -código lineal sobre \mathbb{F}_q es un subespacio k -dimensional del espacio vectorial \mathbb{F}_q^n ; n es llamado la longitud del código y k la dimensión.

Los conceptos de distancia de Hamming, peso de Hamming, distancia mínima de Hamming, esfera de Hamming se pueden definir de manera análoga reemplazando el campo \mathbb{F}_2 por el campo \mathbb{F}_q .

Teorema 5.6. Sea \mathcal{C} un $[n, k, d]$ -código lineal sobre el campo finito \mathbb{F}_q con matriz de chequeo de paridad H . Entonces d es el entero más pequeño r para el cual hay r columnas linealmente dependientes en H . (Así, H tiene d columnas linealmente dependientes, pero cualesquiera $d - 1$ columnas son linealmente independientes.)

Demostración. Sean $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_n$ las columnas de H y supóngase que una elección particular de w de tales columnas son linealmente dependientes. Entonces existen coeficientes $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{F}_q$ con exactamente w de ellos distintos de cero para los cuales $x_1\mathbf{H}_1 + x_2\mathbf{H}_2 + \dots + x_n\mathbf{H}_n = \mathbf{0}$, esto es equivalente a $\mathbf{x}H^t = \mathbf{0}$ donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, i.e., $H\mathbf{x}^t = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, por consiguiente, \mathbf{x} tiene peso w y $d_{\min}(\mathcal{C}) = wt(\mathcal{C}) \leq w$. Recíprocamente, si \mathbf{x} es una palabra-código de peso w , entonces, $H\mathbf{x}^t = \mathbf{0}$, i.e., $\mathbf{x}H^t = \mathbf{0}$ y por consiguiente w columnas de H son linealmente dependientes. \square

De acuerdo al Teorema 5.6 la distancia mínima de un $[n, k]$ código lineal sobre \mathbb{F}_q con matriz de chequeo de paridad H es el entero positivo d para el cual existen d columnas linealmente dependientes en H . Por consiguiente, la matriz de chequeo de paridad de un $[n, k, 3]$ código lineal sobre \mathbb{F}_q tiene la propiedad de que ningún par de sus columnas son linealmente dependientes, esto es, ninguna columna es un múltiplo escalar de cualquier otra columna, sin embargo algún conjunto de tres columnas es linealmente dependiente.

Vamos a construir una matriz de chequeo de paridad con estas propiedades. Primero escogemos cualquier columna diferente de cero \mathbf{H}_1 en $V_1 = \mathbb{F}_q^k$, después escogemos cualquier columna diferente de cero $\mathbf{H}_2 \in V_2 = V_1 - \{\alpha\mathbf{H}_1 : \alpha \neq 0\}$, enseguida escogemos cualquier columna diferente de cero $\mathbf{H}_3 \in V_3 = V_1 - \{\alpha\mathbf{H}_1 : \alpha \neq 0\} \cup \{\alpha\mathbf{H}_2 : \alpha \neq 0\}$, continuamos escogiendo columnas diferentes de cero y descartamos todos los múltiplos escalares diferentes de cero de la columna escogida hasta que todas las columnas hayan sido descartadas, esto se realiza en un número finito de pasos, digamos n . Como hay $q^k - 1$ k -tuples distintos de cero en \mathbb{F}_q^k y $|\{\alpha\mathbf{H}_i : \alpha \neq 0\}| = q - 1$ entonces $n(q - 1) = q^k - 1$, de ahí que, $n = (q^k - 1)/(q - 1)$. Por otro lado, todo par de columnas \mathbf{H}_i y \mathbf{H}_j , $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ son linealmente independientes pero para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$, $\alpha\mathbf{H}_i \neq \beta\mathbf{H}_j$ entonces $\alpha\mathbf{H}_i - \beta\mathbf{H}_j \neq \mathbf{0}$, de ahí que, $\alpha\mathbf{H}_i - \beta\mathbf{H}_j = \gamma\mathbf{H}_k$ para algún $\gamma \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ y \mathbf{H}_k , $k \neq i, j$, $k \in \{1, \dots, n\}$, por consiguiente, $\alpha\mathbf{H}_i - \beta\mathbf{H}_j - \gamma\mathbf{H}_k = \mathbf{0}$, esto es, $\mathbf{H}_i, \mathbf{H}_j, \mathbf{H}_k$ son columnas linealmente dependientes.

En resumen, construimos una matriz de chequeo de paridad con $n = (q^k - 1)/(q - 1)$ columnas, para las cuales ningún par de columnas son linealmente dependientes, pero algún conjunto de tres columnas es linealmente dependiente. La matriz resultante, conocida como *matriz de Hamming de orden k* es la matriz de chequeo de paridad de un $[n, n - k, 3]$ código lineal sobre \mathbb{F}_q con parámetros $n = (q^k - 1)/(q - 1)$, $n - k = (q^k - 1)/(q - 1) - k$ y $d = 3$, que es conocido como un *código q -ario de Hamming de orden k* y es denotado por $\mathcal{H}_q(k)$.

Obsérvese que la elección de las columnas no es única, y así, hay muchas matrices de Hamming diferentes y códigos de Hamming con el mismo conjunto de parámetros. Sin embargo, cualquier matriz de Hamming puede ser obtenida de cualquier otra (con los mismos parámetros) permutando las columnas y multiplicando algunas columnas por escalares diferentes de cero. Por consiguiente, cualesquiera dos códigos de Hamming del mismo tamaño son múltiplos escalares equivalentes.

El Teorema 3.9 se establece de manera análoga para códigos sobre \mathbb{F}_q , usando este hecho demostramos el siguiente teorema.

Teorema 5.7. *Los $[n, n - k, 3]$ códigos lineales q -arios de Hamming $\mathcal{H}_q(k)$ son perfectos.*

Demostración. Como $d = 3$ es la distancia mínima del código de Hamming $\mathcal{H}_q(k)$ entonces $\mathcal{H}_q(k)$ puede corregir $t = 1$ o menos errores. Luego $B_1(\mathbf{x}) \cap B_1(\mathbf{y}) = \emptyset$ siempre que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}_q(k)$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Hay un total de q^{n-k} esferas del tipo $B_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{H}_q(k)$ (una por cada palabra-código). Por otro lado, la esfera de radio 1 alrededor de la palabra-código cero contiene a este vector y a los n vectores de peso 1 y sus múltiplos diferentes de cero, es decir, $q - 1$, hay un total de $n(q - 1) + 1$ vectores en $B_1(\mathbf{0})$, esto es, $|B_1(\mathbf{0})| = n(q - 1) + 1 = [(q^k - 1)/(q - 1)](q - 1) + 1 = q^k$. Para cualquier otra palabra-código $\mathbf{x} \in \mathcal{H}_q(k)$, $|B_1(\mathbf{x})| = q^k$ ya que cada vector en la esfera $B_1(\mathbf{x})$, puede ser obtenido sumando \mathbf{x} a un vector en la esfera $B_1(\mathbf{0})$. Así, para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{H}_q(k)$, $|B_1(\mathbf{x})| = q^k$. Por lo que,

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{H}_q(k)} B_1(\mathbf{x}) \right| &= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{H}_q(k)} |B_1(\mathbf{x})| \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{H}_q(k)} q^k \\ &= \sum_{i=1}^{q^{n-k}} q^k \\ &= q^{n-k} q^k \\ &= q^n \end{aligned}$$

esto es, $\left| \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{H}_q(k)} B_1(\mathbf{x}) \right| = q^n$, en consecuencia, las esferas de Hamming de radio 1 y con centro en las palabras-código cubren el espacio. Por lo tanto, los $[n, n - k, 3]$ códigos lineales q -arios de Hamming $\mathcal{H}_q(k)$ son perfectos. \square

Veamos algunos ejemplos de códigos lineales q -arios de Hamming.

Ejemplo 5.8. Sea $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ el campo ternario cuyas Tablas de Cayley son:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

y

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

La característica del campo \mathbb{F}_3 es 3, esto es, 3 es el menor entero positivo tal que $3a = 0$ para cada $a \in \mathbb{F}_3$. Sea $k = 2$ y tenemos que $q = 3$ entonces $n = (q^k - 1)/(q - 1) = (3^2 - 1)/(3 - 1) = 4$,

de ahí que, $|\mathbb{F}_3^n| = |\mathbb{F}_3^4| = 3^4$ Sean $V_1 = \mathbb{F}_3^2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1, \\ \mathbf{c}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_1 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathbf{c}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_1 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right\}, \\ \mathbf{c}_4 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in V_1 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Tomamos a las columnas \mathbf{c}_i 's en el orden $\mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ para formar la matriz de chequeo de paridad estándar

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de un $[4, 2, 3]$ código lineal ternario de Hamming $\mathcal{H}_3(2)$, cuya matriz generadora estándar es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

De manera que toda palabra-código $\mathbf{x} \in \mathcal{H}_3(2)$ se puede escribir como combinación lineal de las filas de la matriz generadora, esto es, para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{H}_3(2)$,

$$\mathbf{x} = uG = u_1(1022) + u_2(0121)$$

donde $u_i \in \mathbb{F}_3$, $i \in \{1, 2, 3\}$, hay 3^2 de tales combinaciones lineales, de ahí que, $|\mathcal{H}_3(2)| = 9$. En la Figura 5 enlistamos todas las palabras-código del código lineal ternario de Hamming $\mathcal{H}_3(2)$ con su peso respectivo.

\mathbf{x}	$wt(\mathbf{x})$	\mathbf{x}	$wt(\mathbf{x})$	\mathbf{x}	$wt(\mathbf{x})$
0000	0	0121	3	0212	3
1022	3	2011	3	1110	3
2220	3	1201	3	2102	3

Figura 5: Palabras-código del código lineal ternario de Hamming $\mathcal{H}_3(2)$

□

Ejemplo 5.9. Sea $\mathbb{F}_{2^2} = \{0, 1, \alpha, \alpha^2 = 1 + \alpha\}$ un campo cuaternario cuyas Tablas de Cayley son:

+	0	1	α	α^2
0	0	1	α	α^2
1	1	0	α^2	α
α	α	α^2	0	1
α^2	α^2	α	1	0

y

\cdot	0	1	α	α^2
0	0	0	0	0
1	0	1	α	α^2
α	0	α	α^2	1
α^2	0	α^2	1	α

Obsérvese que la característica del campo \mathbb{F}_{2^2} es 2 y que se satisface la relación $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Además, sea $k = 2$, y tenemos que $q = 2^2$ entonces $n = (q^k - 1)/(q - 1) = (2^4 - 1)/(2^2 - 1) = 5$, de ahí que, $|F_{2^2}^n| = |F_{2^2}^5| = 4^5$. Sean $V_1 = \mathbb{F}_{2^2}^2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1, \\ \mathbf{c}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_1 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathbf{c}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_1 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathbf{c}_4 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \in V_1 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathbf{c}_5 &= \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \in V_1 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\} \cup \\ &\quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Tomamos a las columnas \mathbf{c}_i 's en el orden $\mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ para formar la matriz de chequeo de paridad estándar

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de un $[5, 3, 3]$ código lineal cuaternario de Hamming $\mathcal{H}_4(2)$, cuya matriz generadora estándar es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

De manera que toda palabra-código $\mathbf{x} \in \mathcal{H}_4(2)$ se puede escribir como combinación lineal de las filas de la matriz generadora, esto es, para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{H}_4(2)$,

$$\mathbf{x} = uG = u_1(10011) + u_2(0101\alpha) + u_3(001\alpha 1)$$

donde $u_i \in \mathbb{F}_{2^2}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, hay 4^3 de tales combinaciones lineales, de ahí que, $|\mathcal{H}_4(2)| = 64$. En la Figura 6 enlistamos todas las palabras-código del código lineal cuaternario de Hamming $\mathcal{H}_4(2)$ con su respectivo peso.

\mathbf{x}	$wt(\mathbf{x})$	\mathbf{x}	$wt(\mathbf{x})$	\mathbf{x}	$wt(\mathbf{x})$	\mathbf{x}	$wt(\mathbf{x})$
00000	0	001 α 1	3	0101 α	3	10011	3
00 $\alpha\alpha^2\alpha$	3	0 α 0 $\alpha\alpha^2$	3	α 00 $\alpha\alpha$	3	00 α^2 1 α^2	3
0 α^2 0 α^2 1	3	α^2 00 $\alpha^2\alpha^2$	3	0 α 10 α	3	01 $\alpha\alpha$ 0	3
10 $\alpha\alpha\alpha^2$	4	α 010 α^2	3	1 α 0 $\alpha^2\alpha$	4	α 10 α^2 0	3
0 α^2 110	3	01 α^2 01	3	10 α^2 0 α	3	α^2 011 α	4
1 α^2 0 α 0	3	α^2 10 α 1	4	011 $\alpha^2\alpha^2$	4	101 α^2 0	3
1100 α^2	3	0 $\alpha\alpha$ 11	4	α 0 α 10	3	$\alpha\alpha$ 001	3
0 $\alpha^2\alpha^2\alpha\alpha$	4	α^2 0 $\alpha^2\alpha$ 0	3	$\alpha^2\alpha^2$ 00 α	3	111 $\alpha\alpha$	5
$\alpha\alpha\alpha\alpha^2\alpha^2$	5	$\alpha^2\alpha^2\alpha^2$ 11	5	α 1111	5	1 α 11 α^2	5
11 $\alpha\alpha^2$ 1	5	α^2 1100	3	1 α^2 101	4	11 α^2 10	4
1 $\alpha\alpha$ 00	3	α 1 α 0 α	4	$\alpha\alpha$ 1 α 0	4	$\alpha^2\alpha\alpha\alpha\alpha$	5
$\alpha\alpha^2\alpha\alpha$ 1	5	$\alpha\alpha\alpha^2$ 1 α	5	1 $\alpha\alpha^2\alpha$ 1	5	1 $\alpha^2\alpha$ 1 α	5
α 1 $\alpha^2\alpha\alpha^2$	5	$\alpha\alpha^2$ 1 $\alpha^2\alpha$	5	α^2 1 α 1 α^2	5	$\alpha^2\alpha$ 1 α^2 1	5
0 $\alpha\alpha^2\alpha^2$ 0	3	0 $\alpha^2\alpha$ 0 α^2	3	α 0 $\alpha^2\alpha^2$ 1	4	$\alpha\alpha^2$ 01 α^2	4
α^2 0 α 01	3	$\alpha^2\alpha$ 010	3	1 $\alpha^2\alpha^2\alpha^2\alpha^2$	5	α^2 1 $\alpha^2\alpha^2\alpha$	5
$\alpha^2\alpha^2$ 1 $\alpha\alpha^2$	5	$\alpha\alpha^2\alpha^2$ 00	3	$\alpha^2\alpha\alpha^2$ 0 α^2	4	$\alpha^2\alpha^2\alpha\alpha^2$ 0	4

Figura 6: Palabras-código del código lineal cuaternario de Hamming $\mathcal{H}_4(2)$

□

6. Códigos simplex

A continuación se define el concepto de código dual \mathcal{C}^\perp de un código \mathcal{C} , los duales de los códigos de Hamming $\mathcal{H}_q(k)$ son llamados *códigos simplex q -arios*.

Definición 6.1. Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ vectores en \mathbb{F}_q^n . El producto escalar de \mathbf{u} y \mathbf{v} , se denota por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y está definido por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$. Dos palabras-código \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Definición 6.2. Si \mathcal{C} es un \mathbb{F}_q -código lineal su código dual u ortogonal \mathcal{C}^\perp puede ser definido como el conjunto de vectores que son ortogonales a todas las palabras-código de \mathcal{C} , es decir,

$$\mathcal{C}^\perp = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^n : \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ para todo } \mathbf{v} \in \mathcal{C} \}.$$

Un \mathbb{F}_q -código lineal \mathcal{C} es auto-dual si $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\perp$

Teorema 6.3. Si \mathcal{C} es un $[n, k]$ código lineal sobre \mathbb{F}_q que tiene matriz generadora G y matriz de chequeo de paridad H entonces \mathcal{C}^\perp tiene matriz generadora H y matriz de chequeo de paridad G , además, \mathcal{C}^\perp es un $[n, n - k]$ código lineal sobre \mathbb{F}_q .

Demostración. Sea G la matriz generadora de \mathcal{C} entonces para cada $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k \alpha_i G_i$, donde $\alpha_i \in \mathbb{F}_q$, G_i es la i -ésima fila de G y además, $G_i \in \mathcal{C}$, para $i \in \{1, \dots, k\}$. Supóngase que $\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^n$ es tal que $\mathbf{u}G^t = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{0} = \mathbf{u}G^t = [\mathbf{u} \cdot G_1 \ \dots \ \mathbf{u} \cdot G_k]$, de ahí que, $\mathbf{u} \cdot G_i = 0$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i G_i \right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (\mathbf{u} \cdot G_i) = 0$$

i.e., $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, tenemos que, $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\perp$. Ahora bien, supóngase que $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\perp$ entonces $\mathbf{u} \cdot G_i = 0$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ ya que $G_i \in \mathcal{C}$ pero $G^t = [G_1^t \ \dots \ G_k^t]$, por consiguiente, $\mathbf{u}G^t = [\mathbf{u} \cdot G_1 \ \dots \ \mathbf{u} \cdot G_k] = [0 \ \dots \ 0] = \mathbf{0}$, i.e., $\mathbf{u}G^t = \mathbf{0}$. Por lo tanto, $\mathcal{C}^\perp = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^n : \mathbf{u}G^t = \mathbf{0} \} = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^n : G\mathbf{u}^t = \mathbf{0} \}$. Así, la matriz generadora G del código lineal \mathcal{C} es la matriz de chequeo de paridad del código dual \mathcal{C}^\perp . Como \mathcal{C}^\perp es el espacio de soluciones de un sistema lineal homogéneo de k ecuaciones con n indeterminadas cuya matriz asociada al sistema tiene rango k entonces \mathcal{C}^\perp es generado por $n - k$ vectores en \mathbb{F}_q^n linealmente independientes, por consiguiente, \mathcal{C}^\perp es un $[n, n - k]$ código lineal sobre \mathbb{F}_q . Por otro lado, como $GH^t = 0$ tenemos que $0 = G[H_1^t \ \dots \ H_{n-k}^t]$ entonces $GH_i^t = 0$ para cada $i \in \{1, \dots, n - k\}$, de ahí que, $H_i \in \mathcal{C}^\perp$ para cada $i \in \{1, \dots, n - k\}$, pero $\text{rango}(H) = n - k = \dim \mathcal{C}^\perp$, por consiguiente, las filas de H forman una base para \mathcal{C}^\perp , esto es, H es una matriz generadora de \mathcal{C}^\perp . Así la matriz de chequeo de paridad H del código lineal \mathcal{C} es la matriz generadora del código dual \mathcal{C}^\perp , con lo cual queda demostrado el teorema. \square

Definición 6.4. El código dual del código lineal q -ario de Hamming $\mathcal{H}_q(k)$ es llamado un código simplex q -ario.

Por el Teorema anterior, el código simplex q -ario del $[n, n - k, 3]$ código lineal q -ario de Hamming $\mathcal{H}_q(k)$ es un $[n, n - (n - k)] = [n, k]$ código lineal.

Ejemplo 6.5. El código binario de Hamming $\mathcal{H}_2(r)$ es un $[2^r - 1, 2^r - 1 - r, 3]$ código lineal entonces el código simplex binario $\mathcal{H}_2(r)^\perp$ es un $[2^r - 1, r]$ código lineal, cuya matriz generadora es la matriz de chequeo de paridad H_r del código $\mathcal{H}_2(r)$ dada en la Definición 4.1.

Ejemplo 6.6. El código binario simplex \mathcal{H}_3^\perp del $[7, 4, 3]$ código binario de Hamming \mathcal{H}_3 del Ejemplo 3.20 es un $[7, 3]$ código lineal cuya matriz generadora es la matriz de chequeo de paridad H_3 dada por (21).

En la Figura 7 enlistamos las palabras-código del código \mathcal{H}_3^\perp con su peso respectivo.

\mathbf{x}	$wt(\mathbf{x})$	\mathbf{x}	$wt(\mathbf{x})$	\mathbf{x}	$wt(\mathbf{x})$	\mathbf{x}	$wt(\mathbf{x})$
0000000	0	1010101	4	0110011	4	1100110	4
0001111	4	1011010	4	0111100	4	1101001	4

Figura 7: Palabras-código del código simplex binario del código de Hamming \mathcal{H}_3

□

Ejemplo 6.7. Sea el $[4, 2, 3]$ código lineal de Hamming ternario $\mathcal{H}_3(2)$ del Ejemplo 5.8, el $[4, 2]$ código simplex ternario $\mathcal{H}_3(2)^\perp$ del código $\mathcal{H}_3(2)$ tiene como matriz generadora a la matriz de chequeo de paridad de $\mathcal{H}_3(2)$, a saber,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En la Figura 8 enlistamos las palabras-código del código $\mathcal{H}_3(2)^\perp$ con su peso respectivo.

\mathbf{x}	$wt(\mathbf{x})$	\mathbf{x}	$wt(\mathbf{x})$	\mathbf{x}	$wt(\mathbf{x})$
0000	0	1201	3	2102	3
1110	3	2011	3	0212	3
2220	3	0121	3	1022	3

Figura 8: Palabras-código del código simplex ternario del código de Hamming $\mathcal{H}_3(2)$

□

Ejemplo 6.8. Sea el $[5, 3, 3]$ código lineal de Hamming cuaternario $\mathcal{H}_4(2)$ del Ejemplo 5.9, el $[5, 2]$ código simplex cuaternario $\mathcal{H}_4(2)^\perp$ del código $\mathcal{H}_4(2)$ tiene como matriz generadora a la matriz de chequeo de paridad de $\mathcal{H}_4(2)$, a saber,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En la Figura 9 enlistamos las palabras-código del código $\mathcal{H}_4(2)^\perp$ con su peso respectivo.

Los pesos de las palabras-código distintas de cero de los códigos simplex q -arios de los Ejemplos 6.6, 6.7 y 6.8 son $4 = 2^{k-1}$, ($k = 3$), $3 = 3^{k-1}$, ($k = 2$) y $4 = 4^{k-1}$, ($k = 2$), respectivamente.

\mathbf{x}	$wt(\mathbf{x})$	\mathbf{x}	$wt(\mathbf{x})$	\mathbf{x}	$wt(\mathbf{x})$	\mathbf{x}	$wt(\mathbf{x})$
00000	0	$1\alpha 101$	4	$11\alpha 10$	4	$\alpha\alpha^2\alpha 0\alpha$	4
$\alpha\alpha\alpha^2\alpha 0$	4	$\alpha^2 1\alpha^2 0\alpha^2$	4	$\alpha^2\alpha^2 1\alpha^2 0$	4	$0\alpha^2\alpha^2 11$	4
$\alpha^2\alpha 01\alpha$	4	$\alpha^2 0\alpha\alpha 1$	4	$011\alpha\alpha$	4	$1\alpha^2 0\alpha\alpha^2$	4
$10\alpha^2\alpha^2\alpha$	4	$\alpha 011\alpha^2$	4	$\alpha 10\alpha^2 1$	4	$0\alpha\alpha\alpha^2\alpha^2$	4

Figura 9: Palabras-código del código simplex cuaternario del código de Hamming $\mathcal{H}_4(2)$

□

7. Conclusiones

En este capítulo de libro de divulgación se introducen los conceptos básicos de la Teoría de Códigos Lineales Detectores-Correctores de Errores a través del código binario de Hamming \mathcal{H}_3 , se definen los códigos binarios de Hamming y se describen sus parámetros, posteriormente se construyen los códigos q -arios de Hamming perfectos y se describen sus códigos duales llamados códigos simplex q -arios.

Bibliografía

- [1] W. C. Huffman and V. Pless, *Fundamentals of Error-Correcting Codes*, Cambridge University Press, (2003).
- [2] F. J. MacWilliams and N. J. A. Sloane, *The Theory of Error-Correcting Codes*, North-Holland, (1977).
- [3] R. J. McEliece, *The Theory of Information and Coding*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 86, Cambridge, (2004).
- [4] S. Roman, *Coding and Information Theory*, Springer-Verlag, (1992).
- [5] J. H. van Lint, *Introduction to Coding Theory*, 2nd ed., Springer-Verlag, (1992)

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
 Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
 Puebla, Pue. C.P. 72570
 clopez@fcfm.buap.mx

Análisis Matemático

Capítulo 2

Relaciones Canónicas de Conmutación en el Cálculo Estocástico Cuántico

Slaviša Djordjević¹, Julio César García Corte², Héctor Manuel Garduño Castañeda²

FCFM, BUAP¹, Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa²

Resumen

En el estudio del Cálculo Estocástico Cuántico existe una relación canónica de conmutación (RCC) que satisfacen los procesos de Creación y Aniquilación. Esta relación tiene dos formas equivalentes, conocidas como forma infinitesimal y de Weyl, y están presentes en muchos modelos de la física-matemática.

En este documento presentamos una caracterización de estas RCC, proponiendo condiciones necesarias y suficientes en el espacio de Hilbert donde actúan. Como consecuencia, obtenemos las representaciones explícitas de las relaciones canónicas concernientes a los procesos de creación y aniquilación.

1. Introducción

A principios del siglo pasado, las teorías recientes de la Física Moderna demostraron que las ideas de la Mecánica Clásica eran insuficientes para modelar fenómenos subatómicos. Estas mismas insuficiencias se presentaron con las ideas tradicionales de la Teoría de la Probabilidad. Es así como a mediados de los 50, J. Von Neumann establece los principios de la Teoría de la Probabilidad Cuántica.

Siguiendo las líneas de desarrollo de la Probabilidad Clásica, en esta nueva teoría matemática se constituyeron ideas de un Cálculo Estocástico. En 1984, en [3], R. L. Hudson y K. R. Parthasarathy publican el trabajo considerado la obra seminal del Cálculo Estocástico Cuántico, dando impulso al estudio de los procesos de Markov cuánticos, y exponen una generalización de la Fórmula de Ito, conocida como Fórmula de Ito Cuántica, que tuvo pronto enormes aplicaciones en Física, y especialmente en Óptica Cuántica.

Desde entonces se ha escrito diversa bibliografía sobre el tema. Por ejemplo, en [1], A. M. Cheboratev presenta la Probabilidad Cuántica desde un punto de vista moderno; por su parte, en [2], R. L. Hudson desarrolla la teoría de Integración Estocástica Cuántica, mientras que, en [6], K. R. Parthasarathy hace un estudio exhaustivo del Cálculo Estocástico Cuántico.

Este capítulo está fuertemente basado en estas últimas dos obras. En la Sección 2 brindamos algunos resultados generales del Análisis Funcional y la Teoría de Operadores, de los cuales omitimos las demostraciones por tratarse de resultados conocidos, y definimos el Espacio de Fock, que es el espacio de Hilbert donde se trabajará. En la Sección 3 se presentan los operadores de Creación y Aniquilación, los cuales constituyen las transformaciones fundamentales en el Cálculo Estocástico Cuántico. En las Secciones 4 y 5 se estudian las Relaciones Canónicas de Conmutación del Cálculo Estocástico Cuántico, estableciendo condiciones para garantizar su unicidad. Finalmente, en la Sección 6 deducimos la Isometría de Ito como una aplicación original de las relaciones canónicas de conmutación, y presentamos una generalización de un resultado relacionado con el proceso cuántico de posición.

El trabajo es casi autocontenido y, por cuestiones de espacio, los únicos temas que no hemos desarrollado son productos tensoriales de espacios de Hilbert e integración estocástica clásica, dando las referencias que consideramos convenientes.

2. El Espacio de Fock

En esta sección construiremos el *espacio de Fock*, $\mathcal{F}(H)$, asociado a un espacio de Hilbert H . Este espacio es el universo donde trabajaremos a lo largo del capítulo. Para ello, es necesario comenzar con conceptos del Análisis Funcional.

Sea H un espacio de Hilbert. Un *operador* en H es una pareja $(T, D(T))$ donde $D(T)$ es un subespacio vectorial de H llamado *dominio de T* y $T : D(T) \rightarrow H$ es una transformación lineal. Se dice que $(T, D(T))$ es *densamente definido* si $D(T)$ es denso en H . La *gráfica* del operador $(T, D(T))$ es el conjunto $G(T) = \{(u, Tu) : u \in D(T)\}$. Es claro que $G(T)$ es un subespacio vectorial de $H \oplus H$.

$(T, D(T))$ es *cerrado* si su gráfica es un subconjunto cerrado de $H \oplus H$, y *cerrable* si existe un operador $(\bar{T}, D(\bar{T}))$ en H tal que $G(\bar{T}) = \overline{G(T)}$. Este último es único y es llamado *operador cerradura* de $(T, D(T))$.

Si $(T_1, D(T_1))$ y $(T_2, D(T_2))$ son dos operadores en H , se define su *suma* como $D(T_1 + T_2) = D(T_1) \cap D(T_2)$ y $(T_1 + T_2)\phi = T_1\phi + T_2\phi$ para cualquier $\phi \in D(T_1 + T_2)$. Si $D(T_1) \subseteq D(T_2)$ y $T_1\phi = T_2\phi$ para todo $\phi \in D(T_1)$, se dice que $(T_2, D(T_2))$ es una *extensión* de $(T_1, D(T_1))$ o que $(T_1, D(T_1))$ es una *restricción* de $(T_2, D(T_2))$. Esta relación se denota como $T_1 \subseteq T_2$ o $T_2 \supseteq T_1$. $T_1 \subseteq T_2$ si y sólo si $G(T_1) \subseteq G(T_2)$, de donde si T es cerrable, entonces $T \subseteq \overline{T}$.

Si $(T, D(T))$ es densamente definido, definimos el conjunto $D(T^*)$ como

$$D(T^*) = \{v \in H : \sup_{u \in D(T), \|u\|=1} |\langle v, Tu \rangle| < \infty\}.$$

En otras palabras, $v \in D(T^*)$ si y sólo si el mapeo $u \mapsto \langle v, Tu \rangle$, con dominio $D(T)$, es continuo. Como $D(T)$ es denso, una aplicación del Teorema de Riesz muestra que existe un único $v^* \in H$ tal que $\langle v, Tu \rangle = \langle v^*, u \rangle$ para todo $u \in D(T)$. Denotemos por T^*v a v^* . $D(T^*)$ es un espacio vectorial y $T^* : D(T^*) \rightarrow H$ es lineal. Se define el *operador adjunto* de $(T, D(T))$ como $(T^*, D(T^*))$. Si $(T, D(T))$ es densamente definido, se dice que es *autoadjunto* si $T = T^*$ y $D(T) = D(T^*)$.

En adelante haremos un abuso de lenguaje y nos referiremos al operador $(T, D(T))$ simplemente como T , enfatizando su dominio cuando sea necesario. No es difícil demostrar el siguiente

Teorema 2.1. *Sea T densamente definido. Entonces T es cerrable si y sólo si T^* es densamente definido. En este caso, $(T^*)^*$ es el operador tal que $G((T^*)^*) = \overline{G(T)}$, o en otras palabras, $\overline{T} = (T^*)^*$.*

El siguiente resultado es el más importante que usaremos del Análisis Funcional. Debemos mencionar que Parthasarathy lo considera uno de los dos más importantes dentro de su obra [6]. Su demostración puede consultarse en dicho texto, págs. 92-93.

Teorema 2.2. *Sean S_1 y S_2 conjuntos totales en los espacios de Hilbert H_1 y H_2 respectivamente. Supongamos que $U_0 : S_1 \rightarrow S_2$ es un mapeo que preserva el producto interno. Es decir, $\langle U_0u, U_0v \rangle = \langle u, v \rangle$ para cualesquiera $u, v \in S_1$. Entonces existe una única isometría lineal $U : H_1 \rightarrow H_2$ que extiende a U_0 . Si además U_0 es sobreyectiva, entonces U es un isomorfismo unitario de H_1 sobre H_2 .*

Por otra parte, sea \mathcal{H} un conjunto diferente del vacío. Un mapeo $K : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\sum_{i,j} \bar{\alpha}_i \alpha_j K(x_i, x_j) \geq 0$$

para cualesquiera $\alpha_i \in \mathbb{C}$ y $x_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2, \dots, n$, es llamado *kernel semidefinido positivo* en \mathcal{H} , o simplemente *kernel* en \mathcal{H} .

Si \mathcal{H} es un conjunto finito, digamos $\mathcal{H} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, un kernel K en \mathcal{H} es una matriz semidefinida positiva, la cual viene dada por $(K(x_i, x_j))_{i,j}$. Por lo tanto, si \mathcal{H} es infinito, entonces K es un kernel en \mathcal{H} si y sólo si para cualquier subconjunto finito $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \mathcal{H}$, la matriz $((a_{i,j}))_{i,j}$, donde $a_{i,j} = K(x_i, x_j)$, es semidefinida positiva. Si \mathcal{H} es un espacio de Hilbert con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces $K : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $K(x, y) = \langle x, y \rangle$ es un kernel en \mathcal{H} .

Teorema 2.3 (Existencia de Parejas de Gelfand). *Sea \mathcal{H} cualquier conjunto no vacío y K un kernel en \mathcal{H} . Entonces existen un espacio de Hilbert H , no necesariamente separable, y un mapeo $\lambda : \mathcal{H} \rightarrow H$ tales que*

- (I) *El conjunto $\{\lambda(x) : x \in \mathcal{H}\}$ es total en H y*
- (II) *$K(x, y) = \langle \lambda(x), \lambda(y) \rangle$ para todos $x, y \in \mathcal{H}$.*

Si H' es otro espacio de Hilbert y $\lambda' : \mathcal{H} \rightarrow H'$ es un mapeo que satisfacen (I) y (II), entonces existe un isomorfismo unitario $U : H \rightarrow H'$ tal que $U\lambda(x) = \lambda'(x)$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Una demostración de este resultado puede encontrarse en [6], págs. 92-93. La pareja (H, λ) determinada únicamente, salvo isomorfismo unitario, por el kernel K en \mathcal{H} es llamada *pareja de Gelfand* asociada a K y \mathcal{H} .

Sea H un espacio de Hilbert. El mapeo $K : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $K(f, g) = e^{\langle f, g \rangle}$ es un kernel. Al espacio de Hilbert determinado por K en H y al mapeo λ asociado según el Teorema 2.3 se les denota por $\mathcal{F}_s(H)$ y e respectivamente y, si $f \in H$, se dirá que $e(f)$ es el *vector exponencial*¹ asociado a f , o bien, que es el vector exponencial de f . En particular, $e(0)$ es llamado *vector vacío*. Al mapeo e se le llama *mapeo exponencial*. Al conjunto $\mathcal{E}(H) := \text{span}\{e(f) : f \in H\}$ se le conoce como *dominio exponencial*, y también es denotado por \mathcal{E} . Por el mismo Teorema 2.3, el conjunto $\{e(h) : h \in H\}$ es total en $\mathcal{F}_s(H)$. $\mathcal{F}_s(H)$ es llamado *Espacio de Fock Simétrico* o *Espacio de Bosones* de H . Por brevedad, en este trabajo dicho espacio será denotado por $\mathcal{F}(H)$ y lo nombraremos simplemente *Espacio de Fock asociado a H* , o espacio de Fock cuando no haya peligro de confusión.

Notemos además que si $f, g \in H$, entonces, por definición de vectores exponenciales, $\langle e(f), e(g) \rangle = e^{\langle f, g \rangle}$. De lo anterior se deduce que $\|e(f)\| = e^{\|f\|^2/2}$ y, por lo tanto, el mapeo exponencial es

¹O también llamado *vector coherente*

continuo y no hay dos vectores exponenciales que sean ortogonales entre sí. Más aún, ningún vector exponencial es el vector nulo de $\mathcal{F}(H)$ y $e(0)$ es el único vector exponencial de norma 1.

Una propiedad interesante del mapeo exponencial es la capacidad de transformar a cualquier espacio de Hilbert en un espacio con una cantidad no numerable de vectores linealmente independientes sin ser ortogonales.

Teorema 2.4. *Sea $\mathcal{F}(H)$ el espacio de Fock asociado a un espacio de Hilbert H . Los elementos del conjunto $\{e(h) : h \in H\} \subseteq \mathcal{F}(H)$ son linealmente independientes.*

Otra propiedad del mapeo exponencial, y quizá la más importante dentro de la Integración Estocástica Cuántica, es el rompimiento que hace de sumas directas a productos tensoriales, conocida como *propiedad exponencial*. Esto es:

Teorema 2.5 (Propiedad Exponencial). *Sea H un espacio de Hilbert tal que $H = H_1 \oplus H_2$, donde H_1 y H_2 son dos subespacios cerrados de H . Entonces $\mathcal{F}(H) = \mathcal{F}(H_1) \otimes \mathcal{F}(H_2)$. Más aún, $\mathcal{E}(H) = \mathcal{E}(H_1) \otimes \mathcal{E}(H_2)$*

Algunas pruebas de los dos resultados anteriores pueden encontrarse en [6], págs. 126-127. De esta manera, si h_1 y h_2 son elementos de H ortogonales entre sí, entonces $e(h_1 + h_2) = e(h_1) \otimes e(h_2)$, o bien, en notación de coordenadas, $e(h_1, h_2) = e(h_1) \otimes e(h_2)$.

Para el lector que desconozca sobre productos tensoriales, una buena introducción puede ser [6], en donde las construcciones que se dan van encaminadas precisamente al estudio posterior del Cálculo Estocástico Cuántico.

Por otra parte, en la misma obra, Parthasarathy desarrolla el estudio del espacio de Fock simétrico a través de los *espacios de vectores con un número finito de partículas* $H^{\otimes n}$, el cual es un espacio de Hilbert. En este sentido, considera el mapeo $\tilde{e} : H \rightarrow \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\otimes n}$ dado por

$$\tilde{e}(f) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \frac{f^{\otimes n}}{\sqrt{n!}},$$

y el Espacio de Fock (simétrico) puede ser definido como la cerradura del espacio vectorial generado por $\{\tilde{e}(f) : f \in H\}$. Aquí, $H^{\otimes n}$ denota el producto tensorial $\underbrace{H \otimes \cdots \otimes H}_{n \text{ veces}}$, y $f^{\otimes n}$ tiene un significado análogo. Es importante señalar que este enfoque y el que aquí presentamos son

equivalentes. De esta manera, dada $f \in H$, tenemos *tres* formas de entender al vector exponencial asociado a f :

- Como la imagen de f en el sentido de las parejas de Gelfand.
- Como $e(f) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} f^{\otimes n} / \sqrt{n!}$.
- En forma de coordenadas $e(f) = \left(1, f, f^{\otimes 2} / \sqrt{2!}, \dots, f^{\otimes n} / \sqrt{n!}, \dots\right)$.

Nótese que es fácil reconocer si un vector es exponencial o no, ya que su primer coordenada siempre es el escalar 1. Además $e(0) = (1, 0, 0, \dots)$.

Luego, si $H = \mathbb{C}$, es fácil ver que $\mathcal{F}(\mathbb{C}) = \ell^2$ con $e(z) = \left(1, z, z^2 / \sqrt{2!}, \dots\right)$.

Para terminar esta sección, veamos una primera aplicación del Teorema 2.2.

Proposición 2.6. *Sean H_1 y H_2 dos espacios de Hilbert isomorfos. Entonces existe un isomorfismo unitario $U : \mathcal{F}(H_1) \rightarrow \mathcal{F}(H_2)$. Más aún, si $T : H_1 \rightarrow H_2$ es un isomorfismo y e y \tilde{e} son los mapeos exponenciales asociados a H_1 y H_2 , respectivamente, podemos escoger U de tal manera que $Ue(h) = \tilde{e}(Th)$ para toda $h \in H_1$.*

Demostración. Sean $S_1 = \{e(h) : h \in H_1\}$, el cual es total en $\mathcal{F}(H_1)$, y $S_2 = \{\tilde{e}(Th) : h \in H_1\}$. Como $T(H_1) = H_2$, entonces S_2 es el conjunto de vectores exponenciales asociados a H_2 y, por tanto, es total en $\mathcal{F}(H_2)$.

Tomemos $U_0 : S_1 \rightarrow S_2$ dado por $U_0e(h) = \tilde{e}(Th)$. Por la independencia lineal de los vectores exponenciales y la inyectividad de T se tiene que U_0 está bien definido. Luego, si $f, h \in H_1$, entonces

$$\begin{aligned} \langle U_0e(f), U_0e(h) \rangle &= \langle \tilde{e}(Tf), \tilde{e}(Th) \rangle \\ &= e^{\langle Tf, Th \rangle} \\ &= e^{\langle f, h \rangle} \\ &= \langle e(f), e(h) \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, U_0 es un mapeo sobreyectivo entre los conjuntos totales S_1 y S_2 , de modo que puede extenderse a un isomorfismo unitario $U : \mathcal{F}(H_1) \rightarrow \mathcal{F}(H_2)$ tal que $Ue(h) = \tilde{e}(Th)$ para

cualquier $h \in H_1$.

□

3. Operadores de Creación y Aniquilación en el Espacio de Fock

Sea $\mathcal{F}(H)$ un espacio de Fock fijo. Dado que los elementos de $e(H)$ son linealmente independientes y $\mathcal{E}(H) = \text{span}\{e(f) : f \in H\}$, podemos definir operadores en $e(H)$ y extenderlos linealmente a todo $\mathcal{E}(H)$ para obtener operadores densamente definidos. De esta forma, sea $u \in H$. Definamos los operadores $e^{a(u)}$ y $e^{a^\dagger(u)}$ como

$$e^{a(u)}e(f) = \exp \langle u, f \rangle e(f) \text{ y } e^{a^\dagger(u)}e(f) = e(f + u).$$

Extendamos de manera lineal estos mapeos a $\mathcal{E}(H)$. Con abuso de notación, denotemos de la misma forma a los operadores obtenidos.

Teorema 3.1. *Los operadores $e^{a(u)}$ y $e^{a^\dagger(u)}$ son acotados si y sólo si $u = 0$.*

Demostración. Es claro que si $u = 0$, entonces $e^{a(0)} = I = e^{a^\dagger(0)}$ y, por tanto, hay acotamiento. Afirmamos que $e^{a(u)}$ no es acotado para $u \neq 0$. En efecto, supongamos lo contrario. Entonces $e^{a(u)}$ se puede extender de manera única y continua a todo el espacio de Fock $\mathcal{F}(H)$. Denotemos de la misma forma la extensión. Notemos que todo vector exponencial $e(f)$ es eigenvector de $e^{a(u)}$ con eigenvalor asociado $e^{\langle u, f \rangle}$. Luego, si $f = \lambda u$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, tendremos eigenvalores tan grandes como deseemos (ya que $e^{\lambda \langle u, u \rangle}$ es la exponencial real con variable λ).

Como $e^{a(u)}$ es acotado, su espectro es compacto y, por tanto, acotado. En particular, su conjunto de eigenvalores lo es. Pero hemos mostrado que podemos tener eigenvalores tan grandes como queramos. Esto muestra que dicho operador no es acotado.

Veamos que $e^{a^\dagger(u)}$ no es acotado para $u \neq 0$. Supongamos lo contrario. Entonces existe un $M > 0$ tal que para todo $f \in H$ se tiene $\|e^{a^\dagger(u)}e(f)\| \leq M\|e(f)\| = e^k e^{\|f\|^2/2}$, donde $e^k = M$ (k existe por ser $M > 0$).

Por otra parte,

$$\|e^{a^\dagger(u)}e(f)\| = \|e(f + u)\| = e^{\|f+u\|^2/2} = e^{\|f\|^2/2 + \|u\|^2/2 - \text{Re}\langle u, f \rangle}.$$

De todo lo anterior se desprende que existe k tal que, para toda $f \in H$,

$$e^{\|f\|^2/2 + \|u\|^2/2 - \text{Re}\langle u, f \rangle} \leq e^{k + \|f\|^2/2}.$$

Es decir, existe k cumpliendo $\|u\|^2/2 - \operatorname{Re}\langle u, f \rangle \leq k$, para toda $f \in H$.

Sean $\lambda = 1/2 - (k+1)/\|u\|^2$ y $f = \lambda u$. Entonces

$$\begin{aligned}
 k &\geq \frac{\|u\|^2}{2} - \operatorname{Re}\langle u, f \rangle \\
 &= \frac{\|u\|^2}{2} - \operatorname{Re}\langle u, \lambda u \rangle \\
 &= \frac{\|u\|^2}{2} - \lambda \|u\|^2 \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \|u\|^2 \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{k+1}{\|u\|^2}\right) \|u\|^2 \\
 &= k+1.
 \end{aligned}$$

Esta contradicción muestra que $e^{a^\dagger(u)}$ no es acotado para $u \neq 0$.

□

Para $u \in H$, definamos un operador $a(u)$ en un dominio \mathcal{D} que contenga al dominio exponencial y tal que $a(u)e(f) = \langle u, f \rangle e(f)$. Este operador es llamado *operador de aniquilación* con vector de prueba u . Notemos que $a(u)$ y $e^{a(u)}$ comparten los mismos eigenvectores, y los eigenvalores del primero son las exponenciales de los eigenvalores del segundo. De ahí la notación.

Veamos, primero con un ejemplo particular y luego un teorema, que el mapeo $f \mapsto e(f)$ es derivable en 0.

Ejemplo 3.2. Sabemos que $\mathcal{F}(\mathbb{C}) = \ell^2$ y $e(z) = \left(1, z, z^2/\sqrt{2!}, z^3/\sqrt{3!}, \dots\right)$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{e(z+h) - e(z)}{h} &= \frac{1}{h} \left[\left(1, z+h, \frac{(z+h)^2}{\sqrt{2!}}, \frac{(z+h)^3}{\sqrt{3!}}, \dots\right) - \left(1, z, \frac{z^2}{\sqrt{2!}}, \frac{z^3}{\sqrt{3!}}, \dots\right) \right] \\
 &= \frac{1}{h} \left(0, h, \frac{(z+h)^2 - z^2}{\sqrt{2!}}, \frac{(z+h)^3 - z^3}{\sqrt{3!}}, \dots\right) \\
 &= \left(0, 1, \frac{1}{\sqrt{2!}} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h}, \frac{1}{\sqrt{3!}} \frac{(z+h)^3 - z^3}{h}, \dots\right).
 \end{aligned}$$

Como la convergencia débil en ℓ^2 es la convergencia entrada a entrada, haciendo $h \rightarrow 0$, tenemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e(z+h) - e(z)}{h} = \left(0, 1, \frac{2z}{\sqrt{2!}}, \frac{3z^2}{\sqrt{3!}}, \dots \right).$$

Llamemos $e'(z)$ al lado derecho de esta igualdad. Hemos probado que, cuando $h \rightarrow 0$, la red $\{(e(z+h) - e(z))/h\}_{h \in \mathbb{C}}$ converge débilmente a $e'(z)$.

Un cálculo análogo muestra que $\|(e(z+h) - e(z))/h\| \rightarrow \|e'(z)\|$ cuando h tiende a 0. Por tanto, $\{(e(z+h) - e(z))/h\}_{h \in \mathbb{C}}$ converge fuertemente a $e'(z)$ cuando $h \rightarrow 0$.

Podemos generalizar este ejemplo para cualquier espacio de Fock:

Teorema 3.3. Sean $u, f \in H$. Entonces la red $\{[e(f+zu) - e(f)]/z\}_{z \in \mathbb{C}}$ es convergente en $\mathcal{F}(H)$ cuando $z \rightarrow 0$.

Demostración. Si $u = 0$ ya terminamos. Supongamos lo contrario. Sea $f \in H = \text{span}\{u\}^\perp \oplus \text{span}\{u\}$, con $f = f_1 \oplus tu = (f_1, tu)$. Así, $f + zu = (f_1, (t+z)u)$ y, por la propiedad exponencial, $e(f) = e(f_1) \otimes e(tu)$ y $e(f + zu) = e(f_1) \otimes e((t+z)u)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{e(f+zu) - e(f)}{z} &= \frac{e(f_1) \otimes e((t+z)u) - e(f_1) \otimes e(tu)}{z} \\ &= e(f_1) \otimes \frac{e((t+z)u) - e(tu)}{z}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e(f+zu) - e(f)}{z} &= \lim_{z \rightarrow 0} e(f_1) \otimes \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e((t+z)u) - e(tu)}{z} \\ &= e(f_1) \otimes \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e((t+z)u) - e(tu)}{z}. \end{aligned} \quad (1)$$

Como \mathbb{C} y $\text{span}\{u\}$ son espacios vectoriales de dimensión 1, existe un isomorfismo unitario $T : \text{span}\{u\} \rightarrow \mathbb{C}$ entre ellos. Por la Proposición 2.6, existe un isomorfismo unitario $U : \mathcal{F}(\text{span}\{u\}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{C})$ tal que $Ue(f) = e(Tf)$ para cualquier $f \in \text{span}\{u\}$ ². Luego,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e((t+z)u) - e(tu)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{U^{-1}e(T(t+z)u) - U^{-1}e(Ttu)}{z}$$

²Obsérvese que estamos haciendo un abuso de notación, ya que $e(Tf)$ hace referencia al vector exponencial asociado al complejo Tf . Mantendremos este abuso a lo largo de esta demostración.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z \rightarrow 0} U^{-1} \frac{e((t+z)Tu) - e(tTu)}{z} \\
&= U^{-1} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e((t+z)Tu) - e(tTu)}{z}.
\end{aligned}$$

Como $Tu \in \mathbb{C}$, aplicando un poco de álgebra y el ejemplo previo, se observa que el límite en la última línea de la igualdad anterior existe, por lo cual $\lim_{z \rightarrow 0} [e((t+z)u) - e(tu)]/z$ es un elemento de $\mathcal{F}(\text{span}\{u\})$. Así, los límites en la ecuación (1) existen. □

Para cada $u \in H$ definamos un operador $a^\dagger(u)$ en un dominio \mathcal{D} que contenga a los vectores exponenciales como

$$a^\dagger(u)e(f) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e(f+zu) - e(f)}{z}.$$

Este operador es llamado *creación* con vector de prueba u . Notemos que no envía al dominio exponencial en sí mismo.

Teorema 3.4. *Si $u \in H$ y $w \in \mathbb{C}$, entonces $a^\dagger(wu) = wa^\dagger(u)$ y $a(wu) = \bar{w}a(u)$. Más aún, el mapeo $u \mapsto a^\dagger(u)$ es lineal.*

Demostración. El resultado es claro con $w = 0$, así que supongamos $w \neq 0$.

Para ver que $a^\dagger(wu) = wa^\dagger(u)$, basta con notar que, si $z \in \mathbb{C}$ no es 0, entonces

$$\frac{e(f+zwu) - e(f)}{z} = w \frac{e(f+zwu) - e(f)}{wz}$$

y hacemos $z \rightarrow 0$.

Para ver que $a(wu) = \bar{w}a(u)$, obsérvese que $a(wu)e(f) = \langle wu, f \rangle e(f) = \bar{w} \langle u, f \rangle e(f) = \bar{w}a(u)e(f)$ para cualquier vector exponencial $e(f)$. En ambos casos, los resultados propuestos se siguen por extensión lineal.

La aditividad del mapeo $u \mapsto a^\dagger(u)$ se demuestra de manera análoga. □

En particular, $a^\dagger(iu) = ia^\dagger(u)$ y $a(iu) = -ia(u)$.

Teorema 3.5. *Para cualesquiera $u, f, g \in H$ se cumple:*

$$\begin{aligned}\langle e(f), a(u)e(g) \rangle &= \langle u, g \rangle \langle e(f), e(g) \rangle \\ \langle e(f), a^\dagger(u)e(g) \rangle &= \langle f, u \rangle \langle e(f), e(g) \rangle.\end{aligned}$$

Demostración. La primera relación es clara, ya que $a(u)e(g) = \langle u, g \rangle e(g)$. Para la segunda, sea $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}\left\langle e(f), \frac{e(g + zu) - e(g)}{z} \right\rangle &= \frac{1}{z} \langle e(f), e(g + zu) - e(g) \rangle \\ &= \frac{1}{z} (\langle e(f), e(g + zu) \rangle - \langle e(f), e(g) \rangle) \\ &= \frac{e^{\langle f, g + zu \rangle} - e^{\langle f, g \rangle}}{z} \\ &= e^{\langle f, g \rangle} \frac{e^{z\langle f, u \rangle} - 1}{z}.\end{aligned}$$

Al ser el producto interno y e funciones continuas, y notando que en el lado derecho de la igualdad anterior tenemos la exponencial compleja, hacemos $z \rightarrow 0$ para obtener $\langle e(f), a^\dagger(u)e(g) \rangle = e^{\langle f, g \rangle} \langle f, u \rangle$. Como $e^{\langle f, g \rangle} = \langle e(f), e(g) \rangle$, se tiene la segunda igualdad pedida. □

Corolario 3.6. *Para cualquier $u \in H$, los operadores $a^\dagger(u)$ y $a(u)$ son cerrables.*

Demostración. Se sigue de los Teoremas 3.5 y 2.1. □

Observación 3.7. Por definición, este corolario significa que existen $\overline{a^\dagger(u)}$ y $\overline{a(u)}$.

Observación 3.8. Nótese que el Teorema 3.5 y el corolario anterior implican que $(a^\dagger(u))^* \supset \overline{a(u)}$ y $(a(u))^* \supset \overline{a^\dagger(u)}$. Como $a(u) \subseteq \overline{a(u)}$ y $a^\dagger(u) \subseteq \overline{a^\dagger(u)}$, concluimos que $(a^\dagger(u))^*e(f) = a(u)e(f)$ y $(a(u))^*e(f) = a^\dagger(u)e(f)$ para cualquier $e(f) \in \mathcal{E}$.

Corolario 3.9. *Para cualesquiera $u, v, f, g \in H$ se tiene:*

$$\begin{aligned}\langle a(u)e(f), a(v)e(g) \rangle &= \overline{\langle u, f \rangle} \langle v, g \rangle \langle e(f), e(g) \rangle \\ \langle a(u)e(f), a^\dagger(v)e(g) \rangle &= \overline{\langle u, f \rangle} \langle f, v \rangle \langle e(f), e(g) \rangle \\ \langle a^\dagger(u)e(f), a(v)e(g) \rangle &= \langle v, g \rangle \langle u, g \rangle \langle e(f), e(g) \rangle \\ \langle a^\dagger(u)e(f), a^\dagger(v)e(g) \rangle &= \{\langle u, g \rangle \langle f, v \rangle + \langle u, v \rangle\} \langle e(f), e(g) \rangle\end{aligned}$$

y por lo tanto se cumplen las relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned}\langle a^\dagger(f)\phi_1, a(g)\phi_2 \rangle - \langle a^\dagger(g)\phi_1, a(f)\phi_2 \rangle &= 0 \\ \langle a(f)\phi_1, a^\dagger(g)\phi_2 \rangle - \langle a(g)\phi_1, a^\dagger(f)\phi_2 \rangle &= 0 \\ \langle a^\dagger(f)\phi_1, a^\dagger(g)\phi_2 \rangle - \langle a(g)\phi_1, a(f)\phi_2 \rangle &= \langle f, g \rangle \langle \phi_1, \phi_2 \rangle\end{aligned}$$

para cualesquiera $\phi_i \in \mathcal{E}(H)$.

Un ejercicio bastante sencillo es demostrar que el conjunto $\mathbb{C}^* \times H \times H$ (donde \mathbb{C}^* es el grupo de complejos sin el cero) es un grupo con la multiplicación dada por

$$(z, f, u)(w, g, v) = (zw \exp\langle u, g \rangle, f + g, u + v). \quad (2)$$

Denotemos por \mathfrak{A} a este grupo. Definamos la función Φ que a cada terna $(z, u, v) \in \mathfrak{A}$ le asigna el operador $\Phi(z, u, v) = ze^{a^\dagger(u)}e^{a(v)}$. Se verifica rápidamente que $\Phi(z, u, v)$ es un operador invertible en $\mathcal{E}(H)$. Más aún, Φ es una representación del grupo \mathfrak{A} . Es decir, Φ es un homomorfismo de \mathfrak{A} al grupo de operadores invertibles en el dominio exponencial: Para cada $h \in H$, $\Phi((z, u, v)(w, f, g))e(h) = \Phi(z, u, v)\Phi(w, f, g)e(h)$.

Lema 3.10. $\Phi(z, u, v)$ es una isometría en el dominio exponencial cuando $|z|^2 = e^{-\|u\|^2}$ y $u+v=0$.

Demostración.

$$\begin{aligned}\langle \Phi(z, u, v)e(f), \Phi(z, u, v)e(g) \rangle &= \langle ze^{a^\dagger(u)}e^{a(v)}e(f), ze^{a^\dagger(u)}e^{a(v)}e(g) \rangle \\ &= |z|^2 \langle e^{a^\dagger(u)}e^{\langle v, f \rangle}e(f), e^{a^\dagger(u)}e^{\langle v, g \rangle}e(g) \rangle \\ &= |z|^2 e^{\overline{\langle v, f \rangle} + \langle v, g \rangle} \langle e^{a^\dagger(u)}e(f), e^{a^\dagger(u)}e(g) \rangle \\ &= |z|^2 e^{\langle f, v \rangle + \langle v, g \rangle} \langle e^{a^\dagger(u)}e(f), e^{a^\dagger(u)}e(g) \rangle \\ &= |z|^2 e^{\langle f, v \rangle + \langle v, g \rangle} \langle e(f+u), e(g+u) \rangle \\ &= |z|^2 e^{\langle f, v \rangle + \langle v, g \rangle} e^{\langle f+u, g+u \rangle} \\ &= |z|^2 e^{\langle f, v \rangle + \langle v, g \rangle + \langle f+u, g+u \rangle} \\ &= |z|^2 e^{\langle f, v \rangle + \langle v, g \rangle + \langle f, g \rangle + \langle f, u \rangle + \langle u, g \rangle + \|u\|^2}.\end{aligned}$$

Pero $\langle f, v \rangle = \langle f, -u \rangle = -\langle f, u \rangle$ y, análogamente, $\langle v, g \rangle = -\langle u, g \rangle$, de donde

$$\langle \Phi(z, u, v)e(f), \Phi(z, u, v)e(g) \rangle = |z|^2 e^{\langle f, g \rangle + \|u\|^2}$$

y, al ser $|z|^2 = e^{-\|u\|^2}$, se tiene lo pedido. □

Observación 3.11. En otras palabras, el lema anterior nos dice que si $f, g \in H$, entonces

$$\langle \Phi(z, u, v)e(f), \Phi(z, u, v)e(g) \rangle = \langle e(f), e(g) \rangle.$$

Observación 3.12. Recordemos que toda isometría lineal en un espacio de Hilbert puede extenderse de manera única y lineal a un operador unitario. Así, para la isometría $\Phi(z, u, v)$ del lema anterior, denotemos de la misma manera a su extensión unitaria. Nótese que la igualdad $\Phi((z, u, v)(w, f, g)) = \Phi(z, u, v)\Phi(w, f, g)$ sigue siendo válida para estas extensiones unitarias y ahora en todo $\mathcal{F}(H)$.

Un *grupo unitario de un sólo parámetro*, o grupo unitario uniparamétrico, es un homomorfismo de la recta real al grupo de operadores unitarios de un espacio de Hilbert. Abusando de lenguaje, nosotros nos referiremos por grupo unitario de un sólo parámetro a la imagen de este homomorfismo. Con esta definición y tomando en cuenta el Lema 3.10 y la Observación 3.12, obtenemos

Teorema 3.13. *Sea $u \in H$ fijo. Entonces la familia $\mathcal{W}(u) = \{W_t(u) : t \in \mathbb{R}\}$, donde $W_t(u) := \Phi(e^{-\|tu\|^2/2}, tu, -tu)$, define un grupo unitario de un sólo parámetro.*

Demostración. Sean $s, t \in \mathbb{R}$. Como Φ es una representación de \mathfrak{A} , entonces

$$\begin{aligned} W_t(u)W_s(u) &= \Phi(e^{-\|tu\|^2/2}, tu, -tu)\Phi(e^{-\|su\|^2/2}, su, -su) \\ &= \Phi[(e^{-\|tu\|^2/2}, tu, -tu)(e^{-\|su\|^2/2}, su, -su)] \\ &= \Phi(e^{-\|tu\|^2/2}e^{-\|su\|^2/2}e^{\langle -tu, su \rangle}, tu + su, -tu - su) \\ &= \Phi(e^{-t^2\|u\|^2/2 - s^2\|u\|^2/2 - ts\|u\|^2}, (t+s)u, -(t+s)u) \\ &= \Phi(e^{-(t+s)^2\|u\|^2/2}, (t+s)u, -(t+s)u) \\ &= \Phi(e^{-\|(t+s)u\|^2/2}, (t+s)u, -(t+s)u) \\ &= W_{t+s}(u). \end{aligned}$$

Esto muestra que $\mathcal{W}(u)$ es cerrado bajo multiplicación y $W_t(u)W_s(u) = W_{t+s}(u)$, por lo que el producto es conmutativo. Si tomamos $s = 0$, vemos que hay neutro dado por $W_0(u) = \Phi(1, 0, 0) = I$ y, si hacemos $s = -t$, vemos que hay inversos multiplicativos dados por $W_t(u)^{-1} = W_{-t}(u) = \Phi(e^{-\|-tu\|^2/2}, -tu, tu)$. Esto prueba que $\mathcal{W}(u)$ es un grupo abeliano. □

Teorema 3.14. *$W_t(u)$ mapea a los vectores exponenciales en \mathcal{E} y, por tanto, \mathcal{E} es invariante para este operador.*

Demostración. Es inmediata de la definición de $W_t(u)$. □

Una familia uniparamétrica $\{U_t : t \in \mathbb{R}\}$ de operadores unitarios en un espacio de Hilbert H se dice *fuertemente continua* si, para todos $t_0 \in \mathbb{R}$ y $\phi \in H$, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow t_0} U_t \phi = U_{t_0} \phi,$$

y además, $U_t U_s = U_{t+s}$ para cualesquiera $s, t \in \mathbb{R}$. Es de notar que, por la última condición, $U_0 = U_0^2$ y, como U_t es unitario, entonces $U_0 = I$.

El estudio de los grupos unitarios a un sólo parámetro pertenece a la Teoría de Semigrupos Cuánticos. Un resultado clásico sobre ellos, que usaremos más adelante, establece una correspondencia biyectiva entre los grupos uniparamétricos fuertemente continuos de operadores unitarios y los operadores autoadjuntos. Es decir, a cada grupo unitario uniparamétrico fuertemente continuo $\{U_t : t \in \mathbb{R}\}$ se le puede asociar de manera única un operador autoadjunto S .

Teorema 3.15. *[Versión diferencial de los generadores de Stone] Sea $\{U_t : t \in \mathbb{R}\}$ una familia uniparamétrica fuertemente continua de operadores unitarios en un espacio de Hilbert H . Entonces existe un operador autoadjunto S con dominio $D \subseteq H$, no necesariamente acotado, tal que $U_t = e^{itS}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Recíprocamente, sea S autoadjunto no necesariamente acotado con dominio $D \subseteq H$. Entonces, la familia $U_t = e^{itS}$ es un grupo unitario uniparamétrico fuertemente continuo.

En estas condiciones, para cualquier $\phi \in D$, se cumple

$$S\phi = -i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U_t \phi - \phi}{t}.$$

Esta igualdad se denota por

$$S\phi = -i \left. \frac{d}{dt} U_t \phi \right|_{t=0},$$

o bien, $S\phi = -i D_t U_t \phi|_{t=0}$.

Como siempre, para una demostración remitimos al lector a [6], pág. 73.

4. Relaciones Canónicas de Conmutación en forma Infinitesimal

Dados dos espacios de Hilbert H y $\tilde{\mathfrak{H}}$ con dos familias de operadores no acotados $\mathcal{A} = \{\mathfrak{a}(f) : f \in H\}$ y $\mathcal{A}^\dagger = \{\mathfrak{a}^\dagger(f) : f \in H\}$ densamente definidos en $\tilde{\mathfrak{H}}$, con el mismo dominio \mathcal{D} , cumpliendo:

- Para cualesquiera $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}$ se tiene

$$\langle \mathfrak{a}^\dagger(f)\phi_1, \mathfrak{a}^\dagger(g)\phi_2 \rangle - \langle \mathfrak{a}(g)\phi_1, \mathfrak{a}(f)\phi_2 \rangle = \langle f, g \rangle \langle \phi_1, \phi_2 \rangle,$$

- para cualquier $f \in H$, $\mathfrak{a}^\dagger(f) = \mathfrak{a}(f)^*|_{\mathcal{D}}$ y $\mathfrak{a}(f) = \mathfrak{a}^\dagger(f)^*|_{\mathcal{D}}$, y
- el mapeo $f \mapsto \mathfrak{a}^\dagger(f)$ es lineal,

diremos que \mathcal{A} y \mathcal{A}^\dagger son una *representación de la forma infinitesimal de las Relaciones Canónicas de Conmutación sobre $(H, \tilde{\mathfrak{H}})$* , abreviado como RCC-I sobre $(H, \tilde{\mathfrak{H}})$. En este sentido, por el Teorema 3.4, la Observación 3.8 y el Corolario 3.9, las familias de operadores de creación y aniquilación satisfacen la RCC-I en $(H, \mathcal{F}(H))$.

Analicemos algunas propiedades de la RCC-I sobre $(H, \mathcal{F}(H))$ tomando a las familias de creación y aniquilación.

Teorema 4.1. *Los dominios de los operadores $a(f)$, $a^\dagger(f)$, $f \in H$, contienen a todos los vectores de la forma $\{(0, \dots, 0, v^{\otimes n}, 0, \dots) : n \geq 0, v \in H\}$ (donde el producto tensorial se encuentra en la posición n) y, con abuso de notación:*

$$\begin{aligned} a(f)v^{\otimes n} &= \sqrt{n}\langle f, v \rangle v^{\otimes n-1} \text{ si } n \geq 1. \\ a^\dagger(f)v^{\otimes n} &= (n+1)^{-1/2}(f \otimes v^{\otimes n} + v \otimes f \otimes v^{\otimes n-1} + v^{\otimes 2} \otimes f \otimes v^{\otimes n-2} + \dots + v^{\otimes n} \otimes f). \end{aligned}$$

Citamos [6], pág. 146, para una prueba de este resultado.

Corolario 4.2. *El vector vacío $e(0)$ está en el dominio de $a^\dagger(f_1)a^\dagger(f_2)\dots a^\dagger(f_n)$ para cualesquiera $f_i \in H$. Más aún, $a^\dagger(f)^n e(0) = (0, 0, \dots, 0, \sqrt{n!}f^{\otimes n}, 0, \dots)$.*

Demostración. Es inmediato del teorema anterior. □

Corolario 4.3. *Sean $f, g \in H$. Entonces $a(f)a^\dagger(g)e(0) - a^\dagger(g)a(f)e(0) = \langle f, g \rangle e(0)$.*

Demostración. Es directo de la representación de la RCC-I en $(H, \mathcal{F}(H))$. □

Este resultado junto con los hechos de ser $e(0)$ unitario y $a(f)e(0) = 0$ para toda $f \in H$, nos permitirán caracterizar al Espacio de Fock:

Lema 4.4. *La familia $\{a^\dagger(f)^n e(0) : n \geq 0, f \in H\}$ es total en $\mathcal{F}(H)$.*

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{F}(H)$ tal que $\langle \phi, a^\dagger(f)^n e(0) \rangle = 0$ para cada $n \geq 0$ y $f \in H$. Si tomamos $g \in H$ arbitrario, entonces

$$\begin{aligned}
& \left\| e(g) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} a^\dagger(g)^k e(0) \right\|^2 \\
&= \left\| \left(1, g, \frac{g^{\otimes 2}}{\sqrt{2!}}, \dots, \frac{g^{\otimes n}}{\sqrt{n!}}, \frac{g^{\otimes n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}, \dots \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(1, g, \frac{g^{\otimes 2}}{\sqrt{2!}}, \dots, \frac{g^{\otimes n}}{\sqrt{n!}}, 0, 0, \dots \right) \right\|^2 \\
&= \left\| \left(0, 0, \dots, 0, \frac{g^{\otimes n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}, \frac{g^{\otimes n+2}}{\sqrt{(n+2)!}}, \dots \right) \right\|^2 \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\|g^{\otimes k}\|^2}{k!} \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\|g\|^{2k}}{k!} \\
&\rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Luego, $\langle \phi, e(g) \rangle = \lim \sum (k!)^{-1} \langle \phi, a^\dagger(g)^k e(0) \rangle = 0$ para cada $g \in H$. Usando la totalidad de los vectores exponenciales, se concluye que $\phi = 0$, que es lo que se quería probar. \square

Lema 4.5. Sean $\tilde{\mathfrak{H}}$ y H espacios de Hilbert con las siguientes características:

1. Existen dos familias de operadores $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}(f) : f \in H\}$ y $\mathcal{A}^\dagger = \{\mathbf{a}^\dagger(f) : f \in H\}$ con un mismo dominio \mathcal{D} en $\tilde{\mathfrak{H}}$ que son una representación de la RCC-I en $(H, \tilde{\mathfrak{H}})$.
2. Existe un vector unitario ω en \mathcal{D} tal que $\mathbf{a}^\dagger(f)^n \omega$ está bien definido para cada $f \in H$ y $n \geq 1$.
3. $\mathbf{a}(g)\omega = 0$ para todo $g \in H$.

Entonces, para $m \geq 1$ y $\phi \in \mathcal{D}$ arbitrario, se tiene:

(a) $\langle \mathbf{a}^\dagger(g)\phi, \mathbf{a}^\dagger(f)^m \omega \rangle = \langle \phi, \mathbf{a}(g)\mathbf{a}^\dagger(f)^m \omega \rangle,$

(b) $\mathbf{a}(g)\mathbf{a}^\dagger(f)^m \omega = m\langle g, f \rangle \mathbf{a}^\dagger(f)^{m-1} \omega$ y

(c) $\langle \omega, \mathbf{a}^\dagger(f)^m \omega \rangle = 0.$

Demostración. Demostraremos a continuación cada uno de los tres incisos.

- (a) Nótese que la condición 2. equivale a que $\mathbf{a}^\dagger(f)^m\omega \in \mathcal{D}$, de modo que el lado derecho de la expresión en (a) tiene sentido. Luego, si $\phi \in \mathcal{D}$, entonces, dado que $\mathbf{a}(u) = \mathbf{a}^\dagger(u)^*|_{\mathcal{D}}$, $\langle \mathbf{a}^\dagger(g)\phi, \mathbf{a}^\dagger(f)^m\omega \rangle = \langle \phi, \mathbf{a}(g)\mathbf{a}^\dagger(f)^m\omega \rangle$.
- (b) Procedamos por inducción sobre m . Sea $\psi \in \mathcal{D}$. Por (a), para $m = 1$, $\langle \mathbf{a}^\dagger(g)\psi, \mathbf{a}^\dagger(f)\omega \rangle = \langle \psi, \mathbf{a}(g)\mathbf{a}^\dagger(f)\omega \rangle$.

Como $\mathbf{a}(g)\omega = 0$, usando la ecuación de la forma infinitesimal de la RCC, se tiene:

$$\begin{aligned} \langle g, f \rangle \langle \psi, \omega \rangle &= \langle \mathbf{a}^\dagger(g)\psi, \mathbf{a}^\dagger(f)\omega \rangle - \langle \mathbf{a}(f)\psi, \mathbf{a}(g)\omega \rangle \\ &= \langle \mathbf{a}^\dagger(g)\psi, \mathbf{a}^\dagger(f)\omega \rangle \\ &= \langle \psi, \mathbf{a}(g)\mathbf{a}^\dagger(f)\omega \rangle. \end{aligned}$$

Al ser \mathcal{D} denso y $\psi \in \mathcal{D}$ arbitrario, se sigue que $\mathbf{a}(g)\mathbf{a}^\dagger(f)\omega = \langle g, f \rangle\omega$. Luego, lo que se pide es cierto para $m = 1$. Supongamos ahora que (b) es cierto para alguna $m \geq 1$. Entonces, para $m + 1$, tomando $\psi \in \mathcal{D}$, tenemos:

$$\begin{aligned} &\langle \psi, \mathbf{a}(g)\mathbf{a}^\dagger(f)^{m+1}\omega \rangle \\ &= \langle \mathbf{a}^\dagger(g)\psi, \mathbf{a}^\dagger(f)\mathbf{a}^\dagger(f)^m\omega \rangle \\ &= \langle g, f \rangle \langle \psi, \mathbf{a}^\dagger(f)^m\omega \rangle + \langle \mathbf{a}(f)\psi, \mathbf{a}(g)\mathbf{a}^\dagger(f)^m\omega \rangle \\ &= \langle g, f \rangle \langle \psi, \mathbf{a}^\dagger(f)^m\omega \rangle + \langle \mathbf{a}(f)\psi, m\langle g, f \rangle \mathbf{a}^\dagger(f)^{m-1}\omega \rangle \\ &= \langle g, f \rangle \langle \psi, \mathbf{a}^\dagger(f)^m\omega \rangle + m\langle g, f \rangle \langle \psi, \mathbf{a}^\dagger(f)^m\omega \rangle \\ &= (m + 1)\langle g, f \rangle \langle \psi, \mathbf{a}^\dagger(f)^m\omega \rangle \\ &= \langle \psi, (m + 1)\langle g, f \rangle \mathbf{a}^\dagger(f)^m\omega \rangle. \end{aligned}$$

Al ser \mathcal{D} denso y $\psi \in \mathcal{D}$ arbitrario, se concluye que $\mathbf{a}(g)\mathbf{a}^\dagger(f)^{m+1}\omega = (m + 1)\langle g, f \rangle \mathbf{a}^\dagger(f)^m\omega$, que es lo que se quería demostrar.

- (c) $\langle \omega, \mathbf{a}^\dagger(f)^m\omega \rangle = \langle \mathbf{a}(f)\omega, \mathbf{a}^\dagger(f)^{m-1}\omega \rangle = 0$. Nótese que fue importante que $m \geq 1$.

□

Teorema 4.6. *Con las condiciones del Lema 4.5, si el conjunto $\{\mathbf{a}^\dagger(f)^n\omega : n \geq 0, f \in H\}$ es total en $\tilde{\mathfrak{H}}$, existe un único isomorfismo unitario $U : \tilde{\mathfrak{H}} \rightarrow \mathcal{F}(H)$ tal que $U\omega = e(0)$ y $U\mathbf{a}^\dagger(f)^n\omega = \mathbf{a}^\dagger(f)^ne(0)$.*

Demostración. Primero, notemos que

$$\langle \mathbf{a}^\dagger(f)^n \omega, \mathbf{a}^\dagger(g)^m \omega \rangle = \begin{cases} n! \langle f, g \rangle^n & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

Para mostrar esto, procedamos por inducción en el caso $m = n$. Para $n = 1$, usando la RCC-I, se sigue $\langle \mathbf{a}^\dagger(f)\omega, \mathbf{a}^\dagger(g)\omega \rangle = \langle f, g \rangle$.

Supongamos que, para alguna $n \geq 1$, se tiene $\langle \mathbf{a}^\dagger(f)^m \omega, \mathbf{a}^\dagger(g)^m \omega \rangle = m! \langle f, g \rangle^m$ siempre que $0 \leq m \leq n$. Entonces:

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{a}^\dagger(f)^{n+1} \omega, \mathbf{a}^\dagger(g)^{n+1} \omega \rangle \\ &= \langle \mathbf{a}^\dagger(f) \mathbf{a}^\dagger(f)^n \omega, \mathbf{a}^\dagger(g) \mathbf{a}^\dagger(g)^n \omega \rangle \\ &= \langle f, g \rangle \langle \mathbf{a}^\dagger(f)^n \omega, \mathbf{a}^\dagger(g)^n \omega \rangle \\ & \quad + \langle \mathbf{a}(g) \mathbf{a}^\dagger(f)^n \omega, \mathbf{a}(f) \mathbf{a}^\dagger(g)^n \omega \rangle \\ &= \langle f, g \rangle \langle \mathbf{a}^\dagger(f)^n \omega, \mathbf{a}^\dagger(g)^n \omega \rangle \\ & \quad + \langle f, g \rangle \langle f, g \rangle \langle n \mathbf{a}^\dagger(f)^{n-1} \omega, n \mathbf{a}^\dagger(g)^{n-1} \omega \rangle \\ &= \langle f, g \rangle n! \langle f, g \rangle^n + n^2 \langle f, g \rangle^2 (n-1)! \langle f, g \rangle^{n-1} \\ &= (1+n)n! \langle f, g \rangle^{n+1} \\ &= (n+1)! \langle f, g \rangle^{n+1}. \end{aligned}$$

Análogamente se muestra el caso en que $n \neq m$. Concluimos así que $\langle \mathbf{a}^\dagger(f)^n \omega, \mathbf{a}^\dagger(g)^m \omega \rangle = \langle \mathbf{a}^\dagger(f)^n e(0), \mathbf{a}^\dagger(g)^m e(0) \rangle$. Más aún, es sencillo probar que si $\mathbf{a}^\dagger(f)^n \omega = \mathbf{a}^\dagger(g)^m \omega$, entonces $f = g$ y $n = m$, de modo que el mapeo $\mathbf{a}^\dagger(f)^n \omega \mapsto \mathbf{a}^\dagger(f)e(0)$ está bien definido y conserva productos internos entre dos conjuntos totales. Luego, por el Teorema 2.2, existe un único isomorfismo unitario $U : \tilde{\mathfrak{H}} \rightarrow \mathcal{F}(H)$ tal que $U \mathbf{a}^\dagger(f)\omega = \mathbf{a}^\dagger(f)e(0)$. Este isomorfismo es el buscado. \square

5. Relaciones Canónicas de Conmutación en forma de Weyl

Otra relación canónica de conmutación de importancia es la de Weyl. Dados dos espacios de Hilbert $\tilde{\mathfrak{H}}$ y H con una familia de operadores unitarios $\{\tilde{W}(f) : f \in H\}$ con dominio $\tilde{\mathfrak{H}}$, se dice que esta familia es una *representación en forma de Weyl de la relación de canónica de conmutación en* $(H, \tilde{\mathfrak{H}})$, abreviado como RCC-W, si, para cada $f \in H$ fija, la familia $\{\tilde{W}(tf)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es fuertemente continua y se cumple la igualdad

$$\tilde{W}(f)\tilde{W}(g) = e^{-i\text{Im}\langle f, g \rangle} \tilde{W}(f+g). \quad (3)$$

Recordemos que, dados $u \in H$ y $t \in \mathbb{R}$, los elementos del grupo fuertemente continuo $\mathcal{W}(u)$, definido en el Teorema 3.13, son de la forma

$$W_t(u) = \Phi(e^{-\|tu\|^2/2}, tu, -tu) = e^{-\|tu\|^2/2} e^{a^\dagger(tu)} e^{a(-tu)}$$

en el dominio exponencial. Más aún, se trata de isometrías en este dominio y, por tanto, admiten una extensión unitaria a todo el espacio de Fock.

Si tomamos $t = 1$ y escribimos $W(u)$ simplemente para referirnos a los operadores $W_1(u)$, entonces los elementos de la familia de operadores unitarios $\{W(u) : u \in H\}$ con dominio $\mathcal{F}(H)$ son conocidos como *operadores de Weyl*.

Teorema 5.1. *Los operadores de Weyl son una RCC-W en $(H, \mathcal{F}(H))$.*

Demostración. Como $W(u) = \Phi(e^{-\|u\|^2/2}, u, -u)$ en el dominio exponencial y este conjunto es total en $\mathcal{F}(H)$, bastará con probar la ecuación (3) para estos vectores usando la definición del producto dada por (2) y el hecho de que Φ es una representación:

$$\begin{aligned} W(u)W(v) &= \Phi(e^{-\|u\|^2/2}, u, -u)\Phi(e^{-\|v\|^2/2}, v, -v) \\ &= \Phi((e^{-\|u\|^2/2}, u, -u)(e^{-\|v\|^2/2}, v, -v)) \\ &= \Phi(e^{-(\|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle)/2}, u + v, -(u + v)) \\ &= e^{-(\|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle)/2} e^{a^\dagger(u+v)} e^{a(-u-v)} \\ &= e^{-(\|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle u, v \rangle + 2i\operatorname{Im}\langle u, v \rangle)/2} e^{a^\dagger(u+v)} e^{a(-u-v)} \\ &= e^{-i\operatorname{Im}\langle u, v \rangle} e^{-\|u+v\|^2/2} e^{a^\dagger(u+v)} e^{a(-u-v)} \\ &= e^{-i\operatorname{Im}\langle u, v \rangle} \Phi(e^{-\|u+v\|^2/2}, u + v, -(u + v)) \\ &= e^{-i\operatorname{Im}\langle u, v \rangle} W(u + v), \end{aligned}$$

que es lo que se quería probar. □

Teorema 5.2. *El conjunto $\{W(u)e(0) : u \in H\}$ es total en $\mathcal{F}(H)$.*

Demostración. Basta con notar que

$$W(u)e(0) = e^{-\|u\|^2/2} e^{a^\dagger(u)} e^{a(-u)} e(0) = e^{-\|u\|^2/2} e(u)$$

y usar la totalidad de los vectores exponenciales. □

Usando el resultado anterior, se puede demostrar que la RCC-W también es única, salvo isomorfismo, siempre que se tenga un vector unitario con esta propiedad de totalidad.

Teorema 5.3. *Sea $\{\widetilde{W}(f) : f \in H\}$ una familia de operadores unitarios en un espacio de Hilbert $\widetilde{\mathfrak{H}}$ que satisface la forma de Weyl de la RCC en $(H, \widetilde{\mathfrak{H}})$ y que es continua como mapeo de H a $\mathbb{B}(\widetilde{\mathfrak{H}})$, donde este último es equipado con la topología de la convergencia fuerte, así que en particular, por el Teorema 3.15, el operador autoadjunto $r(f) = -iD_t\widetilde{W}(tf)|_{t=0}$ está bien definido. Supongamos que existe un vector unitario ω perteneciente al dominio de cada $r(f)$ tal que, para cada $f \in H$, $(r(if) - ir(f))\omega = 0$, y que el conjunto $\{\widetilde{W}(f)\omega : f \in H\}$ es total en $\widetilde{\mathfrak{H}}$. Entonces existe un único isomorfismo de espacios de Hilbert U de $\widetilde{\mathfrak{H}}$ a $\mathcal{F}(H)$ que mapea a ω en el vector vacío $e(0)$ y tal que $U\widetilde{W}(f) = W(f)U$ para cada $f \in H$.*

Demostración. Primero, es fácil comprobar que $\widetilde{W}(u)\widetilde{W}(v) = e^{-2i\text{Im}\langle u, v \rangle}\widetilde{W}(v)\widetilde{W}(u)$. Por otra parte, nótese que para cada $g \in H$ se tiene que $\widetilde{W}(g)\omega$ pertenece al dominio de $r(f)$. En efecto:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\widetilde{W}(tf) - I}{t} \widetilde{W}(g)\omega &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-2it\text{Im}\langle f, g \rangle} \widetilde{W}(g)\widetilde{W}(tf)\omega - \widetilde{W}(g)\omega}{t} \\ &= \widetilde{W}(g) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-2it\text{Im}\langle f, g \rangle} \widetilde{W}(tf)\omega - \omega}{t} \end{aligned}$$

que claramente existe. Así, para cada $f \in H$, definamos $\mathfrak{a}(f)$ y $\mathfrak{a}^\dagger(f)$ como $\mathfrak{a}(f) = (r(if) - ir(f))/2$ y $\mathfrak{a}^\dagger(f) = (r(if) + ir(f))/2$. Notemos que $\mathfrak{a}(f)\omega = 0$ y $\mathfrak{a}^\dagger(f) = ir(f)\omega$.

Además, para todo t real y ϕ en el dominio de $r(u)$ arbitraria:

$$\begin{aligned} &\widetilde{W}(tu)\widetilde{W}(v)\phi \\ &= e^{-2it\text{Im}\langle u, v \rangle} \widetilde{W}(v)\widetilde{W}(tu)\phi \\ \implies &-i \left(\frac{\widetilde{W}(tu) - I}{t} \right) \widetilde{W}(v)\phi \\ &= \frac{-i}{t} \left(e^{-2it\text{Im}\langle u, v \rangle} \widetilde{W}(v)\widetilde{W}(tu) - \widetilde{W}(v) \right) \phi \\ &= \frac{-i}{t} \widetilde{W}(v) \left([e^{-2it\text{Im}\langle u, v \rangle} - 1] \widetilde{W}(tu) + \widetilde{W}(tu) - I \right) \phi \\ &= \widetilde{W}(v) \left(-i \frac{e^{-2it\text{Im}\langle u, v \rangle} - 1}{t} \widetilde{W}(tu)\phi - i \frac{\widetilde{W}(tu) - I}{t} \phi \right). \end{aligned}$$

Haciendo $t \rightarrow 0$, por la continuidad de $\widetilde{W}(v)$ y la definición de $r(u)$, se obtiene $r(u)\widetilde{W}(v)\phi = \widetilde{W}(v)(-2\text{Im}\langle u, v \rangle\phi + r(u)\phi)$, o equivalentemente

$$r(u)\widetilde{W}(v) = \widetilde{W}(v)r(u) - 2\text{Im}\langle u, v \rangle\widetilde{W}(v). \quad (4)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}(u)\widetilde{W}(v)\omega &= 2^{-1}(r(iu) - ir(u))\widetilde{W}(v)\omega \\
&= 2^{-1} \left(\widetilde{W}(v)r(iu)\omega - 2\text{Im}(-i\langle u, v \rangle)\widetilde{W}(v)\omega \right) \\
&\quad - 2^{-1} \left(i\widetilde{W}(v)r(u)\omega - 2i\text{Im}\langle u, v \rangle\widetilde{W}(v)\omega \right) \\
&= 2^{-1} \left(i\widetilde{W}(v)r(u)\omega + 2\text{Re}\langle u, v \rangle\widetilde{W}(v)\omega \right) \\
&\quad - 2^{-1} \left(i\widetilde{W}(v)r(u)\omega - 2i\text{Im}\langle u, v \rangle\widetilde{W}(v)\omega \right) \\
&= \langle u, v \rangle\widetilde{W}(v)\omega.
\end{aligned}$$

Más aún, es fácil ver la igualdad $\langle \mathfrak{a}(u)\widetilde{W}(v)\omega, \widetilde{W}(f)\omega \rangle = \langle \widetilde{W}(v)\omega, \mathfrak{a}^\dagger(u)\widetilde{W}(f)\omega \rangle$.

Por otra parte, el hecho de ser $r(f)\omega = -iD_t\widetilde{W}(tf)\omega|_{t=0}$ implica

$$\frac{d}{dt}\widetilde{W}(tf)\omega = ir(f)\widetilde{W}(tf)\omega. \quad (5)$$

En efecto. Obsérvese que

$$\widetilde{W}((t+h)f) = \widetilde{W}(tf+hf) = e^{i\text{Im}\langle tf, hf \rangle}\widetilde{W}(hf)\widetilde{W}(tf) = \widetilde{W}(hf)\widetilde{W}(tf).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\widetilde{W}((t+h)f)\omega - \widetilde{W}(tf)\omega}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\widetilde{W}(hf)\widetilde{W}(tf)\omega - \widetilde{W}(tf)\omega}{h} \\
&= ir(f)\widetilde{W}(tf)\omega.
\end{aligned}$$

Ahora bien, para f fija, como $\{\widetilde{W}(tf)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es fuertemente continua, usando la ecuación (4) es fácil comprobar que $F(t) = ir(f)\widetilde{W}(tf)\omega$ es continuo como mapeo $F : \mathbb{R} \rightarrow \widetilde{\mathfrak{H}}$. Por tanto, para cada $t \in \mathbb{R}$, existe $\mathcal{J}(t) := \int_0^t F(s) ds = \int_0^t ir(f)\widetilde{W}(sf)\omega ds$. Esto significa que para cada $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{J}(t) \in \widetilde{\mathfrak{H}}$ cumple

$$\left\langle \int_0^t ir(f)\widetilde{W}(sf)\omega ds, x \right\rangle = \int_0^t \langle ir(f)\widetilde{W}(sf)\omega, x \rangle ds$$

para cualquier $x \in \widetilde{\mathfrak{H}}$.

La existencia de $\mathcal{J}(t)$ con esta propiedad junto con la ecuación (5) nos muestra la igualdad

$$\widetilde{W}(tf)\omega = \omega + \int_0^t ir(f)\widetilde{W}(sf)\omega ds \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

De esta forma:

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{W}(tf)\omega, \omega \rangle &= \langle \omega, \omega \rangle + \left\langle \int_0^t ir(f)\widetilde{W}(sf)\omega \, ds, \omega \right\rangle \\
&= 1 + \int_0^t \langle ir(f)\widetilde{W}(sf)\omega, \omega \rangle \, ds \\
&= 1 - i \int_0^t \langle \widetilde{W}(sf)\omega, r(f)\omega \rangle \, ds \\
&= 1 - \int_0^t \langle \widetilde{W}(sf)\omega, ir(f)\omega \rangle \, ds \\
&= 1 - \int_0^t \langle \widetilde{W}(sf)\omega, \mathbf{a}^\dagger(f)\omega \rangle \, ds \\
&= 1 - \int_0^t \langle \mathbf{a}(f)\widetilde{W}(sf)\omega, \omega \rangle \, ds \\
&= 1 - \int_0^t \langle f, sf \rangle \langle \widetilde{W}(sf)\omega, \omega \rangle \, ds \\
&= 1 - \|f\|^2 \int_0^t s \langle \widetilde{W}(sf)\omega, \omega \rangle \, ds.
\end{aligned}$$

Esto muestra que el mapeo $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $G(t) = \langle \widetilde{W}(tf)\omega, \omega \rangle$ es absolutamente continuo y derivable, y su derivada satisface $G'(t) = -\|f\|^2 t G(t)$ con condición inicial $G(0) = 1$, de donde $G(t) = e^{-t^2\|f\|^2/2}$. Luego, para $t = -1$, se concluye $\langle \widetilde{W}(-f)\omega, \omega \rangle = e^{-\|f\|^2/2}$ y, usando la unitariedad de $\widetilde{W}(f)$, se sigue la igualdad

$$\langle \omega, \widetilde{W}(f)\omega \rangle = e^{-\|f\|^2/2}.$$

Sea $S = \{\widetilde{W}(f)\omega : f \in H\}$. Tomemos $\widetilde{W}(f)\omega, \widetilde{W}(g)\omega \in S$ satisfaciendo $\widetilde{W}(f)\omega = \widetilde{W}(g)\omega$. Entonces $\omega = e^{i\text{Im}\langle f, g \rangle} \widetilde{W}(g-f)\omega$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
1 &= \langle \omega, \omega \rangle \\
&= e^{i\text{Im}\langle f, g \rangle} \langle \omega, \widetilde{W}(g-f)\omega \rangle \\
&= e^{i\text{Im}\langle f, g \rangle} e^{-\|g-f\|^2/2}.
\end{aligned}$$

Tomando módulos, concluimos que $f = g$. Sea $V : S \rightarrow \mathcal{F}(H)$ dada por $V\widetilde{W}(f)\omega = W(f)e(0)$. Por lo anterior, V está bien definida. Además,

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{W}(f)\omega, \widetilde{W}(g)\omega \rangle &= \langle \omega, \widetilde{W}(-f)\widetilde{W}(g)\omega \rangle \\
&= e^{i\text{Im}\langle f, g \rangle} \langle \omega, \widetilde{W}(g-f)\omega \rangle \\
&= e^{i\text{Im}\langle f, g \rangle} e^{-\|g-f\|^2/2}
\end{aligned}$$

y con esto es fácil deducir la igualdad $\langle \widetilde{W}(f)\omega, \widetilde{W}(g)\omega \rangle = \langle W(f)e(0), W(g)e(0) \rangle$.

Finalmente, por la totalidad de S , se puede extender V a un operador unitario en todo $\widetilde{\mathfrak{H}}$ tal que $V\widetilde{W}(f) = W(f)U$ y $V\omega = V\widetilde{W}(0)\omega = e(0)$, que es lo que se quería probar. \square

6. Aplicaciones

Veamos ahora un par de aplicaciones. La primera de ellas concerniente a la Isometría de Ito, mientras que la segunda al Proceso Cuántico de Posición.

aplicacion 6.1 (La Isometría de Ito). Para los probabilistas, el *Movimiento Browniano* es un proceso estocástico clásico que se construye de la siguiente manera. Consideremos el espacio Ω consistente de todas las funciones continuas real-valuadas ω en $[0, \infty]$ tales que $\omega(0) = 0$. Sea \mathfrak{B} la menor σ -álgebra de subconjuntos con la propiedad de que cada una de las funcionales evaluadoras $B_t\omega = \omega(t)$ es medible. Wiener probó que existe una única medida de probabilidad en el espacio medible (Ω, \mathfrak{B}) , conocida como *medida de Wiener*, cumpliendo que, para $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ y $t_1, \dots, t_n \in [0, \infty]$ arbitrarios,

$$E \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^n x_j B_{t_j} \right) \right] = \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n (t_j \wedge t_k) x_j x_k \right),$$

donde $t_j \wedge t_k = \min\{t_j, t_k\}$ para cualesquiera $j, k \in \{1, \dots, n\}$. El proceso estocástico $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ es el movimiento browniano.

Para lo que resta del capítulo es necesario tener un conocimiento previo de Cálculo Estocástico Clásico. Particularmente Integración Estocástica respecto del Movimiento Browniano. Para el lector que no maneje estos conceptos, una buena introducción puede ser [5], capítulos 2 y 3.

Denotemos por \mathbb{W} a la medida de Wiener. Un hecho bien conocido dentro del Cálculo Estocástico Cuántico es que $\mathcal{F}(H) = L^2(\mathbb{W})$ cuando $H = L^2[0, \infty]$. Más aún, se sabe que $e(0) = 1$ y $e(f) = e^{\int_0^\infty f(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^\infty f(s)^2 ds}$, donde $\int_0^\infty f(s) dB_s$ es la integral estocástica de la función determinista f respecto al movimiento browniano (ver, por ejemplo, [1]). Luego, los operadores de aniquilación y creación toman la forma

$$a(u)e(f) = \langle u, f \rangle e(f) = \int_0^\infty \overline{u(s)} f(s) ds e^{\int_0^\infty f(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^\infty f(s)^2 ds}$$

y

$$a^\dagger(u)e(f) = \left\{ \int_0^\infty u(s) dB_s - \int_0^\infty f(s)u(s) ds \right\} e^{\int_0^\infty f(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^\infty f(s)^2 ds}.$$

Así, la RCC-I se traduce en

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\int_0^\infty \overline{u(s)} dB_s - \int_0^\infty \overline{f(s)u(s)} ds \right) & \left(\int_0^\infty v(s) dB_s - \int_0^\infty v(s)g(s) ds \right) \\ & \times e^{\int_0^\infty \overline{f(s)} dB_s - \frac{1}{2} \int_0^\infty \overline{f(s)}^2 ds} e^{\int_0^\infty g(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^\infty g(s)^2 ds} d\mathbb{W} \\ & = \int_0^\infty \overline{u(s)}v(s) ds e^{\langle f, g \rangle} \\ & \quad + \int_\Omega \int_0^\infty v(s)\overline{f(s)} ds \int_0^\infty \overline{u(s)}g(s) ds e^{\langle f, g \rangle} d\mathbb{W}. \end{aligned}$$

Si hacemos $f = g = 0$ en la ecuación anterior, obtenemos

$$\int_\Omega \int_0^\infty \overline{u(s)} dB_s \int_0^\infty v(s) dB_s d\mathbb{W} = \int_0^\infty \overline{u(s)}v(s) ds. \quad (6)$$

Finalmente, si en la ecuación (6) tomamos $u = v$, tendremos:

$$\int_\Omega \left| \int_0^\infty u(s) dB_s \right|^2 d\mathbb{W} = \int_0^\infty |u(s)|^2 ds,$$

que es la Isometría de Ito.

aplicacion 6.2 (El Proceso Cuántico de Posición). Sea $H = L^2[0, \infty]$. Para cada $t \geq 0$, es claro que la función indicadora del intervalo $[0, t]$, representada como $1_{[0, t]}$, es un elemento de H . Denotemos por $A(t)$ y $A^\dagger(t)$ a los operadores $a(1_{[0, t]})$ y $a^\dagger(1_{[0, t]})$, respectivamente. Se definen los *procesos de creación y aniquilación* como las familias ordenadas $\mathbb{A}^\dagger = \{A^\dagger(t) : t \geq 0\}$ y $\mathbb{A} = \{A(t) : t \geq 0\}$.

Sea $Q(t) = A^\dagger(t) + A(t)$. La familia ordenada $\mathbb{P} = \{Q(t) : t \geq 0\}$ es conocida como *Proceso Cuántico de Posición*. Este proceso es probablemente el más importante dentro del Cálculo Estocástico Cuántico. Debemos mencionar que es el análogo al Movimiento Browniano del Cálculo Estocástico Clásico. En [2] se hace un estudio detallado de la Integral Estocástica Cuántica respecto a los procesos de creación y aniquilación, mientras que en [4] se demuestra que la Fórmula de Ito Clásica puede deducirse a partir de integración estocástica cuántica respecto al proceso de posición utilizando el siguiente resultado:

Teorema 6.3. $Q(t)^n e(0)$ es de la forma

$$\begin{aligned} Q(t)^n e(0) &= \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} t^{0/2} A^{\dagger n} e(0) + t^{1/2} \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} A^{\dagger n-1} e(0) + t^{2/2} \begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} A^{\dagger n-2} e(0) + \dots \\ &\quad + t^{(n-k)/2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} A^{\dagger k} e(0) + \dots \\ &\quad + t^{(n-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} A^{\dagger 1} e(0) + t^{n/2} \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} e(0) \end{aligned}$$

para ciertos reales $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ tales que $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$, $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = 0$, $\begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$ y

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ r+1 \end{bmatrix} = (r+2) \begin{bmatrix} n \\ r+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix},$$

donde $A^{\dagger k} = A^{\dagger}(t)^k$.

Expondremos ahora una generalización del teorema anterior, la cual hemos demostrado utilizando la RCC en forma infinitesimal.

Teorema 6.4. Bajo las condiciones del Lema 4.5, se tiene que $(\mathfrak{a}^{\dagger}(f) + \mathfrak{a}(f))^n \omega$ es de la forma

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}^{\dagger}(f) + \mathfrak{a}(f))^n \omega &= \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger n} \omega + \alpha \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger n-1} \omega + \alpha^2 \begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger n-2} \omega + \dots \\ &\quad + \alpha^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger k} \omega + \dots \\ &\quad + \alpha^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger 1} \omega + \alpha^n \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} \omega \end{aligned}$$

para ciertos reales $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ tales que $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$, $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = 0$, $\begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$ y

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ r+1 \end{bmatrix} = (r+2) \begin{bmatrix} n \\ r+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix},$$

donde $\alpha = \|f\|$ y $\mathfrak{a}^{\dagger k} = \mathfrak{a}^{\dagger}(f)^k$.

Demostración. Por inducción sobre n . Para $n = 1$, se tiene $(\mathbf{a}^\dagger(f) + \mathbf{a}(f))^{n\omega} = \mathbf{a}^\dagger(f)\omega$ y ya. Supongamos que la fórmula es correcta para alguna $n \geq 1$. Entonces:

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{a}^\dagger(f) + \mathbf{a}(f))^{n+1}\omega \\
= & (\mathbf{a}^\dagger(f) + \mathbf{a}(f))(\mathbf{a}^\dagger(f) + \mathbf{a}(f))^{n\omega} \\
= & \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger n+1}\omega + \alpha \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger n}\omega + \alpha^2 \begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger n-1}\omega + \dots \\
& + \alpha^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger k+1}\omega + \dots \\
& + \alpha^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger 2}\omega + \alpha^n \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger}\omega \\
& + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \mathbf{a}\mathbf{a}^{\dagger n}\omega + \alpha \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} \mathbf{a}\mathbf{a}^{\dagger n-1}\omega + \alpha^2 \begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} \mathbf{a}\mathbf{a}^{\dagger n-2}\omega + \dots \\
& + \alpha^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \mathbf{a}\mathbf{a}^{\dagger k}\omega + \dots \\
& + \alpha^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{a}\mathbf{a}^{\dagger 1}\omega + \alpha^n \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{a}\omega \\
= & \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger n+1}\omega + \alpha \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger n}\omega + \alpha^2 \begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger n-1}\omega + \dots \\
& + \alpha^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger k+1}\omega + \dots \\
& + \alpha^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger 2}\omega + \alpha^n \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger}\omega \\
& + n\alpha^2 \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger n-1}\omega + (n-1)\alpha^3 \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger n-2}\omega + (n-2)\alpha^5 \begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger n-3}\omega + \dots \\
& + k\alpha^{n-k+2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger k-1}\omega + \dots \\
& + 2\alpha^n \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger}\omega + \alpha^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \omega + 0 \\
= & \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger n+1}\omega + \alpha \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger n}\omega \\
& + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger k+1}\omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=2}^n k \alpha^{n-k+2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger k-1} \omega \\
& + \alpha^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \omega \\
= & \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger n+1} \omega + \alpha \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger n} \omega \\
& + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger k+1} \omega + \sum_{k=0}^{n-2} (k+2) \alpha^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k+2 \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger k+1} \omega \\
& + \alpha^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \omega \\
= & \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger n+1} \omega + \alpha \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} \mathbf{a}^{\dagger n} \omega \\
& + \sum_{k=0}^{n-2} \left\{ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + (k+2) \begin{bmatrix} n \\ k+2 \end{bmatrix} \right\} \alpha^{n-k} \mathbf{a}^{\dagger k+1} \omega \\
& + \alpha^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \omega.
\end{aligned}$$

Con esto, es fácil concluir. □

Es importante señalar que este resultado puede ser a su vez generalizado para considerar al operador $(\mathbf{a}^\dagger(f) + \mathbf{a}(g))^n$ tomando $\alpha = \langle g, f \rangle^{1/2}$ y, dado que el espacio de Fock es un espacio de Hilbert complejo, no nos preocupamos porque $\langle g, f \rangle$ sea negativo.

7. Conclusiones y Comentarios Finales

El estudio de las Relaciones Canónicas de Conmutación es una parte de la Mecánica Cuántica. Puede desarrollarse a través de teorías más abstractas como las álgebras de Lie y C^* y, como ya se dijo, con Semigrupos Cuánticos. El tratamiento que aquí mostramos está inspirado en [2].

Muchas de las propiedades más importantes de los operadores de creación y aniquilación pueden deducirse a través de las RCC. El punto principal aquí es el hecho de ser $\mathbf{a}^\dagger(f)$ una restricción de $a(f)^*$. Así, las formas explícitas que definen a estos operadores no son tan importantes como las relaciones entre ellos. Prueba de ello son, por ejemplo, la deducción de la Isometría de Ito que

hemos presentado y, a través del Teorema 6.3, demostrar de una manera original la Fórmula de Ito indirectamente mediante la RCC-I. De ahí se sigue que es posible hacer una construcción de la Integral de Ito Clásica de forma novedosa utilizando Cálculo Estocástico Cuántico.

Finalmente, la prueba del Teorema 5.3 sobre la unicidad de la RCC-W puede ser hecha de varias maneras, incluyendo un corolario del Teorema 4.6 y una representación en serie de potencias del operador $e^{a^\dagger(u)+a(u)}$. La demostración que aquí presentamos fue inspirada por esta idea.

Bibliografía

- [1] A.M. Chebotarev, *Lectures on Quantum Probability*. Soc. Mat. Mex. Aportaciones Matemáticas (Textos nivel avanzado), **14**, México, 2000.
- [2] R.L. Hudson, *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus and some of its Applications*. Quantum Probability Communications, **12**, 221-271, 2003.
- [3] R.L. Hudson y K.R. Parthasarathy, *Quantum Ito's Formula and Stochastic Evolution*. Commun. Math. Phys. **93**, 301-323, 1984.
- [4] H.M. Garduño Castañeda, *Una Presentación del Cálculo Estocástico Cuántico con Aplicaciones*, Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias, Universidad Autónoma Metropolitana, México, 2013.
- [5] B. Oksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Springer Verlag, 2003.
- [6] K.R. Parthasarathy, *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*. Monographs in Mathematics, **85**, Birkhauser Verlag, 1992.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
 Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
 Puebla, Pue. C.P. 72570
 slavdj@fcfm.buap.mx

Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa
 Avenida San Rafael Atlixco No. 186, Colonia Vicentina, Iztapalapa,
 México, D.F. C.P. 09340
 jcgc@xanum.uam.mx
 hmgc.math@hotmail.com

Capítulo 3

Condiciones que implican la continuidad de una función real de variable real

Manuel Ibarra Contreras, Armando Martínez García
FCFM, BUAP

Resumen

Este capítulo tiene como objetivo el encontrar condiciones suficientes para la continuidad de una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} . En unos casos, analizando alguna propiedad que satisfacen las funciones continuas, encontramos condiciones adicionales a ésta para obtener la continuidad de la función. Por ejemplo, toda función continua definida en un intervalo cerrado y acotado tiene la propiedad del valor intermedio; en el Teorema 3.6 se prueba que si además de satisfacer ésta propiedad, la función tiene fibras cerradas, entonces la función es continua. En otros casos debilitamos el concepto de continuidad de una función y analizamos bajo qué condiciones adicionales se obtiene la continuidad de dicha función. Por ejemplo, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función casi-continua en $x_0 \in \mathbb{R}$, si para toda vecindad V de $f(x_0)$ existe un conjunto abierto U tal que $x_0 \in U \subset cl_{\mathbb{R}} f^{-1}(V)$; el Teorema 4.11 prueba que si f es una función casi-continua en todo punto de \mathbb{R} y el conjunto de puntos donde f es continua es denso en \mathbb{R} , entonces f es continua en \mathbb{R} .

1. Introducción

Un tema que sin duda es importante dentro del estudio de las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} es determinar bajo qué condiciones una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} es continua. En este capítulo estudiamos algunas de esas condiciones. Por ejemplo, es conocido que toda función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisface las condiciones:

1. si para todo intervalo $[a, b]$ y $y \in (f(a), f(b))$ (o $y \in (f(b), f(a))$) existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = y$
2. para todo $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto cerrado en \mathbb{R} .

Aquí probaremos que el inverso también es válido.

En la siguiente sección se dan las definiciones básicas y algunos resultados elementales relacionados con tales conceptos y las funciones continuas. En la sección 3, además de probar lo dicho al

inicio de esta introducción se encuentran condiciones suficientes relacionadas con las propiedades de compacidad y conexidad que implican la propiedad de continuidad. En las dos últimas secciones se definen los conceptos de casi-continuidad y semi-continuidad de una función y , entre otros resultados, se prueba que (ver Corolario 5.4) si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función casi-continua en todo punto de \mathbb{R} y el conjunto de puntos de semicontinuidad es un conjunto denso en \mathbb{R} , entonces f es continua en \mathbb{R} .

2. Resultados generales

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, el intervalo abierto (a, b) es el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. Aquí consideraremos a \mathbb{R} como un espacio topológico con la topología inducida por los intervalos abiertos. Por lo tanto, dado $U \subset \mathbb{R}$, U es un conjunto abierto si para cada $x \in U$ existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U$ y $F \subset \mathbb{R}$ es un conjunto cerrado si y sólo si $\mathbb{R} \setminus F$ es abierto. Es conocido que $F \subset \mathbb{R}$ es un conjunto cerrado si y sólo si $cl_{\mathbb{R}}(F) = F$, donde $cl_{\mathbb{R}}(F)$ es la cerradura de F , F es acotado si existe $\lambda > 0$ tal que $|x| \leq \lambda$ para toda $x \in F$. Un subconjunto $K \subset \mathbb{R}$ es compacto si y sólo si es un conjunto cerrado y acotado. Por $Int_{\mathbb{R}}(F)$ denotaremos el interior del conjunto F . También sabemos que $U \subset \mathbb{R}$ es un conjunto abierto si y sólo si $U = Int_{\mathbb{R}}(U)$. Un subconjunto $V \subset \mathbb{R}$ es vecindad de $x \in \mathbb{R}$ si existe un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}$ tal que $x \in U \subset V$.

También consideraremos a \mathbb{R}^2 con la topología producto, es decir, $W \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto en \mathbb{R}^2 si para cada $(x, y) \in W$ existen conjuntos abiertos U, V en \mathbb{R} tales que $x \in U, y \in V$ y $(x, y) \in U \times V \subset W$.

Es conocido que \mathbb{R} con esta topología es un espacio:

1. T_1 , es decir, para todo $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ es un conjunto cerrado,
2. T_2 , es decir para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$ existen conjuntos abiertos U, V en \mathbb{R} tales que $x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$,
3. *regular*, es decir, para todo conjunto abierto U y $x \in U$ existe un conjunto abierto W tal que $x \in W \subset cl_{\mathbb{R}}(W) \subset U$,
4. *localmente compacto*, es decir, para todo conjunto abierto U y $x \in U$ existe una vecindad compacta W tal que $x \in W \subset U$,
5. *conexo*, es decir, los únicos conjuntos abiertos y cerrados son el \emptyset y \mathbb{R} ,
6. *localmente conexo*, es decir, para todo abierto U y $x \in U$ existe un conjunto abierto conexo W tal que $x \in W \subset U$,

7. *primero numerable*, es decir, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una familia numerable de conjuntos abiertos $\mathcal{B} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que para cada conjunto abierto U , si $x \in U$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in V_{n_0} \subset U$.

También usaremos el siguiente resultado conocido.

Observación 2.1. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, entonces

1. A es conexo si y sólo si A es un intervalo o A tiene sólo un punto;
2. Si $A \subset B \subset cl_{\mathbb{R}}(A)$ y A es un conjunto conexo en \mathbb{R} , entonces B es un conjunto conexo en \mathbb{R} . En particular, si A es conexo, entonces $cl_{\mathbb{R}}A$ es conexo.

Definición 2.2. Si $S \subset \mathbb{R}$ diremos que:

1. S es un conjunto abierto regular si S es un conjunto abierto y $S = Int_{\mathbb{R}}(cl_{\mathbb{R}}(S))$;
2. S es un conjunto cerrado regular si S es un conjunto cerrado y $S = cl_{\mathbb{R}}(Int_{\mathbb{R}}(S))$;
3. S es un α -conjunto si $S \subset Int_{\mathbb{R}}(cl_{\mathbb{R}}(Int_{\mathbb{R}}(S)))$;
4. S es un \mathcal{A} -conjunto si existen un conjunto abierto U y un conjunto abierto regular W tales que $S = U \setminus W$.

Es claro que S es un \mathcal{A} -conjunto si y sólo si existen un conjunto abierto U y un conjunto cerrado regular V tales que $S = U \cap V$ y que si U es un conjunto abierto, éste es un \mathcal{A} -conjunto ya que $U = U \setminus \emptyset$.

Teorema 2.3. Si $U \subset \mathbb{R}$, entonces U es un conjunto abierto si y sólo si U es un α -conjunto y un \mathcal{A} -conjunto.

Demostración. Si U es un conjunto abierto, entonces $U = Int_{\mathbb{R}}(U)$ de donde $U \subset cl_{\mathbb{R}}(Int_{\mathbb{R}}(U))$, lo cual implica que $U = Int_{\mathbb{R}}(U) \subset Int_{\mathbb{R}}(cl_{\mathbb{R}}(Int_{\mathbb{R}}(U)))$. Por lo tanto U es un α -conjunto y como $U = U \setminus \emptyset$ se sigue que U es un \mathcal{A} -conjunto.

Recíprocamente como U es un \mathcal{A} -conjunto existen un conjunto abierto V y un conjunto cerrado regular C tales que $U = V \cap C$. Dado que U es un α -conjunto se sigue que $V \cap C \subset Int_{\mathbb{R}}(cl_{\mathbb{R}}(Int_{\mathbb{R}}(V \cap C))) = Int_{\mathbb{R}}(cl_{\mathbb{R}}(Int_{\mathbb{R}}(V) \cap Int_{\mathbb{R}}(C))) \subset Int_{\mathbb{R}}(cl_{\mathbb{R}}(V) \cap cl_{\mathbb{R}}(Int_{\mathbb{R}}(C))) = Int_{\mathbb{R}}(cl_{\mathbb{R}}(V) \cap C) = Int_{\mathbb{R}}(cl_{\mathbb{R}}(V)) \cap Int_{\mathbb{R}}(C)$.

Como $V \subset Int_{\mathbb{R}}(cl_{\mathbb{R}}(V))$ se sigue que $V \cap C = (V \cap C) \cap V \subset Int_{\mathbb{R}}(cl_{\mathbb{R}}(V)) \cap Int_{\mathbb{R}}(C) \cap V = V \cap Int_{\mathbb{R}}(C)$, lo cual implica que $V \cap C \subset V \cap Int_{\mathbb{R}}(C)$ y como $V \cap Int_{\mathbb{R}}(C) \subset V \cap C$ entonces $U = V \cap C = V \cap Int_{\mathbb{R}}(C)$. Por lo tanto U es un conjunto abierto. \square

Definición 2.4. Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. f es una función conexa si para todo conexo C , $f(C)$ es conexo,
2. f es una función monótona si para todo $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y)$ es conexo,
3. f es localmente acotada en x_0 si existen $\lambda > 0$ y un conjunto abierto U , tales que $x_0 \in U$ y para todo $x \in U$, $|f(x)| \leq \lambda$,
4. f es localmente acotada en \mathbb{R} si es localmente acotada en cada punto de \mathbb{R} ,
5. f es acotada en \mathbb{R} si existe $\lambda > 0$ tal que para toda $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \lambda$,
6. f satisface la Propiedad de valor intermedio (*PVI*) si para todo intervalo $[a, b]$ y $y \in (f(a), f(b))$ (o $y \in (f(b), f(a))$) existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = y$,

Observación 2.5. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces

1. Si f es acotada en \mathbb{R} entonces f es localmente acotada en \mathbb{R} . Ya que como f es acotada en \mathbb{R} existe $\lambda > 0$ tal que $|x| < \lambda$ para toda $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto tomando $U = \mathbb{R}$ y la λ ya existente se sigue que f es localmente acotada en \mathbb{R} .
2. Además, usando la Observación 2.1.1, tenemos que si f es conexa, entonces f satisface la *PVI*. Para esto basta observar que dados cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ entonces $[a, b]$ es un conjunto conexo en \mathbb{R} y por lo tanto $f([a, b])$ es un conjunto conexo en \mathbb{R} , de donde se sigue que f satisface la *PVI*.

Lema 2.6. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función conexa y monótona, entonces para todo $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto cerrado en \mathbb{R} .

Demostración. Sea $y \in \mathbb{R}$. Como f es una función monótona, $f^{-1}(y)$ es un conjunto conexo. Consideremos $x \in cl_{\mathbb{R}}(f^{-1}(y))$; dado que $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(y) \cup \{x\} \subset cl_{\mathbb{R}}(f^{-1}(y))$ y $f^{-1}(y)$ es conexo, entonces, de la Observación 2.1.2, $f^{-1}(y) \cup \{x\}$ es conexo. Como f es una función conexa, $f(f^{-1}(y) \cup \{x\}) = \{y\} \cup \{f(x)\}$ es conexo, lo cual implica, de la Observación 2.1.1, que $\{y\} \cup \{f(x)\}$ es un conjunto de un punto, así que $f(x) = y$, de donde se sigue que $x \in f^{-1}(y)$. Por lo tanto, $f^{-1}(y)$ es un conjunto cerrado. \square

De manera similar a la prueba del Lema 2.6 se demuestra el siguiente resultado.

Lema 2.7. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función conexa, entonces para todo conjunto conexo $C \subset \mathbb{R}$, $f(cl_{\mathbb{R}}C) \subset cl_{\mathbb{R}}(f(C))$.

Lema 2.8. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces f es localmente acotada en x_0 si y sólo si existe un compacto $K \subset \mathbb{R}$ tal que $x_0 \in Int_{\mathbb{R}}(f^{-1}(K))$.

Demostración. Tenemos que f es localmente acotada en x_0 si y sólo si, existen $\lambda > 0$ y un conjunto abierto U tales que $x_0 \in U$ y para todo $x \in U$, $|f(x)| \leq \lambda$ si y sólo si para todo $x \in U$, $f(x) \in [-\lambda, \lambda]$ si y sólo si para todo $x \in U$, $x \in f^{-1}([-\lambda, \lambda])$ si y sólo si $U \subset f^{-1}([-\lambda, \lambda])$ si sólo si $x_0 \in \text{Int}_{\mathbb{R}}(f^{-1}([-\lambda, \lambda]))$. \square

Definición 2.9. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, la gráfica de f , la cual denotaremos como $\text{Graf}(f)$, es el conjunto $\text{Graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$.

Lema 2.10. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces $\text{Graf}(f)$ es un conjunto cerrado de \mathbb{R}^2 si y sólo si para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) \neq y$ existen conjuntos abiertos U, V en \mathbb{R} tales que $x \in U$, $y \in V$ y $f(U) \cap V = \emptyset$.

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) \neq y$ entonces $(x, y) \notin \text{Graf}(f)$. Como $\text{Graf}(f)$ es un conjunto cerrado de \mathbb{R}^2 existen conjuntos abiertos $U, V \subset \mathbb{R}$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $(U \times V) \cap \text{Graf}(f) = \emptyset$. Afirmamos que $f(U) \cap V = \emptyset$. Si existe $z \in f(U) \cap V$, entonces $z \in f(U)$ y $z \in V$ lo cual implica que existe $x^* \in U$ tal que $f(x^*) = z$ y $z \in V$, de donde se sigue que $f(x^*) \in V$. Por lo tanto $(x^*, f(x^*)) \in (U \times V) \cap \text{Graf}(f)$ lo cual es una contradicción.

Ahora, supongamos que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) \neq y$, existen conjuntos abiertos U, V en \mathbb{R} tales que $x \in U$, $y \in V$ y $f(U) \cap V = \emptyset$. Es claro que $(U \times V) \cap \text{Graf}(f) = \emptyset$, de donde se sigue que $\text{Graf}(f)$ es un conjunto cerrado de \mathbb{R}^2 . \square

Una sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{R}^2 converge a un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, lo cual denotaremos como $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$, si y sólo si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x_0 y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a y_0 , donde una sucesión, $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{R} converge a $z_0 \in \mathbb{R}$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{para toda } n > N, |z_n - z_0| < \epsilon$$

lo cual denotaremos como $z_n \rightarrow z_0$ o como $\lim z_n = z_0$.

Observemos que, dado que \mathbb{R} es primero numerable, si $x_0 \in \text{cl}_{\mathbb{R}} A$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en A tal que $x_n \rightarrow x_0$.

Del Lema 2.10 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.11. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces $\text{Graf}(f)$ es un conjunto cerrado de \mathbb{R}^2 si y sólo si para todo sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n \rightarrow x$ y $(x_n, f(x_n)) \rightarrow (x, y)$ se tiene que $f(x) = y$.

Lema 2.12. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, $\text{Graf}(f)$ es un conjunto cerrado de \mathbb{R}^2 y $K \subset \mathbb{R}$ es un subconjunto compacto, entonces $f^{-1}(K)$ es un conjunto cerrado de \mathbb{R} .

Demostración. Sea $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Si $x_0 \in \text{cl}_{\mathbb{R}}(f^{-1}(K))$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n \rightarrow x_0$ y $x_n \in f^{-1}(K)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De donde se sigue que $f(x_n) \in K$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y, como K es compacto, existe $y_0 \in K$ tal que $f(x_n) \rightarrow y_0$. Es claro que $(x_n, f(x_n)) \rightarrow (x_0, y_0)$ y, como $\text{Graf}(f)$ es un conjunto cerrado, del Corolario 2.11, $f(x_0) = y_0$ lo cual implica que $x_0 \in f^{-1}(K)$. Por lo tanto $f^{-1}(K)$ es un conjunto cerrado de \mathbb{R} . \square

Del Lema 2.12 se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.13. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y la $\text{Graf}(f)$ es un conjunto cerrado de \mathbb{R}^2 , entonces para todo $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto cerrado de \mathbb{R} .*

De aquí en adelante si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y $\text{Graf}(f)$ es un conjunto cerrado de \mathbb{R}^2 , diremos que f tiene $\text{Graf}(f)$ cerrada.

Recordemos que dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0, b \in \mathbb{R}$, b es el límite de f en x_0 si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - b| < \epsilon \text{ si } 0 < |x - x_0| < \delta,$$

lo cual denotaremos como $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$.

El siguiente resultado es bien conocido.

Lema 2.14. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y $x_0, b \in \mathbb{R}$, entonces b es el límite de f en x_0 si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a x_0 tal que $x_n \neq x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a b .*

Recordemos que dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0, b \in \mathbb{R}$, b es el límite de f en x_0 por la izquierda (respectivamente, por la derecha) si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - b| < \epsilon \text{ si } x \in (x_0 - \delta, x_0), \text{ (respectivamente } x \in (x_0, x_0 + \delta))$$

lo cual denotaremos como $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = b$, (respectivamente, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = b$).

El siguiente resultado es conocido.

Teorema 2.15. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y $x_0, b \in \mathbb{R}$, entonces b es el límite de f si y sólo si b es el límite de f por la derecha y por la izquierda.*

3. Continuidad

Recordemos que dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ si } |x - x_0| < \delta,$$

lo cual denotaremos por $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Si f es continua en cada punto de \mathbb{R} diremos que f es continua en \mathbb{R} .

Del Lema 2.14 se tiene el siguiente lema.

Lema 3.1. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces f es continua en x_0 si sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a x_0 la sucesión $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f(x_0)$.*

El siguiente resultado es conocido.

Lema 3.2. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. f es continua en \mathbb{R} ,
2. para todo conjunto cerrado F en \mathbb{R} , $f^{-1}(F)$ es un conjunto cerrado en \mathbb{R} ,
3. para todo conjunto abierto U en \mathbb{R} , $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en \mathbb{R} .

También sabemos que dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, f es *continua* en x_0 por la izquierda (respectivamente, por la derecha) si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ si } x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ (respectivamente, si } x \in (x_0, x_0 + \delta))$$

lo cual es equivalente a que $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ (respectivamente, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$).

Del Teorema 2.15 se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.3. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces f es continua en x_0 si y sólo si f es continua en x_0 por la izquierda y por la derecha.

Lema 3.4. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathbb{R} y $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x_0 si y sólo si para todo conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}$ tal que $x_0 \in U$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$, para todo $n > N$.

Observación 3.5. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en \mathbb{R} , entonces

1. Para todo conjunto conexo C en \mathbb{R} , $f(C)$ es un conjunto conexo en \mathbb{R} ya que, si C es un conjunto conexo en \mathbb{R} entonces de la Observación 2.1.1 se sigue que C es un intervalo o tiene un solo punto y se puede ver que entonces $f(C)$ es un punto o un intervalo lo cual implica que $f(C)$ es un conjunto conexo en \mathbb{R} .
2. Para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$, $f(K)$ es compacto. Para ver esto es suficiente observar que como K es compacto, K es un conjunto cerrado y acotado y como f es continua entonces $f(K)$ es un conjunto cerrado y acotado.
3. $\text{Graf}(f)$ es un conjunto cerrado en \mathbb{R}^2 ; para ver esto sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) \neq y$ como \mathbb{R} es un espacio T_2 existen conjuntos abiertos W, V en \mathbb{R} tales que

$$f(x) \in W, y \in V \text{ y } W \cap V = \emptyset.$$

Como f es continua en x y $f(x) \in W$, existe un conjunto abierto U en \mathbb{R} tal que $f(U) \subset W$ lo cual implica que $f(U) \cap V = \emptyset$ de donde aplicando el Lema 2.10 tenemos que $\text{Graf}(f)$ es un conjunto cerrado en \mathbb{R}^2 .

Teorema 3.6. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función la cual satisface las siguientes condiciones

1. f satisface PVI y

2. para todo $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto cerrado en \mathbb{R} ,

entonces f es continua en $[a, b]$.

Demostración. Sean $x_0 \in [a, b]$, $\epsilon > 0$ y $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $x_0 \in [x_1, x_2]$. Del inciso (2) se sigue que $f^{-1}(f(x_0) + \epsilon)$ y $f^{-1}(f(x_0) - \epsilon)$ son conjuntos cerrados; además es claro que $x_0 \notin f^{-1}(f(x_0) + \epsilon)$ y $x_0 \notin f^{-1}(f(x_0) - \epsilon)$, entonces existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que: $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap f^{-1}(f(x_0) + \epsilon) = \emptyset$ y $(x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \cap f^{-1}(f(x_0) - \epsilon) = \emptyset$. Eligiendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se sigue que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap f^{-1}(f(x_0) + \epsilon) = \emptyset$ y $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap f^{-1}(f(x_0) - \epsilon) = \emptyset$.

Afirmamos que si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces $f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$. Supongamos que existe $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que $f(x) \notin (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$, entonces $f(x) < f(x_0) - \epsilon$ o $f(x_0) + \epsilon < f(x)$. Como $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces $x_0 < x$ o $x < x_0$; supongamos que $x_0 < x$ y que $f(x_0) + \epsilon < f(x)$. Del inciso (1) se sigue que existe $x^* \in (x_0, x)$ tal que $f(x^*) = f(x_0) + \epsilon$ lo cual implica que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap f^{-1}(f(x_0) + \epsilon) \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Los otros casos son tratados en forma análoga. Por lo tanto f es continua en $[a, b]$. \square

Como toda función continua en $[a, b]$ satisface las condiciones (1) y (2) del Teorema 3.6 se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.7. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se tiene que f es continua en $[a, b]$ si y sólo si

1. f satisface PVI y
2. para todo $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto cerrado en \mathbb{R} .

Es claro que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función inyectiva, entonces para todo $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y)$ es cerrado en \mathbb{R} . Se sigue del Teorema 3.6, el siguiente corolario.

Corolario 3.8. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función inyectiva la cual satisface PVI, entonces f es continua en $[a, b]$.

También tenemos que si f es una función conexa, de la Observación 2.5.2 se sigue que f satisface PVI por lo tanto, aplicando el Lema 2.6 y el Teorema 3.6 se obtienen los siguientes corolarios.

Corolario 3.9. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función conexa tal que para todo $y \in \mathbb{R}$ $f^{-1}(y)$ es cerrado, entonces f es continua en \mathbb{R} .

Corolario 3.10. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función conexa y monótona entonces f es continua en \mathbb{R} .

Del Lema 2.12 y Teorema 3.6 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.11. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que satisface PVI y tiene $\text{Graf}(f)$ cerrada, entonces f es continua en \mathbb{R} .

Teorema 3.12. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente acotada en x_0 y tiene $\text{Graf}(f)$ cerrada, entonces f es continua en x_0 .*

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que f es localmente acotada en x_0 , entonces, por el Lema 2.8, existe un compacto $K \subset \mathbb{R}$ tal que $x_0 \in \text{Int}_{\mathbb{R}}(f^{-1}(K))$. Sea V un conjunto abierto en \mathbb{R} tal que $f(x_0) \in V$. Como $K \setminus V \subset K$ y $K \setminus V$ es cerrado, entonces $K \setminus V$ es compacto y como f tiene $\text{Graf}(f)$ cerrada, del Lema 2.12 se sigue que $f^{-1}(K \setminus V)$ es un conjunto cerrado.

Si $U = \text{Int}_{\mathbb{R}}(f^{-1}(K)) \setminus f^{-1}(K \setminus V)$, es claro que $x_0 \in U$, que U es un conjunto abierto y que $U \subset f^{-1}(V)$. Por lo tanto, del Lema 3.2 se sigue que f es continua en x_0 . \square

Corolario 3.13. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente acotada en \mathbb{R} y f tiene $\text{Graf}(f)$ cerrada, entonces f es continua en \mathbb{R} .*

De la Observación 2.5.1 y Teorema 3.12 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.14. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada en \mathbb{R} y f tiene $\text{Graf}(f)$ cerrada, entonces f es continua en \mathbb{R} .*

De los Lemas 2.12 y 3.2 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.15. *Si K es un subespacio compacto de \mathbb{R} y $f : \mathbb{R} \rightarrow K$ es una función con $\text{Graf}(f)$ cerrada, entonces f es continua en \mathbb{R} .*

Teorema 3.16. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$, $f(K)$ es compacto y f no es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces existen una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $y \in \mathbb{R}$ tales que $x_n \rightarrow x_0$, $y \neq f(x_0)$, y $f(x_n) = y$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f no es continua en x_0 , entonces existen un conjunto abierto V y una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $f(x_0) \in V$, $x_n \rightarrow x_0$ y $f(x_n) \notin V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si no existe $y \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = y$, como el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ es compacto, entonces $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{f(x_0)\}$ es compacto y, como $f(x_n) \notin V$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es compacto; por lo tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_{n_0})$ es punto de acumulación de $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Pero $(\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{x_{n_0}\}) \cup \{x_0\}$ es compacto de donde se sigue que $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{f(x_{n_0})\}$ es compacto lo cual contradice el hecho de que $f(x_{n_0})$ es punto de acumulación de $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Por lo tanto existe $y \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = y$. \square

Teorema 3.17. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$, $f(K)$ es compacto y para todo $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto cerrado, entonces f es continua en \mathbb{R} .*

Demostración. Si f no es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$, del Teorema 3.16 existen una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $y \in \mathbb{R}$ tales que $x_n \rightarrow x_0$, $y \neq f(x_0)$, y $f(x_n) = y$ para toda $n \in \mathbb{N}$; lo cual implica que $f^{-1}(y)$ no es cerrado, lo cual es una contradicción. \square

Como toda función continua en \mathbb{R} satisface las hipótesis del Teorema 3.17 se tiene la siguiente consecuencia inmediata.

Corolario 3.18. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se tiene que f es continua en \mathbb{R} si y sólo si para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$, $f(K)$ es compacto y para todo $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto cerrado.*

Corolario 3.19. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función inyectiva tal que para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$, $f(K)$ es compacto, entonces f es continua en \mathbb{R} .*

Es claro que si K es un subespacio compacto de \mathbb{R} y $f : \mathbb{R} \rightarrow K$ es una función tal que para todo cerrado $F \subset \mathbb{R}$, $f(F)$ es cerrado, entonces para todo compacto $K^* \subset \mathbb{R}$, $f(K^*)$ es compacto. De donde aplicando el Teorema 3.16 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.20. *Si K es un subespacio compacto de \mathbb{R} y $f : \mathbb{R} \rightarrow K$ es una función tal que para todo conjunto cerrado $F \subset \mathbb{R}$, $f(F)$ es un conjunto cerrado y para todo $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto cerrado, entonces f es continua en \mathbb{R} .*

Teorema 3.21. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que satisface las siguientes condiciones:*

1. *para todo compacto K , $f(K)$ es compacto y*
2. *para todo conexo C , $f(C)$ es conexo,*

entonces f es continua en \mathbb{R} .

Demostración. Supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que f no es continua en x_0 . Como \mathbb{R} es un espacio primero numerable podemos elegir una base local $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ en x_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, B_n sea un conjunto abierto y conexo y $B_{n+1} \subset B_n$.

Como f no es continua en x_0 y \mathbb{R} es regular, existe un conjunto abierto W tal que $f(x_0) \in W$ y $f(B_n)$ no está contenido en $cl_{\mathbb{R}}(W)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Elijamos $x_1 \in B_1$ tal que $f(x_1) \notin cl_{\mathbb{R}}(W)$; una vez más, por la regularidad de \mathbb{R} , existe un conjunto abierto U_1 tal que $f(x_1) \in U_1$ y $cl_{\mathbb{R}}(W) \cap cl_{\mathbb{R}}(U_1) = \emptyset$; ahora elijamos $x_2 \in B_2$ tal que $f(x_2) \notin cl_{\mathbb{R}}(W) \cup cl_{\mathbb{R}}(U_1)$ lo cual es posible ya que $f(B_2)$ es conexo. Elijamos un conjunto abierto U_2 tal que $f(x_2) \in U_2$ y $cl_{\mathbb{R}}(U_2) \cap cl_{\mathbb{R}}(W) \cap cl_{\mathbb{R}}(U_1) = \emptyset$. Repitiendo este proceso, obtenemos una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n \in B_n$ y una sucesión de conjuntos abiertos ajenos dos a dos $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f(x_n) \in U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por construcción $x_n \rightarrow x_0$, lo cual implica que el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ es compacto, de donde se sigue que el conjunto $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{f(x_0)\}$ es compacto y $\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{W\}$ es una cubierta abierta de este conjunto sin subcubiertas finitas. Por lo tanto f es continua en \mathbb{R} . \square

De las Observación 3.5.1 y 3.5.2 y el Teorema 3.21 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.22. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se tiene que f es continua en \mathbb{R} si y sólo si*

1. *para todo compacto K , $f(K)$ es compacto y*

2. para todo conexo C , $f(C)$ es conexo.

Teorema 3.23. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y $a \in \mathbb{R}$ son tales que

1. para todo conjunto cerrado F , $f(F)$ es un conjunto cerrado,
2. para todo $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto cerrado y
3. f tiene límite en a por la izquierda (respectivamente, f tiene límite en a por la derecha),

entonces f es continua en a por la izquierda (respectivamente, f es continua en a por la derecha).

Demostración. Supongamos que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$ con $b > f(a)$.

Como $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$, para $\epsilon = (b - f(a))/2$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a - \delta, a)$, entonces $f(x) \in (b - \epsilon, b + \epsilon)$. Entonces tenemos los siguientes dos casos.

1. Si $f(x) = b$ para todo $x \in (a - \delta, a)$, entonces $(a - \delta, a) \subset f^{-1}(b)$ y como para todo conjunto abierto W tal que $a \in W$ se tiene que $(a - \delta, a) \cap W \neq \emptyset$, entonces $f^{-1}(b) \cap W \neq \emptyset$ lo cual implica que $a \in \text{cl}_{\mathbb{R}}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(b)$, es decir $f(a) = b$ lo cual es una contradicción.
2. Si no ocurre (1), entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (a - \delta, a)$ tal que $x_n \rightarrow a$ y $f(x_n) \neq b$. Como $x_n \rightarrow a$, el conjunto $\{a\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es cerrado lo cual implica que $\{f(a)\} \cup \{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto cerrado. Como $x_n \rightarrow a$ y $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$, entonces $\lim f(x_n) = b$ lo cual implica que $b \in \text{cl}_{\mathbb{R}}(\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}) \subset \text{cl}_{\mathbb{R}}(\{f(a)\} \cup \{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}) = \{f(a)\} \cup \{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ de donde se sigue que $f(a) = b$ o existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n) = b$, lo cual es una contradicción.

Cuando $b < f(a)$ se hace una prueba similar.

Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$. □

De los Teoremas 3.3 y 3.23 tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.24. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y $x_0 \in \mathbb{R}$ son tales que

1. para todo conjunto cerrado F , $f(F)$ es un conjunto cerrado,
2. para todo $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto cerrado y
3. f tiene límite en x_0 ,

entonces f es continua en x_0 .

Por lo tanto, como una consecuencia inmediata del Teorema 3.24, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.25. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que

1. para todo conjunto cerrado F , $f(F)$ es un conjunto cerrado,
2. para todo $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto cerrado y
3. f tiene límite en cualquier punto de \mathbb{R} ,

entonces f es continua en \mathbb{R} .

Teorema 3.26. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función conexa. Si f tiene límite en cualquier punto de \mathbb{R} , entonces f es continua en \mathbb{R} .*

Demostración. Supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que f no es continua en x_0 . Como f tiene límite en cada punto de \mathbb{R} existe $l \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \neq l$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$. Como \mathbb{R} es T_2 existen intervalos abiertos I_1, I_2 tales que;

$$l \in I_1, f(x_0) \in I_2 \text{ y } I_1 \cap I_2 = \emptyset.$$

Como $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ y $l \in I_1$ existe un intervalo abierto I_0 tal que

$$x_0 \in I_0 \text{ y } f(x) \in I_1 \text{ para todo } x \in I_0 \setminus \{x_0\}.$$

Como $x_0 \in I_0$ se sigue que $I_0 = (I_0 \setminus \{x_0\}) \cup \{x_0\}$ y $f(I_0) = f((I_0 \setminus \{x_0\})) \cup f(\{x_0\})$ lo cual contradice la conexidad de $f(I_0)$ ya que $f((I_0 \setminus \{x_0\})) \subset I_1$ y $f(\{x_0\}) \subset I_2$. Por lo tanto f es continua en \mathbb{R} . \square

Del Teorema 3.26 y el hecho de que toda función continua en \mathbb{R} tiene límite en \mathbb{R} y es conexa tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.27. *Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en \mathbb{R} si y sólo si f es conexa y tiene límite en \mathbb{R} .*

Los siguientes conceptos topológicos nos permitirán obtener condiciones que impliquen la continuidad de una función.

Definición 3.28. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces

1. f es α -continua si para cada abierto V , $f^{-1}(V)$ es un α -conjunto,
2. f es \mathcal{A} -continua si para cada abierto V , $f^{-1}(V)$ es un \mathcal{A} -conjunto,
3. f es débilmente continua en $x_0 \in \mathbb{R}$ si para cada abierto V , tal que $f(x_0) \in V$, existe un abierto U tal que $x_0 \in U$ y $f(U) \subset cl_{\mathbb{R}}(V)$,
4. f es débilmente continua en \mathbb{R} si es débilmente continua en cada punto de \mathbb{R} .

Del Teorema 2.3 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.29. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función α -continua y \mathcal{A} -continua, entonces f es continua.*

Es claro que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces f es α -continua y \mathcal{A} -continua, así que, del Teorema 3.29 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.30. *La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es α -continua y \mathcal{A} -continua si y sólo si f es continua.*

De la regularidad de \mathbb{R} tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.31. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función débilmente continua en \mathbb{R} , entonces f es continua en \mathbb{R} .*

Demostración. Sean $x \in \mathbb{R}$ y V un conjunto abierto tal que $f(x) \in V$. Como \mathbb{R} es un espacio regular, existe un conjunto abierto W tal que $f(x) \in W \subset cl_{\mathbb{R}}(W) \subset V$. Dado que f es débilmente continua en x y $f(x) \in W$, existe un conjunto abierto U tal que $x \in U$ y $f(U) \subset cl_{\mathbb{R}}(W)$. De donde se sigue que $f(U) \subset V$. Por lo tanto f es continua en \mathbb{R} . \square

Como toda función continua es débilmente continua se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.32. *La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es débilmente continua en \mathbb{R} si y sólo si f es continua en \mathbb{R} .*

4. Casi-continua

Definición 4.1. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y $x_0 \in \mathbb{R}$, f es casi-continua en x_0 si para toda vecindad V de $f(x_0)$ existe un conjunto abierto U tal que $x_0 \in U \subset cl_{\mathbb{R}}(f^{-1}(V))$.

Si f es una función tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, f es casi-continua en x , diremos que f es casi-continua en \mathbb{R} . Como una consecuencia inmediata de la Definición 4.1 se obtiene el siguiente resultado. Antes recordemos que para $U, V \subset \mathbb{R}$, U es denso en V si $cl_V(U) = V$.

Lema 4.2. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces f es casi-continua en x_0 si y sólo si para todo conjunto abierto V tal que $f(x_0) \in V$ existe un conjunto abierto U tal que $x_0 \in U$ y $f^{-1}(V)$ es denso en U .*

Demostración. La suficiencia es clara. Para la necesidad basta considerar a $U = Int_{\mathbb{R}}(cl_{\mathbb{R}}(f^{-1}(V)))$. \square

Observación 4.3. Con las hipótesis del Lema 4.2 tenemos que $H = f^{-1}(V)$ es denso en U de donde se sigue que $f(H) = f(f^{-1}(V)) \subset V$ es decir $f(H) \subset V$.

Teorema 4.4. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función casi-continua en $x_0 \in \mathbb{R}$ y tiene $Graf(f)$ cerrada, entonces f es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Sean $x_0 \in \mathbb{R}$ y V un conjunto abierto tal que $f(x_0) \in V$. Como \mathbb{R} es un espacio localmente compacto y $f(x_0) \in V$ existe una vecindad compacta de $f(x_0)$, digamos que W , tal que $f(x_0) \in W \subset V$. Como W es un conjunto compacto y f tiene $\text{Graf}(f)$ cerrada, del Lema 2.12 se sigue que $f^{-1}(W)$ es un conjunto cerrado lo cual implica que $x_0 \in f^{-1}(W) = \text{cl}_{\mathbb{R}}(f^{-1}(W))$ y como f es casi-continua en x_0 , existe un conjunto abierto U tal que $x_0 \in U \subset \text{cl}_{\mathbb{R}}(f^{-1}(W)) = f^{-1}(W)$, de donde se sigue que $x_0 \in U \subset f^{-1}(V)$. Por lo tanto f es continua en x_0 . \square

Corolario 4.5. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función casi-continua en \mathbb{R} y tiene $\text{Graf}(f)$ cerrada, entonces f es continua en \mathbb{R} .*

Dado que toda función continua es casi-continua y tiene gráfica cerrada, se obtiene de manera inmediata el corolario siguiente.

Corolario 4.6. *La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es casi-continua en \mathbb{R} y tiene $\text{Graf}(f)$ cerrada si y sólo si f es continua en \mathbb{R} .*

Teorema 4.7. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función casi-continua en $x_0 \in \mathbb{R}$ y para todo conexo $C \subset \mathbb{R}$, $\text{cl}_{\mathbb{R}}(f^{-1}(C)) \subset f^{-1}(\text{cl}_{\mathbb{R}}(C))$, entonces f es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Sean $x_0 \in \mathbb{R}$ y V un conjunto abierto tal que $f(x_0) \in V$. Como \mathbb{R} es un espacio regular, localmente conexo y $f(x_0) \in V$ existe un conjunto abierto y conexo W tal que $f(x_0) \in W \subset \text{cl}_{\mathbb{R}}(W) \subset V$. De aquí se sigue que $x_0 \in f^{-1}(W) \subset f^{-1}(\text{cl}_{\mathbb{R}}(W)) \subset f^{-1}(V)$. Como $x_0 \in f^{-1}(W) \subset \text{cl}_{\mathbb{R}}(f^{-1}(W))$ y f es casi continua en x_0 existe un conjunto abierto U tal que $x_0 \in U \subset \text{cl}_{\mathbb{R}}(f^{-1}(W))$. Dado que W es conexo se tiene que $\text{cl}_{\mathbb{R}}(f^{-1}(W)) \subset f^{-1}(\text{cl}_{\mathbb{R}}(W))$ lo cual implica que $x_0 \in U \subset f^{-1}(V)$. Por lo tanto f es continua en x_0 . \square

Corolario 4.8. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función casi-continua en \mathbb{R} y para todo conexo $C \subset \mathbb{R}$, $\text{cl}_{\mathbb{R}}(f^{-1}(C)) \subset f^{-1}(\text{cl}_{\mathbb{R}}(C))$, entonces f es continua en \mathbb{R} .*

Como sabemos que toda función continua es casi-continua y satisface que para todo $C \subset \mathbb{R}$, $\text{cl}_{\mathbb{R}}(f^{-1}(C)) \subset f^{-1}(\text{cl}_{\mathbb{R}}(C))$ se tiene el corolario siguiente.

Corolario 4.9. *La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en \mathbb{R} si y sólo si f es una función casi-continua en \mathbb{R} y para todo conexo $C \subset \mathbb{R}$, $\text{cl}_{\mathbb{R}}(f^{-1}(C)) \subset f^{-1}(\text{cl}_{\mathbb{R}}(C))$.*

Teorema 4.10. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función casi-continua en \mathbb{R} , conexa y para todo conexo $C \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(C)$ es conexo, entonces f es continua en \mathbb{R} .*

Demostración. Sea C un conjunto conexo, entonces, por hipótesis, $K = f^{-1}(C)$ es conexo y así, por el Lema 2.7, se tiene que $f(\text{cl}_{\mathbb{R}}(K)) \subset \text{cl}_{\mathbb{R}}(f(K)) \subset \text{cl}_{\mathbb{R}}(C)$ y esto implica que $\text{cl}_{\mathbb{R}}(K) \subset f^{-1}(\text{cl}_{\mathbb{R}}(C))$ y de aquí se sigue que $\text{cl}_{\mathbb{R}}(f^{-1}(C)) \subset f^{-1}(\text{cl}_{\mathbb{R}}(C))$. Por el Corolario 4.8 obtenemos que f es continua en \mathbb{R} . \square

Teorema 4.11. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función casi-continua en \mathbb{R} y el conjunto $C(f) = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ es continua en } x\}$ es denso en \mathbb{R} , entonces f es continua en \mathbb{R} .*

Demostración. Supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{R} \setminus C(f)$, entonces existe un conjunto abierto W con $f(x_0) \in W$ tal que para todo conjunto abierto U , tal que $x_0 \in U$ existe $x^* \in U$ tal que $f(x^*) \notin W$. Como \mathbb{R} es un espacio regular, existen conjuntos abiertos W_1 y W_2 tales que $f(x_0) \in W_2 \subset cl_{\mathbb{R}}(W_2) \subset W_1 \subset cl_{\mathbb{R}}(W_1) \subset W$. Como $f(x_0) \in cl_{\mathbb{R}}(W_2)$ y f es casi-continua en x_0 existe un conjunto abierto U tal que $x_0 \in U \subset cl_{\mathbb{R}}(f^{-1}(W_2))$ y existe $x^* \in U$ tal que $f(x^*) \notin W$, de donde se sigue que $f(x^*) \in \mathbb{R} \setminus W \subset \mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}(W_1) \subset \mathbb{R} \setminus W_1$ lo cual implica que $x^* \in f^{-1}(\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}(W_1)) \subset cl_{\mathbb{R}}f^{-1}(\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}(W_1))$ y como f es casi-continua en x^* existe un conjunto abierto V tal que $x^* \in V \subset cl_{\mathbb{R}}(f^{-1}(\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}(W_1)))$.

Como $x^* \in U \cap V$ y $C(f)$ es denso en \mathbb{R} existe $x^{**} \in U \cap V \cap C(f)$. Dado que f es continua en x^{**} y $U \cap V \subset U \subset cl_{\mathbb{R}}(f^{-1}(W_2))$ se sigue que $f(x^{**}) \in cl_{\mathbb{R}}(W_2)$; análogamente como $U \cap V \subset V \subset cl_{\mathbb{R}}(f^{-1}(\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}(W_1)))$ se sigue que $f(x^{**}) \in cl_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}(W_1)) \subset \mathbb{R} \setminus W_1$ lo cual es una contradicción ya que $cl_{\mathbb{R}}(W_2) \subset W_1$. Por lo tanto $\mathbb{R} = C(f)$. \square

5. Semi-continua

Definición 5.1. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y $x_0 \in \mathbb{R}$, f es semi-continua en x_0 si para todo conjunto abierto V tal que $f(x_0) \in V$ y todo conjunto abierto U tal que $x_0 \in U$ existe un conjunto abierto $G \subset U$ tal que $f(G) \subset V$.

Dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definamos $Q_f = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ es semi-continua en } x\}$. Si $Q_f = \mathbb{R}$ diremos que f es semicontinua en \mathbb{R} .

Teorema 5.2. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que*

1. *f es casi-continua en \mathbb{R} y*
2. *f es semi-continua en \mathbb{R} ,*

entonces f es continua en \mathbb{R} .

Demostración. Supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que f no es continua en x_0 , entonces existe un conjunto abierto V con $f(x_0) \in V$ tal que para todo abierto U con $x_0 \in U$ existe $x \in U$ tal que $f(x) \notin V$. Como \mathbb{R} es un espacio regular elijamos un conjunto abierto W tal que $f(x_0) \in W \subset cl_{\mathbb{R}}(W) \subset V$. Como f es casi-continua en x_0 , por el Lema 4.2 y la Observación 4.3 existen un conjunto abierto U_1 tal que $x_0 \in U_1$ y un conjunto denso $H \subset U_1$ tales que $f(H) \subset W$. Elijamos $x_1 \in U_1$ tal que $f(x_1) \notin V$. Como f es semi-continua en x_1 existe un conjunto abierto $G \subset U_1$ tal que $f(G) \subset \mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}}(W)$ lo cual no puede ser ya que $f(H) \subset W$. Por lo tanto f es continua en \mathbb{R} . \square

Lema 5.3. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función casi-continua en \mathbb{R} , entonces Q_f es un conjunto cerrado.*

Demostración. Sean $x \in cl_{\mathbb{R}}(Q_f)$ y U, V conjuntos abiertos tales que $x \in U$ y $f(x) \in V$, respectivamente. Como \mathbb{R} es un espacio regular existe un conjunto abierto W tal que $f(x) \in W \subset cl_{\mathbb{R}}(W) \subset V$. Dado que f es casi-continua en x , por el Lema 4.2, existe un conjunto abierto H tal que $x \in H$ y $f^{-1}(W)$ es denso en H .

Como $x \in cl_{\mathbb{R}}(Q_f)$ y $x \in H \cap U$ se sigue que $Q_f \cap H \cap U \neq \emptyset$. Sean $y \in Q_f \cap H \cap U$ y S un conjunto abierto tal que $f(y) \in S$. Como $y \in Q_f$ es decir f es semi-continua en y , entonces existe un conjunto abierto $T \subset H \cap U$ tal que $f(T) \subset S$, y como $f^{-1}(W)$ es denso en H se sigue que $f^{-1}(W) \cap T \neq \emptyset$; por lo tanto $\emptyset \neq W \cap f(T) \subset W \cap S$ lo cual implica que $f(y) \in cl_{\mathbb{R}}W \subset V$, es decir $f(y) \in V$ y como f es semi-continua en y , existe un conjunto abierto $G \subset U$ tal que $f(G) \subset V$. Por lo tanto $x \in Q_f$. \square

Del Teorema 5.2 y el Lema 5.3 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.4. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función casi-continua en \mathbb{R} y Q_f es un conjunto denso en \mathbb{R} , entonces f es continua en \mathbb{R} .*

Dada una función, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ consideremos S_f como el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ tales que existe una base \mathcal{N} de $f(x)$ con la propiedad de que para todo $N \in \mathcal{N}$ y todo abierto U con $x \in U$, $f^{-1}(N) \setminus Int_{\mathbb{R}}(f^{-1}(N))$ no es denso en U .

Definición 5.5. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, f es ligeramente-continua en \mathbb{R} si el conjunto S_f es denso en \mathbb{R} .

Lema 5.6. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función casi-continua en \mathbb{R} , entonces $S_f \subset Q_f$.*

Demostración. Sean $x \in S_f$ y U, V conjuntos abiertos tales que $x \in U$ y $f(x) \in V$ respectivamente. Sea V_1 un conjunto abierto tal que $f(x) \in V_1 \subset V$ y para todo conjunto abierto U_1 tal que $x \in U_1$, $f^{-1}(V_1) \setminus Int_{\mathbb{R}}(f^{-1}(V_1))$ no sea denso en U_1 .

Como f es casi-continua en x , por el Lema 4.2, existe un conjunto abierto W tal que $x \in W$ y $f^{-1}(V_1)$ es denso en W ; dado que $f^{-1}(V_1) \setminus Int_{\mathbb{R}}(f^{-1}(V_1))$ no es denso en el conjunto abierto $U \cap W$ que tiene a x como elemento, existe un conjunto abierto $H \subset U \cap W$ tal que $f^{-1}(V_1) \setminus (Int_{\mathbb{R}}(f^{-1}(V_1))) \cap H = \emptyset$ y como $f^{-1}(V_1)$ es denso en W se sigue que $f^{-1}(V_1) \cap H \neq \emptyset$. Por lo tanto $Int_{\mathbb{R}}(f^{-1}(V_1)) \cap H \neq \emptyset$.

Eligiendo $G = Int_{\mathbb{R}}(f^{-1}(V_1)) \cap H$, es claro que G es un conjunto abierto tal que $G \subset U$ y $f(G) \subset V$. Por lo tanto $x \in Q_f$. \square

Del Teorema 5.2, el Lema 5.3 y la Definición 5.5 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.7. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función casi-continua y ligeramente-continua en \mathbb{R} , entonces f es continua en \mathbb{R} .*

Definición 5.8. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y $x \in \mathbb{R}$, f es *exclusivamente continua* en x si para todo $\epsilon > 0$ y todo conjunto abierto U tal que $x \in U$, existe un conjunto abierto G tal que $G \subset U$ y para todo $y, z \in G$, $|f(y) - f(z)| < \epsilon$.

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, definamos el conjunto

$$A_f = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ es exclusivamente continua en } x\}.$$

Diremos que f es exclusivamente continua en \mathbb{R} si $A_f = \mathbb{R}$.

Lema 5.9. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces $Q_f \subset S_f$.

Demostración. Sean $x \in Q_f$ y U, V conjuntos abiertos tales que $x \in U$, y $f(x) \in V$, respectivamente. Como $x \in Q_f$ existe un conjunto abierto $G \subset U$ tal que $f(G) \subset V$; lo cual implica que $G \subset \text{Int}_{\mathbb{R}}(f^{-1}(V))$. De aquí concluimos que $(f^{-1}(V) \setminus \text{Int}_{\mathbb{R}}(f^{-1}(V))) \cap G = \emptyset$. Por lo tanto $x \in S_f$. \square

Lema 5.10. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces $A_f \subset S_f$.

Demostración. Supongamos que existe $x \in A_f \setminus S_f$. Sea $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo conjunto abierto V tal que $f(x) \in V$ y $V \subset (f(x) - \epsilon_0, f(x) + \epsilon_0)$, existe un conjunto abierto T tal que $x \in T$ y $f^{-1}(V) \setminus \text{Int}_{\mathbb{R}}(f^{-1}(V))$ es denso en T . Para $0 < \epsilon < \epsilon_0$ existe un conjunto abierto W tal que $x \in W$ y el conjunto $H = f^{-1}((f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)) \setminus \text{Int}_{\mathbb{R}}(f^{-1}((f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)))$ es denso en W .

Sea U un conjunto abierto tal que $x \in U$; como $x \in A_f$ existe un conjunto abierto $G \subset U \cap W$ tal que $|f(y) - f(z)| < \epsilon/2$ para todo $y, z \in G$. Como H es denso en W y $G \subset W$, entonces $G \cap H \neq \emptyset$. Sean $y \in G \cap H$ y $z \in G$, entonces $|f(x) - f(z)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 < \epsilon$, de donde se sigue que $f(z) \in (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$; lo cual implica que $f(G) \subset (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$, es decir, $x \in Q_f$ lo cual contradice el Lema 5.9. Por lo tanto $A_f \subset S_f$. \square

Del Corolario 5.7 y el Lema 5.10 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.11. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función casi-continua y exclusivamente continua en \mathbb{R} , entonces es continua en \mathbb{R} .

Lema 5.12. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función casi-continua en \mathbb{R} , entonces A_f es un conjunto cerrado.

Demostración. Sea $y \in \text{cl}_{\mathbb{R}} A_f$. Dado un conjunto abierto U tal que $y \in U$ se sigue que $U \cap A_f \neq \emptyset$; elijamos $x \in U \cap A_f$ se sigue que existe $\epsilon > 0$ y un conjunto abierto $U_1 \subset U$ tal que para todo $y_1, y_2 \in U_1$ se sigue que $|f(y_1) - f(y_2)| < \epsilon$ lo cual implica que $y \in A_f$. \square

Corolario 5.13. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función casi-continua en \mathbb{R} y A_f es un conjunto denso en \mathbb{R} , entonces f es continua en \mathbb{R} .

Definición 5.14. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diremos que;

1. f es pre-continua si para todo conjunto abierto W de \mathbb{R}^2 tal que $\text{Graf}(f) \subset W$ existe una función continua $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{Graf}(F) \subset W$,
2. f es de Cesàro si existen conjuntos abiertos U, V en \mathbb{R} tales que para todo $y \in V$, $U \subset \text{cl}_{\mathbb{R}}(f^{-1}(y))$.

Es claro que si f es una función de Cesàro y U, V son los conjuntos abiertos existentes de la Definición 5.14, entonces $f^{-1}(y)$ es un subconjunto denso de U para todo $y \in V$, lo cual se sigue de que;

$$U \subset \text{cl}_{\mathbb{R}}(f^{-1}(y)) \text{ y que } \text{cl}_U(f^{-1}(y)) = \text{cl}_{\mathbb{R}}(f^{-1}(y)) \cap U = U.$$

Lema 5.15. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Cesàro, entonces f es discontinua.*

Demostración. Como f es una función de Cesàro existen conjuntos abiertos U, V en \mathbb{R} tales que para todo $y \in V$, $U \subset \text{cl}_{\mathbb{R}}f^{-1}(y)$. Como V es un conjunto abierto en \mathbb{R} y para cada $y \in \mathbb{R}$, los conjuntos singulares $\{y\}$ no son conjuntos abiertos y sí conjuntos cerrados, podemos elegir $y_1, y_2 \in V$ tales que $y_1 \neq y_2$. Es claro que $V \setminus \{y_2\}$ es un conjunto abierto y $y_1 \in V \setminus \{y_2\}$, de donde se sigue que $f^{-1}(y_1) \subset f^{-1}(V \setminus \{y_2\})$.

Como $f^{-1}(y_1)$ es denso en U , entonces $f^{-1}(y_1) \cap U \neq \emptyset$ de donde se sigue que $f^{-1}(V \setminus \{y_2\}) \cap U \neq \emptyset$; por lo tanto, si f fuese continua entonces $f^{-1}(V \setminus \{y_2\}) \cap U \neq \emptyset$ sería un conjunto abierto contenido en U y como $f^{-1}(y_2)$ es denso en U , entonces

$$f^{-1}(V \setminus \{y_2\}) \cap f^{-1}(y_2) \neq \emptyset$$

lo cual no es posible. Por lo tanto f es discontinua. □

Lema 5.16. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función pre-continua entonces $\text{Graf}(f)$ es un conjunto conexo en \mathbb{R}^2 .*

Demostración. Supongamos que $\text{Graf}(f)$ no es un conjunto conexo en \mathbb{R}^2 , entonces existen conjuntos abiertos U y V en \mathbb{R}^2 tales que;

$$U \cap V = \emptyset, \text{Graf}(f) \subset U \cup V, U \cap \text{Graf}(f) \neq \emptyset \text{ y } V \cap \text{Graf}(f) \neq \emptyset.$$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $(a, f(a)) \in U$ y $(b, f(b)) \in V$. Consideremos los conjuntos,

$$U_1 = U \setminus \pi^{-1}(b) \text{ y } V_1 = V \setminus \pi^{-1}(a) \text{ donde } \pi((x, y)) = x;$$

donde π es la primera proyección de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} . Es claro que $U_1 \cup V_1$ es un conjunto abierto tal que $\text{Graf}(f) \subset U_1 \cup V_1$ y como f es pre-continua existe una función continua $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{Graf}(F) \subset U_1 \cup V_1$, pero U_1 y V_1 son conjuntos abiertos ajenos tales que $(a, f(a)) \in U_1$ y $(b, f(b)) \in V_1$ lo cual implica $\text{Graf}(F)$ no es un conjunto conexo lo cual no puede ser ya que como F es una función continua, entonces su $\text{Graf}(F)$ es un conjunto conexo. Por lo tanto $\text{Graf}(f)$ es un conjunto conexo. □

Teorema 5.17. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que satisface las siguientes condiciones;*

1. f es pre-continua,
2. f es casi-continua y
3. f no es de Cesàro,

entonces f es continua.

Demostración. Supongamos que existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que f no es continua en x_0 , entonces existe un intervalo abierto $J = (s, t)$ con $f(x_0) \in J$ tal que para todo conjunto abierto N con $x_0 \in N$ existe un $w \in N$ tal que $f(w) \notin J$. Por la regularidad de \mathbb{R} podemos elegir un intervalo abierto $J_1 = (s_1, t_1)$ tal que $f(x_0) \in J_1 \subset cl_{\mathbb{R}}(J_1) \subset J$ lo cual implica que $s < s_1 < f(x_0) < t_1 < t$.

Como f es casi-continua y $f(x_0) \in J_1$ del Lema 4.2 se sigue que existe un conjunto abierto N tal que $x_0 \in N$ y $f^{-1}(J_1)$ es denso en N , y como f no es continua en x_0 existe $w \in N$ tal que $f(w) \notin J$. Una vez más, de la regularidad de \mathbb{R} existe un intervalo abierto $K = (q, r)$ tal que $f(w) \in K$ y $cl_{\mathbb{R}}(K) \cap cl_{\mathbb{R}}(J_1) = \emptyset$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $s_1 < t_1 < q < r$ y, una vez más, como f es casi-continua y $f(w) \in K$, del Lema 4.2 se sigue que existe un conjunto abierto M tal que $w \in M$ y $f^{-1}(K)$ es denso en M . Consideremos el conjunto abierto $U = N \cap M$ y el intervalo abierto $V = (t_1, q)$; como $w \in U$ y $t \in V$, es claro que $U \neq \emptyset$ y $V \neq \emptyset$.

Ahora, como f no es de Cesàro, existe $y_0 \in V$ y un intervalo abierto $Q \subset U$ tal que $y_0 \notin f(Q)$, y como $f^{-1}(J_1)$ es denso en N y $Q \subset U \subset N$ podemos elegir $a, b \in Q$ tales que $a < b$ y $f(a), f(b) \in J_1$.

Sea $P = \{(x, y) : a < x < b, y > y_0\}$. Como $f^{-1}(K)$ es denso en M y $a, b \in Q \subset U \subset M$ se sigue que $(a, b) \cap f^{-1}(K) \neq \emptyset$. Sea $x \in (a, b) \cap f^{-1}(K)$, entonces $a < x < b$ y $x \in f^{-1}(K)$ es decir $a < x < b$ y $f(x) \in K$ lo cual implica que $(x, f(x)) \in Graf(f)$ y $f(x) > y_0$. Por lo tanto $P \cap Graf(f) \neq \emptyset$.

Como $f(a) < y_0$, $f(b) < y_0$, $(a, b) \subset Q$, $y_0 \notin f(Q)$ y $fr(P) = \{(a, y) : y \geq y_0\} \cup \{(b, y) : y \geq y_0\} \cup \{(x, y_0) : a < x < b\}$ se sigue que

$$(a, f(a)), (b, f(b)), (x, f(x)) \in Graf(f) \text{ con } x \in (a, b) \text{ y } (a, f(a)), (b, f(b)), (x, f(x)) \notin fr(P) \text{ con } x \in (a, b).$$

Por lo tanto, $fr(P) \cap Graf(f) = \emptyset$.

Por lo tanto, P y $Graf(f) \setminus (cl_{\mathbb{R}}(P))$ son una separación de $Graf(f)$, pero por el Lema 5.16 $Graf(f)$ es un conjunto conexo. Por lo tanto f es continua. \square

Es claro que si f es una función continua ésta es pre-continua y casi-continua y, del Lema 5.15, se sigue que f no es una función de Cesàro que, junto con el Teorema 5.17, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.18. *Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua si y sólo si satisface las siguientes condiciones;*

1. *f es pre-continua en \mathbb{R} ,*
2. *f es casi-continua \mathbb{R} y*
3. *f no es de Cesàro en \mathbb{R} .*

Agradecimientos: Agradecemos profundamente la cuidadosa revisión de los árbitros del presente capítulo. Sus comentarios y sugerencias permitieron mejorar la primera versión del mismo.

Bibliografía

- [1] A. J. Berner, *Almost continuous functions with closed graphs*, Canad. Math. Bull. 25 (1982), 4, 428-434.
- [2] J. Borsik and J. Doboš, *On certain decompositions of continuity*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. 20 (1988), 2, 275-282.
- [3] C. E. Burgess, *Continuous functions and connected graphs*, Amer. Math. Monthly, 97 (1990), 337-339.
- [4] V. L. Klee and W. R. Utz, *Some remarks on continuous transformations*, Proc. Amer. Math. Soc., 5 (1954), 182-184.
- [5] N. Levine, *A decomposition of continuity in topological spaces*, Amer. Math. Monthly, 68 (1961), 44-46.
- [6] J. S. Lipiński and T. Šalát, *On the points of quasicontinuity and cliquishness of functions*, Czech. Math. Journal, 21 (1971), 3, 484-489.
- [7] P. E. Long and E. E. McGehee, Jr., *Properties of almost continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 24 (1970), 175-180.
- [8] W. J. Pervin and N. Levine, *Connected mappings of Hausdorff spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 9 (1958), 488-495.
- [9] Z. Piotrowski, *Some remarks on almost continuous functions*, Math. Slovaca, 39 (1989), 1, 75-80.
- [10] C. H. Rowe, *Note on a pair of properties which characterize continuous functions*, Bull. Amer. Math. Soc., 32 (1926), 3, 285-287.

- [11] B. D. Smith, *An alternante characterization of continuity*, Proc. Amer. Math. Soc., 39 (1973), 2, 318-320.
- [12] J. Stallings, *Fixed point theorems for connectivity maps*, Fund. Math., 47 (1959), 249-263.
- [13] J. Tong, *A decomposition of continuity*, Acta Math. Hungar., 48 (1986), 11-15.
- [14] I. Tsereteli, *On perfect mappings from \mathbb{R} to \mathbb{R}* , Georgian Math. Journal, 1 (1994), 5, 567-573.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570
mibarra@fcfm.buap.mx
maga@fcfm.buap.mx

Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y modelación matemática

Capítulo 4

Dinámica de las familias $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ y $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z + 1/z$

Patricia Domínguez, Josué Vázquez

FCFM, BUAP

Resumen

En este trabajo se estudia la dinámica de dos familias de funciones de variable compleja. La primera familia es $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$, $\lambda \in \mathbb{C}$, que pertenece a la clase de funciones trascendentes enteras. La segunda familia es parecida a $f_\lambda(z)$, sólo que agregamos un polo simple en cero, esto es, $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z + 1/z$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Para la primera familia se enuncian algunos resultados demostrados en [9] y [10] y se concluye que estos resultados no se pueden generalizar a la familia $F_\lambda(z)$, que pertenece a la clase de funciones trascendentes meromorfas. Estudiando el plano de parámetros de la familia $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z + 1/z$, se enuncian algunas conjeturas sobre el comportamiento dinámico de la familia y el plano de parámetros.

1. Introducción

El método de Newton es probablemente el proceso más antiguo sobre iteración. Curiosamente, aunque lleva el nombre de Newton desde 1830, no es mérito de Isacc Newton el haberlo propuesto como hoy lo conocemos, el crédito debe otorgarse a Thomas Simpson (1710-1761), el mismo autor de la ya conocida *regla de Simpson* para la aproximación de integrales definidas. También es notable la participación de otros matemáticos, como Joseph Raphson y Joseph Fourier, de tal manera que el método podría ser llamado el método de Newton-Raphson-Simpson-Fourier.

El origen de la iteración de funciones analíticas complejas fue presentado en dos revisiones detalladas al método de Newton. La primera, en un artículo notable de Schröder, publicada en dos partes, en 1870 y en 1871, junto con Georg Cantor, véase [18]. La segunda, escrita por el matemático y abogado británico Arthur Cayley (1821-1895) apareció en 1879, véase [8].

En 1915, la Academia Francesa de Ciencias informa que el *Grand Prix des Sciences Mathématiques* de 1918 se otorgaría a los estudios sobre iteración. La Academia escogió este tema por dos razones, véase [17]. La primera razón fue motivada por el uso que Henri Poincaré (1854-1912) había dado a la iteración en sus estudios de la mecánica celeste —donde él visionó las ideas del caos dinámico al estudiar la estabilidad del sistema solar— al competir en un concurso propuesto por

Oscar II, rey de Suecia y Noruega, donde se retaba a mostrar rigurosamente que el sistema solar modelado por las ecuaciones de Newton era dinámicamente estable. Poincaré ganó el concurso, había creado un nuevo método analítico y vislumbrado lo que hoy conocemos como la teoría del caos.

La segunda razón fue porque ya existía una tradición francesa en el interés por estudiar la iteración o dinámica de las funciones complejas, comenzando en los estudios de Gabriel Koenigs (1858-1931) en 1880, tema también estudiado de manera exhaustiva por el matemático alemán Ernst Schröder (1841-1902).

El estudio de los sistemas dinámicos en el campo de la dinámica holomorfa se dió a comienzos del siglo XX con las investigaciones de los matemáticos franceses Gaston Julia (1893- 1978) y Pierre Fatou (1878-1926), véase [13] y [14]. Estos dos matemáticos estudiaron principalmente la iteración de funciones racionales de la esfera de Riemann.

Un teorema de Montel sobre familias normales permitió a Fatou y Julia descomponer a la esfera de Riemann en dos conjuntos, que ahora llevan sus nombres, el conjunto de Fatou consiste en los puntos de la esfera donde la familia de iteradas de la función es normal, y el conjunto de Julia es su complemento. Esta problemática puede extenderse a la iteración de funciones holomorfas en una superficie de Riemann arbitraria. Una de las preguntas que dejaron pendientes Fatou y Julia fue: ¿existen componentes del conjunto de Fatou que sean diferentes a las componentes periódicas y pre-periódicas, para el caso de funciones racionales? Sullivan [19] demostró en 1986 su no existencia, además, probó que las componentes cíclicas de Fatou se pueden clasificar en cinco tipos; cuencas de atracción, cuencas de super-atracción, cuencas parabólicas, discos de Siegel y anillos de Herman.

Como ya se mencionó, la teoría clásica de los conjuntos de Julia y Fatou fue originalmente estudiada alrededor de 1920 para funciones racionales. En 1926 Fatou extiende la teoría a funciones trascendentes enteras (infinito es singularidad esencial) y en 1990 Baker extiende la teoría para funciones trascendentes meromorfas con una singularidad esencial y con al menos un polo que no es omitido.

En las últimas dos décadas del siglo XX se retomó el estudio de la dinámica holomorfa teniendo un importante desarrollo el caso de las funciones enteras trascendentes y meromorfas trascendentes. Una gran ayuda para este desarrollo fue, sin duda alguna, el uso de las computadoras y la implementación de programas en lenguajes como C++, Java, Xaos, Mathematica, etc.

Con la graficación del plano de parámetros de las familias de funciones a investigar se puede conocer información acerca de la dinámica de las familias dadas, donde el *plano de parámetros* se entiende como el espacio fase de la familia de funciones.

La familia λe^z y su plano de parámetros asociado han sido estudiados por varios matemáticos en la última década. En el caso de la familia $\lambda senz$, dado que se puede reescribir como una familia en términos de la función exponencial, se tenía la idea que los planos de parámetros asociados a

estas dos familias de funciones eran similares. Esto no es verdad por un resultado de McMullen [16] que afirma lo siguiente: para la función exponencial, la medida del conjunto de Julia es cero, mientras que para la función senz no es cero. Un primer estudio del plano de parámetros para la familia $\lambda \operatorname{senz}$, buscando posibles propiedades que no habían sido investigadas, se realizó en 2002 por Domínguez y Sienra en [10].

Es natural preguntarse: (a) ¿Qué sucede si agregamos un polo a la familia $\lambda \operatorname{senz}$? (b) ¿Siguen siendo los conjuntos de Fatou y Julia similares después de agregar el polo? La primera idea que nos viene a la mente es graficar el plano de parámetros de la nueva familia $\lambda \operatorname{senz} + 1/z$ y dar valores a λ para poder deducir y demostrar resultados interesantes.

En este trabajo de divulgación enunciamos resultados de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{senz}$ con algunos ejemplos para ciertos parámetros dados. Después, se le añade un polo simple en $z = 0$ a $f_\lambda(z)$ e investigamos el plano de parámetros de la nueva familia, $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{senz} + 1/z$, que fue programado usando Fractint, Xaos y Mathematica.

Uno de los problemas más habituales cuando se construye un modelo para simular un proceso es que, tras haber definido un buen número de parámetros para darle más flexibilidad y generalidad con el fin de abarcar las situaciones más variopintas del proceso, no sabemos qué valores de esos parámetros serán los que puedan generar un comportamiento que resulte interesante. Para resolverlo, la primera tarea que abordamos es recorrer el plano de parámetros pinchando aquí y allá para ver cómo se comporta el modelo en esos puntos aislados y esperando reconocer qué relación hay entre las zonas exploradas y los comportamientos observados. Los conjuntos de Fatou y Julia de la familia $F_\lambda(z)$ se graficaron dando valores a diversos parámetros, utilizando la forma antes mencionada. Con los resultados obtenidos se enuncian varias conjeturas de la dinámica de la familia $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{senz} + 1/z$.

El capítulo está estructurado de la siguiente forma: introducción, preliminares, clasificación de componentes de Fatou, dinámica de la familia $\lambda \operatorname{senz}$, dinámica de la familia $\lambda \operatorname{senz} + 1/z$ y referencias.

2. Preliminares

Recordemos que una función f de variable compleja es llamada analítica en un punto z_0 si existe una vecindad $|z - z_0| < \epsilon$, tal que en cada punto de ella f' existe. Un punto en el cual la función f no es analítica es llamado un *punto singular* o singularidad de f .

Definición 2.1. El punto z_0 es una *singularidad aislada* o un punto singular aislado de f si podemos encontrar un $\delta > 0$, tal que el círculo $|z - z_0| < \delta$ no encierre puntos singulares distintos de z_0 . Si tal δ no puede ser encontrado, decimos que z_0 es una singularidad no aislada.

Las singularidades aisladas de una función de variable compleja se clasifican de la siguiente forma.

1. *Polo*. Si podemos encontrar un $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z - z_0)^n f(z) = c,$$

donde $c \neq 0$, el punto z_0 es llamado un polo de orden n . Si $n = 1$, decimos que z_0 es un polo simple.

Si $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$, donde $f(z_0) \neq 0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces z_0 es llamado un cero de orden n de $g(z)$. Si $n = 1$ el punto z_0 es llamado un cero simple. Así, z_0 es un polo de la función $\frac{1}{g(z)}$.

2. *Singularidad removible*. Una singularidad z_0 es llamada una singularidad removible de $f(z)$ si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.
3. *Singularidad esencial*. Una singularidad z_0 que no es polo ni es removible es una singularidad esencial.

Definición 2.2. Diremos que ∞ es una singularidad aislada de una función f si existe $R > 0$ tal que f es analítica en la región $A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$.

Definición 2.3. Una *función meromorfa* f es una función que es analítica excepto en los polos.

Los valores singulares de una función de variable compleja f son de dos tipos, valores críticos y valores asintóticos, los cuales se definen a continuación.

Definición 2.4. Los *puntos críticos* de una función de variable compleja f son los puntos donde la derivada se anula. Decimos que z_0 es *valor crítico* de f si es la imagen de un punto crítico.

Definición 2.5. Decimos que z_0 es un *valor asintótico* de una función de variable compleja f si existe una curva $\Omega(t)$, tal que si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Omega(t) \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f(\Omega(t)) = z_0.$$

Ahora consideremos las siguientes clases de funciones, donde $X = \mathbb{C}$ y $Y = \widehat{\mathbb{C}}$.

$$\mathcal{E} = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ es entera trascendente}\}.$$

$$\mathcal{M} = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ es meromorfa trascendente con al menos un polo que no es omitido}\}.$$

Recuérdese que a un punto z_0 se le llama valor omitido de la función f si la función nunca toma el valor de z_0 .

Algunos ejemplos de funciones en las clases antes mencionadas son los siguientes:

Ejemplo 2.6. Las familias $f_\lambda(z) = \lambda \mathbf{senz}$ y $f_\lambda(z) = \lambda e^z$ pertenecen a la clase \mathcal{E} .

Ejemplo 2.7. Las familias $f_\lambda(z) = \lambda \mathbf{tanz}$ y $f_\lambda(z) = \lambda \mathbf{senz} + \frac{1}{z}$ pertenecen a la clase \mathcal{M} .

Sea f es una función en cualquiera de las clases anteriores \mathcal{E} o \mathcal{M} . La n -ésima iterada de la función f se define como la composición de la función n -veces y se denota por f^n , esto es, $f^n := f \circ f^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, donde $f^0 := Id$.

Observación 1.

(a) Si $f \in \mathcal{E}$, entonces $f^n \in \mathcal{E}$.

(b) Si $f \in \mathcal{M}$, no implica que $f^n \in \mathcal{M}$.

Definición 2.8. Sea $f \in \mathcal{E}$ o \mathcal{M} . Un punto z_0 que cumple $f(z_0) = z_0$ se llama *punto fijo* de la función f .

Definición 2.9. Decimos que z_0 es un *punto fijo periódico de período n* de la función f si n es el menor natural que cumple que $f^n(z_0) = z_0$.

Dado z_0 , la *órbita hacia adelante* de z_0 se define como:

$$O^+(z_0) = \{z_n = f^n(z_0) : n \in \mathbb{N}\}.$$

La *órbita hacia atrás* de z_0 se define como:

$$O^-(z_0) = \{z : f^n(z) = z_0, n \in \mathbb{N}\}.$$

Definición 2.10. Si z_0 un punto fijo periódico de período n , se define el multiplicador como $\lambda = (f^n)'(z_0)$. Si $n = 1$, el multiplicador de z_0 es $\lambda = (f)'(z_0)$.

De la Definición 2.10 podemos hacer la siguiente observación sobre el multiplicador:

Observación 2.

(a) Por la regla de la cadena tenemos:

$$(f^n)'(z_0) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(z_0)).$$

(b) La Definición 2.10 puede ser confusa cuando $z = \infty$. El multiplicador $\lambda \neq \lim_{z \rightarrow \infty} (f^n)'(z)$, más bien λ es igual al recíproco de este número. Por ejemplo, si $f(z) = 2z$, entonces ∞ es punto fijo con multiplicador $\lambda = 1/2$.

Sin pérdida de generalidad, si z_0 es un punto fijo de período uno de la función f , el punto z_0 se puede clasificar de la siguiente forma:

- z_0 es súper atractor, si $\lambda = 0$.
- z_0 es atractor, si $0 < |\lambda| < 1$.
- z_0 es repulsor, si $|\lambda| > 1$.
- z_0 es indiferente, si $|\lambda| = 1$. Los puntos fijos indiferentes se dividen en:
 - (a) racional indiferente, si $\lambda^m = 1$, para algún $m \in \mathbb{N}$ y
 - (b) irracional indiferente, si $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Definición 2.11. Sea f una función en la clase \mathcal{E} o en la clase \mathcal{M} . El conjunto de Fatou, denotado por $F(f)$, se define como el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$, tal que la sucesión de iteradas $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ está bien definida y es normal en alguna vecindad de z . El conjunto de Julia es el complemento del conjunto de Fatou y se denota por $J(f)$.

El estudio de la dinámica de funciones en la clase \mathcal{E} se inició con los trabajos de Fatou en [12] y continuó con los trabajos de Baker en [1]. El estudio de la dinámica de funciones en la clase \mathcal{M} se inició con los trabajos de Baker, Yinian y Kotus ([3], [4], [5], [6]).

Algunas propiedades básicas de los conjuntos de Fatou y Julia para funciones en las clases de funciones \mathcal{E} y \mathcal{M} son las siguientes:

- (i) $F(f)$ es abierto y $J(f)$ es cerrado.
- (ii) $F(f)$ y $J(f)$ son completamente invariantes bajo $f(z)$.
- (iii) $F(f) = F(f^n)$ y $J(f) = J(f^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (iv) $J(f)$ es perfecto.
- (v) $J(f)$ es la clausura del conjunto de puntos periódicos repulsores de $f(z)$.

Las demostraciones de las propiedades antes enunciadas son diferentes para cada clase de función. Para un estudio detallado de estas propiedades, el lector puede consultar [7].

3. Clasificación de las componentes del conjunto de Fatou

Si $f \in \mathcal{E}$ o \mathcal{M} y U es una componente del conjunto de Fatou, las posibilidades para la órbita de U bajo f son las siguientes:

- (a) Si $f^n(U) \subset U$, para algún entero $n \geq 1$, entonces llamamos a U *componente periódica*. El mínimo n es el período de la componente. En particular, si $n = 1$ la componente U es llamada *componente invariante*.
- (b) Si $f^m(U)$ es periódica, para algún entero $m \geq 0$, llamamos a U *componente pre-periódica*.
- (c) U es una *componente errante* si U no es componente periódica ni pre-periódica.

Si U es una componente periódica de $F(f)$ de período p , esto es, $f^p(U) \subset U$, la clasificación de las componentes periódicas es dada como sigue:

1. Si U contiene un punto periódico atractor z_0 de período p y $f^{np}(z) \rightarrow z_0$, para $z \in U$ y $n \rightarrow \infty$, la componente U es llamada la *cuenca inmediata de atracción o componente atractor*.
2. Si ∂U contiene un punto periódico z_0 de período p y $f^{np}(z) \rightarrow z_0$, para $z \in U$ y $n \rightarrow \infty$, entonces $(f^p)'(z_0) = 1$ si $z_0 \in \mathbb{C}$. En este caso, U es llamada una *componente de Leau o componente parabólica*.
3. Si existe un homeomorfismo analítico $\varphi : U \rightarrow D$, donde D es el disco unitario, tal que $\varphi(f^p(\varphi^{-1}(z))) = e^{2\pi i \alpha} z$ para algún $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, en este caso la componente U es llamada *disco de Siegel*.
4. Si existe un homeomorfismo analítico $\varphi : U \rightarrow A$, donde A es un anillo $A = \{z : 1 < |z| < r\}$, $r > 1$, tal que $\varphi(f^p(\varphi^{-1}(z))) = e^{2\pi i \alpha} z$ para algún $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, en este caso la componente U es llamada *anillo de Herman*.
5. Si existe $z_0 \in \partial U$ tal que $f^{np}(z) \rightarrow z_0$, para $z \in U$ cuando $n \rightarrow \infty$, pero $f^p(z_0)$ no está definido, en este caso la componente U es llamada *componente de Baker*.

Observacion 3.

- (a) Para funciones en la clase \mathcal{E} , los anillos de Herman no existen, véase [2].

(b) Para funciones en las clases \mathcal{E} y \mathcal{M} que tienen un número finito de valores singulares, no existen los dominios errantes ni los dominios de Baker, véase [3] y [11].

Para funciones en la clase \mathcal{E} , Baker en [2] demostró el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Si $f \in \mathcal{E}$, entonces toda componente no acotada U de $F(f)$ es simplemente conexa.*

Podemos preguntarnos si el Teorema 3.1 se cumple para funciones en la clase \mathcal{M} . La respuesta es no. Keen y Kotus, en [15], demostraron que la familia $f_\lambda(z) = \lambda \tan z$ tiene un único punto fijo atractor en $z = 0$, para cierto valor de λ , y el conjunto de Julia $J(f)$ es un subconjunto de Cantor de la recta real. El conjunto de Fatou consiste de una única componente completamente invariante U que es múltiplemente conexa, y los valores asintóticos $\pm \lambda i$ se encuentran en U .

4. Dinámica de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$

En esta sección enunciamos algunos resultados importantes relacionados con la dinámica de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ investigados por Domínguez y Sienna en [10] y Domínguez y Fagella en [9]. Primero observemos que los miembros de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ cumplen lo siguiente:

(a) El punto $z = 0$ es un punto fijo, porque $f_\lambda(0) = \lambda \operatorname{sen} 0 = 0$.

(b) La familia tiene dos valores críticos $\{\lambda, -\lambda\}$ y no tiene valores asintóticos. En efecto, tomemos la derivada de la familia $f_\lambda(z)$, esto es, $f'_\lambda(z) = \{\lambda \operatorname{sen} z\}' = \lambda \operatorname{cos} z$. Ahora $\lambda \operatorname{cos} z = 0$ cuando $z = (2k - 1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Así, los valores críticos son $f_\lambda((2k - 1)\pi/2) = \pm \lambda$.

(c) Por la Observación 3(a), la familia no tiene anillos de Herman.

(d) Por Observación 3(b), la familia no tiene dominios errantes ni dominios de Baker.

Por (c) y (d), las únicas componentes que tiene la familia $f_\lambda(z)$ son atractoras, parabólicas y discos de Siegel. El plano de parámetros de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ se observa en la Figura 1.

Los siguientes resultados fueron demostrados para diferentes parámetros $\lambda \in \mathbb{C}$ en [10].

Componente atractora

Teorema 4.1. *Para la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$, donde $0 < |\lambda| < 1$, el conjunto de Fatou consiste de una componente simplemente conexa U que es completamente invariante.*

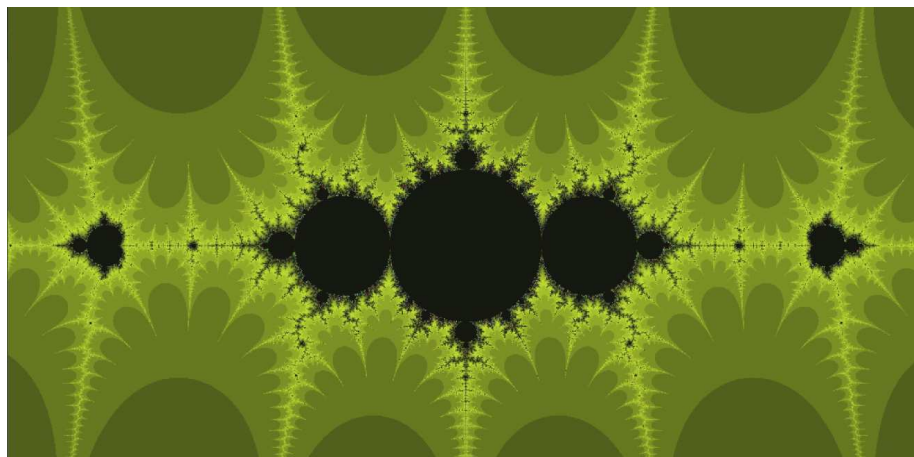


Figura 1: El plano de parámetros de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Ejemplo 4.2. Un ejemplo del Teorema 4.1 es cuando tomamos $\lambda = 0,7$. Los conjuntos de Fatou y Julia están representados en la Figura 2. El conjunto de Fatou está en color negro, se puede ver que el punto fijo super-atractor $z = 0$ está en el conjunto de Fatou. La componente de Fatou (en negro) es no acotada, simplemente conexa y completamente invariante.

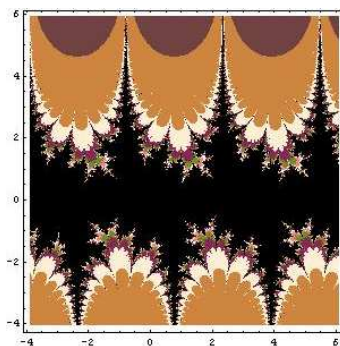


Figura 2: El conjunto de Fatou para $\lambda = 0,7$.

Componente parabólica

Teorema 4.3. Sea $\theta = p/q$, con $(p, q) = 1$. Si q es par, existe un ciclo con q componentes de Fatou pegadas a 0. Si q es impar, existen dos ciclos con q componentes de Fatou cada una. Estas son las únicas componentes periódicas de Fatou. Más aún, tales componentes son acotadas.

Ejemplo 4.4. Un ejemplos del Teorema 4.3 es cuando tomamos $\theta = 1/4$ y $\theta = 1/3$, véase Figuras 3 y 4. La parte negra que se muestra en las figuras es el conjunto de Fatou y sus pre-

imágenes. Podemos observar en la Figura 3 que hay cuatro pétalos acotados unidos en $z = 0$, porque $\theta = 1/4 = p/q$ con $p = 1$ y $q = 4$.

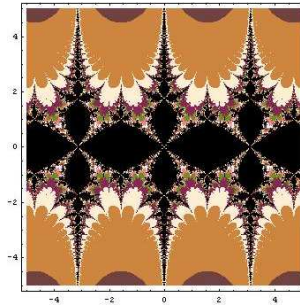


Figura 3: El caso parabólico para $\lambda = e^{2\pi i \theta}$ con $\theta = 1/4$

En la Figura 4 hay seis pétalos acotados unidos en $z = 0$, porque $\theta = 1/3 = p/q$ con $p = 1$ y $q = 3$. Los pétalos se repiten en las Figuras 3 y 4 porque la familia es periódica.

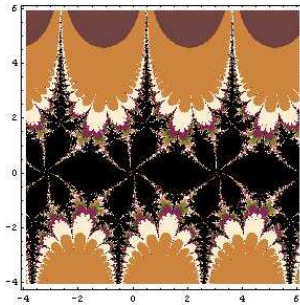


Figura 4: El caso parabólico para $\lambda = e^{2\pi i \theta}$ con $\theta = 1/3$

Disco de Siegel

En [20] Zhang demostró que para $\lambda = e^{2\pi i \theta}$ siendo θ un número irracional, de tipo acotado, la familia $f_\lambda(z)$ tiene un disco de Siegel que es invariante alrededor de $z = 0$ y todas las otras componentes de Fatou son sus pre-imágenes. El disco de Siegel es acotado y por lo tanto también todas sus pre-imágenes

Observando las componentes parabólicas y el disco de Siegel de la familia λsenz una pregunta natural sería: ¿Para qué valores del parámetro λ el conjunto de Fatou es acotado? El siguiente resultado demostrado en [9] da una respuesta parcial a la pregunta.

Teorema 4.5. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que $|\text{Re}(\lambda)| \geq \frac{\pi}{2}$, entonces todas las componentes de Fatou de $f_\lambda(z)$ son acotadas.*

Los autores en [9] hacen la siguiente conjetura:

Conjetura. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \geq 1$, entonces todas las componentes de Fatou de $f_\lambda(z)$ son acotadas.

5. Dinámica de la familia $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z + 1/z$

En esta sección analizaremos el plano de parámetros de la familia $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z + 1/z$ y enunciaremos algunas conjeturas para diferentes parámetros estudiando los conjuntos de Fatou y Julia asociados a los parámetros dados. También, describiremos (a) el algoritmo generado en Fractint y Mathematica, que grafican el espacio de parámetros de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$. (b) El algoritmo que generan los conjuntos de Julia y Fatou de la familia $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z + 1/z$

La familia $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z + 1/z$ tiene dos singularidades aisladas, una en $z = 0$, que es un polo, y otra en ∞ , que es una singularidad esencial. La familia pertenece a la clase de funciones trascendentes meromorfas, \mathcal{M} , por lo tanto la dinámica para cada λ en la familia es totalmente diferente a la familia $\lambda \operatorname{sen} z$.

Los puntos fijos y los puntos críticos de la familia $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z + 1/z$ se encuentran resolviendo las ecuaciones (i) $\lambda \operatorname{sen} z + 1/z - z = 0$ y (ii) $\lambda \cos z - 1/z^2 = 0$ respectivamente. Las soluciones de las ecuaciones anteriores no son fáciles de resolver analíticamente, por lo que se requieren métodos de aproximación. Una solución de la ecuación (ii) se tiene cuando $z = 7,837702$ tomando $\lambda = 1$ y $z \in \mathbb{R}$. Así, el punto 7.837702 es un punto crítico de la familia $\lambda \operatorname{sen} z + 1/z$; cabe mencionar que el punto se encontró resolviendo la ecuación $\cos x = 1/x^2$. Los puntos críticos son importantes para generar el plano de parámetros de familias meromorfas.

A continuación se implementan dos programas computacionales que grafican el plano de parámetros de la familia $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z + 1/z$ y los conjuntos de Fatou y Julia para λ dada. En la Figura 5 se muestra el plano de parámetros de la familia $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z + 1/z$, se puede observar, en la figura, que hay inestabilidad en vecindades cercanas a $z = 0$ por ser un polo de la familia. La Figura 6 es un acercamiento de la cardioide que contiene a $\pi/2$. Se puede observar, en la figura, que para parámetros en una vecindad de $\pi/2$ no hay inestabilidad. Así, el objeto de estudio, para enunciar algunas conjeturas relacionadas con la familia $\lambda \operatorname{sen} z + 1/z$, será observar el comportamiento de parámetros cercanos a $\pi/2$.

Explicación y generación del plano de parámetros de las familias $f_\lambda(z)$ y $F_\lambda(z)$

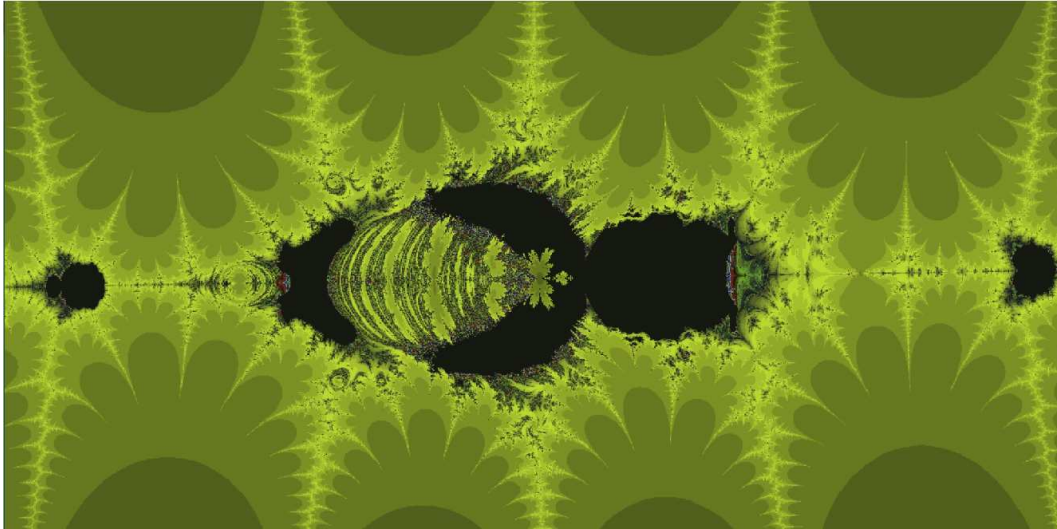


Figura 5: Plano de parámetros de la familia $f_{\lambda_0}(z) = \lambda \operatorname{sen} z + 1/z$

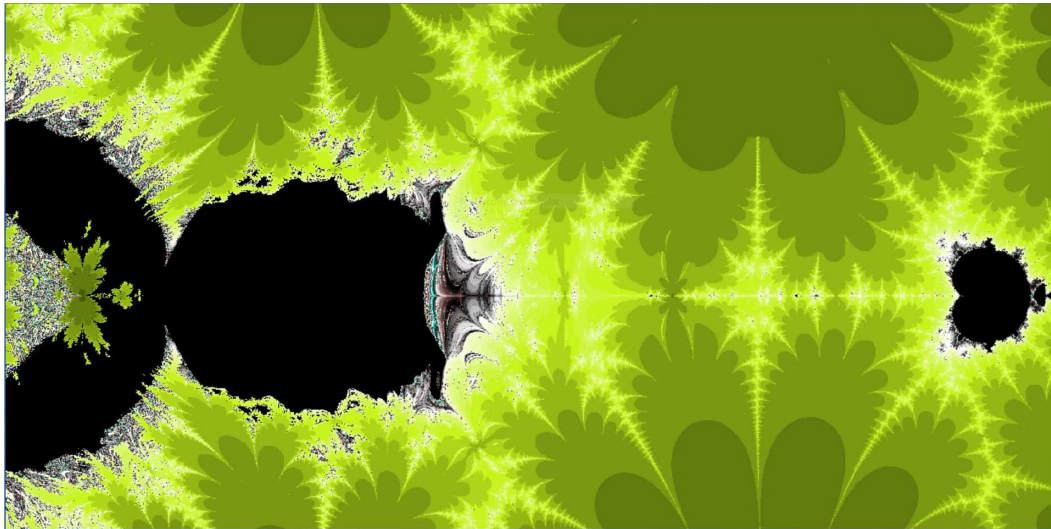


Figura 6: Cardioide que contiene a $\pi/2$ del plano de parámetros

Para generar el plano de parámetros de las familias $f_\lambda(z)$ y $F_\lambda(z)$ fueron necesarios los programas de Mathematica, Xaos y Fractint. El primero es la bienquista herramienta computacional para análisis numérico, que permite la realización de todo tipo de cálculos matemáticos. En el caso de Xaos, es un software libre, bajo licenciado de GPL, que posee una gran resolución de zoom para curvas fractales, permitiendo al usuario enfatizar mediante un movimiento fluido en las áreas de interés. Además, incluye en su base de datos diferentes tipos de fractales ya predefinidos, entre

ellos un modo Mandelbrot que explicaremos más adelante. Por último, Fractint es también un software libre generador de curvas fractales con características distintas a Xaos, que le permiten ser un buen complemento de éste.

En primer lugar, para la generación del plano de parámetros es necesario un punto crítico de la familia a tratar, es decir, no podemos considerar las singularidades. Por ejemplo, si tomamos $\lambda \operatorname{senz}$ se tiene que $z = \frac{\pi}{2}$ es un punto crítico de la familia para toda $\lambda \in \mathbb{C}$. Para la familia $\lambda \operatorname{senz} + 1/z$ observamos que z es un punto crítico si $\lambda \cos z - 1/z^2 = 0$, cuya ecuación no es fácil de resolver analíticamente, como se mencionó con anterioridad. Dado que a partir del punto crítico se definirá el algoritmo para generar el plano de parámetros es necesario que tal punto sea lo más cercano posible a la raíz de esta ecuación no lineal es por ello, considerando el caso $\lambda = 1$ calculamos mediante el método de Newton implementado en Mathematica las raíces de la ecuación $\cos z - 1/z^2 = 0$, obteniendo por resultado $z = 7,837702$, cuyo orden de aproximación es de 1×10^{-7} .

Ahora bien, se busca construir el conjunto $M = \{\lambda : |f_\lambda^n(\frac{\pi}{2})| \not\rightarrow \infty\}$ para la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{senz}$ y el conjunto $G = \{\lambda : |f_{\lambda_0}^n(7,837702)| \not\rightarrow \infty\}$ para la familia $\lambda \operatorname{senz} + 1/z$. Para ello ejecutemos el programa Xaos con las respectivas funciones especificando una condición de escape, es decir, una cota superior, digamos $K \in \mathbb{R}^+$, y un número arbitrario fijo de iteraciones, digamos $N \in \mathbb{N}$.

El programa Xaos funciona de la siguiente manera: Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$: si el módulo de f_λ evaluada en el punto crítico es menor que la cota establecida, pasa a la siguiente iteración y vuelve a comparar con la cota y así recursivamente, de tal forma que si después de las N iteraciones que se establecieron sigue siendo menor el módulo de f_λ evaluada en el punto crítico que la cota le asigna un color -en el caso de las imágenes presentadas en este trabajo ha sido el color negro-, o bien, si en alguna iteración supera la cota establecida, le asigna otro color, creando así una gama de colores definida a partir del número de iteraciones que le lleva superar la cota. Así, todo el conjunto que al final quedó asignado al primer color será nuestro plano de parámetros. De la misma manera lo hacemos para la familia $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{senz} + 1/z$.

Una de las desventajas que presenta el programa de Xaos es que al maximizar la imagen en las áreas de interés se pierde la ubicación exacta de los puntos del plano. Es posible recrear el algoritmo en Fractint para obtener el mismo plano de parámetros, que si bien no cuenta con el mismo detalle en la frontera de los conjuntos M y G , sí permite la ubicación exacta de los puntos a considerar en el plano de parámetros. Para generar los conjuntos de Fatou y Julia se procede de modo similar al que usamos para generar el plano de parámetros.

Conjeturas. Las siguientes conjeturas se enuncian tras investigar y observar la familia $\lambda \operatorname{senz} + 1/z$

y el plano de parámetros de la familia.

Conjetura A. La familia $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z + 1/z$ tiene una infinidad de puntos críticos cuando $\lambda = 1$ y $z \in \mathbb{R}$. También tiene una infinidad de valores críticos.

Para algunos valores de λ , la familia $\lambda \operatorname{sen} z$ tiene un punto fijo super-atractor en $z = 0$, mientras que para la familia $\lambda \operatorname{sen} z + 1/z$, el punto $z = 0$ es un polo (no punto fijo), por lo tanto no es posible obtener resultados similares a los obtenidos en la familia $\lambda \operatorname{sen} z$. Trabajar en una vecindad de $z = 0$ implica inestabilidad, sin embargo el plano de parámetros muestra una zona buena en una vecindad de $\pi/2$ y por lo tanto se hace la siguiente conjetura.

Conjetura B. Sea $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z + 1/z$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Para $\pi/2 - 1/2 \leq |\lambda| \leq \pi/2 + 1/2$ el conjunto de Fatou es completamente invariante y múltiplemente conexo (véanse las Figuras 7 y 8) para diferentes parámetros.

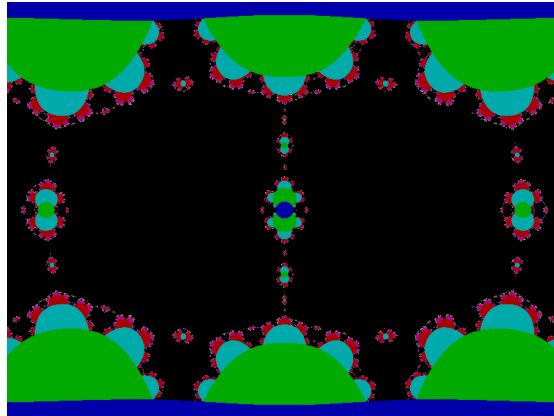


Figura 7: El Conjunto de Fatou y Julia para $\lambda = \pi/2$.

Como corolario de la Conjetura B se tiene que el conjunto de Julia no es conexo en \mathbb{C} .

Conjetura C. Sea $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z + 1/z$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\lambda = \pi/2 + 2i$ el conjunto de Julia es el plano complejo, esto es, el conjunto de Fatou es vacío, véase Figura 9.

Conjetura D. El plano de parámetros de la familia $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z + 1/z$, $\lambda \in \mathbb{C}$ es simétrico con respecto al eje real, pero no es acotado, véase Figura 10.

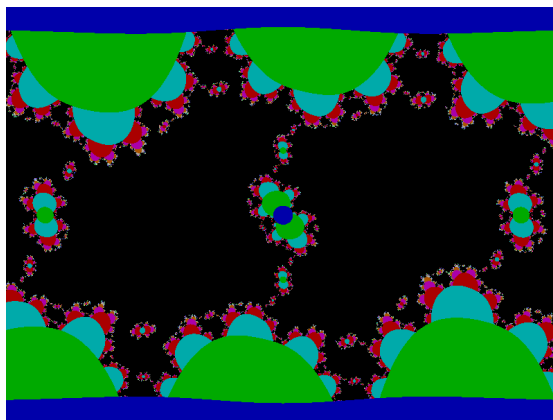


Figura 8: El conjunto de Fatou y Julia para $\lambda = \pi/2 + i/2$

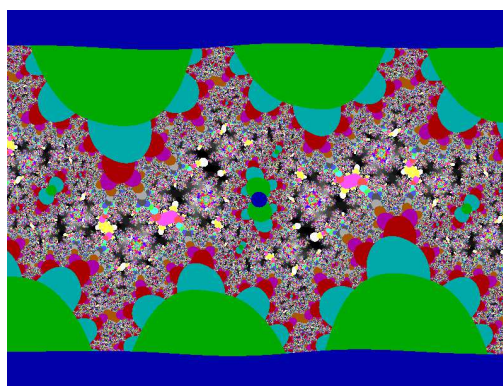


Figura 9: El conjunto de Julia para $\lambda = \pi/2 + 2i$ es todo el plano complejo.

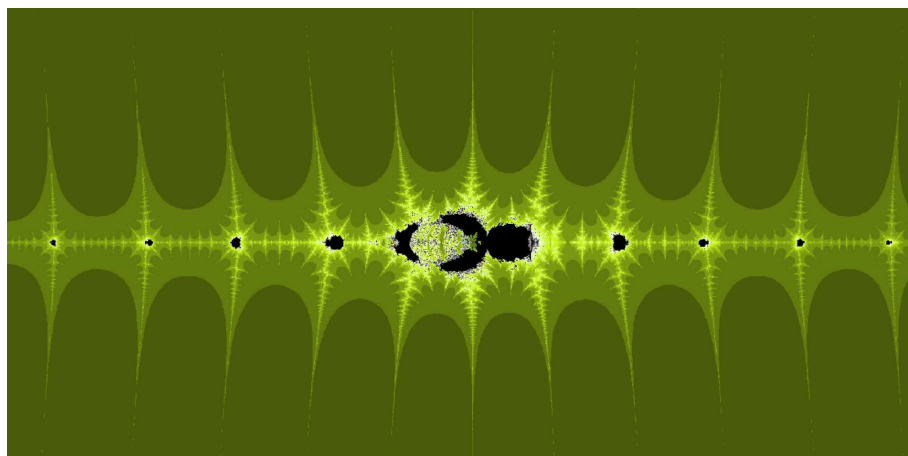


Figura 10: El plano de parámetros no es acotado

Agradecimientos

Agradecemos al revisor por sus valiosos comentarios para mejorar este capítulo. El presente trabajo ha sido apoyado por el proyecto 128005 de CONACYT.

Bibliografía

- [1] Baker I.N., Fix Points and Iterates of Entire Functions, *Math. Z.* **71** (1959), 146-153.
- [2] Baker I.N., The Domains of Normality of an Entire Function, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.* **1** (1975), 277-283.
- [3] Baker I.N., Kotus J. and Yinian Lü., Iterates of Meromorphic Functions I, *Ergodic Theory Dynamical Systems* **11** (1991), 241-248.
- [4] Baker I.N., Kotus J. and Yinian Lü., Iterates of Meromorphic Functions II: Examples of Wandering Domains, *J. London. Math. Soc.* **42** (1990), 267-278.
- [5] Baker I.N., Kotus J. and Yinian Lü., Iterates of Meromorphic Functions III: Preperiodic Domains, *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **11** (2) (1991), 603-6188.
- [6] Baker I.N., Kotus J. and Yinian Lü., Iterates of Meromorphic Functions IV: Critically Finite Functions, *Results in Mathematics* **22** (1992), 651-656.
- [7] Bergweiler W., Iteration of Meromorphic Functions, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **29** (1993), 151-188.
- [8] Cayley A., Applications of the Newton-Fourier Method to an imaginary root of an equation, *Quart. J. of Pure and Applied Math.* **16** (1879), 179-185.
- [9] Domínguez P. and Fagella N., Residual Julia set of rational and transcendental functions, *London Matm. Soc. Lectures Note Series, Cambridge University Press.* **348** (1998), 138-163.
- [10] Domínguez P. and Sienna G., A study of the dynamics of the family $\lambda \sin z$, *International Journal of Bifurcation and Chaos.* **12** (2002), 2869-2883.
- [11] Eremenko A.E. and Lyubich M.Y., Dynamical Properties of Some Classes of Entire Functions, *Ann. Int. Fourier* **42** (1992), 989-1020.
- [12] Fatou P., Sur l' itération des Fonctions Transcendentes Entières, *Acta Math.* **47** (1926), 337-370.

- [13] Fatou P., Sur les Équations Fonctionnelles (Deuxième mémoire), *Bull. Sci. Math. France* **47** (1919), 161-271 and **48** (1920) 208-314.
- [14] Julia G., Sur l'itération des fonctions rationnelles, *J. Math. Pures Appl. (7)* **4** (1918), 47-245.
- [15] Keen L. and Kotus J., Dynamics of the Family $\lambda \tan z$, *Conformal Geom. Dynam.* **1** (1997), 28-57.
- [16] McMullen C., *Complex Dynamics and Renormalization*, Princeton University Press, United States of America, 1994.
- [17] Nehari Z., *Introduction to Complex Analysis*, Allyn and Bacon, Boston, 1961.
- [18] Schröder E., Über iterite funktionen, *Math. Ann.* **3** (1871), 296-322.
- [19] Sullivan D., Quasiconformal Homeomorphisms and Dynamics I: Solutions of the Fatou-Julia Problem on Wandering Domains, *Ann. of Math.* **122** (3) (1985), 401-418.
- [20] Zhang G., On the dynamics of $e^{2\pi i\theta} \operatorname{sen} z$, *Illinois J. Math.* **49** (2005), 1171-1179.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570,
pdsoto@fcfm.buap.mx josue_vazquez_rodriguez@hotmail.com

Geometría

Capítulo 5

El misterio del triángulo de Feynman

Aarón Aparicio Hernández

Universidad Autónoma de la Ciudad de México; Facultad de Ciencias, UNAM

Resumen

El título de esta plática nace de una historia contada por Kai Li Chung, de la Universidad de Stanford. El Prof. Chung relata cómo, en una visita a la Universidad de Cornell, Richard Feynman (1918-1988) dio un coloquio sobre la historia de la fórmula de Feynman-Kac. Después de la charla, el Profesor Kai Li Chung (1917-2009) entretuvo a Feynman para la cena, en gran parte de la discusión se centró en este teorema. El teorema establece que dado un triángulo, al unir cada vértice al punto que divide en razón 1:2 al lado opuesto (tomado en el sentido contrario a las manecillas del reloj), se forma un triángulo por estas tres líneas cuya área es $1/7$ del área del triángulo inicial. Feynman no podía creer que la razón de las áreas de los triángulos fuera de $\frac{1}{7}$, ya que no tenía nada que ver con el número tres. Pasó la mayor parte de la tarde tratando de refutarlo, pero finalmente se demostró en el caso especial del triángulo equilátero. En este artículo presentamos varias demostraciones inspiradas en [1] y [5] con diferentes conceptos, abordando el caso general.

A don Alberto Barajas.

1. El triángulo de Feynman.

Denotemos con $\triangle ABC$ al triángulo formado por los puntos A , B y C , al área del triángulo ABC con $\triangle ABC$.

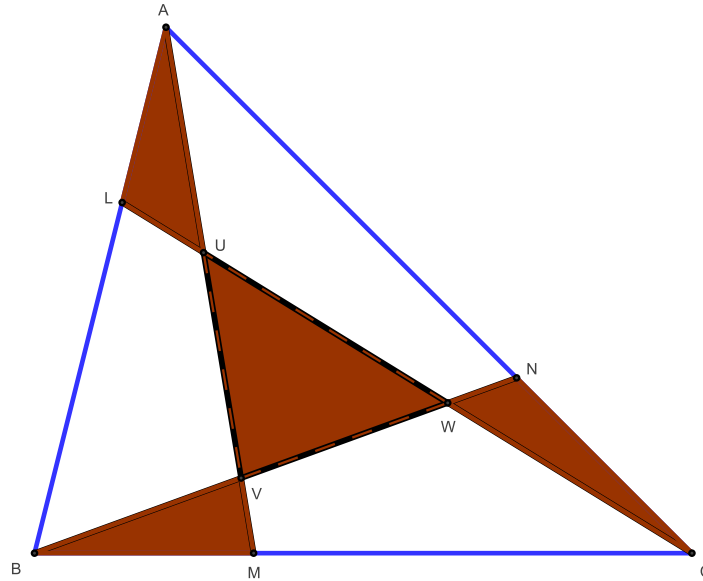
Lema 1.1. Sean L , M , N puntos del $\triangle ABC$ como en la figura 1 tales que

$$\overline{AL} = \frac{1}{3} \overline{AB}, \overline{BM} = \frac{1}{3} \overline{BC}, \overline{CN} = \frac{1}{3} \overline{CA}. \text{ Si } U = \overline{AM} \cap \overline{CL}, V = \overline{AM} \cap \overline{BN},$$

$$W = \overline{CL} \cap \overline{BM} \text{ entonces } \triangle UVW = \triangle BMV + \triangle CNW + \triangle ALU.$$

Demostración. Como $\triangle ABC = \triangle ABM + \triangle CBN + \triangle ACL$ pues cada uno de ellos es $\frac{1}{3}$ del área total, y de la construcción $\triangle ABC = \triangle ABM + \triangle CBN + \triangle ACL + \triangle UVW - [\triangle BMV + \triangle CNW + \triangle ALU]$, por lo que $\triangle UVW - [\triangle BMV + \triangle CNW + \triangle ALU] = 0$

$$\therefore \triangle UVW = \triangle BMV + \triangle CNW + \triangle ALU$$



(a)

Figura 1

□

Teorema 1.2. Mazzanti [5]. Sean L, M, N puntos del $\triangle ABC$ ver figura 2 tales que $\overline{AL} = \frac{1}{3} \overline{AB}$, $\overline{BM} = \frac{1}{3} \overline{BC}$, $\overline{CN} = \frac{1}{3} \overline{CA}$. Si $U = \overline{AB} \cap \overline{CL}$, $V = \overline{AM} \cap \overline{BN}$, $W = \overline{CL} \cap \overline{BM}$ entonces $\triangle UVW = \frac{1}{7} \triangle ABC$.

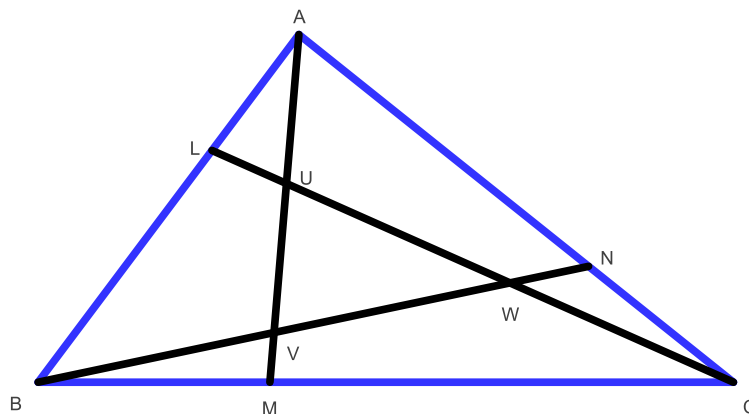


Figura 2: triángulo de Feynman

Primera demostración con semejanza.

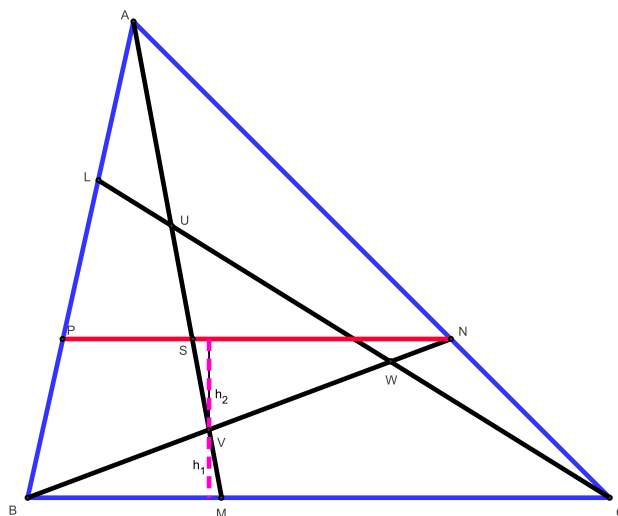


Figura 3

Demostración. Trazamos \overline{AM} y \overline{BN} tal que $V = \overline{AM} \cap \overline{BN}$ y expresemos $\triangle BMV$ en función del $\triangle ABC$. Para ello trazamos una recta l paralela a \overline{BC} y que pase por N , entonces $P = \overline{AB} \cap l$, $S = \overline{AM} \cap l$

$\therefore \triangle SVN \approx \triangle VMB$ vease figura 3.

$$\therefore \frac{\overline{BM}}{\overline{SN}} = \frac{\frac{1}{3} \overline{BC}}{\frac{2}{3} \overline{PN}} = \frac{\frac{1}{3} \overline{BC}}{\frac{2}{3} \frac{2}{3} \overline{BC}} = \frac{3}{4} \quad \therefore \frac{\overline{BM}}{\overline{SN}} = \frac{3}{4}$$

sean h_1 la altura del triángulo VBM y h_2 la altura del triángulo SVN

$$\therefore \frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{4}, \text{ así } \frac{h_2}{h_1} = \frac{4}{3} \quad \therefore \frac{h_1 + h_2}{h_1} = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \quad \therefore h_1 + h_2 = \frac{7}{3}h_1.$$

Además, si h es la altura del triángulo ABC que pasa por A , entonces

$$h_1 + h_2 = \frac{1}{3}h \quad \therefore \frac{1}{3}h = \frac{7}{3}h_1 \quad \therefore h = 7h_1 \quad \therefore h_1 = \frac{1}{7}h$$

$$\therefore \Delta_{BMV} = \frac{\overline{BM} h_1}{2} = \frac{\frac{1}{3}\overline{BC} \frac{1}{7}h}{2} = \frac{1}{21} \frac{\overline{BC} h}{2} = \frac{1}{21} \Delta_{ABC}.$$

Análogamente $\Delta_{ALU} = \frac{1}{21} \Delta_{ABC} = \Delta_{CNW}$.

$$\therefore \Delta_{UVW} = \Delta_{BMV} + \Delta_{CNW} + \Delta_{ALU} = 3 \left(\frac{1}{21} \Delta_{ABC} \right) = \frac{1}{7} \Delta_{ABC}$$

□

Segunda demostración con geometría analítica.

Demostración. Sean $A = (h, k)$, $B = (0, 0)$ y $C = (a, 0)$ con $a, k > 0$ véase figura 4, por lo tanto $M = \left(\frac{a}{3}, 0\right)$. Para calcular ΔBMV basta determinar la altura h_1 con respecto a la base \overline{BM} , es decir, las coordenadas de V .

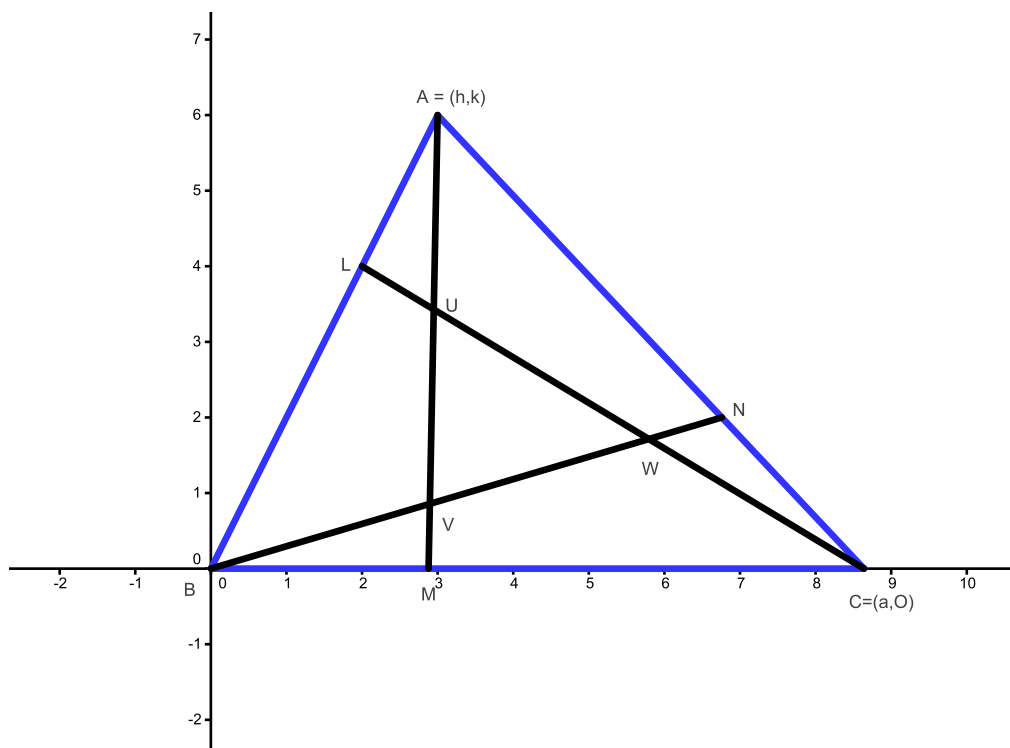


Figura 4

como $\overline{AN} = 2\overline{CN}$ por hipótesis, entonces $N = \left(\frac{2a+h}{3}, \frac{k}{3}\right)$; por lo tanto la ecuación de la recta \overline{BN} es

$$y - 0 = \left(\frac{\frac{k}{3} - 0}{\frac{2a+h}{3} - 0} \right) (x - 0) = \frac{k}{2a+h} x$$

además la ecuación de la recta que pasa por A y M es

$$y - 0 = \left(\frac{k - 0}{h - \frac{a}{3}} \right) \left(x - \frac{a}{3} \right) = \left(\frac{k}{\frac{3h-a}{3}} \right) \left(x - \frac{a}{3} \right) = \frac{3k}{3h-a} \left(x - \frac{a}{3} \right)$$

$$\therefore \frac{3k}{3h-a} \left(x - \frac{a}{3}\right) = \frac{k}{2a+h} x \quad \therefore \quad x = \frac{2a+h}{7}, \quad y = \frac{k}{7}$$

por consiguiente $V = (x, y) = \left(\frac{2a+h}{7}, \frac{k}{7}\right)$. Además,

$$\Delta_{BMV} = \frac{\overline{BM} h_1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{3}\right) \frac{k}{7} = \frac{1}{21} \left(\frac{ak}{2}\right) = \frac{1}{21} \Delta_{ABC}$$

Análogamente $\Delta_{ALU} = \frac{1}{21} \Delta_{ABC} = \Delta_{CNW}$.

$$\therefore \Delta_{UVW} = \Delta_{BMV} + \Delta_{CNW} + \Delta_{ALU} = 3 \left(\frac{1}{21} \Delta_{ABC}\right) = \frac{1}{7} \Delta_{ABC}$$

□

Tercera demostración con trigonometría.

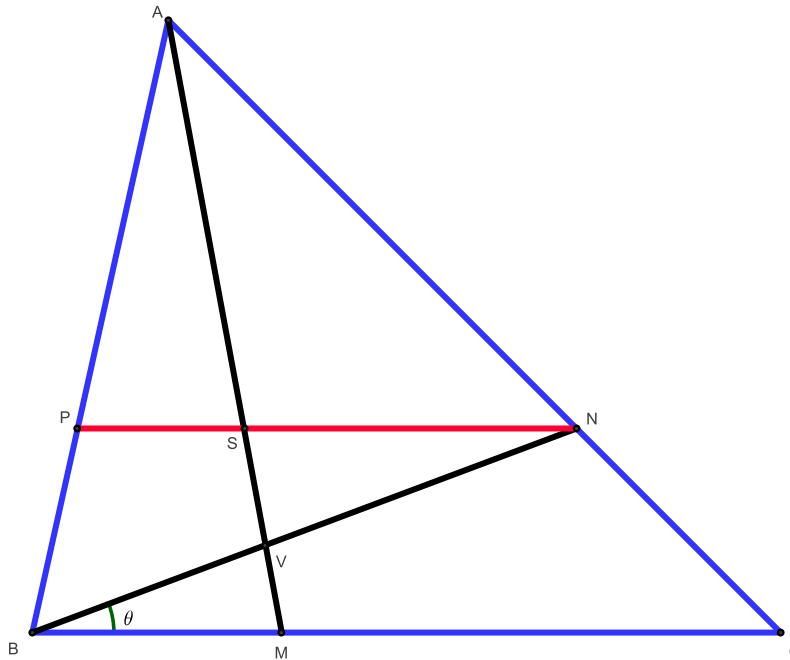


Figura 5

Demostración. Consideremos la figura 5, $\theta = \angle NBC$ y h_1 la altura del triángulo BMV con base \overline{BM} , h_2 la altura del triángulo BCN con base \overline{BC} entonces $\Delta BMV = \frac{\overline{BM} h_1}{2} = \frac{\overline{BM} (\overline{BV} \text{sen } \theta)}{2}$ y $\Delta BCN = \frac{\overline{BC} h_2}{2} = \frac{\overline{BC} (\overline{BN} \text{sen } \theta)}{2} = \frac{1}{3} \Delta ABC$

$$\therefore \overline{BC} (\overline{BN} \text{sen } \theta) = \frac{2}{3} \Delta ABC \quad \therefore \text{sen } \theta = \frac{\frac{2}{3} \Delta ABC}{\overline{BC} \overline{BN}}$$

ahora vamos a expresar \overline{BV} en términos de \overline{BN} , para ello trazamos una recta l paralela a \overline{BC} y que pase por N , entonces $P = \overline{AB} \cap l$, $S = \overline{AM} \cap l$ y por la primera demostración $\Delta SVN \approx \Delta VMB$.

$$\therefore \frac{\overline{BV}}{\overline{VN}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{SN}} = \frac{3}{4} \quad \therefore \frac{\overline{VN}}{\overline{BV}} = \frac{4}{3} \quad \therefore \frac{\overline{BV} + \overline{VN}}{\overline{BV}} = \frac{7}{3} \quad \therefore \frac{\overline{BN}}{\overline{BV}} = \frac{7}{3}$$

por consiguiente $\overline{BV} = \frac{3}{7} \overline{BN}$. Por otra parte

$$\Delta BMV = \frac{1}{2} \overline{BM} \overline{BV} \text{sen } \theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \overline{BC} \right) \left(\frac{3}{7} \overline{BN} \right) \left(\frac{\frac{2}{3} \Delta ABC}{\overline{BC} \overline{BN}} \right) = \frac{1}{14} \left(\frac{2}{3} \Delta ABC \right)$$

luego $\Delta BMV = \frac{1}{21} \Delta ABC$. Análogamente $\Delta ALU = \frac{1}{21} \Delta ABC = \Delta CNW$.

$$\therefore \Delta UVW = \Delta BMV + \Delta CNW + \Delta ALU = 3 \left(\frac{1}{21} \Delta ABC \right) = \frac{1}{7} \Delta ABC$$

□

Cuarta demostración con el producto vectorial (una variante a la primera demostración reportada en [1]).

Demostración. Consideremos la figura 6 y a cada punto del triángulo ABC el vector asociado, entonces $\vec{m} = \frac{1}{3} \vec{c}$, $\vec{n} = \overline{BN} = \vec{c} + \frac{1}{3} \overline{CA} = \vec{c} + \frac{1}{3} (\vec{a} - \vec{c}) = \frac{2}{3} \vec{c} + \frac{1}{3} \vec{a}$. Como $V = \overline{AM} \cap \overline{BN}$ y $\vec{v} \parallel \vec{n}$, entonces $\vec{v} = \alpha \vec{n}$ y $\vec{v} = \beta \frac{1}{3} \vec{c} + (1 - \beta) \vec{a}$ con $\alpha, \beta \in [0, 1]$; así $\frac{2}{3} \alpha \vec{c} + \frac{1}{3} \alpha \vec{a} = \beta \frac{1}{3} \vec{c} + (1 - \beta) \vec{a}$, además \vec{a} y \vec{c} son linealmente independientes, por lo tanto $\frac{2}{3} \alpha = \frac{\beta}{3}$ y $\frac{1}{3} \alpha = 1 - \beta$, luego $\beta = \frac{6}{7}$ y $\alpha = \frac{3}{7}$.

$$\therefore \vec{v} = \alpha \vec{n} = \frac{32}{73} \vec{c} + \frac{31}{73} \vec{a} = \frac{1}{7} \vec{a} + \frac{2}{7} \vec{c}$$

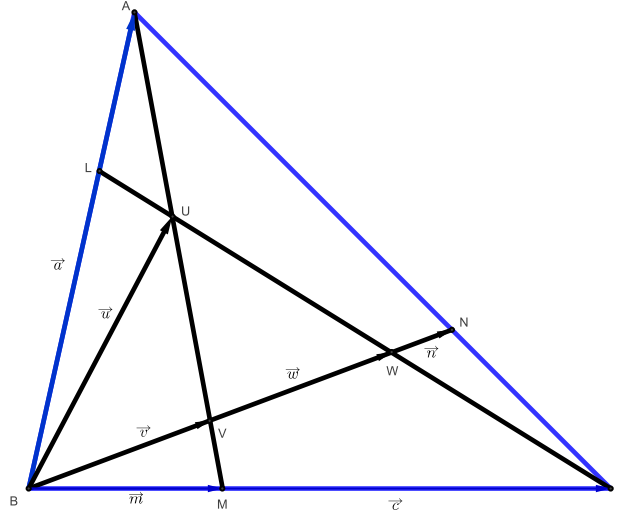


Figura 6

$$\begin{aligned}
 & \text{Aplicando el producto vectorial } \Delta BMV = \frac{1}{2} \|\vec{m} \times \vec{v}\| = \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{3} \vec{c} \times \left(\frac{1}{7} \vec{a} + \frac{2}{7} \vec{c} \right) \right\| \\
 & = \frac{1}{2} \left\| \left(\frac{1}{3} \vec{c} \times \frac{1}{7} \vec{a} \right) + \left(\frac{1}{3} \vec{c} \times \frac{2}{7} \vec{c} \right) \right\| = \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{21} \vec{c} \times \vec{a} + \frac{2}{21} \vec{c} \times \vec{c} \right\| \\
 & = \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{21} \vec{c} \times \vec{a} \right\| = \frac{1}{21} \left\| \frac{1}{2} \vec{c} \times \vec{a} \right\| = \frac{1}{21} \Delta ABC \quad \therefore \Delta BMV = \frac{1}{21} \Delta ABC. \\
 & \text{Análogamente } \Delta ALU = \frac{1}{21} \Delta ABC = \Delta CNW.
 \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta UVW = \Delta BMV + \Delta CNW + \Delta ALU = 3 \left(\frac{1}{21} \Delta ABC \right) = \frac{1}{7} \Delta ABC$$

□

Quinta demostración con congruencia: Variante de la segunda demostración reportada en [1].

Demostración. Sea $\Delta BMV = b$ y consideremos la figura 7, como $\Delta BMV = \Delta CNW = \Delta ALU$ entonces $\Delta UVW = 3b$. Además los triángulos $\triangle ABM \cong \triangle BCN \cong \triangle ALC$ son congruentes, entonces al restar triángulos congruentes (ALU , BMV , CNW respectivamente) obtenemos cuadriláteros congruentes, esto es, $\square LBVU \cong \square NAUM \cong \square MCWV$.

Por otro lado los triángulos BMV y VMC tienen la misma altura con respecto a las bases \overline{BM} y \overline{MC} , además $\overline{MC} = 2 \overline{BM} \quad \therefore \quad 2\Delta BMV = \Delta VMC$

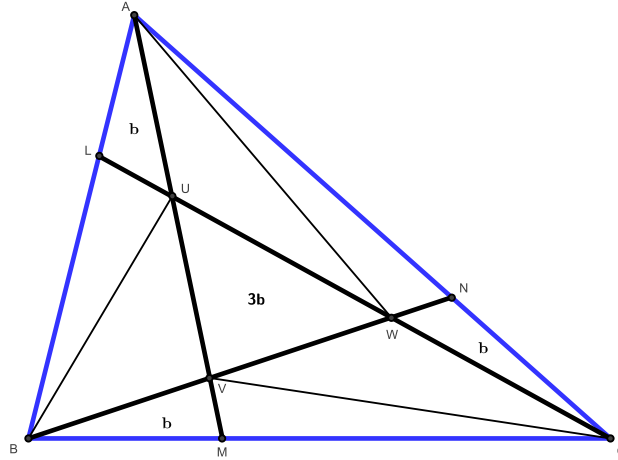


Figura 7

$\therefore \triangle VMC = 2b$. Análogamente $\triangle AWN = 2b = \triangle BUL$, por consiguiente

$$\triangle BVU = \triangle AUW = \triangle CWV = x.$$

Por otra parte los triángulos BMU y MCU tienen la misma altura con respecto a las bases \overline{BM} y \overline{MC} véase figura 8, además $\overline{MC} = 2 \overline{BM}$,

$$\therefore \triangle UMC = 2 \triangle UBM \quad \therefore 2b + x + 3b = 2(b + x) = 2b + 2x \quad \therefore x + 3b = 2x$$

por consiguiente $x = 3b \quad \therefore \triangle BVU = \triangle CWV = \triangle AUW = 3b$, luego

$$\triangle ABC = 3 \triangle BCN = 3(b + 2b + x + b) = 3(b + 2b + 3b + b) = 21b$$

$$\text{así } \triangle ABC = 21 \triangle BMV = 7(3 \triangle BMV) = 7 \triangle UVW \quad \therefore \triangle BMV = \frac{1}{7} \triangle ABC.$$

Además como consecuencias obtenemos lo siguiente:

$$\triangle UVW = \triangle BVU = \triangle AUW = \triangle CWV \quad \therefore \overline{AU} = \overline{UV}, \overline{BV} = \overline{VW}, \overline{CW} = \overline{WU}.$$

□

Sexta demostración con trigonometría y el teorema de Herón.

Demostración. Sean $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$ los lados del triángulo ABC , aplicando la ley de los cosenos al triángulo BCN y al triángulo ABC obtenemos $\overline{BN}^2 = a^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2 - 2a \left(\frac{b}{3}\right) \cos \varphi$

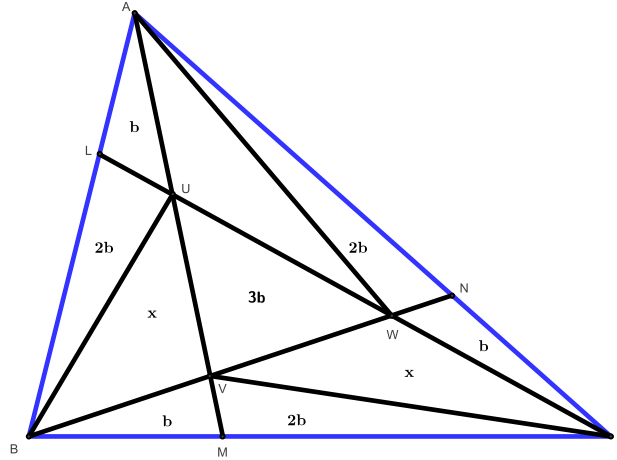


Figura 8

y

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi, \text{ así } \cos \varphi = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

$$\overline{BN}^2 = a^2 + \frac{b^2}{9} - \frac{2}{3}ab \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) = \frac{9a^2 + b^2 - 3(a^2 + b^2 - c^2)}{9}$$

$$\therefore \overline{BN}^2 = \frac{6a^2 - 2b^2 + 3c^2}{9} \text{ y como } \overline{BV} = \frac{3}{7} \overline{BN} \text{ entonces}$$

$$\overline{BV} = \frac{3}{7} \left(\frac{\sqrt{6a^2 - 2b^2 + 3c^2}}{3} \right) = \frac{\sqrt{6a^2 - 2b^2 + 3c^2}}{7}$$

ahora aplicamos de nuevo la ley de los cosenos al triángulo BCN y obtenemos

$$\overline{NC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BN}^2 - 2\overline{NC} \overline{BN} \cos \theta = a^2 + \frac{6a^2 - 2b^2 + 3c^2}{9} - 2a \sqrt{\frac{6a^2 - 2b^2 + 3c^2}{9}}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{a^2 + \frac{6a^2 - 2b^2 + 3c^2}{9} - \left(\frac{b}{3}\right)^2}{2a \sqrt{\frac{6a^2 - 2b^2 + 3c^2}{9}}} = \frac{\frac{15a^2 - 3b^2 + 3c^2}{9}}{2a \frac{\sqrt{6a^2 - 2b^2 + 3c^2}}{3}}$$

$$\text{así } \cos \theta = \frac{5a^2 - b^2 + c^2}{2a \sqrt{6a^2 - 2b^2 + 3c^2}} \quad \therefore \cos^2 \theta = \frac{(5a^2 - b^2 + c^2)^2}{4a^2(6a^2 - 2b^2 + 3c^2)}, \text{ además}$$

$$\text{sen } \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{(5a^2 - b^2 + c^2)^2}{4a^2(6a^2 - 2b^2 + 3c^2)}}, \text{ simplificando lo que aparece en la raíz}$$

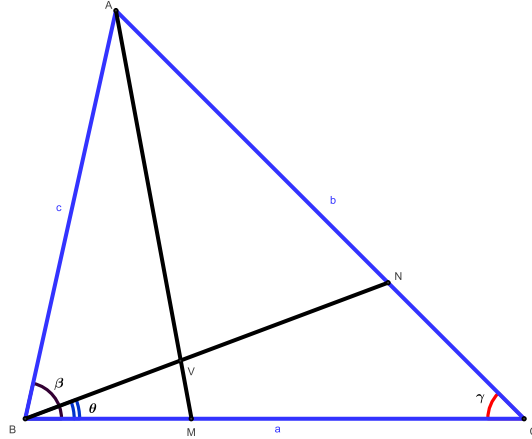


Figura 9

obtenemos:

$$\begin{aligned}
 k &= 1 - \frac{(5a^2 - b^2 + c^2)^2}{4a^2(6a^2 - 2b^2 + 3c^2)} = \frac{4a^2(6a^2 - 2b^2 + 3c^2) - (5a^2 - b^2 + c^2)^2}{4a^2(6a^2 - 2b^2 + 3c^2)} \\
 &= \frac{24a^4 - 8a^2b^2 + 12a^2c^2 - [(5a^2 + c^2)^2 - 2(5a^2 + c^2)b^2 + b^4]}{4a^2(6a^2 - 2b^2 + 3c^2)} \\
 &= \frac{24a^4 - 8a^2b^2 + 12a^2c^2 - (25a^4 + 10a^2c^2 + c^4) + 10a^2b^2 + 2b^2c^2 - b^4}{4a^2(6a^2 - 2b^2 + 3c^2)} \\
 &= \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4a^2(6a^2 - 2b^2 + 3c^2)}
 \end{aligned}$$

Por otra parte $-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$

$$\begin{aligned}
 &= (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) = [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2] \\
 &= (b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c) \\
 &= (a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c) \\
 &= 2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c) = 2s2(s-a)2(s-b)2(s-c) \\
 &= 16s(s-a)(s-b)(s-c) = 16\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}^2 = 16(\Delta ABC)^2 \text{ por el teorema de Herón,} \\
 &\text{con } a+b+c = 2s.
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{sen } \theta = \sqrt{\frac{16(\Delta ABC)^2}{4a^2(6a^2 - 2b^2 + 3c^2)}} = \frac{2\Delta ABC}{a\sqrt{6a^2 - 2b^2 + 3c^2}}$$

por consiguiente:

$$\Delta BMV = \frac{1}{2} \overline{BM} \overline{BV} \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{3}\right) \left(\frac{1}{7} \sqrt{6a^2 - 2b^2 + 3c^2}\right) \left(\frac{2 \Delta ABC}{a \sqrt{6a^2 - 2b^2 + 3c^2}}\right)$$

$$\therefore \Delta BMV = \frac{1}{21} \Delta ABC. \text{ Análogamente } \Delta ALU = \frac{1}{21} \Delta ABC = \Delta CNW.$$

$$\therefore \Delta UVW = \Delta BMV + \Delta CNW + \Delta ALU = 3 \left(\frac{1}{21} \Delta ABC\right) = \frac{1}{7} \Delta ABC$$

□

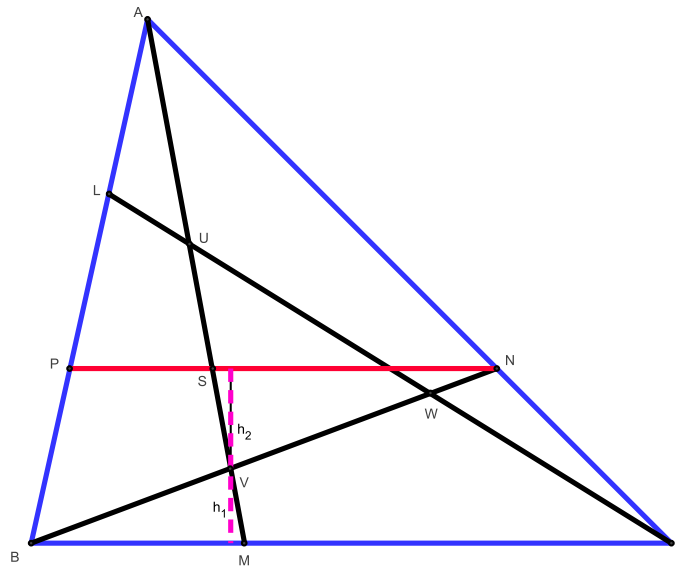


Figura 10

Séptima demostración: Primera generalización, es una variante a la de Villiers [4] con trigonometría y el teorema de Herón.

En esta demostración extendemos el resultado anterior, subdividiendo el lado \overline{BC} en n partes iguales con $n \geq 3$ y determinamos el ΔUVW en función del ΔABC . El razonamiento es análogo al caso $n = 3$ de la primera demostración.

Demostración. Trazamos una recta l paralela a \overline{BC} y que pase por N , con $l \cap \overline{AB} = P$ y $l \cap \overline{AM} = S$ $\therefore \Delta SVN \approx \Delta VMB$ véase figura 10.

Sean h_1 la altura del ΔVBM y h_2 la altura del ΔSVN con respecto a las bases \overline{BM} y \overline{SN} respectivamente. Como $\Delta SVN \approx \Delta VMB$, entonces

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\overline{BM}}{\overline{SN}} = \frac{\frac{1}{n} \overline{BC}}{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \overline{PN}} = \frac{\frac{1}{n} \overline{BC}}{\frac{n-1}{n} \left(\frac{n-1}{n} \overline{BC}\right)} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{(n-1)^2}{n^2}} = \frac{n}{(n-1)^2}$$

$\therefore \frac{h_2}{h_1} = \frac{(n-1)^2}{n}$, así $\frac{h_1+h_2}{h_1} = 1 + \frac{h_2}{h_1} = 1 + \frac{(n-1)^2}{n} = \frac{n^2-n+1}{n}$. Además $h_1+h_2 = \frac{1}{n}h$ donde h es la altura del triángulo ABC y por consiguiente

$$\frac{n^2-n+1}{n} = \frac{h_1+h_2}{h_1} = \frac{\frac{1}{n}h}{h_1}, \text{ así } h_1(n^2-n+1) = n\left(\frac{1}{n}h\right) \quad \therefore \quad h_1 = \frac{h}{n^2-n+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta_{BMV} &= \frac{\overline{BM} h_1}{2} = \frac{\frac{1}{n} \overline{BC} \frac{h}{n^2-n+1}}{2} = \frac{1}{n(n^2-n+1)} \frac{\overline{BC} h}{2} \\ &= \frac{1}{n(n^2-n+1)} \Delta_{ABC} \quad \therefore \quad \Delta_{BMV} = \frac{\Delta_{ABC}}{n(n^2-n+1)}. \end{aligned}$$

Análogamente $\Delta_{ALU} = \frac{\Delta_{ABC}}{n(n^2-n+1)} = \Delta_{CNW}$.

Por otra parte como $\Delta_{UVW} = \Delta_{ABM} + \Delta_{BCN} + \Delta_{ALC}$ y cada uno tiene la n -ésima parte del área del triángulo ABC , entonces $\Delta_{UVW} = 3 \frac{\Delta_{ABC}}{n}$

$$\therefore \Delta_{ABC} - \Delta_{UVW} = 3 \frac{\Delta_{ABC}}{n} - 3 \frac{\Delta_{ABC}}{n(n^2-n+1)}, \text{ luego}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{UVW} &= \left(\frac{n}{n} - \frac{3}{n} + \frac{3}{n(n^2-n+1)} \right) \Delta_{ABC} \\ &= \left[\frac{n(n^2-n+1) - 3(n^2-n+1) + 3}{n(n^2-n+1)} \right] \Delta_{ABC} = \left[\frac{n^3 - 4n^2 + 4n}{n(n^2-n+1)} \right] \Delta_{ABC} \\ &= \left[\frac{n(n^2 - 4n + 4)}{n(n^2 - n + 1)} \right] \Delta_{ABC} = \left[\frac{(n-2)^2}{n^2 - n + 1} \right] \Delta_{ABC} \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta_{UVW} = \frac{(n-2)^2}{n^2-n+1} \Delta_{ABC}$$

por consiguiente, si $n = 3$ entonces:

$$\Delta_{UVW} = \frac{(3-2)^2}{3^2-3+1} \Delta_{ABC} = \frac{1}{7} \Delta_{ABC}$$

Más aún, si $n = 4$ entonces

$$\Delta UVW = \frac{(4-2)^2}{4^2 - 4 + 1} \Delta ABC = \frac{4}{13} \Delta ABC$$

como puede verse en la siguiente figura.

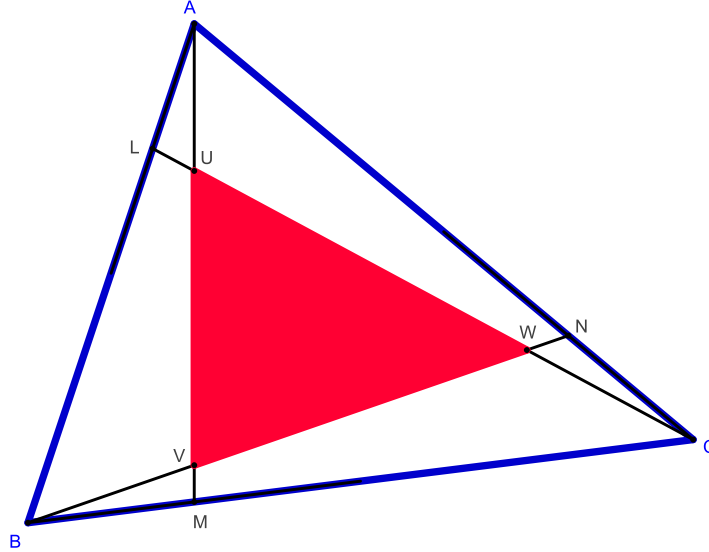


Figura 11

□

Octava demostración: con geometría afín Villiers [4].

Demostración. Sea ABC un triángulo equilátero ver figura 12 y $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = n$, con $\overline{BL} = \overline{AM} = \overline{CN} = 1$ y $\overline{LA} = \overline{MC} = \overline{NB} = n - 1$, entonces por la ley de los cosenos

$$\overline{LC}^2 = \overline{LB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \overline{LB} \overline{BC} \cos \angle LBC = 1 + n^2 - 2(1)n \cos(60^\circ) = 1 + n^2 - 2n \left(\frac{1}{2}\right) = n^2 - n + 1 \quad \therefore \quad \overline{LC}^2 = n^2 - n + 1, \text{ luego } \overline{LC} = \sqrt{n^2 - n + 1}.$$

Además los triángulos $CBL \approx BLU$ pues $\angle ULB = \angle CLB$ y $\angle UBL = \angle BCL$,

$$\therefore \frac{\overline{LU}}{\overline{BL}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}}, \text{ luego } \frac{\overline{LU}}{1} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - n + 1}}$$

Además

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{BU}}{\overline{CB}}, \text{ luego } \frac{1}{\sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{\overline{BU}}{n} \quad \therefore \quad \overline{BU} = \frac{\overline{CB}}{\sqrt{n^2 - n + 1}} = \overline{CV}$$

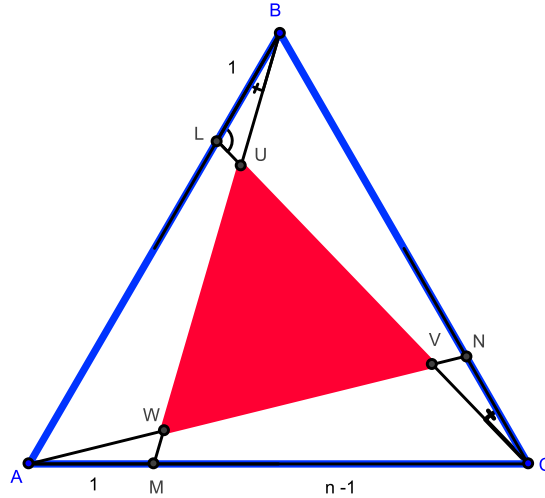


Figura 12

así $\overline{UV} = \overline{LC} - \overline{LU} - \overline{CV} = \sqrt{n^2 - n + 1} - \frac{1}{\sqrt{n^2 - n + 1}} - \frac{n}{\sqrt{n^2 - n + 1}}$

$= \frac{n^2 - n + 1 - 1 - n}{\sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{n^2 - 2n}{\sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{n(n - 2)}{\sqrt{n^2 - n + 1}}$ y por simetría el triángulo UVW es también un triángulo equilátero, cuyo lado mide $\frac{n(n - 2)}{\sqrt{n^2 - n + 1}} \left(\frac{1}{n}\right)$

$= \frac{n - 2}{\sqrt{n^2 - n + 1}}$ del lado del triángulo ABC ; por consiguiente

$$\Delta UVW = \frac{(n - 2)^2}{n^2 - n + 1} \Delta ABC$$

puesto que el teorema sólo involucra propiedades afines entre líneas y áreas y todo triángulo es afínmente equivalente a un triángulo equilátero [[2], p. 203], entonces el teorema de Feynman está demostrado. □

Más aún, el triángulo de Feynman puede generalizarse a un paralelogramo como lo señala Villiers [4] y lo presentamos en el siguiente teorema.

Teorema 1.3. Mazzanti [5]. *Sea $ABCD$ un paralelogramo y F, G, H, I los puntos que dividen a los lados del paralelogramo en n partes iguales, entonces $\Delta UVWT = \frac{(n - 1)^2}{n^2 + 1} \Delta ABCD$.*

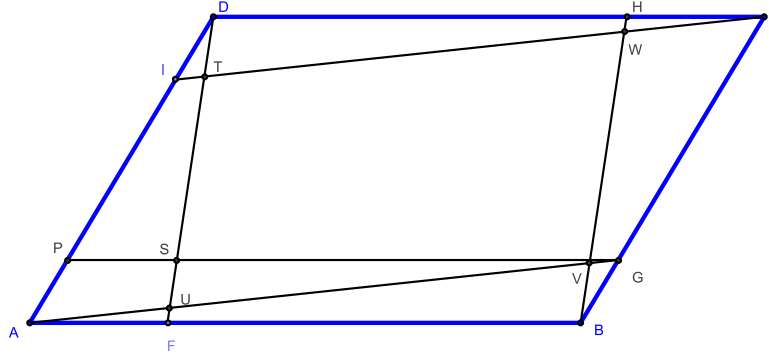


Figura 13

Demostración. Consideremos la figura 13, por hipótesis sabemos que $\overline{AF} = \frac{1}{n} \overline{AB}$, $\overline{BG} = \frac{1}{n} \overline{BC}$, $\overline{CH} = \frac{1}{n} \overline{CD}$ y $\overline{DI} = \frac{1}{n} \overline{DA}$; además $\overline{AG} \cap \overline{DF} = U$, $\overline{BH} \cap \overline{AG} = V$, $\overline{CI} \cap \overline{BH} = W$

y $\overline{DF} \cap \overline{CI} = T$; ahora trazamos una recta l paralela a \overline{AB} con $G \in l$ y calculemos $\Delta UVWT$.

Como $l \parallel \overline{AB}$, $\overline{DF} \cap l = S$ y $\overline{DA} \cap l = P$, entonces $\Delta AFU \approx \Delta UGS$ donde h_1 es la altura del triángulo AFU con base \overline{AF} y h_2 es la altura del ΔUGS con base \overline{SG} , por lo tanto

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\overline{AF}}{\overline{SG}} = \frac{\frac{1}{n} \overline{AB}}{\overline{SG}}. \text{ Además } \Delta DPS \approx \Delta DAF \text{ pues } l \parallel \overline{AB}, \text{ así } \frac{\overline{PS}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{DA}} = \frac{n-1}{n}, \text{ luego}$$

$$\overline{PS} = \overline{AF} \frac{n-1}{n} = \left(\frac{1}{n} \overline{AB}\right) \frac{n-1}{n} = \overline{AB} \frac{n-1}{n^2} \text{ y además, como } \overline{PG} = \overline{AB} \text{ entonces}$$

$$\frac{\overline{SG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PG} - \overline{PS}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PG}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{PS}}{\overline{AB}} = 1 - \frac{1}{\overline{AB}} \left(\overline{AB} \frac{n-1}{n^2}\right) = 1 - \frac{n-1}{n^2} = \frac{n^2 - n + 1}{n^2}$$

luego $\overline{SG} = \left(\frac{n^2 - n + 1}{n^2}\right) \overline{AB}$, por consiguiente

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\frac{1}{n} \overline{AB}}{\left(\frac{n^2 - n + 1}{n^2}\right) \overline{AB}} = \frac{\frac{1}{n} \overline{AB}}{\left(\frac{n^2 - n + 1}{n^2}\right) \overline{AB}} = \frac{n^2}{n(n^2 - n + 1)} = \frac{n}{n^2 - n + 1}$$

por otra parte $h_1 + h_2 = \frac{1}{n} h$, donde h es la altura del triángulo ABC con base \overline{AB} y como

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{n}{n^2 - n + 1}$, entonces $\frac{h_2}{h_1} + 1 = \frac{n^2 - n + 1}{n} + 1$; luego

$$\frac{h_1 + h_2}{h_1} = \frac{n^2 - n + 1 + n}{n} = \frac{n^2 + 1}{n} \quad \therefore \quad h_1 = \frac{n}{n^2 + 1}(h_1 + h_2) = \frac{n}{n^2 + 1}\left(\frac{1}{n} h\right)$$

luego $h_1 = \frac{h}{n^2 + 1}$. Por consiguiente:

$$\triangle AFU = \frac{1}{2} \overline{AF} h_1 = \frac{1}{2} \frac{\overline{AB}}{n} \frac{h}{n^2 + 1} = \frac{1}{2n(n^2 + 1)} (\overline{AB} h) = \frac{1}{2n(n^2 + 1)} \triangle ABCD$$

Análogamente $\triangle BGV = \triangle CGW = \triangle DIT = \frac{1}{2n(n^2 + 1)} \triangle ABCD$, además

$$\triangle ABG = \triangle BCH = \triangle CDI = \triangle DAF = \frac{1}{2n} \triangle ABCD$$

y $\triangle ABCD - \triangle UVWT = 4 \triangle ABG - 4 \triangle AFU$, luego entonces

$$\begin{aligned} \triangle UVWT &= \triangle ABCD - 4 \triangle ABG + 4 \triangle AFU \\ &= \triangle ABCD - 4 \left(\frac{1}{2n} \triangle ABCD \right) + 4 \left(\frac{1}{2n(n^2 + 1)} \triangle ABCD \right) \\ &= \triangle ABCD - \frac{2}{n} \triangle ABCD + \frac{2}{n(n^2 + 1)} \triangle ABCD \\ &= \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n(n^2 + 1)} \right) \triangle ABCD = \left(\frac{n(n^2 + 1) - 2(n^2 + 1) + 2}{n(n^2 + 1)} \right) \triangle ABCD \\ &= \left(\frac{n^3 + n - 2n^2 - 2 + 2}{n(n^2 + 1)} \right) \triangle ABCD = \left(\frac{n(n^2 - 2n + 1)}{n(n^2 + 1)} \right) \triangle ABCD \\ &= \left(\frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 + 1} \right) \triangle ABCD = \frac{(n - 1)^2}{n^2 + 1} \triangle ABCD \\ &\therefore \triangle UVWT = \frac{(n - 1)^2}{n^2 + 1} \triangle ABCD \end{aligned}$$

□

Casos particulares:

- 1) si $n = 2$ entonces $\triangle UVWT = \frac{1}{5} \triangle ABCD$
- 2) si $n = 3$ entonces $\triangle UVWT = \frac{2}{5} \triangle ABCD$

Novena demostración: Dada por Cook y Wood [1] con el teorema de Menelao.

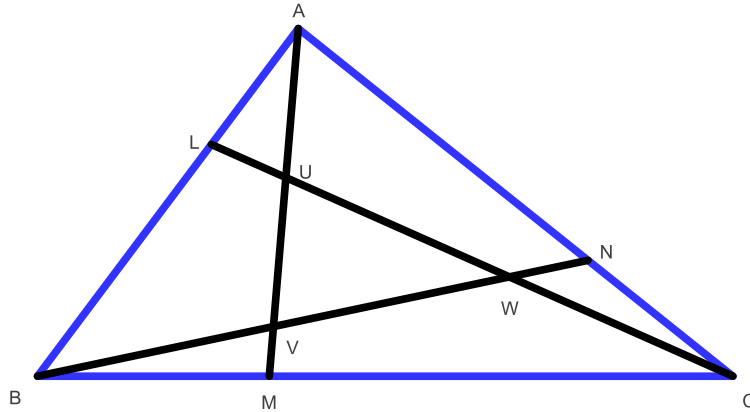


Figura 14: triángulo de Feynman

Demostración. Aplicando el teorema de Menelao al triángulo CAM y la recta \overline{NB} tenemos que

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} \frac{\overline{AV}}{\overline{VM}} \frac{\overline{MB}}{\overline{BC}} = -1, \text{ luego } \frac{1}{2} \frac{\overline{AV}}{\overline{VM}} \frac{1}{-3} = -1, \text{ así } \frac{\overline{AV}}{-6\overline{VM}} = -1 \quad \therefore \overline{AV} = 6\overline{VM}$$

y $\overline{AV} + \overline{VM} = 6\overline{VM} + \overline{VM}$, luego $\overline{AM} = 7\overline{VM}$. Además $\triangle AMB = \frac{1}{3} \triangle ABC$ y

$$\triangle AVB = \frac{6}{7} \triangle AMB = \frac{6}{7} \left(\frac{1}{3} \triangle ABC \right) = \frac{2}{7} \triangle ABC \quad \therefore \triangle AMB = \frac{2}{7} \triangle ABC.$$

Análogamente $\triangle BWC = \triangle CUA = \frac{2}{7} \triangle ABC$ y por consiguiente,

$$\triangle AVB + \triangle BWC + \triangle CUA = \frac{6}{7} \triangle ABC \quad \therefore \triangle UVW = \frac{1}{7} \triangle ABC$$

□

Décima demostración: Sin palabras con GeoGebra.

Agradecimientos

Agradezco al árbitro sus valiosos comentarios y sugerencias para este trabajo.

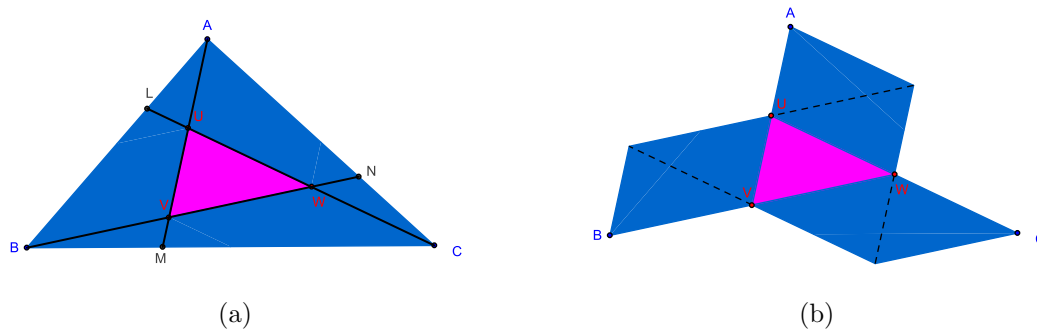


Figura 15: triángulo de Feynman

Bibliografía

- [1] R.J. Cook, G.V. Wood, *Feynman's triangle*, The Mathematical Gazette. 88 (July 2004), 299-302.
- [2] H.S.M. Coxeter, *Fundamentos de geometría*, Limusa, México, 1971.
- [3] M. De Villiers, *Feedback: Feynman's triangle*, The Mathematical Gazette. 89 (November 2005), 107.
- [4] M. De Villiers, *Feynman's triangle: Some Feedback and More* [http: mysite.mweb.co.za/residents/profmd/feynman.pdf](http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/feynman.pdf).
- [5] G. Mazzanti, V. Roselli and L. Tomasi, *Il triangolo di Feynman*, Archimede. 1/2012 (Gennaio-Marzo 2012), 3-18.

Universidad Autónoma de la Ciudad de México, UACM
 Fray Servando Teresa de Mier 92 y 99, Colonia Centro,
 México, D. F. C.P. 06080.
 Facultad de Ciencias, UNAM
 Circuito Exterior S/N, Cd. Universitaria,
 México, D. F. C.P. 04510.
amersen@yahoo.com.mx

Topología

Capítulo 6

G -fibraciones regulares

Alexander Bykov, Raúl Juárez Flores, Aura Lucina Kantún Montiel
FCFM, BUAP

Resumen

En este trabajo introducimos el concepto de una G -fibración regular. Mostramos que, para cada grupo compacto G , las siguientes proyecciones naturales son G -fibraciones regulares: $G/K \rightarrow G/H$ para subgrupos cerrados H y K de G tales que $K \subset H$ y G/K es metrizable; $E \rightarrow E/K$ si E es un G -espacio metrizable con un sólo tipo de órbitas y K es un subgrupo normal cerrado de G .

1. Introducción

En la topología equivariante, en general, se estudian los G -espacios y las G -funciones. Dentro de la teoría equivariante de homotopías las G -fibraciones, esto es, las G -funciones que tienen la propiedad de levantamiento de G -homotopías con respecto a todos los G -espacios, juegan un papel tan importante como las fibraciones de Hurewicz lo hacen en la teoría homotópica usual.

En el presente trabajo, introducimos el concepto de G -fibración regular, el cual puede considerarse como una modificación del concepto de G -fibración de Hurewicz debido a que tales G -fibraciones tienen una propiedad de levantamiento más fuerte que la de las G -fibraciones de Hurewicz, definida para la clase de los G -espacios metrizables.

Estas G -fibraciones regulares pueden ser caracterizadas por medio de sus G -funciones asociadas, descritas en la sección 5, de la siguiente manera: una G -función $p : E \rightarrow B$ es una G -fibración regular si y sólo si la G -función asociada $q : E^I \rightarrow \text{coCyl}(p)$ tiene la propiedad de levantamiento derecho con respecto a los G -encajes $A \hookrightarrow X$.

Como una herramienta importante en la demostración de los resultados principales, se introducen los conceptos de cuadrados G -fibrados y G -fibrados regulares, cuya importancia radica en el hecho de que el límite de tales cuadrados será G -fibración y G -fibración regular, respectivamente.

Las principales aportaciones son el Teorema 7.2 en el que demostramos que, al igual que las fibraciones usuales, las G -fibraciones regulares pueden caracterizarse de manera local; el Teorema 8.3 en el que veremos que si H y K son subgrupos de un grupo compacto G , $K \subset H$, donde el espacio cociente G/K es metrizable, la proyección natural $G/K \rightarrow G/H$ es una G -fibración

regular; y el Teorema 8.5 que presenta la proyección orbital $E \rightarrow E/K$ como una G -fibración regular, donde E es un G -espacio metrizable con un sólo tipo de órbitas y K un subgrupo normal de G .

Con estos dos últimos Teoremas, generalizamos el hecho conocido de que ambas G -funciones son G -fibraciones de Hurewicz cuando el grupo actuante G es compacto de Lie.

2. Preliminares

Con la letra G siempre denotaremos un grupo compacto de Hausdorff. Las definiciones básicas y los resultados fundamentales de la teoría de G -espacios (también conocida como teoría de grupos topológicos de transformaciones) se pueden encontrar en [5], [11], [7], [8] y [9]. Sin embargo, para beneficio del lector, reproduciremos a continuación los conceptos que emplearemos a lo largo del presente trabajo.

Un G -espacio es un espacio topológico X provisto de una acción (izquierda) continua $\cdot : G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$, de G en X (por practicidad escribiremos gx en vez de $g \cdot x$). Un subconjunto $A \subset X$ se llama G -invariante o G -subconjunto si $ga \in A$ para todo $g \in G$ y $a \in A$. De esta manera, si X es un G -espacio metrizable y A su G -subconjunto cerrado, diremos que (X, A) es un G -par metrizable.

Una G -función es una función continua $f : X \rightarrow Y$, donde X y Y son G -espacios, tal que $f(gx) = gf(x)$, para cada $(g, x) \in G \times X$; si f es un homeomorfismo, diremos que es un G -homeomorfismo y, en este caso, decimos que X y Y son G -equivalentes. Los G -espacios y las G -funciones forman una categoría que denotamos por G -TOP. En adelante, trabajaremos en esta categoría.

Sean X y Y dos G -espacios. Una homotopía $F : X \times I \rightarrow Y$, donde $I = [0, 1]$, se llama G -homotopía si es una G -función considerando $X \times I$ con la acción $g \cdot (x, t) = (gx, t)$. Diremos que la G -homotopía F es relativa a un G -subconjunto $A \subset X$ si $F(a, t) = F(a, 0)$ para cada $a \in A$ y $t \in I$.

Una función continua $\varphi : X \rightarrow I$ se llama G -invariante, si $\varphi(gx) = \varphi(x)$ para cada $(g, x) \in G \times X$.

Sea H un subgrupo cerrado de G , el espacio cociente $G/H = \{gH \mid g \in G\}$, es un G -espacio con la acción $g \cdot g'H = gg'H$; y la proyección natural $q : G/K \rightarrow G/H$, $gK \mapsto gH$, donde $K \subset H$, es una G -función.

Sea X un G -espacio y sea $x \in X$, el subgrupo $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ se conoce como grupo de isotropía de x y al espacio $G(x) = \{gx \mid g \in G\}$ se le llama G -órbita de x . Se sabe que $G(x)$ es G -equivalente a G/G_y para cada $y \in G(x)$.

Un G -espacio X tiene un sólo tipo de órbitas (H) si los grupos de isotropía de todos sus puntos

están en la clase conjugada de H , es decir, si para cada $x \in X$, existe $g \in G$ tal que $G_x = gHg^{-1}$. En este caso cada órbita es G -equivalente a G/H .

Dado un G -espacio X , el conjunto de todas sus órbitas equipado con la topología cociente, se conoce como *espacio orbital de X* y se denota por X/G . La proyección natural $\pi_X : X \rightarrow X/G$ (definida por $\pi_X(x) = G(x)$) se llama *proyección G -orbital* y es una G -función considerando X/G como un G -espacio con la acción trivial de G .

Si $f : X \rightarrow Y$ es una G -función, entonces f induce una única función continua $f/G : X/G \rightarrow Y/G$, tal que $f/G \circ \pi_X = \pi_Y \circ f$. Claramente, f/G está definida por $(f/G)(G(x)) = G(f(x))$.

Por un espacio G -ANE entendemos un G -extensor absoluto de vecindades equivariante para la clase de todos los G -espacios metrizable. Así un G -espacio E es un G -ANE si para cualquier G -par metrizable (X, A) , cada G -función $f : A \rightarrow E$ se puede extender a una G -función $\bar{f} : U \rightarrow E$, $\bar{f}|_A = f$, para alguna vecindad G -invariante U de A en X .

De manera similar, el concepto de espacio G -ANR se define como una versión equivariante de un retracts absoluto de vecindades. En [1, Theorem 14] se demuestra que, para la clase de G -espacios metrizable, los espacios G -ANR poseen la misma propiedad extensorial que los espacios G -ANE. Es decir, si Y es un G -espacio metrizable, entonces Y es un G -ANR si y sólo si Y es un G -ANE.

Una G -función $p : E \rightarrow B$ se llama G -AE-mapeo si para cada G -par metrizable (X, A) y para cada diagrama conmutativo de G -funciones

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & E \\
 \downarrow i & & \downarrow p \\
 X & \xrightarrow{F} & B
 \end{array} \tag{1}$$

donde i es un encaje, existe un relleno $X \rightarrow E$ (es decir, una G -función $\tilde{F} : X \rightarrow E$ tal que $\tilde{F}i = f$ y $p\tilde{F} = F$).

Un subgrupo cerrado H de un grupo compacto G se llama *grande* si G/H es G -ANR o, equivalentemente, si existe un subgrupo normal cerrado N de G tal que $N \subseteq H$ y G/N es un grupo de Lie ([2, Proposition 2.4]). Por ejemplo, cada subgrupo cerrado de un grupo compacto de Lie es grande ([9, Corollary 1.6.7]).

3. G -fibraciones y G -fibraciones regulares

Una G -función $p : E \rightarrow B$ se llama G -fibración si tiene la *propiedad de levantamiento de homotopías equivariantes* (PLHE) con respecto a cada G -espacio X (ver [11, p. 53]). Recordemos

que p tiene la PLHE con respecto a X si para cada diagrama conmutativo de G -funciones

$$\begin{array}{ccc}
 x & & X \xrightarrow{f} E \\
 \downarrow & & \downarrow \partial_0 \\
 (x, 0) & & X \times I \xrightarrow{F} B
 \end{array}
 \quad (2)$$

existe un relleno $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E$.

Cabe mencionar que las G -fibraciones surgen de una forma natural en la teoría de G -espacios en virtud del siguiente hecho.

Proposición 3.1. ([4, Proposition 3.1]) *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto de Lie G . Entonces cada G -función $E \rightarrow G/H$ es una G -fibración.*

Observación 3.2. Supongamos que la G -homotopía F en el diagrama (2) es relativa a un G -subconjunto A de X , para el cual existe una función G -invariante $\varphi : X \rightarrow I$ tal que $\varphi^{-1}(0) = A$. En este caso, si p es una G -fibración, entonces existe un relleno $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E$ para (2) que también es una G -homotopía relativa a A .

Para ver que la Observación 3.2 es cierta, modifiquemos la G -homotopía F como sigue:

$$F'(x, t) = \begin{cases} F(x, t/\varphi(x)) & \text{si } t \leq \varphi(x) \text{ y } x \notin A \\ F(x, 1) & \text{si } t \geq \varphi(x) \end{cases}$$

Es fácil ver que F' es una G -función para la cual $F'\partial_0 = pf$. Como p es una G -fibración, existe una G -homotopía $\hat{F} : X \times I \rightarrow E$ tal que $\hat{F}\partial_0 = f$ y $p\hat{F} = F'$. Ahora definamos la G -homotopía $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E$ por $\tilde{F}(x, t) = \hat{F}(x, t\varphi(x))$. Una verificación directa muestra que \tilde{F} es el relleno deseado.

Si (X, A) es un G -par metrizable entonces, como G es compacto, X admite una métrica invariante d , esto es, una métrica que satisface $d(gx, gx') = d(x, x')$ para cada $x, x' \in X$ y $g \in G$ (véase [8, Teorema 5.22]). Además, se puede elegir d tal que $\text{diam}(X) \leq 1$. Claramente, la función $\varphi : X \rightarrow I$, dada por $\varphi(x) = d(x, A)$, satisface $\varphi^{-1}(0) = A$. Concluimos que la Observación 3.2 es aplicable a G -pares metrizable.

Definición 3.3. Decimos que una G -función $p : E \rightarrow B$ es una G -fibración regular si para cada G -par metrizable (X, A) y cada diagrama conmutativo de G -funciones

$$\begin{array}{ccc}
 X \times \{0\} \cup A \times I & \xrightarrow{f} & E \\
 \downarrow & & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{F} & B
 \end{array}
 \quad (3)$$

existe una G -homotopía $X \times I \rightarrow E$ como relleno del diagrama.

La demostración del siguiente Teorema será presentada al final de la Sección 5.

Teorema 3.4. *Sea $p : E \rightarrow B$ una G -función de espacios G -ANE. Si p es una G -fibración, entonces p es una G -fibración regular.*

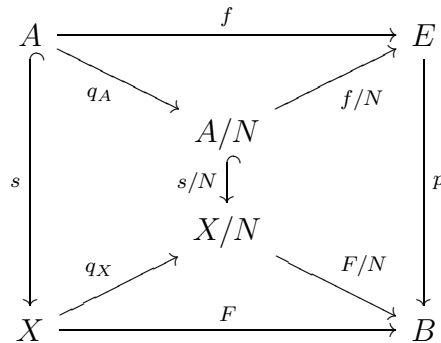
Sea N un subgrupo normal cerrado de G . Si X es un G -espacio, siempre podemos considerar el espacio N -orbital X/N como un G/N -espacio con la acción del grupo G/N dada por $gN \cdot N(x) = N(gx)$.

Por otro lado, si X es un G/N -espacio, puede también ser considerado como G -espacio de la siguiente manera. Si $*$ es la acción de G/N en X , entonces G actúa en X con la acción dada por $g \cdot x = gN * x$. Naturalmente, cada G/N -función de G/N -espacios puede ser también considerada como una G -función.

Proposición 3.5. *Sea N un subgrupo normal cerrado de un grupo compacto G . Entonces:*

- (a) *Si p es una G/N -fibración, entonces p es una G -fibración.*
- (b) *Si p es una G/N -fibración regular, entonces p es una G -fibración regular.*
- (c) *Si E es un G/N -ANE, entonces E es un G -ANE.*

Demostración. Sea $p : E \rightarrow B$ una G/N -función, y sea $s : A \hookrightarrow X$ un G -encaje cerrado. A lo largo de la demostración consideraremos el siguiente diagrama conmutativo de G -funciones.



(a). Sea $X = A \times I$ y $s(a) = (a, 0)$. Claramente, podemos identificar $(A \times I)/N$ con $(A/N) \times I$. Si p es una G/N -fibración, entonces existe una G/N -función $\bar{F} : (A/N) \times I \rightarrow E$, como relleno del diagrama anterior. Así, la G -función dada por $\tilde{F} = \bar{F} \circ q_X$ es un relleno del diagrama, y por lo tanto, p es una G -fibración.

(b). Sea Y un subconjunto cerrado G -invariante de un G -espacio Z . Sea $A = Z \times \{0\} \cup Y \times I$ y $X = Z \times I$. Como $(Z \times \{0\} \cup Y \times I)/N$ puede identificarse con $Z/N \times \{0\} \cup Y/N \times I$ y p es una

G/N -fibración regular, repitiendo los pasos del inciso anterior, obtenemos la G -función $\tilde{F} : X \rightarrow E$ deseada.

(c). Para demostrar que E es G -ANE, necesitamos únicamente la parte superior del diagrama, de manera que podemos suponer que $B = *$ con la acción trivial de G . Como E es G/N -ANE, existe una vecindad G/N -invariante U de A/N en X/N y una G/N -función $\bar{f} : U \rightarrow E$ tal que $\bar{f}|_{A/N} = f/N$. Luego, $V = q_X^{-1}(U)$ es una vecindad G -invariante de A en X y $(\bar{f} \circ q_X)|_V : V \rightarrow E$ es una G -extensión de f , lo que prueba que E es G -ANE. \square

4. Cuadrados pull-back, G -fibrados y G -AE

Recordemos que un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 E' & \xrightarrow{f'} & E \\
 p' \downarrow & & \downarrow p \\
 B' & \xrightarrow{f} & B
 \end{array} \tag{4}$$

en una categoría \mathcal{C} se llama *diagrama pull-back* si para cada objeto Z de \mathcal{C} y cada par de morfismos $u : Z \rightarrow E$ y $v : Z \rightarrow B'$ tales que $pu = fv$, existe un único morfismo $q : Z \rightarrow E'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z & & \\
 & & \swarrow & \searrow & \\
 & & q & u & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & E' & \xrightarrow{f'} & E \\
 & & p' \downarrow & & \downarrow p \\
 & & B' & \xrightarrow{f} & B
 \end{array} \tag{5}$$

En este caso también se dice que el objeto E' (junto con los morfismos f' y p') es *el pull-back del diagrama* $E \xrightarrow{p} B \xleftarrow{f} B'$. Claramente, el pull-back, si existe, es único salvo isomorfismo.

En las categorías TOP y $G-TOP$ el pull-back de $E \xrightarrow{p} B \xleftarrow{f} B'$ existe y puede describirse explícitamente como el siguiente espacio:

$$E' = \{(x, b') \in E \times B' \mid p(x) = f(b')\} \tag{6}$$

(equipado, en $G-TOP$, con la acción diagonal de G : $g \cdot (x, b') = (gx, gb')$) con las proyecciones naturales $f' : E' \rightarrow E$ y $p' : E' \rightarrow B'$.

En adelante, emplearemos de manera recurrente el siguiente hecho, el cual se desprende fácilmente de (6): *un diagrama conmutativo (4) de G -funciones es un cuadrado pull-back en $G\text{-TOP}$ si y sólo si éste es un cuadrado pull-back en TOP .*

Sea $p : E \rightarrow B$ una G -función. El *cocilindro* de p denotado por $\text{coCyl}(p)$ se define como el pull-back del diagrama $E \xrightarrow{p} B \xleftarrow{\pi_B^0} B^I$, donde B^I es el espacio de todas las trayectorias continuas $\omega : I \rightarrow B$ (con la topología compacto-abierta y equipado con la acción de G dada por $(g \cdot \omega)(t) = g\omega(t)$, $t \in I$) y $\pi_B^0(\omega) = \omega(0)$. Explícitamente,

$$\text{coCyl}(p) = \{(x, \omega) \in E \times B^I \mid p(x) = \omega(0)\}$$

con las proyecciones $\tilde{\pi} : \text{coCyl}(p) \rightarrow E$, $(x, \omega) \mapsto x$ y $\tilde{p} : \text{coCyl}(p) \rightarrow B^I$, $(x, \omega) \mapsto \omega$.

El siguiente resultado nos da muchos ejemplos de cuadrados pull-back en la categoría $G\text{-TOP}$.

Proposición 4.1. *Sean K y N subgrupos cerrados de un grupo compacto G tales que $KN = NK$. Entonces el diagrama de proyecciones naturales*

$$\begin{array}{ccc} G/(K \cap N) & \xrightarrow{\pi_N} & G/N \\ \pi_K \downarrow & & \downarrow \beta_K \\ G/K & \xrightarrow{\beta_N} & G/KN \end{array} \tag{7}$$

es un diagrama pull-back.

La condición $KN = NK$ es necesaria y suficiente para tener KN como un subgrupo de G . Claramente, esta condición se cumple si alguno de los subgrupos K o N es normal.

Demostración. Sea P el pull-back del diagrama $G/N \xrightarrow{\beta_K} G/KN \xleftarrow{\beta_N} G/K$, dado por

$$P = \{(xK, yN) \in G/K \times G/N \mid xKN = yKN\}.$$

Debemos mostrar que la función $\varphi : G/(K \cap N) \rightarrow P$ definida por $\varphi(x(K \cap N)) = (xK, xN)$ es un homeomorfismo. Claramente, φ está bien definida y es continua, siendo la única función inducida por las proyecciones π_K y π_N . Además φ es inyectiva, pues la igualdad $(xK, xN) = (yK, yN)$ significa que $y^{-1}x \in K \cap N$ así que $x(K \cap N) = y(K \cap N)$.

Veamos que φ es sobreyectiva. Supongamos que $(xK, yN) \in P$. Observemos que la igualdad $xKN = yKN$ implica que $xK \cap yN \neq \emptyset$; en efecto, si $xK \cap yN = \emptyset$, entonces $xKN \cap yN = \emptyset$, pero por otro lado, tenemos $xKN = yKN \supseteq yN$; lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe $z \in xK \cap yN$ y tenemos $z = xk = yn$ para alguna $k \in K$ y $n \in N$. Esto es, $\varphi(z(K \cap N)) = (xK, yN)$, ya que $zK = xkK = xK$ y $zN = ynN = yN$.

Por lo tanto, φ es un homeomorfismo, ya que es una función biyectiva y continua de espacios compactos. □

Los conceptos presentados en la siguiente definición generalizan el concepto de un cuadrado pull-back. Estos conceptos serán de utilidad para la demostración de los resultados principales del presente trabajo.

Definición 4.2. Un diagrama conmutativo (4) de G -funciones se llama *cuadrado G -fibrado* (*cuadrado G -fibrado regular*, *cuadrado G -AE*) si en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 E' & & & & \\
 & \searrow^{f'} & & & \\
 & & q & & \\
 & & \searrow & & \\
 & & & P & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\
 & \searrow^{p'} & & \downarrow \tilde{p} & & \downarrow p \\
 & & & B' & \xrightarrow{f} & B
 \end{array} \tag{8}$$

donde el cuadrado interno es pull-back, la función inducida q es una G -fibración (una G -fibración regular, un G -AE-mapeo, respectivamente).

Consideremos la categoría $Map(G-TOP)$ cuyos objetos son G -funciones y cuyos morfismos $p' \rightarrow p$ son pares (f', f) de G -funciones tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 E' & \xrightarrow{f'} & E \\
 p' \downarrow & & \downarrow p \\
 B' & \xrightarrow{f} & B
 \end{array} \tag{9}$$

es conmutativo. De aquí en adelante por *un morfismo* entendemos un morfismo en $Map(G-TOP)$. Así, cada cuadrado conmutativo(9) de G -funciones se puede tratar como un morfismo y viceversa.

Se dice que un morfismo $\varpi : p' \rightarrow p$ tiene *la propiedad de levantamiento derecho* (PLD) respecto a un morfismo $\sigma : s \rightarrow s'$ si para cada diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 s & \xrightarrow{\mu} & p' \\
 \sigma \downarrow & & \downarrow \varpi \\
 s' & \xrightarrow{\nu} & p
 \end{array}$$

existe un morfismo $\tilde{\nu} : s' \rightarrow p'$ como un relleno. Diremos también que ϖ tiene *la PLD respecto a una familia de morfismos* Σ , si ϖ tiene la PLD respecto a cada $\sigma \in \Sigma$.

Consideremos las siguientes familias \mathcal{F} , \mathcal{R} y \mathcal{E} de morfismos:

- \mathcal{F} consta de todos los morfismos $(\partial_0, id_{X \times I}) : \partial_0 \rightarrow id_{X \times I}$, donde X es un G -espacio y el encaje $\partial_0 : X \hookrightarrow X \times I$ se define por $\partial_0(x) = (x, 0)$.
- \mathcal{R} consta de todos los morfismos $(s, id_{X \times I}) : s \rightarrow id_{X \times I}$, donde (X, A) es un G -par metrizable y $s : X \times \{0\} \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$ es un encaje.
- \mathcal{E} consta de todos los morfismos $(i, id_X) : i \rightarrow id_X$, donde (X, A) es un G -par metrizable y $i : A \hookrightarrow X$ es un encaje.

Proposición 4.3. *Sea $\varpi : p' \rightarrow p$ un morfismo en $Map(G-TOP)$. Entonces ϖ es un cuadrado G -fibrado (G -fibrado regular, G -AE) si y sólo si ϖ tiene la PLD respecto a \mathcal{F} (a \mathcal{R} , a \mathcal{E} , respectivamente).*

Demostración. Probaremos la proposición sólo para la familia \mathcal{E} ; para \mathcal{F} y \mathcal{R} se prueba análogamente.

Sea $\varpi = (f', f) : p' \rightarrow p$ un morfismo dado por medio del cuadrado (9). Sea

$$\begin{array}{ccc}
 i & \xrightarrow{(u', u)} & p' \\
 (i, id_X) \downarrow & & \downarrow \varpi \\
 id_X & \xrightarrow{(v', v)} & p
 \end{array} \tag{10}$$

un diagrama conmutativo en $Map(G-TOP)$. En su forma “desplegada” este diagrama se ve como

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & \xrightarrow{u'} & E' \\
 & \swarrow i & \downarrow & & \swarrow p' \\
 X & \xrightarrow{u} & B' & & \downarrow f' \\
 \downarrow id_X & & \downarrow i & & \downarrow f \\
 & \swarrow id_X & X & \xrightarrow{v'} & E \\
 & \downarrow id_X & \downarrow & & \swarrow p \\
 X & \xrightarrow{v} & B & &
 \end{array} \tag{11}$$

\Rightarrow . Supongamos que está dado el diagrama (10), donde X es un G -espacio metrizable y $i : A \hookrightarrow X$ es un encaje para algún G -subconjunto cerrado A de X . Debemos encontrar un relleno $id_X \rightarrow p'$.

Consideremos el diagrama conmutativo (8), donde el cuadrado interno es pull-back y la G -función $q : E' \rightarrow P$ es, por hipótesis, un G -AE-mapeo.

Como $fu = v = pv'$ (véase el diagrama (11)) y P (junto con las proyecciones \tilde{f} y \tilde{p}) es el pull-back de $E \xrightarrow{p} B \xleftarrow{f} B'$, existe una G -función única $h : X \rightarrow P$ tal que $\tilde{p}h = u$ y $\tilde{f}h = v'$. Para esta G -función tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u'} & E' \\ \downarrow i & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{h} & P \end{array} \quad (12)$$

(es así ya que las composiciones de las G -funciones $hi, qu' : A \rightarrow P$ con las proyecciones \tilde{p} y \tilde{f} coinciden). Como q es un G - AE -mapeo, hay un relleno del diagrama (12), es decir, una G -función $\tilde{h} : X \rightarrow E'$ tal que $q\tilde{h} = h$ y $\tilde{h}i = u'$. Notemos que el par (\tilde{h}, u) representa un morfismo $id_X \rightarrow p'$ y, además, es un relleno para el diagrama (10).

\Leftarrow . Supongamos que está dado el diagrama (12), donde q procede del diagrama (8) y (X, A) es un G -par metrizable. Debemos encontrar un relleno $X \rightarrow E'$.

Definamos las G -funciones $u : X \rightarrow B'$, $v' : X \rightarrow E$ y $v : X \rightarrow B$ como sigue: $u = \tilde{p}h$, $v' = \tilde{f}h$ (véase el diagrama (8)) y $v = pv'$. Para las funciones elegidas se tiene el diagrama conmutativo (11), o bien, (10). Como ϖ tiene la PLD respecto a \mathcal{R} , existe un relleno $(\tilde{h}, \tilde{u}) : id_X \rightarrow p'$ del diagrama (10) y, por lo tanto, las G -funciones $\tilde{h} : X \rightarrow E'$ y $\tilde{u} : X \rightarrow B'$ son rellenos del diagrama (11). De inmediato obtenemos que $\tilde{h}i = u'$. Además, como $\tilde{p}(q\tilde{h}) = p'\tilde{h} = \tilde{u}id_X = u = \tilde{p}h$ y $\tilde{f}(q\tilde{h}) = \tilde{f}'\tilde{h} = v' = \tilde{f}h$, concluimos que $q\tilde{h} = h$. Por consiguiente, \tilde{h} es un relleno del diagrama (12). \square

Diremos que una G -función p , es decir, un objeto de $Map(G-TOP)$, es un *extensor respecto a la familia* Σ si para cada morfismo $\sigma : s \rightarrow s'$ de Σ y cada morfismo $\mu : s \rightarrow p$, existe un morfismo $\tilde{\mu} : s' \rightarrow p$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} s & \xrightarrow{\mu} & p \\ \sigma \downarrow & \nearrow \tilde{\mu} & \\ s' & & \end{array}$$

Es fácil ver que p es un extensor respecto a la familia Σ si y sólo si el morfismo $p \rightarrow id_{pt}$ tiene la PLD respecto a Σ , donde pt es un conjunto que consta de sólo un punto (con la acción trivial de G). Observemos también que $p \rightarrow id_{pt}$ es un cuadrado G -fibrado (G -fibrado regular, G - AE) si y sólo si p es una G -fibración (respectivamente, G -fibración regular, G - AE -mapeo). Por consiguiente, obtenemos la siguiente consecuencia de la Proposición 4.3:

Corolario 4.4. *Sea $p : E \rightarrow B$ una G -función. Entonces p es una G -fibración (G -fibración regular, G - AE -mapeo) si y sólo si p es un extensor respecto a \mathcal{F} (a \mathcal{R} , a \mathcal{E} , respectivamente).*

La Proposición 4.3 y el Corolario 4.4 nos permiten probar fácilmente las siguientes dos proposiciones.

Proposición 4.5. *Supongamos que el diagrama (9) es un cuadrado G -fibrado (G -fibrado regular, G -AE). Si p es una G -fibración (una G -fibración regular, un G -AE-mapeo), entonces p' es también una G -fibración (una G -fibración regular, un G -AE-mapeo, respectivamente).*

Demostración. Probaremos la proposición sólo para el caso del cuadrado (9) G -fibrado, cuando p es una G -fibración. La prueba de los demás casos es similar.

Sea $(\partial_0, id_{X \times I}) \in \mathcal{F}$ y sea $\mu : \partial_0 \rightarrow p'$ un morfismo. Como p es un extensor respecto a \mathcal{F} , existe un morfismo $\nu : id_{X \times I} \rightarrow p$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \partial_0 & \xrightarrow{\mu} & p' \\
 (\partial_0, id_{X \times I}) \downarrow & & \downarrow (f', f) \\
 id_{X \times I} & \xrightarrow{\nu} & p
 \end{array}$$

es conmutativo. Para este diagrama, como el morfismo (f', f) es un cuadrado G -fibrado (Proposición 4.3), existe un relleno $\tilde{\mu} : id_{X \times I} \rightarrow p'$, lo que muestra que p' es un extensor respecto a \mathcal{F} . Según el Corolario 4.4, concluimos que p' es una G -fibración. \square

Notemos que la Proposición 4.5 se aplica, desde luego, a los cuadrados pull-back ya que cada cuadrado pull-back de G -funciones es un cuadrado G -fibrado, un cuadrado G -fibrado regular y un cuadrado G -AE.

Proposición 4.6. *Sea $\mathbf{p} = \{p_i\} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ un mapeo de las sucesiones inversas $\mathbf{E} = \{E_i, q_i^j\}$ y $\mathbf{B} = \{B_i, r_i^j\}$, tal que para cada i , el diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
 E_i & \xleftarrow{q_i^{i+1}} & E_{i+1} \\
 p_i \downarrow & & \downarrow p_{i+1} \\
 B_i & \xleftarrow{r_i^{i+1}} & B_{i+1}
 \end{array}$$

es un cuadrado G -fibrado (G -fibrado regular, G -AE). Entonces la G -función límite $p = \varprojlim \mathbf{p}$ es una G -fibración (resp. G -fibración regular, un G -AE-mapeo), si p_1 es una G -fibración (resp. G -fibración regular, un G -AE-mapeo).

Demostración. Observemos primero que $p = \lim_{\leftarrow} \{p_i, (q_i^j, r_i^j)\}$ en $Map(G-TOP)$. Si $q_i : \lim_{\leftarrow} \mathbf{E} \rightarrow E_i$ y $r_i : \lim_{\leftarrow} \mathbf{B} \rightarrow B_i$ son las proyecciones naturales, entonces los morfismos $(q_i, r_i) : p \rightarrow p_i$ son las proyecciones naturales en $Map(G-TOP)$.

Probaremos la proposición sólo para el caso de cuadrados G -fibrados. La prueba de los demás casos es similar.

Sea $(\partial_0, id_{X \times I}) \in \mathcal{F}$ y sea $\mu : \partial_0 \rightarrow p$ un morfismo. Vamos a definir morfismos $\mu_i : id_{X \times I} \rightarrow p_i$ tales que $\mu_i = (q_i^{i+1}, r_i^{i+1}) \circ \mu_{i+1}$ y $\mu_i \circ (\partial_0, id_{X \times I}) = (q_i, r_i) \circ \mu$ para cada i .

Como p_1 es un extensor respecto a \mathcal{F} , podemos elegir μ_1 tal que $\mu_1 \circ (\partial_0, id_{X \times I}) = (q_1, r_1) \circ \mu$. Luego, como por la Proposición 4.3, (q_i^{i+1}, r_i^{i+1}) tiene la PLD respecto a \mathcal{F} , procederemos por inducción, eligiendo $\mu_{i+1} : id_{X \times I} \rightarrow p_{i+1}$ para μ_i como un relleno del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \partial_0 & \xrightarrow{(q_{i+1}, r_{i+1}) \circ \mu} & p_{i+1} \\ \downarrow (\partial_0, id_{X \times I}) & & \downarrow (q_i^{i+1}, r_i^{i+1}) \\ id_{X \times I} & \xrightarrow{\mu_i} & p_i \end{array}$$

Por la propiedad universal del límite inverso la colección $\{\mu_i\}$ determina un morfismo único $\tilde{\mu} : id_{X \times I} \rightarrow p$ tal que $(q_i, r_i) \circ \tilde{\mu} = \mu_i$ para cada i .

Además, se cumple $\tilde{\mu} \circ (\partial_0, id_{X \times I}) = \mu$ ya que para cada i ,

$$(q_i, r_i) \circ \tilde{\mu} \circ (\partial_0, id_{X \times I}) = \mu_i \circ (\partial_0, id_{X \times I}) = (q_i, r_i) \circ \mu.$$

Concluimos que p es un extensor respecto a \mathcal{F} , es decir, es una G -fibración (véase el Corolario 4.4). \square

5. G -funciones asociadas a G -fibraciones

En esta sección daremos algunas caracterizaciones de G -fibraciones y G -fibraciones regulares por medio de las, abajo llamadas, G -funciones “asociadas”.

Sea $p : E \rightarrow B$ una G -función y consideremos el siguiente diagrama conmutativo de G -funciones

$$\begin{array}{ccc}
 E^I & & \\
 \swarrow p^I & & \\
 & q & \\
 & \searrow & \\
 & & B^I \\
 \pi_E^0 \swarrow & \xrightarrow{\tilde{p}} & \downarrow \pi_B^0 \\
 & & B \\
 \downarrow \tilde{\pi} & & \\
 E & \xrightarrow{p} & B
 \end{array} \tag{13}$$

donde la G -función p^I se define por $p^I(\omega) = p \circ \omega$ y el cuadrado interno es un diagrama pull-back.

En adelante, dada una G -función $p : E \rightarrow B$, diremos que la G -función $q : E^I \rightarrow coCyl(p)$ dada por $q(\omega) = (\omega(0), p \circ \omega)$, es *asociada a p*.

Desde luego, la función q asociada a p es una función única que hace conmutativo el diagrama (13).

Supongamos que A es un subconjunto cerrado G -invariante de un G -espacio X . Consideremos los siguientes diagramas conmutativos de G -funciones

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & E^I \\
 \downarrow & & \downarrow q \\
 X & \xrightarrow{F} & coCyl(p)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 X \times \{0\} \cup A \times I & \xrightarrow{\hat{f}} & E \\
 \downarrow & & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{\hat{F}} & B
 \end{array} \tag{14}$$

relacionados mutuamente por las ecuaciones: $\hat{F}(x, t) = (\tilde{p}F)(x)(t)$, $\hat{f}(x, 0) = (\tilde{\pi}F)(x)$ y $\hat{f}(a, t) = f(a)(t)$ para cada $x \in X$, $a \in A$, $t \in I$.

Observación 5.1. La existencia de un relleno $\Phi : X \rightarrow E^I$ para el diagrama izquierdo (14) es equivalente a la existencia de un relleno $\hat{\Phi} : X \times I \rightarrow E$ para el diagrama derecho (14).

Claramente, las funciones Φ y $\hat{\Phi}$ están relacionadas por medio de la ecuación: $\hat{\Phi}(x, t) = \Phi(x)(t)$. Como una consecuencia inmediata de la Observación 5.1 y el diagrama (13) obtenemos el siguiente hecho:

Proposición 5.2. Sea $q : E^I \rightarrow coCyl(p)$ la función asociada a una G -función $p : E \rightarrow B$. Entonces p es una G -fibración regular si y sólo si q es un G -AE-mapeo, es decir, $(\pi_E^0, \pi_B^0) : p^I \rightarrow p$ es un cuadrado G -AE.

Para presentar un resultado análogo a la Proposición 5.2, para G -fibraciones, necesitamos el siguiente concepto.

Definición 5.3. Decimos que una G -función $p : E \rightarrow B$ es G -flexible, si para cada G -par (X, A) y cada diagrama conmutativo (1) de G -funciones, la existencia de una vecindad funcional U de A en X y de una G -función $\tilde{f} : U \rightarrow E$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & E \\
 \downarrow i & \searrow & \nearrow \tilde{f} \\
 & U & \\
 \downarrow & \swarrow & \downarrow p \\
 X & \xrightarrow{F} & B
 \end{array}$$

implica la existencia de una G -función $\tilde{F} : X \rightarrow E$ tal que $\tilde{F} \circ i = f$ y $p \circ \tilde{F} = F$.

Recordemos que, dado un G -par (X, A) , una vecindad G -invariante U de A en X se llama *funcional*, si existe una función G -invariante $\varphi : X \rightarrow I$ tal que $A \subset \varphi^{-1}(1)$ y $X \setminus U \subset \varphi^{-1}(0)$. Es fácil demostrar que cada vecindad funcional de A contiene una vecindad funcional *cerrada*.

Proposición 5.4. Sea $q : E^I \rightarrow \text{coCyl}(p)$ la función asociada a una G -función $p : E \rightarrow B$. Entonces p es una G -fibración si y sólo si q es G -flexible.

Demostración. Sea p una G -fibración. Supongamos que está dado el diagrama (14) izquierdo (para p) para el cual existe una G -función $\Phi' : U \rightarrow E^I$, donde U es alguna vecindad funcional cerrada de A en X , tal que $\Phi'|_A = f$ y $q\Phi' = F|_U$. En otras palabras, tomando en cuenta la Observación 5.1, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 U \times \{0\} \cup A \times I & \xrightarrow{\hat{f}} & E \\
 \downarrow & \searrow \hat{\Phi}' & \downarrow p \\
 U \times I & \xrightarrow{\hat{F}} & B
 \end{array} \tag{15}$$

donde $\hat{\Phi}'(u, t) = \Phi'(u)(t)$, $\hat{F}(u, t) = (\tilde{p}F)(u)(t)$, $\hat{f}(u, 0) = \tilde{\pi}F(u)$ y $\hat{f}(a, t) = f(a)(t)$ para cada $u \in U$, $a \in A$ y $t \in I$ (aquí, desde luego, \tilde{p} y $\tilde{\pi}$ son las proyecciones del cocilindro; véase el diagrama (13)).

Sea $\varphi : X \rightarrow I$ una función G -invariante tal que $\varphi(A) = 1$ y $\varphi(X \setminus U) = 0$. Definamos la G -homotopía $D : X \times I \rightarrow B$ por

$$D(x, t) = (\tilde{p}F)(x)(\min(1, \varphi(x) + t)), \quad (x, t) \in X \times I.$$

Ahora definamos la G -función $d : X \rightarrow E$ por

$$d(x) = \begin{cases} \widehat{\Phi}'(x, \varphi(x)), & x \in U; \\ \widetilde{\pi}F(x), & \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

Claramente, d es continua ya que los conjuntos U y $\varphi^{-1}(0)$ son cerrados y, si $x \in U$ y $\varphi(x) = 0$, entonces $\widehat{\Phi}'(x, \varphi(x)) = \widehat{\Phi}'(x, 0) = \widehat{f}(x, 0) = \widetilde{\pi}F(x)$. Además, para $x \in U$, $pd(x) = p\widehat{\Phi}'(x, \varphi(x)) = \widehat{F}(x, \varphi(x)) = D(x, 0)$ y, para $x \in \varphi^{-1}(0)$, $pd(x) = p\widetilde{\pi}F(x) = \pi_B^0 \widetilde{p}F(x) = (\widetilde{p}F)(x)(0) = D(x, 0)$. Por lo tanto, como p es una G -fibración, existe una G -función $\widetilde{D} : X \times I \rightarrow E$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{d} & E \\ \downarrow \partial_0 & \nearrow \widetilde{D} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{D} & B \end{array}$$

es conmutativo. Ahora definamos $\widehat{\Phi} : X \times I \rightarrow E$ como sigue

$$\widehat{\Phi}(x, t) = \begin{cases} \widehat{\Phi}'(x, t), & x \in U \text{ y } 0 \leq t \leq \varphi(x); \\ \widetilde{D}(x, t - \varphi(x)), & \varphi(x) \leq t \leq 1. \end{cases}$$

($\widehat{\Phi}$ es continua ya que para los puntos $(x, t) \in U \times I$ tales que $t = \varphi(x)$, tenemos de lo anterior $\widehat{\Phi}'(x, t) = \widehat{\Phi}'(x, \varphi(x)) = d(x) = \widetilde{D}(x, 0)$). Por último, se verifica sin dificultad que la G -función $\Phi : X \rightarrow E^I$, definida por $\Phi(x)(t) = \widehat{\Phi}(x, t)$, es un relleno del diagrama izquierdo (14) dado en el inicio, lo que prueba que q es G -flexible.

Para probar la afirmación “ q es G -flexible $\Rightarrow p$ es una G -fibración”, consideremos de nuevo los dos diagramas conmutativos (14) tomando $A = \emptyset$. Como q es G -flexible, existe un relleno $X \rightarrow E^I$ del diagrama izquierdo (ya que para la vecindad $U = \emptyset$ de A la condición de la definición de G -función flexible se cumple). De acuerdo con la Observación 5.1, existe un relleno $X \times I \rightarrow E$ del diagrama derecho (para una elección arbitraria inicial de las G -funciones \widehat{f} y \widehat{F}), lo que significa que p es una G -fibración. □

Proposición 5.5. *Sea $q : E^I \rightarrow \text{coCyl}(p)$ la función asociada a una G -función $p : E \rightarrow B$. Entonces p es una G -fibración si y sólo si q es una G -fibración.*

Demostración. Consideremos los dos diagramas conmutativos (14) tomando $A = Z \times \{0\}$ y $X = Z \times I$. Notemos que los pares $(I \times I, I \times \{0\} \cup \{0\} \times I)$ y $(I \times I, I \times \{0\})$ son topológicamente equivalentes, es decir, existe un homeomorfismo $\psi : I \times I \rightarrow I \times I$ tal que $\psi(I \times \{0\}) = \{0\} \times I \cup$

$I \times \{0\}$ (y $\psi(0, 0) = (0, 1)$). Ahora los diagramas (14) se modifican como sigue:

$$\begin{array}{ccc}
 Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E^I \\
 \downarrow & & \downarrow q \\
 Z \times I & \xrightarrow{F} & \text{coCyl}(p)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 Z \times I \times \{0\} & \xrightarrow{h} & E \\
 \downarrow & & \downarrow p \\
 Z \times I \times I & \xrightarrow{H} & B
 \end{array}
 \quad (16)$$

donde $h(z, t, 0) = \widehat{f}(z, \psi(t, 0))$ y $H(z, t, \tau) = \widehat{F}(z, \psi(t, \tau))$. Este par de diagramas, tanto como los diagramas (14), satisface la siguiente condición: la existencia de un relleno $\Phi : Z \times I \rightarrow E^I$ para el diagrama izquierdo (16) es equivalente a la existencia de un relleno $\widehat{\Phi} : Z \times I \times I \rightarrow E$ para el diagrama derecho (16). De esta condición inmediatamente obtenemos “ p es un G -fibración $\Rightarrow q$ es una G -fibración”.

Para probar la afirmación inversa es suficiente definir, para G -funciones $h' : Z \rightarrow E$ y $H' : Z \times I \rightarrow B$ relacionadas por $H'\partial_0 = ph'$, las funciones h y H como sigue: $h(z, t, 0) = h'(z)$, $H(z, t, \tau) = H'(z, \tau)$. \square

Lema 5.6. *Sea $p : E \rightarrow B$ una G -fibración de espacios G -ANE. Si p es G -flexible, entonces p es un G -AE-mapeo.*

Demostración. Para la G -función p dada, consideremos el diagrama (1), donde (X, A) es un G -par metrizable y $i : A \hookrightarrow X$ es un encaje. Como E es un G -ANE, existe una vecindad G -invariante U de A en X y una G -función $\widetilde{f} : U \rightarrow E$ tal que $\widetilde{f}|_A = f$.

Sea $\Phi : U \times \{0, 1\} \cup A \times I \rightarrow B$ dada por

$$\Phi(u, t) = \begin{cases} p\widetilde{f}(u), & (u, 0) \in U \times \{0\}; \\ F(a), & (a, t) \in A \times I; \\ F(u), & (u, 1) \in U \times \{1\}. \end{cases}$$

Se verifica fácilmente que Φ es una G -función bien definida.

Como B es un G -ANE, existe una vecindad G -invariante W de $U \times \{0, 1\} \cup A \times I$ en $U \times I$ y una G -función $\widetilde{\Phi} : W \rightarrow B$ tal que $\widetilde{\Phi}|_{U \times \{0, 1\} \cup A \times I} = \Phi$. Por la compacidad de I , podemos encontrar una vecindad G -invariante V de A en U (y, por lo tanto, en X) tal que $V \times I \subseteq W$.

Obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\widetilde{f}|_V} & E \\
 \downarrow \partial_0 & & \downarrow p \\
 V \times I & \xrightarrow{\widetilde{\Phi}|_{V \times I}} & B
 \end{array}$$

donde $\tilde{\Phi}|_{V \times I}$ es una G -homotopía relativa a A ya que $\tilde{\Phi}(a, t) = \Phi(a, t) = F(a)$ para cada $(a, t) \in A \times I$. Dado que p es una G -fibración y (X, A) un G -par metrizable, existe una G -homotopía relativa a A , $\Psi : V \times I \rightarrow E$, como un relleno del diagrama. La G -función $\hat{f} : V \rightarrow E$, dada por $\hat{f}(v) = \Psi(v, 1)$, es tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & E \\
 \downarrow i & \searrow & \nearrow \hat{f} \\
 & V & \\
 \downarrow & \swarrow & \downarrow p \\
 X & \xrightarrow{F} & B
 \end{array}$$

es conmutativo. Por consiguiente, como p es G -flexible, concluimos que existe un relleno $X \rightarrow E$ para el diagrama (1), lo que muestra que p es un G - AE -mapeo. \square

Ahora podemos demostrar fácilmente el Teorema 3.4 usando el Lema 5.6 y las proposiciones anteriores.

Demostración del Teorema 3.4. Dada p , la G -función asociada $q : E^I \rightarrow coCyl(p)$ es una G -fibración y es G -flexible por las Proposiciones 5.5 y 5.4. Como E y B son G - ANE 's los G -espacios E^I , y $coCyl(p)$ son también G - ANE 's. Por el Lema 5.6, q es un G - AE -mapeo y, de acuerdo con la Proposición 5.2, p es G -fibración regular.

6. Subgrupos grandes y cuadrados G -fibrados regulares

El concepto de subgrupo grande nos lleva al siguiente resultado, el cual es bien conocido para un grupo compacto de *Lie* G .

Proposición 6.1. Sean H y K subgrupos cerrados de un grupo compacto G tales que $K \subset H$. Si K es un subgrupo grande de G , entonces la proyección natural $G/K \rightarrow G/H$ es una G -fibración regular.

Demostración. Como K es grande, existe un subgrupo normal cerrado N de G tal que G/N es un grupo de Lie y $N \subset K$. Notemos que la acción de N en G/K es trivial (ya que $N \subset K \subset H$) y por lo tanto, la proyección $p : G/K \rightarrow G/H$ puede ser considerada como G/N -función, de esta

manera, tenemos el siguiente diagrama conmutativo de G/N -funciones

$$\begin{array}{ccc} G/K & \xrightarrow{\varphi} & (G/N)/(K/N) \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ G/H & \xrightarrow{\psi} & (G/N)/(H/N) \end{array}$$

donde φ y ψ son los G/N -homeomorfismos dados por $\varphi(gK) = (gN)(K/N)$ y $\psi(gH) = (gN)(H/N)$ respectivamente, y p' es la proyección natural. Como G/N es un grupo compacto de Lie, por la Proposición 3.1, la G/N -función p' es una G/N -fibración y por lo tanto, p también lo es. Por la Proposición 3.5(a), p una G -fibración. Más aún, como G/K y G/H son G -ANE's, por el Teorema 3.4, p es una G -fibración regular. \square

Proposición 6.2. Sean H , K y N subgrupos cerrados de un grupo compacto G tales que $H \subset K \cap N$ y $KN = NK$. Si H es grande, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G/H & \xrightarrow{\alpha_N} & G/N \\ \alpha_K \downarrow & & \downarrow \beta_K \\ G/K & \xrightarrow{\beta_N} & G/KN \end{array} \quad (17)$$

es un cuadrado G -fibrado regular.

Demostración. De acuerdo con la Proposición 4.1, tenemos el cuadrado pull-back (7). Luego notemos que la proyección natural $q : G/H \rightarrow G/(K \cap N)$ es la única G -función que existe por la propiedad de pull-back para las proyecciones α_K y α_N (i.e., tal que $\alpha_K = \pi_K q$ y $\alpha_N = \pi_N q$). Así el diagrama (17) es un cuadrado G -fibrado regular pues q es una G -fibración regular por la Proposición 6.1. \square

Los siguientes corolarios de la Proposición 6.2 serán empleados en la prueba de nuestros teoremas principales.

Corolario 6.3. Sean H , K , M , N subgrupos cerrados de un grupo compacto G tales que $K \subset H$, $M \subset N$. Si los subgrupos M y N son normales y además M es grande, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G/KM & \longrightarrow & G/KN \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/HM & \longrightarrow & G/HN \end{array}$$

es un cuadrado G -fibrado regular.

Demostración. Como $M \subset KM$, el subgrupo KM es grande al igual que M . Obviamente, $KM \subset HM \cap KN$ y

$$HM \cdot KN = HK \cdot MN = HN = KH \cdot NM = KN \cdot HM.$$

Por lo tanto el diagrama es un cuadrado G -fibrado regular por la Proposición 6.2. □

El siguiente corolario se verifica de manera análoga.

Corolario 6.4. Sean H, K y N subgrupos cerrados de un grupo compacto G tales que $NH = HN$, $KH = HK$ y $KN = NK$. Si H es un subgrupo grande, entonces el diagrama de proyecciones naturales

$$\begin{array}{ccc} G/H & \longrightarrow & G/NH \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/KH & \longrightarrow & G/KNH \end{array}$$

es un cuadrado G -fibrado regular.

7. Caracterización local de G -fibraciones regulares

Recordemos que una G -función $p : E \rightarrow B$ es una G -fibración regular si y sólo si el morfismo $(\pi_E^0, \pi_B^0) : p^I \rightarrow p$ es un cuadrado G -AE (véase la Proposición 5.2).

Sea U un G -conjunto de B . Vamos a denotar por p_U la restricción $p^{-1}(U) \rightarrow U$ de p . Definamos los morfismos $\alpha_U, \beta_U : p_U^I \rightarrow p_U$ como las composiciones $\iota \circ (\pi_{p^{-1}(U)}^0, \pi_U^0)$ y $\iota \circ (\pi_{p^{-1}(U)}^1, \pi_U^1)$ respectivamente, donde $\iota : p_U \hookrightarrow p$ es el encaje. Como ι es un cuadrado pull-back, se puede generalizar la afirmación anterior como sigue:

p_U es una G -fibración regular $\Leftrightarrow \alpha_U : p_U^I \rightarrow p_U$ es un cuadrado G -AE.

Emplearemos este hecho en la demostración del Teorema 7.2 al igual que el siguiente resultado probado en [3] (véase también [6, Proposition 8.25]).

Proposición 7.1. ([3, Lemma 3.5]) Sea $p : E \rightarrow B$ una G -función. Si existe una G -cubierta abierta \mathcal{U} de B (es decir, una cubierta abierta que consta G -conjuntos) tal que la restricción p_U es un G -AE-mapeo para cada $U \in \mathcal{U}$, entonces p es un G -AE-mapeo.

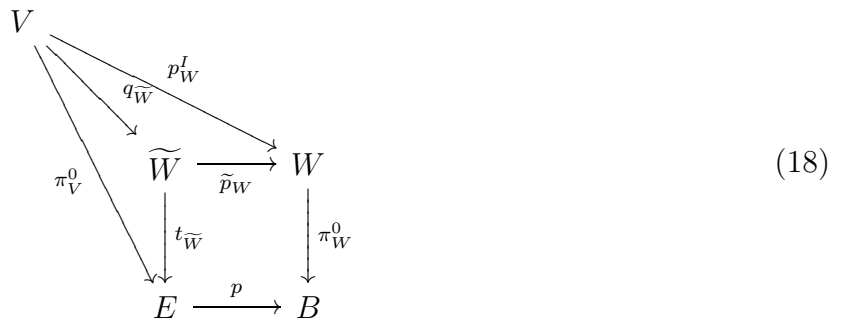
Teorema 7.2. Sea $p : E \rightarrow B$ una G -función. Si existe una G -cubierta abierta \mathcal{U} de B tal que la restricción $p_U : p^{-1}(U) \rightarrow U$ es una G -fibración regular para cada $U \in \mathcal{U}$, entonces p es una G -fibración regular.

Demostración. Consideremos el diagrama (13), donde el cuadrado interno es pull-back. Sea $(x, \omega_0) \in \tilde{E} = \text{coCyl}(p)$. Empleando el lema del recubrimiento de Lebesgue, podemos encontrar un entero n y una sucesión de G -conjuntos abiertos $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ tales que $\omega_0([(i-1)/n, i/n]) \subset U_i$ para cada $i = 1, \dots, n$. Luego el conjunto

$$W = \left\{ \omega \in B^I \mid \omega \left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \right) \subset U_i, i = 1, \dots, n \right\}$$

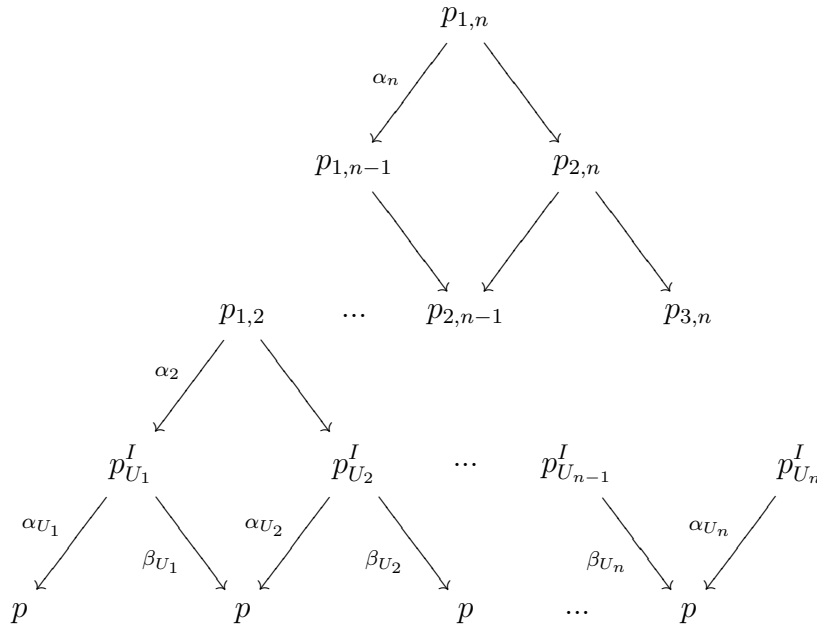
es una vecindad abierta G -invariante de ω_0 en B^I y $(x, \omega_0) \in \tilde{W}$, donde $\tilde{W} = \tilde{p}^{-1}(W)$. Sea $V = q^{-1}(\tilde{W})$, es decir, $V = (p^I)^{-1}(W)$, y sea $q_{\tilde{W}} : V \rightarrow W$ la restricción de $q : E^I \rightarrow \tilde{E}$ (véase el diagrama (13)).

Así, obtenemos la siguiente restricción del diagrama (13)



donde el cuadrado interno es pull-back. Veamos que el cuadrado exterior es un cuadrado G - AE .

Para ello, trabajando en la categoría $\text{Map}(G\text{-TOP})$, construyamos el siguiente diagrama conmutativo



donde cada cuadrado es pull-back. Como p_{U_i} es una G -fibración regular, entonces α_{U_i} es un cuadrado G - AE . Los morfismos $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ son también cuadrados G - AE ya que se obtienen de los cuadrados G - AE $\alpha_{U_2}, \alpha_{U_3}, \dots, \alpha_{U_n}$ respectivamente, tomando pull-backs. Luego, la composición

$$\alpha = \alpha_{U_1} \alpha_2 \dots \alpha_n, \quad \alpha : p_{1,n} \rightarrow p$$

es también un cuadrado G - AE .

La G -función $p_{1,n} : \bar{V} \rightarrow \bar{W}$ y el morfismo $\alpha = (\pi_{\bar{V}}, \pi_{\bar{W}})$ pueden describirse de manera directa: si $\tilde{U}_i = p^{-1}(U_i)$, $i = 1, \dots, n$, entonces

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \tilde{U}_1^I \times \dots \times \tilde{U}_n^I \mid \omega_1(1) = \omega_2(0), \dots, \omega_{n-1}(1) = \omega_n(0)\}, \\ \bar{W} &= \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in U_1^I \times \dots \times U_n^I \mid \omega_1(1) = \omega_2(0), \dots, \omega_{n-1}(1) = \omega_n(0)\}, \\ p_{1,n}(\omega_1, \dots, \omega_n) &= (p\omega_1, \dots, p\omega_n), \quad \pi_{\bar{V}}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \omega_1(0), \quad \pi_{\bar{W}}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \omega_1(0). \end{aligned}$$

Los G -espacios V y W son G -equivalentes a los G -espacios \bar{V} y \bar{W} respectivamente por medio de las correspondencias $\tilde{h}, h : \omega \mapsto (\omega_1, \dots, \omega_n)$, dadas por $\omega_i(t) = \omega(\frac{i-1+t}{n})$, $i = 1, \dots, n$.

La composición de $(\tilde{h}, h) : p_W^I \rightarrow p_{1,n}$ y $\alpha : p_{1,n} \rightarrow p$ es el morfismo $(\pi_V^0, \pi_W^0) : p_W^I \rightarrow p$, el cual es un cuadrado G - AE al igual que α y (\tilde{h}, h) . En otras palabras, la restricción $q_{\tilde{W}} : q^{-1}(\tilde{W}) \rightarrow \tilde{W}$ es un G - AE -mapeo.

Por último, debido a la elección inicial arbitraria de $(x_0, \omega) \in \tilde{W} \subset coCyl(p)$, podemos afirmar que existe una G -cubierta abierta $\{\tilde{W}_j\}_{j \in J}$ de $coCyl(p)$, tal que $q_{\tilde{W}_j} : q^{-1}(\tilde{W}_j) \rightarrow \tilde{W}_j$ es un G - AE -mapeo para cada $j \in J$. Luego, por la Proposición 7.1, $q : E^I \rightarrow coCyl(p)$ es un G - AE -mapeo, y por lo tanto, p es una G -fibración regular (véase Proposición 5.2). \square

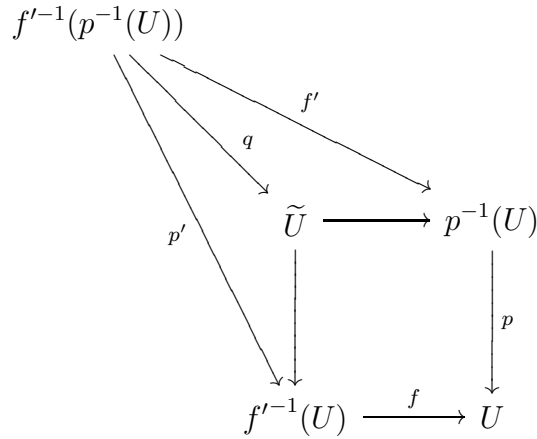
En la siguiente sección emplearemos el hecho que los cuadrados G -fibrados regulares pueden caracterizarse “localmente” al igual que las G -fibraciones regulares, como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 7.3. *Supongamos que está dado el diagrama conmutativo de G -funciones (4). Sea \mathcal{U} una G -cubierta abierta de B . Si para cada $U \in \mathcal{U}$ la restricción del diagrama (4)*

$$\begin{array}{ccc} f'^{-1}(p^{-1}(U)) & \xrightarrow{f'} & p^{-1}(U) \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ f^{-1}(U) & \xrightarrow{f} & U \end{array}$$

es un cuadrado G -fibrado regular, entonces el diagrama total (4) es un cuadrado G -fibrado regular.

Demostración. Consideremos el diagrama (8) y sea $\tilde{U} = \tilde{f}^{-1}(p^{-1}(U))$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Observemos que $q^{-1}(\tilde{U}) = f'^{-1}(p^{-1}(U))$, así obtenemos el diagrama conmutativo



donde el cuadrado interno, siendo una restricción del cuadrado pull-back en el diagrama (8), es también pull-back. Por hipótesis, la restricción de q , $f'^{-1}(p^{-1}(U)) \rightarrow \tilde{U}$, es una G -fibración regular; luego, como la familia $\{\tilde{U}\}_{U \in \mathcal{U}}$ es una G -cubierta abierta de P , aplicando el Teorema 7.2, concluimos que la G -función $q : E' \rightarrow P$ es una G -fibración regular. \square

La siguiente proposición es una consecuencia inmediata de [5, Chapter II, Theorem 5.8].

Proposición 7.4. *Sea H un subgrupo grande de un grupo compacto G , y sea E un G -espacio de Tychonoff con un sólo tipo de órbitas (H). Entonces la proyección orbital $\pi : E \rightarrow E/G$ satisface a la siguiente propiedad: para cada $b \in E/G$, existe una vecindad abierta U de b en E/G y un G -homeomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow G/H \times U$ tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & G/H \times U \\
 \searrow \pi & & \swarrow pr_U \\
 & U &
 \end{array} \tag{19}$$

es conmutativo.

Demostración. Sea N un subgrupo normal cerrado de G tal que $N \subset H$ y G/N es un grupo de Lie.

Observemos que la acción de N en E es trivial ya que para cada $x \in E$, $(G_x) = (H)$, esto es para cada $x \in E$ existe $g \in G$ tal que $G_x = gHg^{-1}$, así tenemos $N = gNg^{-1} \subset gHg^{-1} = G_x$. Luego $E/N = E$ y podemos considerar E como G/N -espacio. Como G/N es un grupo de Lie, por [5, Chapter II, Theorem 5.8], para cada $b \in E/(G/N) = E/G$, existe una vecindad abierta U

de b en E/G y un G/N -homeomorfismo $\pi^{-1}(U) \rightarrow ((G/N)/(H/N)) \times U$ tal que el diagrama de G/N -funciones es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\approx} & ((G/N)/(H/N)) \times U \\ & \searrow \pi & \swarrow pr_U \\ & & U \end{array}$$

Como $(G/N)/(H/N) \approx G/H$ y cada G/N función puede considerarse como G -función, tenemos el G -homeomorfismo φ_U deseado. □

8. Proyecciones orbitales como G -fibraciones regulares

Es un hecho conocido que todo grupo compacto G es *un grupo pro-Lie*, esto es, para cada vecindad U del elemento identidad e , existe un subgrupo normal cerrado N tal que $N \subset U$ y G/N es un grupo de Lie, es decir, N es un subgrupo grande de G (véase [5, Chapter 0, Corollary 4.4]).

Si G es un grupo compacto *metrizable* (o equivalentemente, si cumple el primer axioma de numerabilidad, ver [7, Chapter I, §1.22]), entonces esto implica la existencia de una sucesión decreciente $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de subgrupos normales grandes de G tales que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} N_i = \{e\}$. A dicha sucesión se le conoce como *sucesión pro-Lie para G* . Claramente, para cada sucesión pro-Lie $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ para G , tenemos

$$\varprojlim \{G/N_i, q_i^j\} = G,$$

donde $q_i^j : G/N_j \rightarrow G/N_i$, $j \geq i$, son las proyecciones naturales. Este hecho puede verse como corolario de la siguiente proposición.

Proposición 8.1. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto G . Si el espacio cociente G/H es metrizable, entonces existe una sucesión decreciente $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de subgrupos normales grandes de G , tales que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (N_i H) = H$. Por lo tanto,*

$$\varprojlim \{G/(N_i H), q_i^j\} = G/H,$$

donde $q_i^j : G/(N_j H) \rightarrow G/(N_i H)$, $j \geq i$, son las proyecciones naturales.

Demostración. Sea $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de vecindades de $\{eH\}$ en G/H tal que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i = \{eH\}$, y sea $\tilde{U}_i = q^{-1}(U_i)$, $i \in \mathbb{N}$, donde $q : G \rightarrow G/H$ es la proyección natural.

De acuerdo con [5, Chapter 0, Corollary 4.4], para cada i existe un subgrupo normal cerrado N'_i tal que $N'_i \subset \tilde{U}_i$ y G/N'_i es un grupo de Lie.

La sucesión $(N'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ puede sustituirse por la sucesión decreciente $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tomando $N_1 := N'_1$, $N_{i+1} := N_i \cap N'_{i+1}$. Notemos que todos los grupos G/N_i son de Lie, al igual que G/N'_i (véase e.g., [10, Chapter 8, Section 46(A)]). Como $q(N_i H) = q(N_i) \subset q(N'_i) \subset U_i$, tenemos

$$H \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (N_i H) \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \tilde{U}_i = H.$$

Así, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (N_i H) = H$. Ahora, usando la compacidad del subgrupo H , se verifica fácilmente que $\varprojlim \{G/(N_i H), q_i^j\} = G/H$. \square

Definición 8.2. Diremos que una sucesión $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de subgrupos de un grupo compacto G es una *sucesión pro-Lie para G/H* , si satisface las condiciones de la Proposición 8.1.

Teorema 8.3. Sean H y K subgrupos cerrados de un grupo compacto G tales que $K \subset H$ y G/K es metrizable. Entonces la proyección $p : G/K \rightarrow G/H$ es una G -fibración regular.

Demostración. Por la Proposición 8.1, existe una sucesión pro-Lie $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ para G/K . Como

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} N_i \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (N_i K) = K \subset H,$$

es fácil ver que $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ también será una sucesión pro-Lie para G/H . Por lo tanto, para $p : G/K \rightarrow G/H$, tenemos

$$p = \varprojlim \{p/N_i, (q_i^{i+1}, r_i^{i+1})\},$$

donde q_i^{i+1} , r_i^{i+1} y p/N_i son las proyecciones naturales en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G/KN_i & \xleftarrow{q_i^{i+1}} & G/KN_{i+1} \\ p/N_i \downarrow & & \downarrow p/N_{i+1} \\ G/HN_i & \xleftarrow{r_i^{i+1}} & G/HN_{i+1} \end{array}$$

Éste es un cuadrado G -fibrado regular por el Corolario 6.3. Ahora bien, en virtud de la Proposición 6.1, p/N_1 es una G -fibración regular, luego, aplicando la Proposición 4.6, concluimos que p es también una G -fibración regular. \square

Lema 8.4. Sean K , N y H subgrupos cerrados de un grupo compacto G tales que H es grande y los subgrupos K y N son normales. Sea E un G -espacio con un sólo tipo de órbitas (H). Entonces

el diagrama conmutativo de proyecciones orbitales

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\pi_N} & E/N \\
 \pi_K \downarrow & & \downarrow p_K \\
 E/K & \xrightarrow{p_N} & E/KN
 \end{array} \tag{20}$$

es un cuadrado G -fibrado regular y las proyecciones π_K , π_N , p_K y p_N son G -fibraciones regulares.

Demostración. Consideremos las proyecciones $\pi : E \rightarrow E/G$, $q_K : E/K \rightarrow E/G$, $q_N : E/N \rightarrow E/G$ y $q_{KN} : E/KN \rightarrow E/G$. Como H es grande, podemos escoger una cubierta abierta \mathcal{U} de E/G tal que para cada $U \in \mathcal{U}$ existe un G -homeomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow G/H \times U$ para el cual el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & G/H \times U \\
 \pi \searrow & & \swarrow pr_U \\
 & U &
 \end{array}$$

conmuta (véase la Proposición 7.4). El G -homeomorfismo φ_U induce, en los correspondientes espacios orbitales, los G -homeomorfismos $\varphi_U/K : q_K^{-1}(U) \rightarrow G/KH \times U$, $\varphi_U/N : q_N^{-1}(U) \rightarrow G/NH \times U$ y φ_U/KN , las cuales hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\pi_N} & q_N^{-1}(U) & \\
 & \swarrow \pi_K & & \swarrow p_K & \\
 q_K^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & G/H \times U & \xrightarrow{p_N} & q_{KN}^{-1}(U) \\
 \downarrow \varphi_U/K & & \downarrow \varphi_U/KN & & \downarrow \varphi_U/N \\
 & \swarrow \alpha_K \times id & G/H \times U & \xrightarrow{\alpha_N \times id} & G/NH \times U \\
 & & \downarrow \beta_N \times id & & \downarrow \beta_K \times id \\
 G/KH \times U & \xrightarrow{\beta_N \times id} & G/KNH \times U & &
 \end{array}$$

Obtenemos que, por el Corolario 6.4, el cuadrado inferior del diagrama es G -fibrado regular y por lo tanto el superior también lo es. Como $\{q_{KN}^{-1}(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ es una G -cubierta abierta de E/KN , aplicando la Proposición 7.3, concluimos que el diagrama (20) es un cuadrado G -fibrado regular.

Para ver que la proyección K -orbital $\pi_K : E \rightarrow E/K$ es una G -fibración regular, supongamos que en el diagrama (20), $N = G$, en cuyo caso tenemos $p_K = id_{E/G}$. Esto significa que π_K es una G -fibración regular, ya que (20) es un cuadrado G -fibrado regular y $id_{E/G}$ es, trivialmente, una G -fibración regular.

Aplicando este hecho tenemos que π_N es también una G -fibración regular; además podemos considerar p_K como la proyección KN/N -orbital $E/N \rightarrow E/N/(KN/N)$ del G/N -espacio E/N , cuyas G/N -órbitas de E/N son de tipo (HN/N) , y como HN/N es un subgrupo grande de G/N , obtenemos (por el hecho anterior) que p_K una G/N -fibración regular y por lo tanto, una G -fibración regular (véase la Proposición 3.5(b)).

De la misma forma, obtenemos que p_N es una G -fibración regular. \square

Teorema 8.5. *Sean K un subgrupo normal cerrado de un grupo compacto G . Si E es un G -espacio metrizable con un sólo tipo de órbitas, entonces la proyección orbital $\pi : E \rightarrow E/K$ es una G -fibración regular.*

Demostración. Supongamos que todas las órbitas de E tienen tipo (H) . Notemos que el espacio cociente G/H es metrizable siendo G -equivalente a cada G -órbita de E . Sea $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión pro-Lie (de subgrupos de G) para G/H . Por la Proposición 8.1, tenemos $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (N_i H) = H$ y por lo tanto $N = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} N_i \subset H$. Como cada órbita de E es G -equivalente a G/H , el subgrupo normal N actúa en cada G -órbita (y por tanto en todo E) trivialmente. Esto implica que

$$\pi = \varprojlim \{ \pi/N_i, (q_i^{i+1}, r_i^{i+1}) \},$$

ya que $\varprojlim \{ E/N_i, q_i^{i+1} \} = E/N = E$ y $\varprojlim \{ E/N_i K, r_i^{i+1} \} = E/NK = E/K$, donde q_i^{i+1} y r_i^{i+1} son las proyecciones naturales en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E/N_i & \xleftarrow{q_i^{i+1}} & E/N_{i+1} \\ \pi/N_i \downarrow & & \downarrow \pi/N_{i+1} \\ E/N_i K & \xleftarrow{r_i^{i+1}} & E/N_{i+1} K \end{array}$$

Por el Lema 8.4, este diagrama es un cuadrado G/N_{i+1} -fibrado regular (y por lo tanto G -fibrado regular). Por este mismo lema, π/N_1 es una G -fibración regular, luego, aplicando la Proposición 4.6, concluimos que π es también una G -fibración regular. \square

Bibliografía

- [1] S.A. Antonyan, *Equivariant embeddings into G -AR's*, Glasnik Mat. 22(42) (1987) 503-533.
- [2] S.A. Antonyan, *Orbit spaces of proper equivariant absolute extensors*, Topology Appl. 153 (2005) 698-709.
- [3] S.A. Antonyan, R.Jimenez, S.de Neymet, *Fiberwise retraction and shape properties of the orbit space*, Glasnik Mat. 35(55) (2000) 191-210.

-
- [4] A. Bykov, A.L. Kantún Montiel *Strong G-fibrations and orbit projections*, Topology Appl. 163 (2014) 46-65.
 - [5] G.E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, New York, 1972.
 - [6] I.M. James, *General Topology and Homotopy Theory*, Springer-Verlag, 1984.
 - [7] D.Montgomery, L.Zippin, *Topological Transformation groups*, Krieger, Huntington, 1974.
 - [8] S. de Neymet, *Introducción a los grupos topológicos de transformaciones*, Aportaciones Matemáticas, 23, SMM, 2005
 - [9] R.S. Palais, *The classification of G-spaces*, Mem. Amer.Math. Soc. 36, 1960.
 - [10] L.S. Pontrjagin, *Topological groups*, Princeton Univ. Press, 1939.
 - [11] T. tom Dieck, *Transformation groups*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1987.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570
abykov@fcfm.buap.mx
raul.j.f@hotmail.com
alkantun@yahoo.com

Capítulo 7

Gráficas finitas con hiperespacio único $C_n(X)$

Vianey Córdova Salazar, David Herrera Carrasco, Fernando Macías
Romero
FCFM, BUAP

Resumen

Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Un **hiperespacio** es una familia de subconjuntos de X con alguna propiedad particular. En este capítulo estudiamos a la familia de la gráficas finitas que tienen **hiperespacio único** $C_n(X)$ y revisamos algunas propiedades sobre dimensión.

1. Introducción

El presente trabajo pertenece a la rama de la topología conocida como Teoría de los Continuos. Dicha temática trata del estudio de las propiedades topológicas de espacios que son métricos no vacío, compactos y conexos. A un espacio topológico con las propiedades antes mencionadas se le llama *continuo*.

Los *hiperespacios* son familias de subconjuntos de un continuo, con alguna característica particular y considerados con la métrica de Hausdorff. En [6, Teorema 2.5, 2.10 y 3.6], se exponen propiedades de dicha métrica.

Dados un continuo X y $n \in \mathbb{N}$ consideremos los siguientes hiperespacios de X .

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado en } X \text{ y no vacío}\},$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}.$$

Sean \mathfrak{C} una clase de continuos, $n \in \mathbb{N}$ y $X \in \mathfrak{C}$. El continuo X tiene *hiperespacio único* $C_n(X)$ en \mathfrak{C} si para cada $Y \in \mathfrak{C}$ tal que $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y ; si \mathfrak{C} es la clase de todos los continuos simplemente diremos que X tiene *hiperespacio único* $C_n(X)$.

Una vez que se conoce la noción de hiperespacio único $C_n(X)$ una pregunta natural es la siguiente:

¿Bajo qué condiciones el continuo X tiene hiperespacio único $C_n(X)$?

La aportación en este trabajo consiste en dar una presentación del artículo de Alejandro Illanes, [23], con demostraciones detalladas de cada uno de los resultados ahí encontrados (véase [5]); uno de los conceptos claves es el que sigue.

Una *gráfica finita* es un continuo que puede escribirse como la unión de una cantidad finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o bien se intersectan en uno o en sus dos puntos extremos, únicamente. Exponemos resultados importantes sobre el tema de dimensión. Debido a los resultados en [2], [3], [10], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], y [20] nos queda muy claro que es importante revisar el camino seguido para llegar a probar los teoremas principales que se estudian en este trabajo, véase Teorema 3.54 y Teorema 3.56.

2. Dimensión

En todo este trabajo, si X es un espacio topológico y A un subconjunto de X , los símbolos \overline{A} , $fr(A)$ e $int(A)$ denotan la cerradura de A , la frontera de A y el interior de A en X , respectivamente. También, $A \subset Y \subset X$, los símbolos $cl_Y(A)$, $fr_Y(A)$ e $int_Y(A)$ denotan la cerradura de A , la frontera de A y el interior de A en el subespacio Y de X , respectivamente. La cardinalidad de un conjunto A se representa por $|A|$. Como es usual, los símbolos \emptyset , \mathbb{N} y \mathbb{R} , representan el conjunto vacío, los números naturales y los números reales, respectivamente; el símbolo \aleph_0 , denota la cardinalidad de los números naturales. Un espacio topológico es *no degenerado* si tiene más de un punto.

Esta sección la dedicamos a la noción de dimensión y a algunas de sus propiedades, dichas propiedades nos serán de gran utilidad en la sección posterior.

Definición 2.1. Sea X un espacio topológico regular. La **dimensión de** X , denotada por $dim[X]$ es un entero mayor o igual a -1 o infinito. La definición de dimensión se da recursivamente como sigue:

- (i) $dim[X] = -1$ si y sólo si $X = \emptyset$.
- (ii) Sean $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $x \in X$. Se dice que la dimensión de X en x es menor o igual que n , denotado por $dim_x[X] \leq n$, si para cada conjunto abierto V en X con $x \in V$, existe un conjunto abierto U en X , tal que $x \in U \subset V$ y $dim[fr_X(U)] \leq n - 1$.
- (iii) Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces $dim[X] \leq n$ si y sólo si para todo $x \in X$, tenemos que $dim_x[X] \leq n$.
- (iv) Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces $dim[X] = n$ si y sólo si para cada $x \in X$, tenemos que $dim_x[X] \leq n$ y $dim[X] \not\leq n - 1$.
- (v) $dim[X] = \infty$ si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos que $dim[X] \not\leq n$.

Lema 2.2. Sean X y Y espacios topológicos regulares y $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. Si X es homeomorfo a Y y $dim[X] = n$, entonces $dim[Y] = n$.

Demostración. La prueba la hacemos por inducción sobre $\dim[X]$. Sea $h : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. Si $\dim[X] = -1$, entonces $X = \emptyset$. Como h es suprayectiva, tenemos que $Y = h(X) = h(\emptyset) = \emptyset$. Así, $\dim[Y] = -1$. Supongamos que $\dim[X] = m$ con $m \leq n - 1$, entonces $\dim[Y] = m$. Veamos que si $\dim[X] = n$, entonces la $\dim[Y] = n$. Sean $y \in Y$ y un conjunto abierto U en Y , tal que $y \in U$. Como h es suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $h(x) = y$. Además, como h es continua y $y \in U$, tenemos que $h^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en X tal que $x \in h^{-1}(U)$. Como la $\dim[X] = n$, existe un conjunto abierto V en X tal que $x \in V \subset h^{-1}(U)$ y $\dim[fr_X(V)] \leq n - 1$. Luego, $h(x) \in h(V) \subset h(h^{-1}(U))$. Como h es biyectiva, tenemos que $h(h^{-1}(U)) = U$. Así, $y \in h(V) \subset U$. Como h es una función abierta, tenemos que $h(V)$ es un conjunto abierto en Y . Como $\dim[fr_X(V)] = k \leq n - 1$ y $h|_{fr_X(V)} : fr_X(V) \rightarrow h(fr_X(V))$ es un homeomorfismo, por hipótesis de inducción, tenemos que $\dim[h(fr_X(V))] \leq n - 1$. Como $h(fr_X(V)) = fr_Y(h(V))$, tenemos que $\dim[fr_Y(h(V))] \leq n - 1$. Así, $\dim[Y] \leq n$. Veamos que $\dim[Y] > n - 1$. Supongamos que $\dim[Y] = l$. Por hipótesis de inducción, tenemos que $\dim[X] = l$ con $l \leq n - 1$. Esto es una contradicción porque $\dim[X] = n$. Así, $\dim[Y] > n - 1$. Por lo tanto, $\dim[Y] = n$. \square

Teorema 2.3. [2, Observación, pág. 34] Sean X y Y espacios topológicos regulares. Si X es compacto y $\dim[Y] = 1$, entonces $\dim[X \times Y] = \dim[X] + 1$.

Corolario 2.4. Sean $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y X_1, X_2, \dots, X_n espacios topológicos regulares. Si X_1, X_2, \dots, X_n son espacios compactos y para cada $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, tenemos que $\dim[X_i] = 1$, entonces $\dim[X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n] = \dim[X_1] + (n - 1)$.

Demostración. Hacemos la prueba por inducción para $n \geq 2$. Veamos el caso $n = 2$. Como X_1 es compacto y $\dim[X_2] = 1$, por el Teorema 2.3, tenemos que $\dim[X_1 \times X_2] = \dim[X_1] + 1$. Supongamos que para $n - 1$ con $n \geq 2$ se cumple que $\dim[X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n-1}] = \dim[X_1] + ((n - 1) - 1)$. Veamos que para $n \geq 2$ se cumple que $\dim[X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n] = \dim[X_1] + (n - 1)$.

Como $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n-1}$ es compacto y $\dim[X_n] = 1$, por el Teorema 2.3, tenemos que $\dim[X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n] = \dim[X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n-1}] + 1$. Como $\dim[X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n-1}] = \dim[X_1] + ((n - 1) - 1)$, tenemos que $\dim[X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n] = (\dim[X_1] + ((n - 1) - 1)) + 1 = \dim[X_1] + ((n - 2) + 1)$. Así, $\dim[X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n] = \dim[X_1] + (n - 1)$. \square

Definición 2.5. Dado $n \in \mathbb{N}$, al producto topológico de n intervalos $[0, 1]$ con la topología euclidiana se denota con I^n , donde $I^n = \prod_{k=1}^n I_k$ y para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $I_k = [0, 1]$. Una **n-celda** es un espacio topológico homeomorfo a I^n .

Notemos que la dimensión de una n -celda es n .

Teorema 2.6. [2, Teorema III.1] Sea X un espacio métrico separable. Si Y es un subespacio de X y $\dim[X] \leq n$, entonces $\dim[Y] \leq n$.

Teorema 2.7. [2, Teorema III.2] Sea X un espacio métrico separable. Si X es unión numerable de subconjuntos cerrados en X de dimensión menor o igual que n , entonces X tiene dimensión menor o igual que n .

3. Gráficas finitas con hiperespacio único $C_n(X)$

El propósito de esta sección consiste en el desarrollo detallado del trabajo realizado por Alejandro Illanes en [23]. Para obtener nuestro objetivo, fue necesario que en el transcurso de este capítulo agregáramos conceptos y resultados que no están en [23].

Definición 3.1. Una **gráfica finita** es un continuo que puede escribirse como la unión de una cantidad finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o bien se intersectan en uno o en sus dos puntos extremos, únicamente.

Definición 3.2. Sean A , un subconjunto no vacío de un espacio topológico X y β un número cardinal. Se dice que A es de **orden menor** o **igual** a β en X , denotado por $ord(A, X) \leq \beta$, si para cualquier conjunto abierto U de X con $A \subset U$ existe un conjunto abierto V de X , tal que $A \subset V \subset U$ y $|fr(V)| \leq \beta$. Si $A = \{p\}$ en lugar de escribir $ord(\{p\}, X) \leq \beta$ sólo se escribirá como $ord(p, X) \leq \beta$. Se dice que A es de **orden** β en X , denotado por $ord(A, X) = \beta$, si $ord(A, X) \leq \beta$ y para cualquier número cardinal $\alpha < \beta$, tenemos que $ord(A, X) \not\leq \alpha$.

Definición 3.3. Sea X una gráfica finita. Un punto p en X es un punto **ordinario** de X si $ord(p, X) = 2$. El punto p es un punto de **ramificación** de X si $ord(p, X) > 2$. Un punto p es un punto **extremo** de X si $ord(p, X) = 1$. La colección de puntos ordinarios de X , se denota por $O(X)$; la colección de puntos de ramificación de X , se denota por $R(X)$ y la colección de puntos extremos de X , se denota por $E(X)$. De esta forma una gráfica finita X puede expresarse de la siguiente manera $X = E(X) \cup O(X) \cup R(X)$.

Definición 3.4. Sea X una gráfica finita, un **ciclo** es una curva cerrada simple S contenida en X , para la que existe $a \in S$ tal que $S - \{a\}$ es un conjunto abierto en X .

Definición 3.5. Sea X una gráfica finita, un **arco libre** α es un arco de p a q contenido en X , tal que $\alpha - \{p, q\}$ es un conjunto abierto en X .

Definición 3.6. Sea X una gráfica finita, un **arco libre maximal** es un arco libre α , tal que si β es un arco libre contenido en X , con $\alpha \subset \beta$ tenemos que α es igual a β .

Entre los arcos libres maximales tenemos dos tipos, el primer tipo es un arco α de p a q tal que $p, q \in R(X)$. El segundo tipo es un arco α de p a q , tal que $p \in R(X)$ y $q \in E(X)$.

Definición 3.7. Sea X una gráfica finita, una **arista** en X es un arco libre maximal o un ciclo contenido en X .

De aquí en adelante consideramos a d como la métrica de longitud de arco en X , donde cada arista de X tiene longitud igual a 1.

Definición 3.8. Sea $n \in \mathbb{N}$. Un continuo X tiene **hiperespacio único** $C_n(X)$ si para cada continuo Y tal que $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y .

En 2002 la teoría de la unicidad de hiperespacios tiene sus inicios cuando Alejandro Illanes dirige la tesis doctoral de Gerardo Acosta, véase [1].

El siguiente resultado se encuentra en [24], enunciado como Teorema 6.1.7. A continuación exponemos una prueba distinta a la que el autor realizó en [24].

Teorema 3.9. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_n(X) - C_{n-1}(X)$ es denso en $C_n(X)$.*

Demostración. Sea \mathcal{U} un conjunto abierto en $C_n(X)$ y no vacío. Veamos que $\mathcal{U} \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X)) \neq \emptyset$. Sean $A \in \mathcal{U}$ y A_1, A_2, \dots, A_k las componentes de A tales que A_1, A_2, \dots, A_k son componentes no degeneradas, así, $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$.

(a) Si $k = n$, entonces tenemos que $\mathcal{U} \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X)) \neq \emptyset$.

(b) En el caso de que $k < n$. Como $A \in \mathcal{U}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$. Tomemos $B_1 = A_1, B_2 = A_2, \dots, B_{k-1} = A_{k-1}$ y $T \in C(A_k)$ tal que $T \in B_{C_n(X)}(A_k, \varepsilon)$ con $T \subset A_k$ y $T \neq A_k$. Sean $\{p_{k+1}\}, \{p_{k+2}\}, \dots, \{p_{n-k}\}$ puntos distintos tales que $\{p_{k+1}\}, \{p_{k+2}\}, \dots, \{p_{n-k}\} \subset A_k - T$ y además, tomemos a $B_k = T, B_{k+1} = \{p_{k+1}\}, B_{k+2} = \{p_{k+2}\}, \dots, B_n = \{p_{n-k}\}$. Notemos que $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n \in B_{C_n(X)}(A, \varepsilon)$. Así, $B \in \mathcal{U} \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$.

Por (a) y (b) podemos concluir que $C_n(X) - C_{n-1}(X)$ es denso en $C_n(X)$. \square

Corolario 3.10. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_n(X)$ es denso en ninguna parte en $C_{n+1}(X)$. En particular, $C_n(X)$ es denso en ninguna parte en 2^X .*

Demostración. Para probar este corolario veamos que $\text{int}_{C_{n+1}(X)} C_n(X) = \emptyset$. Sea \mathcal{U} un abierto en $C_{n+1}(X)$. Por el Teorema 3.9, tenemos que $\mathcal{U} \cap (C_{n+1}(X) - C_n(X)) \neq \emptyset$, así, $\mathcal{U} \not\subset C_n(X)$, por lo tanto, $\text{int}_{C_{n+1}(X)} C_n(X) = \emptyset$. \square

Los continuos localmente conexos son una clase especial y fundamental en el estudio de los continuos ya que estos son arco conexos y localmente arco conexos, véase Teorema 8.23 y Teorema 8.25 de [26].

Definición 3.11. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. El espacio topológico X es **localmente conexo en el punto** x si para cada conjunto abierto U en X , tal que $x \in U$ existe un conjunto abierto y conexo V en X , tal que $x \in V \subset U$. Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos decimos que X es **localmente conexo**.

Teorema 3.12. [4, Teorema 1.17] *Un espacio topológico X es localmente conexo si y sólo si toda componente de cada conjunto abierto en X es un conjunto abierto en X .*

El siguiente resultado lo usaremos para atender las pruebas de los Teoremas 3.52 y 3.56.

Teorema 3.13. [24, Teorema 6.1.4] *Sea X un continuo no degenerado. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) X es localmente conexo,
- (2) 2^X es localmente conexo,
- (3) $C(X)$ es localmente conexo,
- (4) $C_n(X)$ es localmente conexo, para $n \in \mathbb{N}$.

La siguiente definición generaliza la definición de triodo simple y el Teorema 3.15 nos es necesario en la prueba del Teorema 3.21.

Definición 3.14. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$. Un **n-odo simple** es un continuo T_n que es una unión de n arcos que se intersectan dos a dos en un punto p el cual es un punto extremo de cada uno de los n arcos. El punto p es llamado el vértice de T_n . En el caso en que $n = 3$, decimos que T_3 es un triodo simple.

Teorema 3.15. [26, Ejercicio 9.41] Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$. El continuo X es una gráfica finita si y sólo si cada punto de X tiene una vecindad cerrada la cual es un n -odo simple o un arco.

Teorema 3.16. [4, Teorema 3.24] Si X es un continuo y \mathcal{A} es no vacío y cerrado en 2^X , entonces $\bigcup \mathcal{A} \in 2^X$.

Notemos que la unión de una colección compacta de conjuntos compactos ($\mathcal{A} \in 2^{2^X}$), es un conjunto compacto.

Definición 3.17. Sea X un continuo. La **función unión** es la función $\bigcup : 2^{2^X} \rightarrow 2^X$ cuya regla de correspondencia es $\bigcup(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A} = \bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\}$, para cada $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$.

Teorema 3.18. [4, Teorema 3.26] Sea X un continuo, la función unión es continua.

Teorema 3.19. [4, Teorema 3.28] Sea X un continuo y \mathcal{K} es un subcontinuo de 2^X y $\mathcal{K} \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{K}$ es un subcontinuo de X .

Teorema 3.20. [26, Teorema 9.10.1] Cada subcontinuo de una gráfica finita es una gráfica finita.

Teorema 3.21. Sean X una gráfica finita, $n \in \mathbb{N}$ y $A \in C_n(X)$. Si $A \cap R(X) \neq \emptyset$, entonces para cada vecindad \mathcal{U} de A en $C_n(X)$ se cumple que $2n + 1 \leq \dim[\mathcal{U}]$.

Demostración. Sean \mathcal{U} una vecindad de A en $C_n(X)$, $p \in R(X) \cap A$. Como en la prueba de Teorema 3.9, tenemos que existen subcontinuos B_1, B_2, \dots, B_n de X ajenos dos a dos tales que $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n \in \mathcal{U}$ y $p \in B_1$. Llamemos $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$.

Sin perder generalidad supongamos que $p \in B_1$. Notemos que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tenemos que $B_i \neq X$.

Sea $\delta = \min\{d(B_j, B_i) : i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ con } i \neq j\}$ luego, $B_j \subset N(\frac{\delta}{2}, B_j)$ y $N(\frac{\delta}{2}, B_i) \cap N(\frac{\delta}{2}, B_j) = \emptyset$, para $i \neq j$, por la normalidad de X , tenemos que existen, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

subconjuntos abiertos T_j en X tales que $B_j \subset T_j \subset \overline{T_j} \subset N(\frac{\delta}{2}, B_j)$. Sea M_j la componente de T_j tal que $B_j \subset M_j$, por el Teorema 3.12 y como X es localmente conexo, tenemos que M_j es un conjunto abierto en X . Luego, $B_j \subset \overline{M_j} \subset \overline{T_j} \subset N(\frac{\delta}{2}, B_j)$.

Para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, sea $C_j = \overline{M_j}$. Tenemos que C_1, C_2, \dots, C_n son subcontinuos, no degenerados, de X ajenos dos a dos, tales que para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, inferimos que $B_i \subset \text{int}_X(C_i)$.

Sea $\mathcal{V} = \langle C_1, C_2, \dots, C_n \rangle_n$ y $\varphi : C(C_1) \times C(C_2) \times \dots \times C(C_n) \rightarrow \mathcal{V}$ definida por $\varphi(D_1, D_2, \dots, D_n) = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$. Notemos que $\varphi : C(C_1) \times C(C_2) \times \dots \times C(C_n) \rightarrow \mathcal{V}$ está bien definida ya que si $D_1 \in C(C_1), D_2 \in C(C_2), \dots, D_n \in C(C_n)$, implicamos que $(D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n) \subset \bigcup_{i=1}^n C_i$ y para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tenemos que $(D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n) \cap C_i \neq \emptyset$ así, $D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n \in \mathcal{V}$. Por lo tanto, $\varphi(C(C_1) \times C(C_2) \times \dots \times C(C_n)) \subset \mathcal{V}$.

Por demostrar que φ es un homeomorfismo. Por el Teorema 3.19, sabemos que la función $\psi : 2^X \times 2^X \times \dots \times 2^X \rightarrow 2^X$ definida por $\psi(F_1, F_2, \dots, F_n) = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$ es continua. Notemos que $\varphi = \psi|_{C(C_1) \times C(C_2) \times \dots \times C(C_n)}$, así, φ es continua.

Ahora veamos que φ es inyectiva. Tomemos $(G_1, G_2, \dots, G_n), (D_1, D_2, \dots, D_n) \in C(C_1) \times C(C_2) \times \dots \times C(C_n)$ tales que $\varphi(G_1, G_2, \dots, G_n) = \varphi(D_1, D_2, \dots, D_n)$ así, $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$. Si $x \in G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$, tenemos que existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $x \in G_j \subset C_j$, como $\bigcup_{i=1}^n G_i = \bigcup_{i=1}^n D_i$ y para $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tenemos que $D_i \cap C_j = \emptyset$ con $i \neq j$, así, $x \in \bigcup_{i=1}^n D_i$ luego para algún $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tenemos que $x \in D_j$. Para $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ concluimos que $D_j = G_j$. Así, $(G_1, G_2, \dots, G_n) = (D_1, D_2, \dots, D_n)$. Sea $B \in \mathcal{V}$, luego $B \subset \bigcup_{i=1}^n C_i$ y para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tenemos que $B \cap C_i \neq \emptyset$. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sean H_i las componentes de B y sin perder generalidad supongamos que $H_1 \in C(C_1), H_2 \in C(C_2), \dots, H_n \in C(C_n)$ así, $(H_1, H_2, \dots, H_n) \in C(C_1) \times C(C_2) \times \dots \times C(C_n)$ y $\varphi((H_1, H_2, \dots, H_n)) = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = B$. Por lo tanto, φ es sobreyectiva. Así, φ es un homeomorfismo.

Por el Teorema 3.20, implicamos que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, C_i es una gráfica finita, así, por el Teorema 3.15, tenemos que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, C_i contiene un arco o un m -odo con $m \geq 3$. Por [7, Lema 5.2], tenemos que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ existe una m_i -celda \mathcal{C}_i con $m_i \geq 2$ contenida en $C(C_i)$ tal que $B_i \in \mathcal{C}_i$. Además, $p \in R(X)$, y $p \in B_1$ así que $m_1 \geq 3$. Si \mathcal{C} es homeomorfo a $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \dots \times \mathcal{C}_n$, entonces \mathcal{C} es una m -celda para algún $m \geq 2n+1$ tal que contiene a B . Así, $B \in \mathcal{U} \cap \mathcal{C}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \cap \mathcal{C}$ contiene una m -celda \mathcal{C}_0 . Además, $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{C} \subset \mathcal{U}$, así, $2n+1 \leq \dim[\mathcal{C}_0] \leq \dim[\mathcal{U} \cap \mathcal{C}] \leq \dim[\mathcal{U}]$. En conclusión $\dim[\mathcal{U}] \geq 2n+1$. \square

Ejemplo 3.22. [7, Ejemplo 3] Si X es un arco o una curva cerrada simple, entonces $C(X)$ es una 2-celda.

Dada una gráfica finita X y $n \in \mathbb{N}$, para simplificar argumentos en lo que resta de este trabajo, definimos los siguientes conjuntos:

$\mathcal{L}_n(X) = \{A \in C_n(X) : A \text{ tiene una vecindad en } C_n(X) \text{ que es una } 2n\text{-celda}\}$ y

$$\mathcal{M}_n(X) = \begin{cases} \{A \in C(X) : A \cap R(X) = \emptyset\}, & \text{si } n = 1 \\ \{A \in C_n(X) : A \notin C_{n-1}(X) \text{ y } A \cap R(X) = \emptyset\}, & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

Teorema 3.23. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{M}_n(X) \subset \mathcal{L}_n(X)$.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{M}_n(X)$. Si $n = 1$, entonces $A \in C(X)$ y $A \cap R(X) = \emptyset$. Sea $\delta = d(A, R(X))$ y $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$. Luego, $N(\varepsilon, A) \cap R(X) = \emptyset$. Así, existe un subconjunto abierto V de X tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset N(\varepsilon, A)$. Sea U la componente de V tal que $A \subset U$, por el Teorema 3.12, tenemos que U es un conjunto abierto en X . Luego, $A \subset \overline{U} \subset \overline{V} \subset N(\varepsilon, A)$. Sea $J = \overline{U}$. Luego, $A \subset \text{int}_X(J)$ y J es un arco. Notemos que $C(J) = \langle J \rangle_n \cap C(X)$ y que $\langle \text{int}_X(J) \rangle_n \cap C(X) \subset \langle J \rangle_n \cap C(X)$ así, $C(J)$ es una vecindad de A en $C(X)$. Por el Ejemplo 3.22, tenemos que $C(J)$ es una 2-celda. Por lo tanto, $A \in \mathcal{L}_1(X)$. Si $n \geq 2$ y $A \in \mathcal{M}_n(X)$, entonces $A \in C_n(X) - C_{n-1}(X)$ y $A \cap R(X) = \emptyset$. Sean A_1, A_2, \dots, A_n las componentes de A . Sean $\alpha = \text{mín}\{d(A_i, A_j) : i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ con } i \neq j\}$ y $\delta = \text{mín}\{d(A_i, R(X)) : i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$. Sea $\varepsilon = \text{mín}\{\frac{\alpha}{2}, \frac{\delta}{2}\}$. Para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tenemos que $N(\varepsilon, A_i) \cap N(\varepsilon, A_j) = \emptyset$ y $N(\varepsilon, A_i) \cap R(X) = \emptyset$; con $i \neq j$, por la normalidad de X , existen subconjuntos abiertos T_j en X , tales que $A_j \subset T_j \subset \overline{T_j} \subset N(\varepsilon, A_j)$; sea M_j la componente de T_j tal que $A_j \subset M_j$, por el Teorema 3.12, tenemos que M_j es un conjunto abierto en X ; luego $A_j \subset \overline{M_j} \subset \overline{T_j} \subset N(\varepsilon, A_j)$. Para $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ sea $J_j = \overline{M_j}$. Observemos que J_1, J_2, \dots, J_n son subcontinuos, no degenerados, de X ajenos dos a dos, tales que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tenemos que $A_i \subset \text{int}_X(J_i)$ y $J_i \cap R(X) = \emptyset$. Por lo tanto, J_i son arcos. Sea $\mathcal{U} = \langle J_1, J_2, \dots, J_n \rangle_n$, luego $\langle \text{int}_X(J_1), \text{int}_X(J_2), \dots, \text{int}_X(J_n) \rangle_n$ es un conjunto abierto en $C_n(X)$, tal que $A \in \langle \text{int}_X(J_1), \text{int}_X(J_2), \dots, \text{int}_X(J_n) \rangle_n \subset \langle J_1, J_2, \dots, J_n \rangle_n$, así, \mathcal{U} es una vecindad de A en $C_n(X)$. Sea $\varphi : C(J_1) \times C(J_2) \times \dots \times C(J_n) \rightarrow \mathcal{U}$ definida por $\varphi(B_1, B_2, \dots, B_n) = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$. En la prueba del Teorema 3.21 se justificó que φ es un homeomorfismo. Por el Ejemplo 3.22, tenemos que $C(J_i)$ es una 2-celda para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, así, $C(J_1) \times C(J_2) \times \dots \times C(J_n)$ es una $2n$ -celda. Por lo tanto, \mathcal{U} es una $2n$ -celda. Con esto concluimos que $A \in \mathcal{L}_n(X)$. \square

Teorema 3.24. *Si X es una gráfica finita, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{W}_n(X) = \{A \in C_n(X) : A \cap R(X) = \emptyset\}$, entonces $\dim[\mathcal{W}_n(X)] \leq 2n$.*

Demostración. La demostración la realizamos por inducción. Si $n = 1$, y X es una curva cerrada simple, entonces por el Ejemplo 3.22, tenemos que $C(X)$ es una 2-celda. Así, $\dim[C(X)] = 2$. Observemos que $\mathcal{W}_1(X) \subset C(X)$. Por el Teorema 2.6, tenemos que $\dim[\mathcal{W}_1(X)] \leq \dim[C(X)]$ y $\dim[C(X)] \leq 2$, así que $\dim[\mathcal{W}_1(X)] \leq 2$. Supongamos que X no es una curva cerrada simple. Sea $A \in \mathcal{W}_1(X)$. Como $A \in C(X)$ y $A \cap R(X) = \emptyset$. Sea $\delta = \{d(A, R(X))\}$ y $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$. Luego, $N(\varepsilon, A) \cap R(X) = \emptyset$. Así, existe un subconjunto abierto V de X tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset N(\varepsilon, A)$. Sea U la componente de V tal que $A \subset U$, por el Teorema 3.12, tenemos que U es un conjunto abierto en X . Luego, $A \subset \overline{U} \subset \overline{V} \subset N(\varepsilon, A)$. Sea $J = \overline{U}$. Luego, $A \subset \text{int}_X(J)$ y J es un arco. Notemos que $C(J) = \langle J \rangle_n \cap C(X)$ y que $\langle \text{int}_X(J) \rangle_n \cap C(X) \subset \langle J \rangle_n \cap C(X)$ así, $C(J)$ es una vecindad de A en $C(X)$. Por el Ejemplo 3.22, tenemos que $C(J)$ es una 2-celda. Inferimos que $\dim_A[C(J)] = 2$. Como $C(J)$ es una vecindad de A en $C(X)$, tenemos que $\dim_A[C(J)] = \dim_A[C(X)]$. Así, para todo A en $\mathcal{W}_1(X)$ tenemos que $\dim_A[\mathcal{W}_1(X)] \leq \dim_A[C(X)]$, por lo tanto, $\dim[\mathcal{W}_1(X)] \leq 2$. Supongamos ahora que $n \geq 2$ y que el teorema es verdadero para $n - 1$. Sea $\mathcal{Z} = \{A \in C_{n-1}(X) : A \cap R(X) = \emptyset\}$. Notemos que $\mathcal{Z} = \mathcal{W}_n(X) \cap C_{n-1}(X)$. Como $C_{n-1}(X)$

es un conjunto cerrado en $C_n(X)$, tenemos que \mathcal{Z} es un conjunto cerrado en $\mathcal{W}_n(X)$, además, por hipótesis de inducción, tenemos que $\dim[\mathcal{W}_{n-1}(X)] \leq 2n - 2$. Así, $\dim[\mathcal{Z}] \leq 2n - 2$. Luego, $\mathcal{W}_n(X) = \mathcal{Z} \cup \mathcal{M}_n(X)$ y $\mathcal{Z} \cap \mathcal{M}_n(X) = \emptyset$. Por el Teorema 3.23, tenemos que $\mathcal{M}_n(X) \subset \mathcal{L}_n(X)$, así, $\dim[\mathcal{M}_n(X)] \leq 2n$. Como $\mathcal{M}_n(X) = \mathcal{W}_n(X) - \mathcal{Z}$ y \mathcal{Z} es un conjunto cerrado en $\mathcal{W}_n(X)$, tenemos que $\mathcal{M}_n(X)$ es un conjunto abierto en $\mathcal{W}_n(X)$. Como en un espacio métrico todo conjunto abierto es un conjunto F_σ , [8, pág. 76], tenemos que $\mathcal{M}_n(X)$ es un conjunto F_σ . Por lo tanto, $\mathcal{W}_n(X)$ es la unión numerable de conjuntos cerrados de dimensión menor o igual a $2n$, por el Teorema 2.7, tenemos que $\dim[\mathcal{W}_n(X)] \leq 2n$. \square

Definición 3.25. Sean X un continuo y $C \in 2^X$. Entonces decimos que el continuo X es separado por C si $X - C$ es disconexo.

Teorema 3.26. Si X es una gráfica finita, $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, y $A \in C_{n-1}(X) - C(X)$ es tal que $A \cap R(X) = \emptyset$, entonces existe una vecindad \mathcal{V} de A en $C_n(X)$ tal que cada vecindad cerrada \mathcal{W} de A en $C_n(X)$ contenida en \mathcal{V} es separada por un conjunto $\mathcal{S} \subset C_{n-1}(X)$ con $\dim[\mathcal{S}] \leq 2n - 2$.

Demostración. Sean $A \in C_{n-1}(X) - C(X)$, tal que $A \cap R(X) = \emptyset$ y A_1, A_2, \dots, A_m las componentes de A . Notemos que $2 \leq m < n$. Sean $\alpha = \min\{d(A_i, A_j) : i, j \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ con } i \neq j\}$, $\delta = \min\{d(A_i, R(X)) : i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$ y $\varepsilon = \min\{\frac{\alpha}{2}, \frac{\delta}{2}\}$. Luego, $N(\varepsilon, A_i) \cap N(\varepsilon, A_j) = \emptyset$ y $N(\varepsilon, A_i) \cap R(X) = \emptyset$ para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ con $i \neq j$, por la normalidad de X para $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, existe un conjunto abierto T_j en X tal que $A_j \subset T_j \subset \overline{T_j} \subset N(\varepsilon, A_j)$. Sea M_j la componente de T_j tal que $A_j \subset M_j$, por el Teorema 3.12, tenemos que M_j es un conjunto abierto en X y de aquí, M_j es no degenerado. Luego, $A_j \subset \overline{M_j} \subset \overline{T_j} \subset N(\varepsilon, A_j)$. Para cada $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, sea $J_j = \overline{M_j}$. Como J_j es un subcontinuo de X , por el Teorema 3.20, tenemos que J_j es una gráfica finita, como $J_j \cap R(X) = \emptyset$, $J_j \neq X$ y J_j es no degenerado, se obtiene que J_j es un arco. Para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, tenemos que $J_i \cap J_j = \emptyset$ y $A_i \subset \text{int}_X(J_i)$. Tomemos a $\mathcal{V} = \langle J_1, J_2, \dots, J_m \rangle_n$. Como $A \in \langle M_1, M_2, \dots, M_m \rangle_n \subset \mathcal{V}$, tenemos que \mathcal{V} es una vecindad de A en $C_n(X)$. Sean \mathcal{W} una vecindad cerrada de A en $C_n(X)$ tal que $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$, y consideremos los conjuntos

$$\mathcal{P} = \{B \in \mathcal{W} : B \cap J_1 \text{ tiene al menos dos componentes}\} \text{ y}$$

$$\mathcal{Q} = \{B \in \mathcal{W} : B \cap (J_2 \cup J_3 \cup \dots \cup J_m) \text{ tiene al menos } n - 1 \text{ componentes}\}.$$

Sean $C \in \mathcal{P}$, C_1, C_2, \dots, C_l las componentes de C con $m \leq l$ y $\delta_1 = \min\{\frac{d(C_i, C_j)}{2} : i, j \in \{1, 2, \dots, l\} \text{ con } i \neq j\}$. Sea $\varepsilon_1 = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta_1}{2}\}$, notemos que $B_{C_n(X)}(C, \varepsilon_1) \cap \mathcal{W}$ es un conjunto abierto en \mathcal{W} y está contenida en \mathcal{P} . De manera análoga, sean $D \in \mathcal{Q}$, D_1, D_2, \dots, D_k las componentes de D con $m \leq k$ y $\delta_2 = \min\{\frac{d(D_i, D_j)}{2} : i, j \in \{1, 2, \dots, k\} \text{ con } i \neq j\}$. Sea $\varepsilon_2 = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta_2}{2}\}$, así, $B_{C_n(X)}(D, \varepsilon_2) \cap \mathcal{W}$ es un conjunto abierto en \mathcal{W} y está contenido en \mathcal{Q} . Por lo tanto, \mathcal{P} y \mathcal{Q} son conjuntos abiertos en \mathcal{W} . Como \mathcal{W} es una vecindad de A , existe $\gamma > 0$ tal que $B_{C_n(X)}(A, \gamma) \subset \mathcal{W}$. Sea $p \in J_1 - A_1$ tal que $d(p, A_1) < \gamma$, notemos que $A \cup \{p\} \in B_{C_n(X)}(A, \gamma) \subset \mathcal{W}$ y que $(A \cup \{p\}) \cap J_1$ tiene dos componentes, donde $A \cup \{p\} \in \mathcal{P}$. Así, \mathcal{P} es no vacío. Sean $q_{m+1}, \dots, q_n \in J_2 - A_2$ puntos distintos tales que $d(q_i, A_2) < \gamma$, para $i \in \{m + 1, m + 2, \dots, n\}$ así, $A \cup \{q_{m+1}, \dots, q_n\} \in$

$B_{C_n(X)}(A, \gamma) \subset \mathcal{W}$, notemos que en este paso estamos usando la hipótesis de que $n \geq 3$, ya que $A \cup \{q_{m+1}, q_{m+2}, \dots, q_n\}$ tiene al menos 3 componentes; A_1, A_2 y $\{q_n\}$. Notemos que $(A \cup \{q_{m+1}, q_{m+2}, \dots, q_n\}) \cap (J_2 \cup J_3, \cup \dots \cup J_m)$ tiene al menos $n - 1$ componentes, de donde $A \cup \{q_{m+1}, q_{m+2}, \dots, q_n\} \in \mathcal{Q}$, así, \mathcal{Q} es no vacío. Supongamos que $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$, sea $B \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, luego, B tiene al menos $n + 1$ componentes lo cual es una contradicción ya que $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \subset C_n(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$. En conclusión, \mathcal{P} y \mathcal{Q} son subconjuntos abiertos de \mathcal{W} , no vacíos y disjuntos.

Sea $\mathcal{S} = \mathcal{W} - (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) = \{B \in \mathcal{W} : B \text{ tiene exactamente una componente contenida en } J_1 \text{ y } B \cap (J_2 \cup J_3 \cup \dots \cup J_m) \text{ tiene a lo más } n - 2 \text{ componentes}\}$. Notemos que $\mathcal{S} \subset C_{n-1}(X)$. Como \mathcal{W} es vecindad cerrada en $C_n(X)$ y $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ es un conjunto abierto en \mathcal{W} , tenemos que \mathcal{S} es un conjunto cerrado en $C_{n-1}(X)$. Luego, para cada $B \in \mathcal{S}$, tenemos que $B \cap R(X) = \emptyset$, así, $\mathcal{S} \subset \{B \in C_{n-1}(X) : B \cap R(X) = \emptyset\} = \mathcal{W}_{n-1}(X)$, por el Teorema 3.24, tenemos que $\dim[\mathcal{W}_{n-1}(X)] \leq 2n - 2$ y como $\mathcal{S} \subset \mathcal{W}_{n-1}(X)$, por el Teorema 2.6, implicamos que $\dim[\mathcal{S}] \leq 2n - 2$. Como $\mathcal{W} - \mathcal{S} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$, concluimos que \mathcal{W} es separado por un subconjunto cerrado \mathcal{S} en $C_{n-1}(X)$ tal que $\dim[\mathcal{S}] \leq 2n - 2$. \square

Teorema 3.27. Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, entonces $\mathcal{M}_n(X) = \mathcal{L}_n(X)$.

Demostración. Por el Teorema 3.23, tenemos que $\mathcal{M}_n(X) \subset \mathcal{L}_n(X)$. Sea $A \in \mathcal{L}_n(X)$, luego existe una vecindad \mathcal{U} de A en $C_n(X)$ tal que \mathcal{U} es una $2n$ -celda, así, la dimensión de \mathcal{U} es $2n$. Por el Teorema 3.21, tenemos que $A \cap R(X) = \emptyset$. Veamos que $A \notin C_{n-1}(X)$. Supongamos que $A \in C_{n-1}(X)$. Afirmamos que existe un elemento $A_0 \in C_{n-1}(X) - C(X)$ tal que $A_0 \in \text{int}_{C_n(X)}(\mathcal{U})$ y $A_0 \cap R(X) = \emptyset$.

(a) Si $A \in C_{n-1}(X) - C(X)$, entonces $A_0 = A$.

Supongamos que $A \in C(X)$ y X es una gráfica finita.

(b) Supongamos que $A = \{p\}$. Sean $\alpha > 0$, tal que $B_{C_n(X)}(A, \alpha) \subset \mathcal{U}$. Como $p \notin R(X)$, tenemos que $p \in O(X) \cup E(X)$, luego existe una arista J tal que $p \in \text{int}_X(J)$. Así, existe un arco $J_1 \in B_{C_n(X)}(A, \alpha)$ tal que $p \in J_1$ y $J_1 \subset \text{int}_X(J)$. Sean $J_2, J_3 \subset J_1 - p$ dos arcos ajenos. Sea $A_0 = J_2 \cup J_3$, luego $A_0 \in B_{C_n(X)}(A, \alpha)$ y $A_0 \in C_{n-1}(X) - C(X)$. Además $A_0 \in \text{int}_{C_n(X)}(\mathcal{U})$ y $A_0 \cap R(X) = \emptyset$.

Cuando X no es un arco o una curva cerrada simple y $A \cap R(X) = \emptyset$, entonces A es un conjunto singular o A es un arco.

(b.1) Si $A = \{p\}$, la demostración es como en el caso (b).

(c) Supongamos que A es un arco, denotemos al arco A por $[a, b]$. Sea $\alpha > 0$, tal que $B_{C_n(X)}(A, \alpha) \subset \mathcal{U}$. Luego, existe una arista J tal que $A \subset \text{int}_X(J)$. Sean $t \in \text{int}(A)$ y $J_2, J_3 \subset A - \{t\}$, con $J_2 \subset \text{int}_X([a, t])$ y $J_3 \subset \text{int}_X([t, b])$ dos arcos ajenos, tales que $J_2 \cup J_3 \in B_{C_n(X)}(A, \alpha)$. Sea $A_0 = J_2 \cup J_3$, luego $A_0 \in B_{C_n(X)}(A, \alpha)$ y $A_0 \in C_{n-1}(X) - C(X)$. Además $A_0 \in \text{int}_{C_n(X)}(\mathcal{U})$ y $A_0 \cap R(X) = \emptyset$.

Supongamos que X es un arco o una curva cerrada simple.

- (d) Si $A \neq X$, entonces $A = \{p\}$ o A es un arco. En estos casos la demostración es análoga a los casos (b) y (c).
- (e) Si $A = X$ y X es un arco, entonces su demostración es como el caso (c).
- (f) Supongamos que $A = X$ y X es una curva cerrada simple. Sean $\alpha > 0$, tal que $B_{C_n(X)}(A, \alpha) \subset \mathcal{U}$ y $p, q \in A$ con $p \neq q$. Sean A_1, A_2 las componentes de $A - \{p, q\}$. Tomemos J_1 un arco contenido en A_1 tal que $H(\overline{A_1}, J_1) < \alpha$ y J_2 un arco contenido en A_2 tal que $H(\overline{A_2}, J_2) < \alpha$. Sea $A_0 = J_1 \cup J_2$, luego $A_0 \in B_{C_n(X)}(A, \alpha)$ y $A_0 \in C_{n-1}(X) - C(X)$. Además $A_0 \in \text{int}_{C_n(X)}(\mathcal{U})$ y $A_0 \cap R(X) = \emptyset$.

Con esto terminamos la prueba de la afirmación. Sea \mathcal{V} una vecindad de A_0 en $C_n(X)$ como en el Teorema 3.26. Notemos que $A_0 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Luego, existe una vecindad cerrada \mathcal{W} de A_0 en $C_n(X)$ tal que $\mathcal{W} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ y \mathcal{W} es una $2n$ -celda. Por el Teorema 3.26 y la elección de \mathcal{V} , tenemos que \mathcal{W} puede ser separado por un subconjunto cerrado \mathcal{S} en \mathcal{W} tal que $\dim[\mathcal{S}] \leq 2n - 2$. Esto contradice a [2, Corolario del Teorema IV.4]. De donde $A \neq C_{n-1}(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{L}_n(X) \subset \mathcal{M}_n(X)$, así, $\mathcal{L}_n(X) = \mathcal{M}_n(X)$. \square

Definición 3.28. Dados X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{D}_n(X) = \{A \in C_n(X) : A \notin \mathcal{L}_n(X)\}$ y existe una base local \mathcal{B} de A en $C_n(X)$ tal que para cada $U \in \mathcal{B}$, tenemos que $\dim[U] \leq 2n$ y $U \cap \mathcal{L}_n(X)$ es arco conexo}.

Teorema 3.29. Sean X, Y gráficas finitas y $n \in \mathbb{N}$. Si $h : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ es un homeomorfismo, entonces $h(\mathcal{L}_n(X)) = \mathcal{L}_n(Y)$.

Demostración. Sea $C \in h(\mathcal{L}_n(X))$, existe $D \in \mathcal{L}_n(X)$ tal que $C = h(D)$. Como $D \in \mathcal{L}_n(X)$, tenemos que D tiene una vecindad en $C_n(X)$ que es una $2n$ -celda. Sea \mathcal{V} una vecindad de D en $C_n(X)$, tal que \mathcal{V} es una $2n$ -celda. Como h es un homeomorfismo, tenemos que $h(\mathcal{V})$ es una vecindad de $h(D) = C$ en $C_n(Y)$, y \mathcal{V} es homeomorfo a $h(\mathcal{V})$, así, $h(\mathcal{V})$ es una $2n$ -celda. Por lo tanto, $h(\mathcal{L}_n(X)) \subset \mathcal{L}_n(Y)$. Como $h^{-1} : C_n(Y) \rightarrow C_n(X)$ es un homeomorfismo, de manera análoga, tenemos que $h^{-1}(\mathcal{L}_n(Y)) \subset \mathcal{L}_n(X)$. Así, $\mathcal{L}_n(Y) = h(h^{-1}(\mathcal{L}_n(Y))) \subset h(\mathcal{L}_n(X))$. Por lo tanto, $h(\mathcal{L}_n(X)) = \mathcal{L}_n(Y)$. \square

Teorema 3.30. [9, Teorema 1.11] Sean X y Y espacios topológicos y $h : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. Si $x \in X$ y \mathcal{B}_x es una base local de x en X , entonces $\{h(B) : B \in \mathcal{B}_x\}$ es una base local de $h(x)$ en Y .

Teorema 3.31. Sean X, Y gráficas finitas y $n \in \mathbb{N}$. Si $h : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ es un homeomorfismo, entonces $h(\mathcal{D}_n(X)) = \mathcal{D}_n(Y)$.

Demostración. Sea $B \in h(\mathcal{D}_n(X))$. Entonces existe $A \in \mathcal{D}_n(X)$ tal que $B = h(A)$. Como $A \in \mathcal{D}_n(X)$, tenemos que $A \notin \mathcal{L}_n(X)$ y existe una base local \mathcal{B} de A en $C_n(X)$ tal que para cada $U \in \mathcal{B}$, tenemos que la $\dim[U] \leq 2n$ y $U \cap \mathcal{L}_n(X)$ es arco conexo. Como $h : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ es un homeomorfismo, por el Teorema 3.29, tenemos que $h(A) \notin \mathcal{L}_n(Y)$ y por el Teorema 3.30, tenemos que $h(\mathcal{B})$ es una base local de $h(A)$ en $C_n(Y)$. Además, \mathcal{B} es homeomorfo a $h(\mathcal{B})$, y para cada $h(U) \in h(\mathcal{B})$, por el Teorema 3.29, tenemos que $h(U) \cap \mathcal{L}_n(Y)$ es arco conexo y por el Lema 2.2, tenemos que $\dim[h(U)] \leq 2n$. Por lo tanto, $h(\mathcal{D}_n(X)) \subset \mathcal{D}_n(Y)$. Como $h^{-1} : C_n(Y) \rightarrow C_n(X)$ es un homeomorfismo, de manera análoga, tenemos que $h^{-1}(\mathcal{D}_n(Y)) \subset \mathcal{D}_n(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{D}_n(Y) = h(h^{-1}(\mathcal{D}_n(Y))) \subset h(\mathcal{D}_n(X))$. Así concluimos que $h(\mathcal{D}_n(X)) = \mathcal{D}_n(Y)$. \square

Teorema 3.32. [4, Teorema 3.9] Sean X un continuo, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de elementos de 2^X tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, donde $A, B \in 2^X$. Se cumple lo siguiente

- (1) Si $A_n \subset B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset B$.
- (2) $\lim (A_n \cup B_n) = A \cup B$.
- (3) Si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.
- (4) No siempre ocurre que $\lim A_n \cap B_n = A \cap B$.

Observación 3.33. Sean X una gráfica finita, $\varepsilon > 0$, $A \in C(X)$ tal que $A \cap R(X) = \emptyset$, U un subconjunto abierto y conexo en X tal que $A \subset U$ y $U \cap R(X) = \emptyset$ y $\mathcal{B} = \{B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \subset C_n(X) : N(\varepsilon, A) \subset U\}$. Podemos suponer que $N(\varepsilon, A)$ es un intervalo abierto y acotado contenido en \mathbb{R} . Además, notemos que si $M \in B_{C_n(X)}(A, \varepsilon)$, entonces $M \subset N(\varepsilon, A)$.

Observación 3.34. En la prueba del Teorema 3.41, para $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$, demostraremos que $\mathcal{U} \cap \mathcal{L}_n(X)$ es arco conexo, para realizar esta prueba necesitamos la Definición 3.35 y los Teoremas 3.37, 3.38 y 3.39.

Definición 3.35. Sean X, A, U y \mathcal{B} como en la Observación 3.33. Sean $\varepsilon > 0$, tal que $N(\varepsilon, A) \subset U$ y $M \in B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$. Las componentes de $N(\varepsilon, A) - M$ están **uniformemente distribuidas en** $N(\varepsilon, A)$ si cumple las siguientes condiciones

- (i) las componentes de $N(\varepsilon, A) - M$ tienen el mismo diámetro y
- (ii) las componentes de M tienen el mismo diámetro.

Observación 3.36. Sean X, A, U y \mathcal{B} como en la Observación 3.33 y sea $M \in B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$. Supongamos que las componentes de $N(\varepsilon, A) - M$ están uniformemente distribuidas en $N(\varepsilon, A)$. Sea l el diámetro de cada componente de M , δ el diámetro de cada componente de $N(\varepsilon, A) - M$, con $\delta < \frac{\varepsilon}{3n}$ y r el diámetro de la $N(\varepsilon, A)$. Entonces la n -ada (l, l, \dots, l) satisface la siguiente ecuación $x_1 + x_2 + \dots + x_n + (n+1)\delta = r$. Por lo tanto, $l = \frac{r - (n+1)\delta}{n}$.

En el Teorema 3.37 vemos que cualquier elemento $L \in B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$ tal que las componentes de $N(\varepsilon, A) - L$ tienen el mismo diámetro igual a δ , con $\delta < \frac{\varepsilon}{3n}$, puede unirse mediante un arco, a otro elemento $M \in B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, tal que las componentes de $N(\varepsilon, A) - M$ están uniformemente distribuidas en $N(\varepsilon, A)$.

Teorema 3.37. *Sean X, A y U como en la Observación 3.33. Si $\varepsilon > 0$ es tal que $N(\varepsilon, A) \subset U$, $L \in B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$ y las componentes de $N(\varepsilon, A) - L$ tienen el mismo diámetro igual a δ , con $\delta < \frac{\varepsilon}{3n}$, entonces existe $M \in B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$ tal que las componentes de $N(\varepsilon, A) - M$ están uniformemente distribuidas en $N(\varepsilon, A)$ y tienen el mismo diámetro igual a δ . Además, existe un arco α de L a M tal que $\alpha \subset B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$.*

Demostración. Sin perder generalidad, podemos suponer que $N(\varepsilon, A)$ es un intervalo abierto contenido en \mathbb{R} y de longitud r , contenido en un intervalo cerrado en \mathbb{R} . Supongamos que las componentes de $N(\varepsilon, A) - L$ tienen el mismo diámetro igual a δ . Sean L_1, L_2, \dots, L_n las componentes de L tal que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, tenemos que $l_i = \text{diám}(L_i)$ y $l = \frac{r - (n+1)\delta}{n}$, como lo definimos en la Observación 3.36. Sean $p = (l, l, \dots, l)$, $q = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ dos puntos en \mathbb{R}^n , \mathcal{H} la línea recta en \mathbb{R}^n que pasa por los puntos p, q y $[p, q]$ el segmento de la recta \mathcal{H} que tiene como puntos extremos a los puntos p y q . Las coordenadas de cualquier punto de la recta \mathcal{H} satisfacen la ecuación, $x_1 + x_2 + \dots + x_n + (n+1)\delta = r$. Sea $\alpha : [p, q] \rightarrow B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X)) \subset C_n(X)$ definida para cada $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in [p, q]$ por $\alpha((s_1, s_2, \dots, s_n)) = Z_1 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_n$, donde las componentes Z_1, Z_2, \dots, Z_n están contenidas en $N(\varepsilon, A)$ y para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tenemos que $s_i = \text{diám}(Z_i)$. Además, consideramos a las componentes Z_1, Z_2, \dots, Z_n de Z en $N(\varepsilon, A)$, en el siguiente orden

- (a) primero construimos en $N(\varepsilon, A)$ un intervalo abierto de longitud igual a δ ,
- (b) construimos un intervalo cerrado de longitud igual a s_1 , éste es Z_1 ,
- (c) pegado al intervalo anterior, construimos un intervalo abierto de longitud igual a δ ,
- (d) construimos otro intervalo cerrado de longitud s_2 , éste es Z_2 .

Así sucesivamente, consideramos a las componentes Z_3, \dots, Z_n . Notemos que la unión de estos intervalos abiertos y cerrados es $N(\varepsilon, A)$. Las componentes de Z y los conjuntos de $N(\varepsilon, A) - Z$, los consideramos dentro de $N(\varepsilon, A)$, en el orden y sólo en el orden que tienen sus diámetros. Observemos que existe una correspondencia única entre las n componentes de Z , en $N(\varepsilon, A)$, y las n coordenadas del punto (s_1, s_2, \dots, s_n) de $[p, q]$, donde (s_1, s_2, \dots, s_n) satisface la ecuación $x_1 + x_2 + \dots + x_n + (n+1)\delta = r$ y además, notemos que la suma de los diámetros de $N(\varepsilon, A)$ y de $N(\varepsilon, A) - Z$ es $\delta + s_1 + \delta + s_2 + \dots + \delta + s_n + \delta = r$. Sean $M \in B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$ y M_1, M_2, \dots, M_n las componentes de M , donde M_1, M_2, \dots, M_n tienen diámetro l y las componentes de $N(\varepsilon, A) - M$ tienen diámetro δ . Así las componentes de $N(\varepsilon, A) - M$ están uniformemente distribuidas en $N(\varepsilon, A)$. Por la definición de α , tenemos que $\alpha(p) = M$ y $\alpha(q) = L$. Observemos

que $\alpha([p, q]) \subset B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$ y α es inyectiva. Veamos que α es continua. Sean $t \in [p, q]$ y $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ en $[p, q]$ tal que $\lim t_k = t$. Sea $\alpha(t) = T$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $t_k = (t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, \dots, t_n^{(k)})$, luego para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tenemos que $\lim t_i^{(k)} = t_i$. Así, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sean $T_i^{(k)}$ y T_i los intervalos cerrados en $N(\varepsilon, A)$, tales que $t_i^{(k)} = \text{diám}(T_i^{(k)})$ y $t_i = \text{diám}(T_i)$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $k \in \mathbb{N}$, respectivamente. Además, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos $T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n = T$ y $T_1^{(k)} \cup T_2^{(k)} \cup \dots \cup T_n^{(k)} = T_k$. Por la distribución de las componentes de T_k y T en $N(\varepsilon, A)$, y que $\lim t_i^{(k)} = t_i$, tenemos que las sucesiones formadas por los extremos de cada arco $T_i^{(k)}$ para $k \in \mathbb{N}$, convergen a los extremos de cada arco T_i . Así que $\lim T_i^{(k)} = T_i$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Usando el Teorema 3.32 e inducción matemática, obtenemos que $\lim \alpha(t_k) = \lim (T_1^{(k)} \cup T_2^{(k)} \cup \dots \cup T_n^{(k)}) = \bigcup_{i=1}^n \lim T_i^{(k)} = \bigcup_{i=1}^n T_i = \alpha(t_1, t_2, \dots, t_n) = \alpha(t)$, conservando el orden en la unión. Por lo tanto, α es continua. Además, $\alpha([p, q])$ es homeomorfo a $[p, q]$. En conclusión, tenemos que $\alpha([p, q])$ es un arco contenido en $B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$ cuyos puntos extremos son $\alpha(p) = M$ y $\alpha(q) = L$. \square

En el siguiente teorema demostramos que cualquier elemento M de $B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$ tal que las componentes de $N(\varepsilon, A) - M$ están uniformemente distribuidas en $N(\varepsilon, A)$ y tienen el mismo diámetro igual a δ , con $\delta < \frac{\varepsilon}{3n}$, puede unirse mediante un arco a otro elemento S de $B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$ tal que las componentes de $N(\varepsilon, A) - S$ están uniformemente distribuidas en $N(\varepsilon, A)$ y tienen el mismo diámetro igual a $\frac{\varepsilon}{3n}$.

Teorema 3.38. *Sean X una gráfica finita y $A \in C(X)$ tal que $A \cap R(X) = \emptyset$. Sea U un subconjunto abierto en X y conexo tal que $A \subset U$ y $U \cap R(X) = \emptyset$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, A) \subset U$. Sea $M \in B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$. Supongamos que las componentes de $N(\varepsilon, A) - M$ están uniformemente distribuidas en $N(\varepsilon, A)$ y tienen el mismo diámetro igual a δ , con $\delta < \frac{\varepsilon}{3n}$. Entonces existe $S \in B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$ con la propiedad de que las componentes de $N(\varepsilon, A) - S$ están uniformemente distribuidas en $N(\varepsilon, A)$ y tienen el mismo diámetro igual a $\frac{\varepsilon}{3n}$. Además, existe un arco σ de M a S tal que $\sigma \subset B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$.*

Demostración. Sin perder generalidad, podemos suponer que $N(\varepsilon, A)$ es un intervalo abierto y acotado contenido en \mathbb{R} de longitud r , contenido en un intervalo cerrado en \mathbb{R} . Supongamos que las componentes de $N(\varepsilon, A) - M$ están uniformemente distribuidas en $N(\varepsilon, A)$ y tienen el mismo diámetro igual a δ , con $\delta < \frac{\varepsilon}{3n}$. Sea $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$, donde las componentes M_1, M_2, \dots, M_n están contenidas en $N(\varepsilon, A)$ y tienen diámetro $l = \frac{r - (n+1)\delta}{n}$. Ahora, tomemos $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$, donde las componentes S_1, S_2, \dots, S_n están contenidas en $N(\varepsilon, A)$ y tienen diámetro $m = \frac{3nr - (n+1)\varepsilon}{3n^2}$. Las coordenadas de los puntos $p = (m, m, \dots, m, \frac{\varepsilon}{3n})$ y $q = (l, l, \dots, l, \delta)$ en \mathbb{R}^{n+1} satisfacen la ecuación $x_1 + x_2 + \dots + x_n + (n+1)x_{n+1} = r$, donde $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Llamemos \mathcal{L} a la línea recta en \mathbb{R}^{n+1} que pasa por los puntos p, q y $[p, q]$ al segmento de la línea recta \mathcal{L} que tiene como puntos extremos a los puntos p y q . Sea $\sigma : [p, q] \rightarrow C_n(X)$ definida de la siguiente manera, para cada $(s_1, s_2, \dots, s_n, l_1) \in [p, q]$, tenemos que $\sigma((s_1, s_2, \dots, s_n, l_1)) = Z_1 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_n$, donde $Z = Z_1 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_n$ y Z tiene como componentes a Z_1, Z_2, \dots, Z_n contenidas en $N(\varepsilon, A)$, además,

para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tenemos que Z_i tiene diámetro $s_i = \text{diám}(Z_i)$ y $\delta \leq l_1 \leq \frac{\varepsilon}{3n}$. Las coordenadas del punto $(s_1, s_2, \dots, s_n, l_1)$ satisfacen la ecuación $x_1 + x_2 + \dots + x_n + (n+1)x_{n+1} = r$. Además, las componentes Z_1, Z_2, \dots, Z_n de Z las consideramos dentro de $N(\varepsilon, A)$, en el orden que tienen los subíndices, de la siguiente manera

- (a) primero construimos en $N(\varepsilon, A)$ un intervalo abierto de longitud igual a l_1 ,
- (b) construimos un intervalo cerrado de longitud igual a s_1 , éste es Z_1 ,
- (c) pegado al intervalo anterior, construimos un intervalo abierto de longitud igual a l_1
- (d) construimos otro intervalo cerrado de longitud s_2 , éste es Z_2 .

Así sucesivamente, consideramos a las componentes Z_3, \dots, Z_n . La unión de estos intervalos abiertos y cerrados es $N(\varepsilon, A)$. Las componentes de Z y los conjuntos de $N(\varepsilon, A) - Z$, los consideramos dentro de $N(\varepsilon, A)$, en el orden, y sólo en orden, que tienen sus diámetros, en la siguiente suma (en este caso consideremos dicha suma sin conmutar ningún elemento) $l_1 + s_1 + l_1 + s_2 + l_1 + \dots + l_1 + s_n + l_1 = r$. Por la definición de σ , tenemos que $\sigma(p) = S$ y $\sigma(q) = M$. Notemos que $\sigma([p, q]) \subset B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, y σ es inyectiva. La demostración de que σ es continua es análoga a la que dimos en el Teorema 3.37. Por lo tanto, $\sigma([p, q])$ es homeomorfo a $[p, q]$. En conclusión, tenemos que $\sigma([p, q])$ es un arco contenido en $B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, cuyos puntos extremos son $\sigma(p) = S$ y $\sigma(q) = M$. \square

La demostración del siguiente resultado es análoga a las demostraciones de los Teoremas 3.37 y 3.38.

Teorema 3.39. *Sea X una gráfica finita y $A \in C(X)$ tal que $A \cap R(X) = \emptyset$. Sea U un subconjunto abierto y conexo de X tal que $A \subset U$ y $U \cap R(X) = \emptyset$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, A) \subset U$. Sea $K \in B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$. Entonces existe $L \in B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$ tal que las componentes de $N(\varepsilon, A) - L$ tienen el mismo diámetro igual a δ . Además existe un arco α de K a L tal que $\alpha \in B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$.*

Teorema 3.40. *[4, Teorema 2.3] Si X es un continuo, $A \in 2^X$ y U es un conjunto abierto en X tal que $A \subset U$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $A \subset N(\varepsilon, A) \subset U$.*

Teorema 3.41. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, entonces $\mathcal{D}_n(X) = \{A \in C_n(X) : A \text{ es conexo y } A \cap R(X) = \emptyset\}$.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{D}_n(X)$. Luego, $A \notin \mathcal{L}_n(X)$ y existe una base local \mathcal{B} de A en $C_n(X)$ tal que para cada $U \in \mathcal{B}$, tenemos que $\dim[U] \leq 2n$ y $U \cap \mathcal{L}_n(X)$ es arco conexo. Notemos que para cada $T \in U$, por el Teorema 3.21, tenemos que $T \cap R(X) = \emptyset$. Por el Teorema 3.21, tenemos que $A \cap R(X) = \emptyset$. Veamos que A es conexo. Supongamos lo contrario, es decir, $A \notin C(X)$. Por el Teorema 3.27, tenemos que $A \notin \mathcal{M}_n(X)$, así $A \in C_{n-1}(X) - C(X)$. Por el Teorema 3.26, existe una

vecindad \mathcal{V} de A en $C_n(X)$ con las propiedades mencionadas en dicho teorema. Como $C_n(X)$ es un espacio métrico regular, elegimos $U \in \mathcal{B}$ tal que $cl_{C_n(X)}(U) \subset \mathcal{V}$. Por la elección de \mathcal{V} , y por el Teorema 3.26, tenemos que $cl_{C_n(X)}(U)$ puede ser separado por un conjunto cerrado \mathcal{S} en $C_{n-1}(X)$. Como se demostró en el Teorema 3.26, existen dos subconjuntos abiertos de $cl_{C_n(X)}(U)$, no vacíos, disjuntos, H y K , tales que $cl_{C_n(X)}(U) - \mathcal{S} = H \cup K$. Veamos que $H \cap U$ y $K \cap U$ son subconjuntos no vacíos y abiertos en $C_n(X)$. Sea $\mathcal{V}_1, \mathcal{W}_1$ conjuntos abiertos en $C_n(X)$, si $H = \mathcal{V}_1 \cap cl_{C_n(X)}(U)$ y $K = \mathcal{W}_1 \cap cl_{C_n(X)}(U)$, entonces $H \cap U = \mathcal{V}_1 \cap cl_{C_n(X)}(U) \cap U = \mathcal{V}_1 \cap U$ y $K \cap U = \mathcal{W}_1 \cap cl_{C_n(X)}(U) \cap U = \mathcal{W}_1 \cap U$. Por el Teorema 3.9, tenemos que $C_n(X) - C_{n-1}(X)$ es denso en $C_n(X)$, luego existen elementos $T \in H \cap U \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$ y $C \in K \cap U \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$. Notemos que $T, C \notin C_{n-1}(X)$, $T \cap R(X) = \emptyset$ y $C \cap R(X) = \emptyset$, así, $T, C \in \mathcal{M}_n \cap U$, por el Teorema 3.27, tenemos que $T, C \in \mathcal{L}_n(X) \cap U$. Como $U \cap \mathcal{L}_n(X)$ es arco conexo, entonces existe un subarco α de $U \cap \mathcal{L}_n(X)$ tal que α une a T y C . Como \mathcal{S} es un separador y $U \cap \mathcal{L}_n(X)$ es arco conexo, existe un elemento $D \in \alpha \cap \mathcal{S}$. Como $D \in \mathcal{L}_n(X) = \mathcal{M}_n(X)$, tenemos que $D \notin C_{n-1}(X)$. Esto es imposible dado que $D \in \mathcal{S} \subset C_{n-1}(X)$. Esto es una contradicción, así, A es conexo. Para probar la inclusión opuesta, tomemos $A \in C_n(X)$ tal que A es conexo y $A \cap R(X) = \emptyset$. Como $A \in C(X) \subset C_{n-1}(X)$, entonces $A \notin \mathcal{M}_n(X) = \mathcal{L}_n(X)$. Como A es conexo y $A \cap R(X) = \emptyset$, entonces existe un subconjunto abierto y conexo U de X tal que $A \subset U$ y $U \cap R(X) = \emptyset$. Sea $\mathcal{B} = \{B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \subset C_n(X) : N(\varepsilon, A) \subset U\}$. Por el Teorema 3.40, tenemos que $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{U} = B_{C_n(X)}(A, \varepsilon) \in \mathcal{B}$. Veamos que $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}_n(X)$. Sea $Z \in \mathcal{U}$, luego $Z \subset N(\varepsilon, A) \subset U$. Así, $Z \cap R(X) = \emptyset$, por la definición de $\mathcal{W}_n(X)$ en el Teorema 3.24, tenemos que $Z \in \mathcal{W}_n(X)$. Por el Teorema 3.24, tenemos que $\dim[\mathcal{U}] \leq 2n$. Notemos que $\mathcal{U} \cap \mathcal{L}_n(X) = \mathcal{U} \cap \mathcal{M}_n(X) = \mathcal{U} \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, por el Teorema 3.27 y la definición de $\mathcal{M}_n(X)$. Veamos que $\mathcal{U} \cap \mathcal{L}_n(X)$ es arco conexo. Dado $B \in \mathcal{U} \cap \mathcal{L}_n(X) = \mathcal{U} \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, por el Teorema 3.39, existe un conjunto cerrado L en $\mathcal{U} \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$ con la propiedad de que cada componente de $N(\varepsilon, A) - L$ tiene el mismo diámetro δ , con $\delta < \frac{\varepsilon}{3n}$ y existe un arco α de B a L , tal que $\alpha \in \mathcal{U} \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$. Por el Teorema 3.37, nosotros podemos conectar a L con un arco β , donde $\beta \subset \mathcal{U} \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, a un elemento M tal que cada componente de $N(\varepsilon, A) - M$ tiene el mismo diámetro δ y están uniformemente distribuidas en $N(\varepsilon, A)$. Finalmente, por el Teorema 3.38, tenemos que M está conectado por un arco σ , donde σ está contenido en $\mathcal{U} \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, a un elemento D con la propiedad de que cada componente de $N(\varepsilon, A) - D$ tiene el mismo diámetro igual a $\frac{\varepsilon}{3n}$ y las componentes están uniformemente distribuidas en $N(\varepsilon, A)$. Del arco α de B a L y del arco β de L a M , existe un arco γ de B a M . De manera análoga, del arco γ de B a M y del arco σ de M a D , existe un arco φ de B a D . Si T es otro elemento de $\mathcal{U} \cap \mathcal{L}_n(X)$, de manera análoga T y D se conectan con un arco en $\mathcal{U} \cap \mathcal{L}_n(X)$. Por lo tanto, B y T se conectan con un arco en $\mathcal{U} \cap \mathcal{L}_n(X)$. En conclusión $\mathcal{U} \cap \mathcal{L}_n(X)$ es arco conexo. Así, $A \in \mathcal{D}_n(X)$. \square

Teorema 3.42. [7, Teorema 1.1] *El continuo $C(X)$ es localmente conexo y de dimensión finita si y sólo si el continuo X es una gráfica finita.*

Teorema 3.43. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, entonces la $\dim[C_n(X)]$ es finita.*

Demostración. Vamos a probar, inductivamente, que $\dim[C_n(X)] \leq n \dim[C(X)]$. Por el Teorema 3.42, tenemos que la $\dim[C(X)]$ es finita, por lo tanto $\dim[C_n(X)]$ es finita. Para $n = 1$, tenemos que la $\dim[C(X)] \leq 1 \dim[C(X)]$. Supongamos que $n \geq 2$ y que la afirmación es verdadera para $n - 1$. Es decir, $\dim[C_{n-1}(X)] \leq (n - 1) \dim[C(X)]$. Sabemos que el continuo $C_n(X)$ lo podemos escribir como $C_n(X) = C_{n-1}(X) \cup (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, por el Teorema 2.7, basta demostrar que $\dim[C_n(X) - C_{n-1}(X)] \leq n \dim[C(X)]$. Veamos que para cada $B \in C_n(X) - C_{n-1}(X)$, tenemos que $\dim_B[C_n(X)] \leq n \dim[C(X)]$. Como $C_{n-1}(X)$ es un conjunto cerrado en $C_n(X)$, tenemos que $C_n(X) - C_{n-1}(X)$ es un conjunto abierto en $C_n(X)$. Sean B_1, B_2, \dots, B_n las componentes de B . Para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tomemos $\delta = \min\{d(B_i, B_j) : i \neq j\}$. Sea $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$. Luego, para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tenemos que $N(\varepsilon, B_i) \cap N(\varepsilon, B_j) = \emptyset$ con $i \neq j$, además, por la normalidad de X , tenemos que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, existen subconjuntos abiertos O_i en X tales que $B_i \subset O_i \subset \overline{O_i} \subset N(\varepsilon, B_i)$. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sea T_i la componente de O_i , tal que $B_i \subset T_i$. Como X es localmente conexo y por el Teorema 3.12, tenemos que T_j es un conjunto abierto en X para $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Luego, $B_i \subset \overline{T_i} \subset \overline{O_i} \subset N(\varepsilon, B_i)$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sea $J_i = \overline{T_i}$. Notemos que J_1, J_2, \dots, J_n son subcontinuos no degenerados de X ajenos dos a dos, tal que $B_i \in \text{int}_X(J_i)$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sea $\mathcal{U} = \langle J_1, J_2, \dots, J_n \rangle_n$. Notemos que \mathcal{U} es una vecindad cerrada de B en $C_n(X)$. Sea $\varphi : C(J_1) \times C(J_2) \times \dots \times C(J_n) \rightarrow \mathcal{U}$ definida por $\varphi(D_1, D_2, \dots, D_n) = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$. En la prueba del Teorema 3.21 mostramos que φ es un homeomorfismo. Por el Lema 2.2, tenemos que $\dim_B[\langle J_1, J_2, \dots, J_n \rangle_n] = \dim_{\varphi^{-1}(B)}[C(J_1) \times C(J_2) \times \dots \times C(J_n)]$. Además, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, notemos que $C(J_i) \subset C(X)$, por el Teorema 2.6, inferimos que $\dim[C(J_i)] \leq \dim[C(X)]$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Por el Teorema [2, Teorema III.4], inferimos que para un número finito de subespacios, se cumple que $\dim[C(J_1) \times C(J_2) \times \dots \times C(J_n)] \leq \dim[C(J_1)] + \dim[C(J_2)] + \dots + \dim[C(J_n)]$. Sabemos que $\dim_{\varphi^{-1}(B)}[C(J_1) \times C(J_2) \times \dots \times C(J_n)] \leq \dim[C(J_1) \times C(J_2) \times \dots \times C(J_n)]$. Además, $\dim[C(J_1)] + \dim[C(J_2)] + \dots + \dim[C(J_n)] \leq \dim[C(X)] + \dim[C(X)] + \dots + \dim[C(X)]$. Luego, $\dim_B[\langle J_1, J_2, \dots, J_n \rangle_n] \leq n \dim[C(X)]$. Como \mathcal{U} es una vecindad de B en $C_n(X)$, tenemos que $\dim_B[\langle J_1, J_2, \dots, J_n \rangle_n] = \dim_B[C_n(X)]$. Así, $\dim_B[C_n(X)] \leq n \dim[C(X)]$. \square

Las siguientes definiciones, n -variedad, frontera como variedad e interior como variedad nos son de gran utilidad en los resultados posteriores.

Definición 3.44. Sea $n \in \mathbb{N}$. Una n -**variedad** es un espacio métrico separable M tal que todo $p \in M$ tiene una vecindad V homeomorfa a I^n . El **interior como variedad** de una n -variedad M , que denotamos por $\text{intv}_{(n)}(M)$, es

$$\text{intv}_{(n)}(M) = \{p \in M : p \text{ tiene una vecindad homeomorfa a } \mathbb{R}^n\}.$$

La **frontera como variedad** de M , que denotamos por

$$\partial_n M = \{p \in M : p \notin \text{intv}_{(n)}(M)\}.$$

Con el siguiente resultado, Teorema 3.45, verificamos que un homeomorfismo entre n -variedades preserva el interior como variedad y la frontera como variedad.

Teorema 3.45. [9, Teorema 1.54] Si M_1 y M_2 son n -variedades y $h : M_1 \rightarrow M_2$ es un homeomorfismo, entonces

1. $h(intv_{(n)}(M_1)) = intv_{(n)}(M_2)$.
2. $h(\partial_n M_1) = \partial_n M_2$.

Los siguientes resultados, Teorema 3.46 y Teorema 3.47, nos muestran que el interior y la frontera de una n -celda en \mathbb{R}^n coinciden con el interior y frontera como variedad, respectivamente, de dicha n -celda.

Teorema 3.46. [9, Teorema 1.64] En \mathbb{R}^n , tenemos que $intv_{(n)}(I^n) = int_{\mathbb{R}^n}(I^n)$.

Notemos que la frontera como variedad de una 2-celda coincide con la frontera en \mathbb{R}^2 .

Teorema 3.47. [9, Teorema 1.65] En \mathbb{R}^n , tenemos que $\partial_n(I^n) = fr_{\mathbb{R}^n}(I^n)$.

Definición 3.48. Dados X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{E}_n(X) = \{A \in C(X) : \text{existe una 2-celda } \mathcal{V} \in C(X) \text{ tal que } A \in int_{C(X)}(\mathcal{V}) \cap \partial_n \mathcal{V}\}$.

Observación 3.49. Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, el conjunto $\mathcal{E}_n(X) \subset \mathcal{D}_n(X)$, ya que si $A \in \mathcal{E}_n(X)$, tenemos que $A \in C(X)$ y existe una 2-celda $\mathcal{V} \subset C(X)$ tal que $A \in int_{C(X)}(\mathcal{V})$, por el Teorema 3.21, implicamos que $A \cap R(X) = \emptyset$. Así, $A \in \mathcal{D}_n(X)$.

Teorema 3.50. Si X es una gráfica finita, X no es una curva cerrada simple y $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, entonces $\mathcal{E}_n(X) = \{\{p\} \in C_n(X) : p \in X - R(X)\} \cup \{E \in C(X) : E \text{ es un subarco en } X - R(X) \text{ y } E \text{ contiene un punto extremo de } X\}$.

Demostración. Sean $\Omega(X) = \{\{p\} \in C_n(X) : p \in X - R(X)\} \cup \{E \in C(X) : E \text{ es un subarco en } X - R(X) \text{ y } E \text{ contiene un punto extremo de } X\}$ y $\{q\} \in \mathcal{E}_n(X)$, por la Observación 3.49, tenemos que $\{q\} \in \mathcal{D}_n(X)$, luego, $q \notin R(X)$. inferimos que $q \notin R(X)$. Por lo tanto, $\{q\} \in \Omega(X)$. Si $\{q\} \in \Omega(X)$, entonces $q \notin R(X)$. Sea $A = [c, d]$ en X tal que $q \in A$ y $A \cap R(X) = \emptyset$; tenemos dos casos. (a) Supongamos que $q \notin E(X)$, así, tomamos un arco $[z, w]$ tal que $z, w \notin E(X)$ y $z \neq q \neq w$, luego, $\{q\} \in int(C([z, w]))$ y $\{q\} \in \partial_n C([z, w])$. Por lo tanto, $\{q\} \in \mathcal{E}_n(X)$. (b) Supongamos que $q \in E(X)$, tomemos el arco $[q, d]$. Luego, $\{q\} \in int(C([q, d]))$ y $\{q\} \in \partial_n C([q, d])$. Así, $\{q\} \in \mathcal{E}_n(X)$. Sea $A \in \mathcal{E}_n(X)$ tal que $|A| > 1$, por la Observación 3.49, tenemos que $A \in \mathcal{D}_n(X)$, luego, A es un subcontinuo contenido en X ; así, A es una subgráfica de X , pero $A \cap R(X) = \emptyset$, por lo tanto A es un arco (porque X no es una curva cerrada simple). Supongamos que A no contiene un punto extremo de X . Entonces, cualquier 2-celda que contiene a A , no lo contiene en su interior o no lo tiene en su frontera como variedad. Por lo tanto, A tiene un punto extremo, así, $A \in \Omega(X)$. Sea $A \in \Omega(X)$ tal que $|A| > 1$. Luego, $A = [c, d]$, donde $c \in E(X)$ y

$d \in O(X)$. Sea $\alpha = [c, t]$ tal que $[c, d] \subset [c, t]$, $[c, t] \cap R(X) = \emptyset$ y $d \neq t$, obtenemos que $[c, d]$ está en el interior de la 2-celda $C([c, t])$ y además, $[c, d] \in \partial_n C([c, t])$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{E}_n(X)$. \square

Teorema 3.51. *Si X, Y son gráficas finitas, $n \in \mathbb{N}$, y $h : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ es un homeomorfismo, entonces $h(\mathcal{E}_n(X)) = \mathcal{E}_n(Y)$.*

Demostración. Sea $B \in h(\mathcal{E}_n(X))$, existe $A \in \mathcal{E}_n(X)$ tal que $B = h(A)$. Como $A \in \mathcal{E}_n(X)$, existe una 2-celda \mathcal{V} en $C(X)$ tal que $A \in \text{int}_{C(X)}(\mathcal{V}) \cap \partial_n \mathcal{V}$. Por hipótesis tenemos que $h : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ es un homeomorfismo, así, $h(\mathcal{V})$ es una 2-celda en $C(Y)$. Notemos que \mathcal{V} y $h(\mathcal{V})$ son 2-variedades, tomemos $h|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \rightarrow h(\mathcal{V})$, por el Teorema 3.45, tenemos que $h(A) \in \text{int}_{C(Y)}(h(\mathcal{V})) \cap \partial_n h(\mathcal{V})$. Así, $B \in \mathcal{E}_n(Y)$. Por lo tanto, $h(\mathcal{E}_n(X)) \subset \mathcal{E}_n(Y)$. Como $h^{-1} : C_n(Y) \rightarrow C_n(X)$ es un homeomorfismo, de manera análoga, tenemos que $h^{-1}(\mathcal{E}_n(Y)) \subset \mathcal{E}_n(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{E}_n(Y) = h(h^{-1}(\mathcal{E}_n(Y))) \subset h(\mathcal{E}_n(X))$. Concluimos que $h(\mathcal{E}_n(X)) = \mathcal{E}_n(Y)$. \square

Teorema 3.52. *Si X es una gráfica finita, $n \in \mathbb{N}$ y Y un continuo tal que $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$, entonces Y es una gráfica finita.*

Demostración. Por el Teorema 3.43, tenemos que $C_n(X)$ tiene dimensión finita. Así, por el Lema 2.2, inferimos que $\dim[C_n(Y)] < \infty$. Como $C(Y) \subset C_n(Y)$ y por el Teorema 2.6, implicamos que $C(Y)$ tiene dimensión finita. Como X es localmente conexo, por el Teorema 3.13, tenemos que $C_n(X)$ es localmente conexo, de aquí implicamos que $C_n(Y)$ es localmente conexo. Así, por el Teorema 3.13, el continuo Y es localmente conexo. Por el Teorema 3.13, tenemos que $C(Y)$ es localmente conexo y como $C(Y)$ es de dimensión finita, por el Teorema 3.42, tenemos que Y es una gráfica finita. \square

Observación 3.53. Sean X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, observemos que $cl_{C_n(X)}(\mathcal{E}_n(X))$ es homeomorfo a X , ya que el conjunto $\{\{p\} \in C_n(X) : p \in X - R(X)\}$ es homeomorfo a $X - R(X)$ y los puntos del conjunto $\{E \in C(X) : E \text{ es un subarco en } X - R(X) \text{ y tal que } E \text{ contiene un punto extremo de } X\}$, forman arcos que extienden a los arcos externos, véase [5, Figura 3.1].

Teorema 3.54. *Sean X una gráfica finita, $n \in \mathbb{N}$ y Y un continuo tal que $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$.*

- (1) *Si $n = 1$ y X no es ni un arco ni una curva cerrada simple, entonces X es homeomorfo a Y .*
- (2) *Si $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, entonces X es homeomorfo a Y .*

Demostración. (1) Roman Duda, en [7, Teorema 9.1], prueba el caso $n = 1$, cuando X no es un arco, ni una curva cerrada simple.

(2) Cuando $n = 2$, Alejandro Illanes, en [22, Teorema 4.1], prueba que si X es una gráfica finita y $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y . Veamos el caso cuando $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$. Por el Teorema 3.52, tenemos que Y es una gráfica finita. Recordemos que $\mathcal{L}_n(Y) = \{A \in C_n(Y) : A \text{ tiene una vecindad en } C_n(Y) \text{ que es una } 2n\text{-celda}\}$ y $\mathcal{D}_n(Y) = \{A \in$

$C_n(Y) : A \notin \mathcal{L}_n(Y)$ y existe una base local \mathcal{B} en $C_n(Y)$ en A tal que para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$, tenemos que $\dim[\mathcal{U}] \leq 2n$ y $\mathcal{U} \cap \mathcal{L}_n(Y)$ es arco conexo}. Sea $h : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ un homeomorfismo. Por el Teorema 3.29, tenemos que $h(\mathcal{L}_n(X)) = \mathcal{L}_n(Y)$ y por el Teorema 3.31, inferimos que $h(\mathcal{D}_n(X)) = \mathcal{D}_n(Y)$. Por la Observación 3.53, tenemos que $cl_{C_n(X)}(\mathcal{E}_n(X))$ es homeomorfo a X . De manera análoga, implicamos que $cl_{C_n(Y)}(\mathcal{E}_n(Y))$ es homeomorfo a Y . Por el Teorema 3.51 tenemos que $h(\mathcal{E}_n(X)) = \mathcal{E}_n(Y)$ así, $h(cl_{C_n(X)}(\mathcal{E}_n(X))) = cl_{C_n(Y)}(\mathcal{E}_n(Y))$. Por lo tanto, X es homeomorfo a Y . \square

Teorema 3.55. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\min\{\dim_A[C_n(X)] : A \in C_n(X)\} = 2n$.*

Demostración. Sea $A \in C_n(X)$.

(1) Supongamos que $A \cap R(X) \neq \emptyset$. Por [25, Teorema 2.4], tenemos que $\dim_A[C_n(X)] = 2n + \sum_{q \in R(X) \cap A} (\text{ord}(q, X) - 2)$. Sea $q \in A \cap R(X)$, luego $\text{ord}(q, X) \geq 3$, así, $\text{ord}(q, X) - 2 \geq 1$. Por lo tanto, $\dim_A[C_n(X)] \geq 2n + 1$.

(2) Supongamos que $A \cap R(X) = \emptyset$. Por [25, Teorema 2.4], tenemos que $\dim_A[C_n(X)] = 2n + \sum_{q \in R(X) \cap A} (\text{ord}(q, X) - 2)$, como $A \cap R(X) = \emptyset$, tenemos que $\sum_{q \in R(X) \cap A} (\text{ord}(q, X) - 2) = 0$. Por lo tanto, $\dim_A[C_n(X)] = 2n$. En conclusión, por los casos (1) y (2), tenemos que $\min\{\dim_A[C_n(X)] : A \in C_n(X)\} = 2n$. \square

En el siguiente teorema, quitamos el caso cuando $n = 1$, $m = 1$ y X no es ni un arco, ni una curva cerrada simple, ya que éste es el caso (1) del Teorema 3.54

Teorema 3.56. *Si X una gráfica finita, $n, m \in \mathbb{N} - \{1\}$ y Y es un continuo tal que $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_m(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y .*

Demostración. Sean X una gráfica finita, $n, m \in \mathbb{N} - \{1\}$, Y un continuo y $h : C_n(X) \rightarrow C_m(Y)$ un homeomorfismo. Por el Teorema 3.43, tenemos que $C_n(X)$ tiene dimensión finita. Como $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_m(Y)$, por el Lema 2.2, inferimos que $C_m(Y)$ tiene dimensión finita y además, $\dim[C_n(X)] = \dim[C_m(Y)]$. Luego, $C(Y) \subset C_m(Y)$ y por el Teorema 2.6, implicamos que $C(Y)$ tiene dimensión finita. Como X es localmente conexo, por el Teorema 3.13, tenemos que $C_n(X)$ es localmente conexo, así, $C_m(Y)$ es localmente conexo. Por lo tanto, el continuo Y es localmente conexo. Por el Teorema 3.13, tenemos que $C(Y)$ es localmente conexo. Así, $C(Y)$ es localmente conexo y de dimensión finita. Por el Teorema 3.42, tenemos que Y es una gráfica finita. Por el Teorema 3.55, tenemos que $\min\{\dim_B[C_m(Y)] : B \in C_m(Y)\} = 2m$ y que $\min\{\dim_A[C_n(X)] : A \in C_n(X)\} = 2n$. Notemos que $\min\{\dim_A[C_n(X)] : A \in C_n(X)\} = \min\{\dim_{h(A)}[C_m(Y)] : h(A) \in C_m(Y)\}$, ya que $\dim[C_n(X)] = \dim[C_m(Y)]$. Por lo tanto, $n = m$. Así, $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$. Por el Teorema 3.54, concluimos que X es homeomorfo a Y . \square

Agradecimientos

Agradecemos a los árbitros su amable revisión que hicieron mejorar esta presentación.

Bibliografía

- [1] Gerardo Acosta, *Continuos con hiperespacio único*, Tesis de Doctorado en Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, 1999.
- [2] Gerardo Acosta, David Herrera Carrasco, *Dendrites without unique hyperspace*, Houston J. Math. 35 (2009), no. 2, 451-467.
- [3] Gerardo Acosta, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *Local dendrites with unique $C(X)$* , Topology Appl., 157 (2010), 2069-2085.
- [4] Vianey Córdova Salazar, *Elementos Básicos de Hiperespacios de Continuos*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2011. <http://www.fcfm.buap.mx/sec-acad/tesisL/VianeyCordovaSalazar.pdf>
- [5] Vianey Córdova Salazar, *Gráficas finitas con n -ésimo hiperespacio único*, Tesis de Maestría en Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014.
- [6] Vianey Córdova Salazar, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *La Topología de los Hiperespacios*, Matemáticas y sus Aplicaciones I, Textos Científicos, Fomento Editorial, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2011, págs. 291-300.
- [7] Roman Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph, I*, Fund. Math., 62 (1968), 265-286.
- [8] James Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, London, Sydney, Toronto, 1966.
- [9] Luis Alberto Guerrero Méndez, *Dendritas y Productos Simétricos*, Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2012.
- [10] Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera Carrasco, María de J. López y Fernando Macías Romero, *Meshed continua have unique second and third symmetric products*, enviado a Topology Appl.

- [11] Rodrigo Hernández Gutiérrez, Alejandro Illanes y Verónica Martínez de la Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, Rocky Mountain J. Math., 43(5) (2013), 1583-1624.
- [12] Rodrigo Hernández Gutiérrez, Alejandro Illanes y Verónica Martínez de la Vega, *Rigidity of hyperspaces*, por aparecer en Rocky Mountain J. Math.
- [13] David Herrera Carrasco, *Dendrites with unique hyperspace*, Houston J. Math., 33(3) (2007), 795-805.
- [14] David Herrera Carrasco, Alejandro Illanes, María de J. López, Fernando Macías Romero, *Dendrites with unique hyperspace $C_2(X)$* , Topology Appl. 156 (2009), 549-557.
- [15] David Herrera Carrasco, Alejandro Illanes, Fernando Macías Romero, Francisco Vázquez Juárez, *Finite graphs have unique hyperspace $HS_n(X)$* , Topology Proc. 44 (2014), 75-95.
- [16] David Herrera Carrasco, María de J. López, Fernando Macías Romero, *Dendrites with unique symmetric products*, Topology Proc. 34 (2009), 175-190.
- [17] David Herrera Carrasco, María de J. López y Fernando Macías Romero, *Framed continua have unique n -fold hyperspace suspension*, por aparecer en Topology Appl.
- [18] David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *Dendrites with unique n -fold hyperspace*, Topology Proc., 32 (2008), 321-337.
- [19] David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *Local dendrites with unique n -fold hyperspace*, Topology Appl., 158 (2011), 244-251.
- [20] David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Francisco Vázquez Juárez, *Peano continua with unique symmetric products*, Journal of Mathematics Research; 4(4) (2012), 1-9.
- [21] Witold Hurewicz, Henry Wallman, *Dimension Theory*, Princeton, 1948.
- [22] Alejandro Illanes, *The hyperspace $C_2(X)$ for a finite graph X is unique*, Glas. Mat. Ser. III 37(57) (2002), 347-369
- [23] Alejandro Illanes, *Finite graphs X have unique hyperspaces $C_n(X)$* , Topology Proc., 27 (2003), 179-188.
- [24] Sergio Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics Series, vol. 275, Chapman and Hall/CRC, Taylor and Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.
- [25] Verónica Martínez de la Vega, *Dimension of the n -fold hyperspaces of graphs*, Houston J. Math. 32 (2006) 783-799.

- [26] Sam Bernardo Nadler, Jr., *Continuum Theory. An introduction*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel
Edificio 111A Oficina Número 09B, Planta baja, Ciudad Universitaria
Puebla, Pue. C.P. 72570

214570943@alumnos.fcfm.buap.mx,
dherrera@fcfm.buap.mx,
fmacias@fcfm.buap.mx

Capítulo 8

Dendritas C -determinadas

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Germán Montero
Rodríguez
FCFM, BUAP

Resumen

Sea un continuo métrico X . Una familia Γ de continuos está C -determinada si para cualesquiera dos elementos X y Y de Γ tales que $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y . Sea $\mathfrak{D} = \{X : X \text{ es una dendrita, } E(X) \text{ es cerrado y } X \text{ no es homeomorfo a } [0, 1]\}$. En este capítulo se prueba que la familia \mathfrak{D} está C -determinada.

1. Introducción

El material que contiene este capítulo pertenece a la rama de la Topología conocida como Teoría de los Continuos e Hiperespacios de los Continuos. Esta teoría trata del estudio de las propiedades topológicas de espacios que son métricos, compactos, conexos y no vacíos. De hecho, a estos espacios les llamamos *continuos*. Sea $\mathfrak{D} = \{X : X \text{ es una dendrita no homeomorfa a } [0,1] \text{ y } E(X) \text{ es cerrado}\}$. En este capítulo damos las referencias adecuadas y los detalles completos de la demostración de que la familia \mathfrak{D} está C -determinada (vea el Teorema 3.31), originalmente este resultado se encuentra en [16, Teorema 6]. Trabajamos, en particular, con familias de subconjuntos especiales de un continuo X , llamadas hiperespacios de X . Consideramos los hiperespacios: 2^X (vea la Definición 2.1), $C(X)$ (vea la Definición 2.4) y $F_1(X)$ (vea la Definición 2.8). Todos los hiperespacios anteriores los consideramos con la métrica de Hausdorff (vea la Definición 2.3). Este capítulo está ordenado en dos secciones. En la Sección 1 damos las notaciones y definiciones de la Teoría de los Continuos e Hiperespacios de los continuos que necesitamos para desarrollar este trabajo. La Sección 2 está dedicada al estudio de las dendritas; se definen las dendritas F_ω y W quienes caracterizan a las dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado. Demostramos propiedades que posee la familia \mathfrak{D} . Trabajos relacionados con este capítulo son: [8], [11], [12], [13], [14], [17], [18], [19], [20], [27], etc.

2. Preliminares

Los conceptos que no definimos en este trabajo se encuentran en [22], [28], [4]. S. B. Nadler, Jr. introdujo en [28, (0.61)] el siguiente concepto: una familia Γ de continuos está *C-determinada* siempre que para cualesquiera dos elementos X y Y de Γ tales que $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$, se tiene que X es homeomorfo a Y . Algunos símbolos y notaciones usados a lo largo de este trabajo: los símbolos \mathbb{N} , \mathbb{Q} y \mathbb{R} denotan el conjunto de los *números naturales*, de los *números racionales* y de los *números reales*, respectivamente. Dada $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{R}^n denota el *n-espacio Euclidiano* con la métrica Euclidiana. Cuando $n > 1$, utilizamos $\|x - y\|$ para denotar la distancia entre los puntos x y y en \mathbb{R}^n . La distancia entre los puntos x y y en \mathbb{R} la denotamos por $|x - y|$. La letra I denota al intervalo unitario $[0, 1]$ con la topología usual. Dada $n \in \mathbb{N}$ una *n-celda* en X es un espacio homeomorfo a $I \times I \times \cdots \times I = I^n$. El *cubo de Hilbert* es el producto numerable $I^\infty = \prod_{i=1}^\infty I_i$, en donde $I_i = I$ para cada $i \in \mathbb{N}$, con la topología producto. La *bola unitaria cerrada n-dimensional* es el conjunto $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. La *esfera unitaria n-dimensional* en \mathbb{R}^{n+1} es el conjunto $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$. Una *n-esfera* es un espacio homeomorfo a S^n y una *curva cerrada simple* es un espacio homeomorfo a S^1 . Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces $\text{cl}(A)$ denota la *cerradura* de A en X . Si $A \subset Y \subset X$, entonces $\text{cl}_Y(A)$ denota la cerradura de A en el subespacio Y de X . Es fácil ver que $\text{cl}_Y(A) = \text{cl}(A) \cap Y$. La *frontera* de A en X está denotada por $\text{Fr}(A)$. Si $A \subset Y \subset X$, escribimos $\text{Fr}_Y(A)$ para referirnos a la frontera de A en el subespacio Y . El *interior* de A en X se denota por $\text{int}(A)$ y además, $\text{int}_Y(A)$ denota el interior de A en el subespacio Y . Si $p \in X$, una *vecindad* de p es un subconjunto V de X tal que $p \in \text{int}(V)$. Sea X un espacio métrico con métrica d . Si $a \in X$ y $\epsilon > 0$, la *ϵ -bola abierta* de a es $B(a, \epsilon) = \{x \in X : d(a, x) < \epsilon\}$. Cuando sea necesario distinguir que la bola está contenida en X , lo denotamos por $B_X(a, \epsilon)$.

También se utiliza el concepto de *Dimensión*. Se recomienda ([2, III.1] y [30, 1.1]) al lector hacer una revisión para esta sección.

Hiperespacios y convergencia

Comenzamos nuestro estudio definiendo el siguiente *hiperespacio* de un continuo X .

Definición 2.1. Dado un continuo X con métrica d , se define y se denota el *hiperespacio* 2^X de X como sigue.

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}.$$

A continuación mostramos como dotar a 2^X de una estructura de espacio métrico, bajo la cual resulta ser un continuo. Mientras no se diga lo contrario, consideramos que la letra X representa un continuo con métrica d .

Definición 2.2. Sean $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. La *ϵ -nube* de A es el conjunto $N(\epsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(a, x) < \epsilon\}$.

En [1, Teorema 7] y [8, Lema 2.1] puede encontrar propiedades de dichas nubes. A continuación se define una función para 2^X .

Definición 2.3. Si A y $B \in 2^X$, entonces se define $H(A, B) = \inf\{\epsilon > 0: A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}$.

Note que H es una función del producto cartesiano $2^X \times 2^X$ a los números reales no negativos. En [28, (0.2)] está demostrado que $H : 2^X \times 2^X \rightarrow [0, \infty)$ es una métrica para 2^X , llamada *métrica de Hausdorff*. La topología determinada por la métrica de Hausdorff, sobre 2^X , sólo depende de la topología de X . Esto significa que si d y e son dos métricas para X tales que $\tau_d = \tau_e$, entonces $\tau_{H_d} = \tau_{H_e}$ [4, 4.6]. En [28, (0.8)] se prueba que 2^X es compacto y, en [28, (1.9)], que 2^X es arco conexo (independientemente de que X sea o no arco conexo). Luego, 2^X es un continuo.

Ahora se define el siguiente hiperespacio de un continuo.

Definición 2.4. Si X es un continuo, se define el *hiperespacio* $C(X)$ de X como sigue.

$$C(X) = \{A \in 2^X: A \text{ es conexo}\}.$$

A $C(X)$ se le llama el *hiperespacio de los subcontinuos de X* .

Observemos que $C(X)$ es no degenerado porque X es no degenerado. Además la restricción de la métrica de Hausdorff H a $C(X)$, hace de éste un espacio métrico. Al igual que en el caso de 2^X , la topología de $C(X)$ inducida por la métrica de Hausdorff, solamente depende de la topología de X . En [28, (0.8)], está demostrado que $C(X)$ es compacto y en [28, (1.12)], que $C(X)$ es arco conexo (también esto es independiente de la arco conexidad de X). Por lo tanto, $C(X)$ es un continuo.

Otro de los hiperespacios con el que trabajamos es el siguiente.

Definición 2.5. Sean X un continuo y $B \subset X$ un subcontinuo. Se define el *hiperespacio* $C(B, X)$ de X como sigue.

$$C(B, X) = \{A \in C(X): B \subset A\}.$$

A $C(B, X)$ se le llama el *el hiperespacio de los continuos que contienen a B* .

En particular, denotamos $C(\{p\}, X)$ por $C(p, X)$, para cualquier elemento $p \in X$. Observemos que si $B \in C(X) - \{X\}$, entonces $C(B, X)$ es no degenerado y la restricción de la métrica de Hausdorff H a $C(B, X)$, hace de éste un espacio métrico.

Teorema 2.6. [11, Teorema 2.20. (2)] Sean Z un espacio topológico y $U \subset T \subset Z$, donde U es un abierto en Z y T es un cerrado en Z . Entonces $\text{Fr}_T(U) = \text{Fr}_Z(U)$.

En [10, Teorema 4] está demostrada una condición bajo la cual el hiperespacio $C(p, X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert I^∞ .

Teorema 2.7. Sean X un continuo y $p \in X$. Supongamos que X es localmente conexo en cada punto de un conjunto abierto que contiene a p . Entonces $C(p, X)$ es homeomorfo a I^∞ si y sólo si p no está en el interior, relativo a X , de una gráfica finita en X .

Otro hiperespacio del continuo X que consideramos en este trabajo, es el siguiente:

Definición 2.8. Si X es un continuo, se define el hiperespacio $F_1(X)$ como sigue.

$$F_1(X) = \{\{p\} : p \in X\}.$$

Es claro que $F_1(X)$ es un subconjunto no degenerado de 2^X . La restricción de la métrica de Hausdorff H a $F_1(X)$, hace de éste un espacio métrico. Más aún tenemos que $F_1(X)$ es isométrico a X .

Para un espacio topológico X , una sucesión en X se denota por $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Entendemos, por supuesto, que $x_n \in X$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al punto $x \in X$, escribimos $\lim x_n = x$.

Definición 2.9. Sean (S, τ) un espacio topológico, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de S , sean el límite inferior y el límite superior de $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como siguen: $\liminf A_n = \{x \in S : \text{si } x \in U \text{ con } U \in \tau, \text{ entonces } U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para todo natural } n \text{ salvo un número finito}\}$ y $\limsup A_n = \{x \in S : \text{si } x \in U \text{ con } U \in \tau, \text{ entonces } U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para un número infinito de naturales } n\}$. Si $\liminf A_n = A = \limsup A_n$, en donde $A \subset S$, entonces A es el *límite* de $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y lo denotamos como $A = \lim A_n$.

A continuación damos un resultado básicos con respecto a la convergencia de sucesiones de elementos de 2^X (vea [1, Teorema 20], [4, Sección 2. Pág. 56], etc.)

Teorema 2.10. Sean X un continuo y $A, B \in 2^X$. Supongamos que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son dos sucesiones en 2^X tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$. Entonces

- (1) si $A_n \subset B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset B$;
- (2) si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$;
- (3) $\lim (A_n \cup B_n) = A \cup B$.

Arcos Ordenados

Una herramienta muy poderosa en los hiperespacios de un continuo X , es la existencia de arcos ordenados.

Definición 2.11. Sea $\mathcal{T} \in \{2^X, C(X)\}$. Supongamos que $A, B \in \mathcal{T}$ y $A \subsetneq B$. Un *arco ordenado* de A a B en \mathcal{T} es una función continua $\lambda : I \rightarrow \mathcal{T}$ tal que $\lambda(0) = A$, $\lambda(1) = B$ y $\lambda(s) \subsetneq \lambda(t)$ siempre que $s < t$, para $s, t \in I$.

Algunas veces identificamos a un arco ordenado con su imagen. Como la función λ de la Definición 2.11 es inyectiva, su imagen es un arco. De manera que a veces denotamos por λ a la función y otras a su imagen.

Respecto a arcos ordenados comentamos lo siguiente. De los resultados de 14.2 hasta 14.6 en [22], tenemos una condición de existencia de arcos ordenados: supongamos que A y B son subcontinuos de X tales que $A \subset B$ y $A \neq B$. Entonces existe un arco ordenado contenido en $C(X)$ cuyos extremos son A y B . En [28, (1.8)], se demuestra el siguiente resultado: para que exista un arco ordenado de un elemento $A \in 2^X$ a un elemento $B \in 2^X$, se requiere que $A \subset B$ y que cada componente de B intersekte a A .

n -odos y n -celdas

Dos conceptos ligados entre los hiperespacios y el continuo que los define son los de n -odos y n -celdas: cuando un continuo X contiene un n -odo, en el hiperespacio $C(X)$ aparece una n -celda y recíprocamente.

Definición 2.12. Sean X un continuo y n un número natural. Un n -odo en X es un elemento $B \in C(X)$ para el cual existe un subcontinuo A de B tal que $B - A$ tiene al menos n componentes (en este caso, al continuo A le llamamos *corazón* de B). Un continuo X es *atriódico* si no contiene 3-odos.

Es claro que si X contiene un n -odo, entonces contiene un m -odo, para cada $m \leq n$. Un ejemplo muy especial de n -odo es el llamado n -odo *simple*.

Definición 2.13. Sean X un continuo y n un número natural, X es un n -odo *simple* con vértice $p \in X$, si X es un n -odo tal que:

- (1) el corazón de X es el conjunto p ;
- (2) $X - \{p\}$ tiene exactamente n componentes C_1, C_2, \dots, C_n tales que, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, el conjunto $C_i \cup \{p\}$ es un arco.

Un triodo simple o 3-odo simple es, por lo tanto, un continuo homeomorfo a la letra T, mientras que un 4-odo simple es un continuo homeomorfo a la letra X. Existe una relación entre n -odos en X y n -celdas en $C(X)$.

Teorema 2.14. [2, Lema 8] Sean X un continuo y $K \in C(X)$. Si T es un n -odo en X tal que para alguna $\epsilon > 0$ sucede que $T \in B_{C(X)}(K, \frac{\epsilon}{2})$, entonces existe una n -celda Γ en $C(X)$ tal que $T \in \Gamma \subset B_{C(X)}(K, \epsilon)$.

El Teorema 2.14 lo utilizamos en la prueba del Teorema 3.24.

3. Dendritas y Dendroides

Definición 3.1. Una dendrita es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples, es decir que no contiene continuos homeomorfos a la circunferencia unitaria S^1 .

Un continuo X es *unicoherente*, si para cualesquiera dos subcontinuos A y B de X tales que $A \cup B = X$, resulta que la intersección $A \cap B$ es conexa; X es *hereditariamente unicoherente* si todos sus subcontinuos son unicoherentes.

Notemos que la circunferencia S^1 no es unicoherente. Para esto tomemos $A = \{(x, y) \in S^1 : y \geq 0\}$ y $B = \{(x, y) \in S^1 : y \leq 0\}$. Entonces $S^1 = A \cup B$, $A, B \in C(S^1)$ y $A \cap B = \{(1, 0), (-1, 0)\}$ no es conexo. Como consecuencia de lo anterior, tenemos que las curvas cerradas simples no son unicoherentes.

La clase de las dendritas está contenida en una clase más amplia de continuos, que se llaman dendroides.

Definición 3.2. Un *dendroide* es un continuo hereditariamente unicoherente y arco conexo.

Efectivamente las dendritas son dendroides.

Teorema 3.3. [4, 10.9 y 10.10] *Un continuo X es una dendrita si y sólo si X es un dendroide localmente conexo.*

Todo dendroide X posee las siguientes dos propiedades:

- (1) para cada $x, y \in X$ existe un único arco con puntos extremos x y y que denotamos por $[x, y]$;
- (2) todo subcontinuo de un dendroide es un dendroide.

Aclaremos que si X es un dendroide y $x, y \in X$, el arco $[x, y]$ denota el arco con puntos extremos x y y . Esto es $[x, y] = [y, x]$, con esto queremos decir que el orden no importa. Además, a menos que se diga lo contrario, entendemos que un arco es un conjunto no degenerado. También denotamos $(x, y) = [x, y] - \{x, y\}$, $[x, y) = [x, y] - \{y\}$, $(x, y] = [x, y] - \{x\}$ y $[x, x] = \{x\}$.

En los dendroides se puede definir una relación de orden parcial como sigue:

Definición 3.4. Sean X un dendroide y $p \in X$. Una *relación* con respecto a p , denotada por \leq_p , es: $x \leq_p y$ si y sólo si $x \in [p, y]$. Si $x \leq_p y$ y $x \neq y$, entonces escribimos $x <_p y$.

Luego, \leq_p , es un orden parcial en un dendroide.

Definición 3.5. Sean X un dendroide y $p \in X$, X es *suave en p* si para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X tal que $\lim x_n = x$, tenemos $\lim [p, x_n] = [p, x]$; X es *suave* si es suave en algún $p \in X$.

La definición de dendroide suave tiene su origen en [5]. S. Macías realizó un amplio estudio en este tema que se encuentra publicado en [25].

Existe un gran número de caracterizaciones y propiedades de las dendritas. Algunas de ellas se encuentran en [6].

Teorema 3.6. [24, Teorema 8] *Sea X un dendroide. Entonces X es una dendrita si y sólo si X es suave en todos sus puntos.*

Otros conceptos relacionados con las dendritas son los siguientes.

Definición 3.7. Un subcontinuo no degenerado A de un continuo X es un *continuo de convergencia* de X , si existe una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $C(X)$ tal que $\lim A_n = A$ y $A \cap A_n = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición 3.8. Un continuo X es *hereditariamente localmente conexo* si todo subcontinuo de X es localmente conexo.

La Definición de Orden

Ahora damos las definiciones de punto extremo, punto ordinario y punto de ramificación en un continuo, las cuales utilizamos con mucha frecuencia en este trabajo.

Definición 3.9. Sean X un continuo y $x \in X$.

- (a) Si $\text{ord}(x, X) = 1$, x es un *punto extremo* de X .
- (b) Si el $\text{ord}(x, X) = 2$, x es un *punto ordinario* de X .
- (c) Si $\text{ord}(x, X) \geq 3$, x es un *punto de ramificación* de X .

Si X es un continuo, denotamos por $E(X)$, $O(X)$ y $R(X)$ a los conjuntos de puntos extremos, puntos ordinarios y puntos de ramificación de X , respectivamente. Para cualquier dendrita X , tenemos que $X = O(X) \cup R(X) \cup E(X)$ y el conjunto $E(X)$ como la unión de los conjuntos ajenos $E_1(X)$ y $E_2(X)$, donde $E_1(X) = \{p \in E(X) : p \text{ es un punto aislado de } E(X)\}$ y $E_2(X) = E(X) - E_1(X)$.

Aunque la noción de orden se puede presentar para puntos de un espacio topológico arbitrario [23, pág. 274], en este trabajo la utilizamos únicamente para puntos de un dendroide o bien de una gráfica finita. En dicha situación, el orden en un punto es un número natural, el cardinal \aleph_0 o bien el ordinal ω . Denotamos $\text{card}(A)$ la cardinalidad del conjunto A . Además, denotamos $\mathfrak{c} = \text{card}(\mathbb{R})$ y $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$.

Definición 3.10. Sea X un dendroide o bien una gráfica finita. Dado $p \in X$, el orden de X en p , denotado por $\text{ord}(p, X)$, queda determinado como sigue:

- (1) $\text{ord}(p, X) = n$ si $X - \{p\}$ tiene justo n componentes.

(2) $\text{ord}(p, X) = \aleph_0$ si $X - \{p\}$ tiene una cantidad infinita numerable de componentes cuyo diámetro no tiende a cero.

(3) $\text{ord}(p, X) = \omega$ si $X - \{p\}$ tiene una cantidad infinita numerable de componentes cuyo diámetro tiende a cero.

Por [4, 9.10], cualquier gráfica finita G satisface las dos condiciones siguientes:

(1) $\text{ord}(p, G) < \aleph_0$ para toda $p \in G$;

(2) $\text{ord}(p, G) \leq 2$ para todos excepto un número finito de elementos $p \in G$.

Por (2), el conjunto $R(G)$ es finito. Por (1) y la definición de gráfica finita, el conjunto $E(G)$ es finito. Todos los puntos restantes, tiene orden igual a 2 y así, el conjunto $O(G)$ es denso en G .

Para ilustrar la noción de orden consideremos, en \mathbb{R}^2 , los dos dendroides siguientes.

El primero no es localmente conexo: $X = (\bigcup_{n=1}^{\infty} [q, a_n]) \cup [q, q_1]$, donde $q = (0, 0)$, $q_1 = (1, 0)$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (1, \frac{1}{n})$, $[q, a_n]$ denota el segmento de recta en \mathbb{R}^2 que une a q con a_n , y $[q, q_1]$ denota el segmento de recta en \mathbb{R}^2 que une a q con q_1 . Los puntos a_n son los puntos extremos de X , los puntos en el interior de los arcos $[q, a_n]$ son puntos ordinarios de X y todo el arco $[q, q_1]$ son los puntos de ramificación de X (observemos que el conjunto de puntos extremos de X no es cerrado). El punto de ramificación q del dendroide X es tal que $\text{ord}(q, X) = \aleph_0$ (en este caso, $X - \{q\}$, tiene una cantidad infinita numerable de componentes cuyo diámetro no tiende a cero).

Ahora consideremos el siguiente dendroide, es localmente conexo (por lo tanto es una dendrita, vea Teorema 3.3): $F_\omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} [p, a_n]$, donde $p = (0, 0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ y $[p, a_n]$ denota el segmento de recta en \mathbb{R}^2 que une a p con a_n . La dendrita F_ω sólo tiene un punto de ramificación p y $\text{ord}(p, F_\omega) = \omega$ (en este caso, $F_\omega - \{p\}$, tiene una cantidad infinita numerable de componentes cuyo diámetro tiende a cero).

Los puntos a_n son los puntos extremos de F_ω (observemos que el conjunto de puntos extremos de F_ω no es cerrado), p es el único punto de ramificación de F_ω , los puntos restantes, son los puntos ordinarios de F_ω .

Recordemos que una *gráfica finita* es un continuo que se puede expresar como la unión de una cantidad finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos, son ajenos o bien se intersectan en uno o en sus dos puntos extremos. Un *árbol* es una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples.

De acuerdo a [15, pág. 1583] para un continuo X , sean

$$\mathcal{G}(X) = \{x \in X : x \text{ tiene una vecindad } G \text{ en } X \text{ tal que } G \text{ es una gráfica finita}\},$$

$$\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X),$$

Los siguientes tres conjuntos son introducidos de manera original, para un continuo X .

$$\mathfrak{P}_1(X) = \{x \in X : \text{existe una sucesión de elementos diferentes dos a dos contenidos en } R(X) \cap \mathcal{G}(X) \text{ que convergen a } x\},$$

$$\mathfrak{P}_2(X) = \{x \in X : x \in R(F_\omega) \cup R(HE)\},$$

donde HE es el *arete Hawaiano* descrito en [22, 19.17],

$$\mathfrak{P}_3(X) = \{x \in X : \text{existe una sucesión de puntos diferentes contenida en } \mathcal{P}(X) \text{ que converge a } x\}.$$

Sea X un dendroide y $S(X) = \mathfrak{P}_1(X) \cup \mathfrak{P}_2(X) \cup \mathfrak{P}_3(X)$. En esta sección estudiamos el conjunto $S(X)$.

Teorema 3.11. [26, Propiedades 1.2] *Si X es un dendroide suave en un punto $p \in X$, entonces:*

- (1) $S(X) \neq \emptyset$ si y sólo si X no es un árbol;
- (2) si $[x, y]$ es un arco en X , entonces el conjunto $S(X) \cap [x, y]$ es cerrado en X ;
- (3) si $p \in \text{cl}_X(S(X))$, entonces $p \in S(X)$;
- (4) $p \in S(X)$ si y sólo si $p \notin \text{int}_X(T)$ para ningún árbol contenido en X ;
- (5) un elemento $A \in C(X)$ contiene un punto en $S(X)$ si y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ y cada $n \in \mathbb{N}$, la bola $B_{C(X)}(A, \epsilon)$ contiene un espacio homeomorfo a la n -celda I^n .

Teorema 3.12. [31, Teorema 2.11] *Supongamos que X es un dendroide suave en un punto p . Si $A \in C(p, X)$, entonces $A \cap S(X) \neq \emptyset$ si y sólo si, para cada $\epsilon > 0$, $\dim(B_{C(X)}(A, \epsilon)) = \infty$.*

Observemos que, si G es una gráfica finita contenida en una dendrita X , entonces G es un árbol, porque X no contiene curvas cerradas simples.

Utilizando el Teorema 2.7, Teorema 3.6, Teorema 3.11 y Teorema 3.12 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.13. *Sean X una dendrita y $A \in C(X)$. Entonces A contiene un punto en $S(X)$ si y sólo si $\dim_A(C(X)) = \infty$.*

Demostración. Supongamos que $q \in A \cap S(X)$. Por inciso (4) del Teorema 3.11, $q \notin \text{int}(T)$ para ningún árbol T contenido en X . Luego, por la observación del párrafo anterior, $q \notin \text{int}(G)$ para ninguna gráfica finita G contenida en X , y por el Teorema 2.7, $C(q, X)$ es homeomorfo a I^∞ . Como

$A \in C(q, X)$ y I^∞ es homogéneo, $\dim_A(C(q, X)) = \infty$. Como $\dim_A(C(q, X)) \leq \dim_A(C(X))$, se tiene que $\dim_A(C(X)) = \infty$.

Ahora demostremos el recíproco. Supongamos que $A \cap S(X) \neq \emptyset$. Como $A \in C(X)$, A es una dendrita (vea [4, Corolario 10.6]). Por Teorema 3.6, A es suave en todos sus puntos (y X también). Entonces por el Teorema 3.12, existe $\epsilon > 0$ tal que $\dim(B_{C(X)}(A, \epsilon)) < \infty$. Por lo tanto, para cualquier punto $R \in B_{C(X)}(A, \epsilon)$, tenemos que $\dim_R(C(X)) < \infty$. En particular, $\dim_A(C(X)) < \infty$. Por tanto, $A \cap S(X) \neq \emptyset$. \square

En el siguiente resultado escribimos una serie de resultados en torno a los puntos extremos, ordinarios y de ramificación de X . Recordemos que un conjunto G_δ de un espacio X es la intersección, a lo más numerable, de conjuntos abiertos de X . Un conjunto F_σ de un espacio X es la unión, a lo más numerable, de conjuntos cerrados de X .

Teorema 3.14. *Toda dendrita X satisface las siguientes propiedades:*

- (a) [23, T. 2] $\dim(E(X)) = 0$ por lo que $E(X) \neq \emptyset$;
- (b) [23, T. 2] $E(X)$ es un conjunto G_δ en X ;
- (c) [23, T. 8] $O(X)$ es denso en X ;
- (d) [23, T. 7] $R(X)$ es a lo más numerable;
- (e) [23, T. 4] si $p \in X$, entonces $\text{ord}(p, X) \leq \omega$;
- (f) [23, T. 6] $E(X)$ es denso en X , si y sólo si $R(X)$ es denso en X ;
- (g) [4, T. 2.4] si $p \in X$ y el número de componentes de $X - \{p\}$ es finito, entonces dicho número es igual al $\text{ord}(p, X)$.

El inciso (e) del Teorema anterior, nos afirma que ninguna dendrita contiene puntos de orden \aleph_0 o \mathfrak{c} . En otras palabras: Si X es una dendrita, entonces X contiene puntos de orden finito o de orden ω .

Dendritas sin Arcos Libres

Existen dendritas no homeomorfas cuyos hiperespacios de subcontinuos son homeomorfos, para esto necesitamos la siguiente noción.

Definición 3.15. Un arco $[x, y]$ de una dendrita X es un *arco libre* en X , si el conjunto (x, y) es abierto en X .

Supongamos ahora que L es un subconjunto de $\mathbb{N} - \{1, 2\}$ o bien $L = \{\omega\}$.

En [7, Teorema 6.2] está demostrado que existe una dendrita D_L tal que

- (1) el $\text{ord}(p, D_L) \in L$ para cada $p \in R(D_L)$;

(2) para cada arco $[x, y]$ en D_L y cada $m \in L$, existe $p \in [x, y]$ tal que $\text{ord}(p, D_L) = m$.

Si dos dendritas satisfacen las condiciones (1) y (2), para el mismo conjunto L , entonces son homeomorfas. Esto significa que, dado el conjunto L , la dendrita D_L asociada a L es única. En el caso en que $L = \{m\}$, para alguna $m \in \mathbb{N} \cup \{\omega\} - \{1, 2\}$, entonces a la dendrita $D_{\{m\}}$ asociada a L , que denotamos simplemente por D_m , la llamamos *dendrita universal estándar de orden m* . De acuerdo a las condiciones (1) y (2) cada punto de ramificación de D_m es de orden m y, además, en cada arco es posible encontrar un punto de ramificación. Por lo tanto, el conjunto de puntos de ramificación que se encuentran en un arco de D_m , es denso en dicho arco. Como consecuencia de esto, la dendrita D_m no tiene arcos libres.

Una propiedad que utilizamos de las dendritas D_m , es que su hiperespacio $C(D_m)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert I^∞ . Esto es consecuencia del siguiente resultado de D. W. Curtis y R. M. Schori.

Teorema 3.16. [9, Teorema 3.2 y Teorema 4.1] *Si X es un continuo localmente conexo, entonces:*

(1) 2^X es el cubo de Hilbert;

(2) si X no contiene arcos libres, entonces $C(X)$ es homeomorfo a I^∞ ;

3) $C(X) \times I^\infty$ es homeomorfo a I^∞ .

En [1, pág. 21-23] se muestra como construir la dendrita D_3 .

Ahora, sobre las dendritas D_m , comentamos lo siguiente: Del inciso (2) del Teorema 3.16, tenemos que $C(D_m)$ es homeomorfo a $C(D_r)$, para cualesquiera $m, r \in \mathbb{N} \cup \{\omega\} - \{1, 2\}$. Si tomamos $m \neq r$, entonces por la unicidad de cada dendrita universal estándar, D_m y D_r son dendritas no homeomorfas cuyos hiperespacios de subcontinuos son homeomorfos. Es decir, que la familia de las dendritas no está C -determinada. Si queremos encontrar una familia de dendritas que esté C -determinada, debemos restringir la familia de las dendritas a una subfamilia.

La familia \mathfrak{D}

La familia de las dendritas cuyos elementos están en \mathfrak{D} o son arcos fue estudiada y caracterizada en [3], utilizando dos dendritas especiales una de ellas es F_ω . La otra dendrita especial es la siguiente: para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $a_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $b_n = (\frac{1}{n}, 0)$, $c = (-1, 0)$. Sea $W = [c, b_1] \cup (\bigcup_{n=1}^\infty [a_n, b_n])$, en donde $[c, b_1]$ es el segmento de recta en \mathbb{R}^2 que une a c con b_1 y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $[a_n, b_n]$ es el segmento de recta en \mathbb{R}^2 que une a_n con b_n . Denotamos por t el elemento $(0, 0)$ de W .

Notemos que el punto $p \in F_\omega$ es tal que $p \in \mathcal{P}_2(X) \cup \mathcal{P}_3(X)$ (p es un punto de ramificación), mientras que el punto $t \in W$ es tal que $t \in \mathcal{P}_1(X) \cup \mathcal{P}_3(X)$ (t es un punto ordinario de W). Consideraremos también a la dendrita $W_0 = W - [c, t]$ (t es un punto extremo de W_0). Notemos que el conjunto de puntos extremos de F_ω no es cerrado, lo mismo que el de W , pero el de W_0 sí es cerrado.

Teorema 3.17. [3, P. 3.4] Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $R(X)$ tal que $r_n \neq r_m$ si $n \neq m$. Entonces $\lim r_n \in E(X)$.

Teorema 3.18. Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $E(X)$ tal que $e_n \neq e_m$ si $n \neq m$ y $\lim e_n = e \neq e_1$. Entonces existe una sucesión convergente $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $R(X) \cap [e, e_1]$ tal que $\lim r_n = e$. Es decir, $\mathcal{P}_3(X) \subset \mathcal{P}_1(X)$. Además, X contiene una copia de W_0 cambiando t por e , a_n por e_n para cada $n \in \mathbb{N}$ y b_n por r_n , para cada $n \geq 2$.

Demostración. Notemos primero que $e \in E(X)$ ya que $E(X)$ es cerrado. Como $[e, e_1]$ y $[e, e_2]$ son arcos, $[e, e_1] \cap [e, e_2]$ también es un arco con e como uno de sus puntos extremos. Sea r_2 el otro punto extremo de $[e, e_1] \cap [e, e_2]$. Notemos que $r_2 \in R(X)$. Si $[e, r_2] \cap [e, e_n] = [e, r_2]$ para un número infinito de índices $n \geq 3$, entonces $[e, r_2] \subset [e, e_n]$ para dichos índices n . Luego, por la parte (1) del Teorema 2.10, $[e, r_2] \subset \lim [e, e_n]$. Como X es suave en e y $\lim e_n = e$, tenemos que $\lim [e, e_n] = \{e\}$. Entonces $[e, r_2] \subset \{e\}$, lo cual es un absurdo. Esto demuestra que $[e, r_2] \cap [e, e_n] = [e, r_2]$ para un número finito de índices $n_1, n_2, \dots, n_k \geq 3$. Supongamos, sin perder generalidad, que n_k es el mayor de ellos. Entonces $[e, r_2] \cap [e, e_n]$ es un subcontinuo propio de $[e, r_2]$, para cada $n > n_k$. En particular, $[e, r_2] \cap [e, e_{n_{k+1}}]$ es un arco en donde e es uno de sus puntos extremos. Sea $r_{n_{k+1}}$ el otro punto extremo. Entonces $r_{n_{k+1}} \in (e, r_2)$ y $r_{n_{k+1}} \in R(X)$. Notemos que los arcos $[e_2, r_2]$ y $[e_{n_{k+1}}, r_{n_{k+1}}]$ son ajenos.

Con lo escrito en el párrafo anterior, hemos demostrado que existen un índice $n_{k+1} \geq 3$ y un punto de ramificación $r_{n_{k+1}}$ tal que $r_{n_{k+1}} <_e r_2$, de manera que los arcos $[e_2, r_2]$ y $[e_{n_{k+1}}, r_{n_{k+1}}]$ son ajenos. Mediante un reordenamiento de los índices que definen a la sucesión $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ podemos suponer, sin perder generalidad, que $n_{k+1} = 3$. De esta manera r_3 es un punto de ramificación tal que $r_3 \in (e, r_2)$ (por lo tanto, $r_3 <_e r_2$) y los arcos $[e_2, r_2]$ y $[e_3, r_3]$ son ajenos.

Continuando indefinidamente de esta manera, construimos una sucesión convergente $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $R(X) \cap [e, e_1]$ tal que $\lim r_n = e$ (con $r_4 <_e r_3$, $r_3 <_e r_2$ y, en general, $r_n <_e r_{n-1}$ para $n \geq 3$).

La prueba de que $\lim r_n = e$, es la siguiente. Aplicando el Teorema 3.6, tenemos que X es suave en e . Por tanto la sucesión de arcos $\{[e, e_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\{e\}$. Como consecuencia de esto, la sucesión de los diámetros de dichos arcos converge a cero. Esto implica que la sucesión $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a e . Para terminar la prueba, basta notar que el continuo $[e, e_1] \cup (\bigcup \{[e_n, r_n] : n \geq 2\})$ es una copia de W_0 , cambiando t por e , a_n por e_n para cada $n \in \mathbb{N}$ y b_n por r_n para cada $n \geq 2$. \square

Como consecuencia del Teorema 3.18, tenemos el siguiente resultado que caracteriza los elementos de $E_1(X)$ con los puntos de $\mathcal{P}_1(X) \cup \mathcal{P}_3(X)$.

Teorema 3.19. Si $X \in \mathfrak{D}$, entonces $E_1(X) = \mathcal{P}_1(X) \cup \mathcal{P}_3(X)$.

Demostración. Supongamos que $p \in \mathcal{P}_1(X) \cup \mathcal{P}_3(X)$. Entonces existen un arco $[x, y]$ en X y una sucesión convergente $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $R(X) \cap [x, y]$ tal que $r_n \neq r_m$ si $n \neq m$ y $\lim r_n = p$. En [3, Proposición 3.4] se demuestra que, a partir de la sucesión $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se puede construir una sucesión convergente $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $E(X)$ tal que $\lim e_n = p$. Como $X \in \mathfrak{D}$, $p \in E_1(X)$. Ahora supongamos

que $p \in E_1(X)$. Entonces existe una sucesión convergente $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $E(X)$ tal que $e_n \neq e_m$ si $n \neq m$ y $\lim e_n = p$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $e_1 \neq p$. Por el Teorema 3.18, existe una sucesión convergente $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $R(X) \cap [p, e_1]$ tal que $r_n \neq r_m$ si $n \neq m$ y $\lim r_n = p$. Por tanto, $p \in \mathcal{P}_1(X) \cup \mathcal{P}_3(X)$. \square

Ahora nos concentramos en el resultado principal: demostrar que la familia \mathfrak{D} está C -determinada (vea el Teorema 3.31).

La Familia \mathfrak{D} Está C -determinada

Necesitamos hablar de la frontera como variedad de un n -variedad con frontera [30, pág. 1].

Definición 3.20. Sea n un número natural. Un espacio métrico separable Y es una n -variedad si cada punto de Y tiene una vecindad cerrada que es homeomorfa a I^n . El interior como variedad de una n -variedad Y (denotado por Y^0) es el conjunto de puntos de Y que tienen vecindades en Y que son homeomorfas a \mathbb{R}^n . La *frontera como variedad* de Y (denotada por ∂Y) consiste de todos los puntos de Y que no están en el interior como variedad de Y .

Si Y es una n -variedad con frontera y $h : Y \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces $h(Y^0) = Y^0$ y $h(\partial Y) = \partial Y$. En [30, 19.33 y 19.34], respectivamente, tenemos los dos incisos del siguiente teorema.

Teorema 3.21. *Sea n un número natural. (a) Si I^n es una n -celda en \mathbb{R}^n , entonces $\partial I^n = \text{Fr}_{\mathbb{R}^n}(I^n)$. Por lo tanto, la frontera como variedad de cualquier n -celda es una $(n - 1)$ -esfera y el interior como variedad de cualquier n -celda es homeomorfa a \mathbb{R}^n . (b) Si V y W son n -celdas tales que $V \subset W$, entonces $V - \partial V$ es un abierto en W .*

En particular, si \mathcal{V} es una 2-celda y $h : I^2 \rightarrow \mathcal{V}$ es un homeomorfismo, entonces $h(\text{Fr}_{\mathbb{R}^2}(I^2)) = \partial \mathcal{V}$ y $\partial \mathcal{V}$ es una 1-esfera. Por lo tanto, $\partial \mathcal{V} = \{y \in \mathcal{V} : y = h(x) \text{ para alguna } x \in \text{Fr}_{\mathbb{R}^2}(I^2)\}$. En ocasiones a $\partial \mathcal{V}$ le llamamos el *contorno de \mathcal{V}* . Si necesitamos hablar del contorno de 2-celdas en espacios distintos, entonces usamos subíndices para distinguirlas. Así, $\partial_X(\mathcal{V})$ denota el contorno de \mathcal{V} en X . Para un continuo X , consideramos el subconjunto de $C(X)$ siguiente: $\Omega(X) = \{A \in C(X) : \text{existe una 2-celda } \mathcal{V} \text{ en } C(X) \text{ tal que } A \in \text{int}_{C(X)}(\mathcal{V}) \cap \partial_{C(X)}(\mathcal{V})\}$.

En el siguiente resultado determinamos el contorno del hiperespacio de subcontinuos de un arco J , así como su conjunto $\text{cl}_{C(J)}(\Omega(J))$.

Teorema 3.22. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 \leq a < b$ y $J = [a, b]$. Entonces*

- (a) $C(J)$, es una 2-celda tal que $\partial C(J) = C(a, J) \cup C(b, J) \cup F_1(J)$,
- (b) $\text{cl}_{C(J)}(\Omega(J))$ es homeomorfo a S^1 .

Demostración. Cuando los continuos son homeomorfos, sus hiperespacios de continuos son homeomorfos; por eso, sin perder generalidad, podemos suponer que $a = 0$ y $b = 2$. Sea L el triángulo en \mathbb{R}^2 con vértices $a = (0, 0)$, $b = (2, 0)$ y $c = (1, 2)$. Consideremos los segmentos de recta $P = [a, b]$, $Q = [a, c]$ y $R = [b, c]$. Dado $A = [e, d] \in C(J)$ podemos considerar $g(A) = (\frac{e+d}{2}, d - e)$. Es fácil ver que $g(A) \in L$. Esto define una función $g : C(J) \rightarrow L$ que es biyectiva y continua. Por lo tanto, g es un homeomorfismo. Esto prueba que $C(J)$ es una 2-celda. Ahora bien, por el inciso (a) del Teorema 3.21, $\partial L = P \cup Q \cup R$ y como $g(C(a, J)) = Q$, $g(C(b, J)) = R$, $g(F_1(J)) = P$ y g es un homeomorfismo, resulta que $\partial C(J) = C(a, J) \cup C(b, J) \cup F_1(J)$.

Esto termina la primera parte de la demostración. Para probar la segunda parte también suponemos, sin pérdida de generalidad, que $a = 0$ y $b = 2$. Mostramos que $\text{cl}_{C(J)}(\Omega(J)) = \partial C(J)$. Para ver esto utilizamos el homeomorfismo $g : C(J) \rightarrow L$ que definimos en la primera parte. El conjunto $\Omega(J)$ está definido mediante propiedades topológicas. Como g es un homeomorfismo, entonces los elementos de $g(\Omega(J))$ también cumplen dichas propiedades topológicas. Afirmamos que $K \in g(\Omega(J))$ si y sólo si $K \in P \cup Q \cup R$. Si $K \in P \cup Q \cup R$, L es una 2-celda tal que $K \in \text{int}_L(L) \cap \partial(L)$. Por la definición del conjunto $\Omega(g(L))$, tenemos que $K \in \Omega(g(L)) = g(\Omega(J))$. Ahora supongamos que $K \in L - (P \cup Q \cup R)$. Luego, $K \in L - \partial L$. Sea \mathcal{V} una 2-celda en L tal que $K \in \partial_L(\mathcal{V})$. Por lo tanto, para todo $\epsilon > 0$ $B_L(K, \epsilon) \cap (L - \mathcal{V}) \neq \emptyset$. De donde $B_L(K, \epsilon)$ no está contenida en \mathcal{V} . De aquí, $K \notin \text{int}_L(\mathcal{V})$. Esto demuestra que para cualquier 2-celda \mathcal{V} en L ($\mathcal{V} \neq L$), con $K \notin P \cup Q \cup R$, no puede ocurrir que $K \in \text{int}_L(\mathcal{V}) \cap \partial(\mathcal{V})$. Por lo tanto, $K \notin g(\Omega(J))$. Esto prueba nuestra afirmación, $g(\Omega(J)) = P \cup Q \cup R$. De aquí, $g(\text{cl}_{C(J)}(\Omega(J))) = \text{cl}_L(P \cup Q \cup R) = P \cup Q \cup R = \partial L$. Como $g(\partial C(J)) = \partial L$, y g es un homeomorfismo, entonces $\text{cl}_{C(J)}(\Omega(J)) = \partial C(J)$. Tenemos los siguientes homeomorfismos, $\text{cl}_{C(J)}(\Omega(J)) = \partial C(J)$ es homeomorfo a ∂L y ∂L es homeomorfo a S^1 . De aquí, $\text{cl}_{C(J)}(\Omega(J))$ es homeomorfo a S^1 . Con esto terminamos la prueba de la segunda parte. \square

Como hemos visto en el Teorema 3.22, el arco es un ejemplo de un continuo X para el cual $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ no es homeomorfo a X . Veamos cuando se cumple que $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ es homeomorfo a X . Por simplicidad denotamos $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ como $\text{cl}(\Omega(X))$ (cuando no haya peligro de confusión), pero cuando sea necesario distinguir, escribiremos $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$. En el Teorema 3.29 mostramos que $\text{cl}(\Omega(X))$ es homeomorfo a X , para cada $X \in \mathfrak{D}$. Para esto necesitamos algunas propiedades de $\Omega(X)$ y sus elementos.

Teorema 3.23. *Sea X un continuo. Si $A \in \Omega(X)$, entonces $\dim_A(C(X)) \leq 2$.*

Demostración. Sea \mathcal{U} un subconjunto abierto de $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}$. Puesto que $A \in \Omega(X)$, existe una 2-celda \mathcal{V} en $C(X)$ tal que $A \in \text{int}_{C(X)}(\mathcal{V}) \cap \partial_{C(X)}(\mathcal{V})$. Sea \mathcal{V}_1 un abierto en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$. Entonces $A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}_1$ y $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}_1$ es un abierto contenido en $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$. Como \mathcal{V} es una 2-celda, existe un abierto \mathcal{V}_2 de \mathcal{V} , tal que $A \in \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}_1$, y $\dim(\text{Fr}_{\mathcal{V}}(\mathcal{V}_2)) \leq 1$. De aquí, existe un abierto \mathcal{W} de $C(X)$ tal que $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Ya que $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$, tenemos que $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{W}$ y $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{W} \subset \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Por tanto $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{W}$. El conjunto $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{W}$ es un abierto en $C(X)$. De donde \mathcal{V}_2 es un abierto de $C(X)$. En resumen, tenemos que \mathcal{V}_2 es abierto

en $C(X)$, \mathcal{V} es cerrado en $C(X)$ y $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}$. Luego, por el Teorema 2.6, $\text{Fr}_{C(X)}(\mathcal{V}_2) = \text{Fr}_{\mathcal{V}}(\mathcal{V}_2)$. Pero sabemos que $\dim(\text{Fr}_{\mathcal{V}}(\mathcal{V}_2)) \leq 1$, de aquí, $\dim(\text{Fr}_{C(X)}(\mathcal{V}_2)) \leq 1$. Como $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{U}$, por definición de dimensión (vea [2, Definición III.1] y [30, 1.1]), concluimos que $\dim_A(C(X)) \leq 2$. \square

Ahora mostramos que, para $X \in \mathfrak{D}$, los elementos de $\Omega(X)$ no contienen puntos de ramificación de X ni puntos en $\mathcal{P}_1(X) \cup \mathcal{P}_3$.

Teorema 3.24. *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $A \in \Omega(X)$. Entonces $A \cap E_1(X) = \emptyset$ y $A \cap R(X) = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que existe un punto $r \in A \cap E_1(X)$. Puesto que $r \in E_1(X)$, por el Teorema 3.19, se sigue que $r \in \mathcal{P}_1(X) \cup \mathcal{P}_3$. Utilizando el Teorema 3.13 resulta que $\dim_A(C(X)) = \infty$. Pero, por el Teorema 3.23, $\dim_A(C(X)) \leq 2$ lo cual es una contradicción. Esto muestra que $A \cap E_1(X) = \emptyset$. Supongamos ahora que $A \cap R(X) \neq \emptyset$. Como $A \in \Omega(X)$, existe una 2-celda \mathcal{V} en $C(X)$ tal que $A \in \text{int}_{C(X)}(\mathcal{V}) \cap \partial_{C(X)}(\mathcal{V})$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $B_{C(X)}(A, \epsilon) \subset \mathcal{V}$. Eligiendo un punto de ramificación $p \in A$ y usando el hecho de que el orden de p en X es finito, podemos construir un n -odo T , en X , con $n \geq 3$, con corazón $\{p\}$ y tal que $T \in B_{C(X)}(A, \frac{\epsilon}{2})$. Entonces por el Teorema 2.14, existe una n -celda Γ tal que $T \in \Gamma \subset B_{C(X)}(A, \epsilon) \subset \mathcal{V}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $A \cap R(X) = \emptyset$. \square

Dada $X \in \mathfrak{D}$, distinguimos ahora dos tipos de arcos en X , los cuales utilizamos con mucha frecuencia en este trabajo.

Definición 3.25. Sea $X \in \mathfrak{D}$. Un arco $[p, q]$ es un *arco interno* de X si sus dos puntos extremos, y sólo ellos, son de ramificación. Esto es, $[p, q] \cap R(X) = p, q$. El arco $[p, q]$ es un *arco externo* de X si uno de sus puntos extremos es de ramificación, el otro es un punto extremo aislado de X y el resto son puntos ordinarios de X . Entonces $[p, q] \cap R(X) = p$ y $[p, q] \cap E_2(X) = q$ o bien $[p, q] \cap R(X) = q$ y $[p, q] \cap E_2(X) = p$.

En la prueba del siguiente resultado usamos las nociones de arcos internos y externos de X para caracterizar a los elementos de $\Omega(X)$.

Teorema 3.26. *Sea $X \in \mathfrak{D}$. Entonces $A \in \Omega(X)$ si y sólo si A satisface una de las siguientes dos condiciones: (a) $A = \{p\}$ en donde $p \in O(X) \cup E_2(X)$, (b) $A = [t, e] \subset X - R(X)$, en donde un punto extremo de A es un punto ordinario de X y el otro punto extremo de A , es un punto extremo aislado de X .*

Demostración. Supongamos que $A \in \Omega(X)$. Por el Teorema 3.24, $A \cap R(X) = \emptyset$ y $A \cap E_1(X) = \emptyset$. Esto implica que $A \in F_1(X)$ o bien que A es un arco. Más aun, en el primer caso, si $A = \{p\}$ entonces $p \in X - (R(X) \cup E_1(X))$. Luego, $p \in O(X) \cup E_2(X)$. Supongamos ahora que $A = [a, b]$ es un arco. Como A no tiene puntos de ramificación ni puntos en $\mathcal{P}_1(X) \cup \mathcal{P}_3(X)$. A está contenido en un arco $[p, q]$ que es interno o bien externo. Supongamos que $a <_p b <_p q$. Como $A \in \Omega(X)$ existe una 2-celda \mathcal{V} en $C(X)$ tal que $A \in \text{int}_{C(X)}(\mathcal{V}) \cap \partial_{C(X)}(\mathcal{V})$. Tomemos $\delta > 0$ tal que $N(\delta, A) \not\subset [p, q]$ y $0 < \epsilon < \delta$ tal que $B_{C(X)}(A, \epsilon) \subset \mathcal{V}$. Entonces $B_{C(X)}(A, \epsilon) \not\subset C([p, q])$. Para ver esto tomemos un

elemento $L \in B_{C(X)}(A, \epsilon)$. Entonces $L \subset N(\delta, A) \not\subset [p, q]$, por lo que $L \in C([p, q]) - \{[p, q]\}$. Esto demuestra la contención $B_{C(X)}(A, \epsilon) \not\subset C([p, q])$.

Tomemos un arco $J = [c, d] \in B_{C(X)}(A, \epsilon)$ tal que $a <_c b <_c d$. Procediendo como antes, es posible encontrar $\epsilon_1 > 0$ tal que $B_{C(X)}(A, \epsilon_1) \not\subset C(J)$. Como $\partial C(J) = C(c, J) \cup C(d, J) \cup F_1(J)$ (vea 3.3) y, además, A y J no comparten puntos extremos, ϵ_1 puede escogerse de modo que $B_{C(X)}(A, \epsilon_1) \cap \partial C(J) = \emptyset$. Ahora bien, $C(J)$ es una 2-celda y $C(J) \subset \mathcal{V}$. Por el inciso (b) del Teorema 3.21, $C(J) - \partial C(J)$ es abierto en \mathcal{V} . Ya que $A \in C(J) - \partial C(J)$, sucede que A está en el interior como variedad de \mathcal{V} . Luego, $A \notin \partial \mathcal{V}$, lo cual es una contradicción. Esto muestra que no puede suceder que $a <_p b <_a q$. Por consiguiente, $[p, q]$ no es un arco interno. Entonces $[p, q]$ es un arco externo y tanto A como $[p, q]$ comparten un punto extremo.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $q \in E_2(X)$ y $p \in R(X)$. Como $A = [a, b]$ no tiene puntos de ramificación y comparte un punto extremo con $[p, q]$, podemos suponer que $b = q$. Entonces un punto extremo de A es ordinario y el otro es un punto extremo aislado de X , como se indica en (b). Esto termina la primera parte de la prueba.

Supongamos ahora que $A \in C(X)$ satisface (a). Entonces $A = \{p\}$, en donde $p \in O(X) \cup E_2(X)$. Notemos que $\{p\} \subset [r, q]$, en donde $[r, q]$ es un arco interno o externo de X . En cualquier situación, $\mathcal{V} = C([r, q])$ es una 2-celda tal que $\{p\} \in \text{int}_{C(X)}(\mathcal{V}) \cap \partial \mathcal{V}$, por lo que $A \in \Omega(X)$. Si $A \in C(X)$ satisface (b), entonces $A = [t, e] \subset X - R(X)$ y, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $t \in O(X)$ y $e \in E_2(X)$. Como X no es homeomorfo a I , existe un arco externo $J = [r, e]$ tal que $A \subset J$. Por la parte (a) del Teorema 3.22, $\partial C(J) = C(r, J) \cup C(e, J) \cup F_1(J)$. Es claro que $A \in C(e, J)$, así, $A \in \partial C(J)$. Además $\mathcal{W} = C(J)$ es una 2-celda y $A \in \text{int}_{C(X)}(\mathcal{W})$. Luego, $A \in \Omega(X)$. \square

Corolario 3.27. *Sea $X \in \mathfrak{D}$. Si $A \in \Omega(X)$, entonces A está en un arco que es interno o bien externo en X .*

De acuerdo con el Teorema 3.26, se tiene que $F_1(O(X) \cup E_2(X)) \subset \Omega(X)$. Así, $\text{cl}_{C(X)}(F_1(O(X) \cup E_2(X))) \subset \text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$. Ahora bien, como $F_1(O(X) \cup E_2(X))$ es homeomorfo a $O(X) \cup E_2(X)$, y $O(X)$ es denso en X (vea el inciso (c) del Teorema 3.14), tenemos que: $\text{cl}_{C(X)}(F_1(O(X) \cup E_2(X))) = F_1(\text{cl}_X(O(X) \cup E_2(X))) = F_1(\text{cl}_X(O(X)) \cup \text{cl}_X(E_2(X))) = F_1(X \cup \text{cl}_X(E_2(X))) = F_1(X)$.

Esto muestra que $F_1(X) \subset \text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$. Ahora mostramos que $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ es un subconjunto de $C(X)$ “parecido a $F_1(X)$ ”.

Teorema 3.28. *Dada $X \in \mathfrak{D}$, consideramos la familia \mathfrak{M} de los arcos $[r, e]$ en X tales que $e \in E_2(X)$ y $[r, e] \cap R(X) = \{r\}$ o bien $e \in E_2(X)$ y $[r, e] \subset O(X)$. Entonces $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) = F_1(X) \cup \mathfrak{M}$.*

Demostración. Probemos primero que $\mathfrak{M} \subset \text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$. Sea $A = [r, e] \in \mathfrak{M}$. Supongamos primero que $e \in E_2(X)$ y $[r, e] \subset O(X)$. Entonces A tiene la forma (b) del Teorema 3.26, por lo que $A \in \Omega(X) \subset \text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$. Supongamos ahora que $e \in E_2(X)$ y $[r, e] \cap R(X) = \{r\}$. Entonces

$A = \lim[r_n, e]$, en donde $[r_n, e]$ es un arco en X tal que $[r_n, e] \subset O(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo que hemos probado, cada arco $[r_n, e]$ está en $\Omega(X)$. Luego, A es un elemento de $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$. Esto prueba que $\mathfrak{M} \subset \text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$. Como $F_1(X)$ también está contenido en $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$, sucede que $\mathfrak{M} \cup F_1(X) \subset \text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$.

Ahora tomemos un elemento $A \in \text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ y supongamos que $A \notin F_1(X)$. Por consiguiente, existe una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\Omega(X)$ tal que $A = \lim A_n$. Dado que $A \notin F_1(X)$, sin pérdida de generalidad, cada A_n es de la forma (b) descrita en el Teorema 3.26. Entonces dada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = [t_n, e_n]$, donde $t_n \in O(X)$, $e_n \in E_2(X)$ y $A_n \cap R(X) = \emptyset$. Tomando subsucesiones si es necesario, podemos suponer que existen $t, e \in X$ tales que $\lim t_n = t$ y $\lim e_n = e$. Entonces $e \in E(X)$ pues $E(X)$ es cerrado. Supongamos que $e_n \neq e_m$ si $n \neq m$. Sin perder generalidad podemos también suponer que $e \neq e_1$. Por el Teorema 3.18, existe una sucesión $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $R(X) \cap [e, e_1]$ tal que $\lim r_n = e$ y X tiene una copia de W_0 cambiando t por e , a_n por e_n para cada $n \in \mathbb{N}$ y b_n por r_n para cada $n \geq 2$. Concretamente, haciendo $r_1 = r_2$, el continuo $T = [e, e_1] \cup (\cup \{[r_n, e_n] : n \geq 2\})$, está contenido en X .

Ahora bien, dada $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $A_n \cap R(X) = \emptyset$. Luego, $t_n \in [r_n, e_n]$. Además, como $t_n \in [r_n, e_n] \subset [e, e_n]$, $\lim e_n = e$ y $\lim t_n = t$, sucede que $t = e$. Ahora bien, como $\lim[r_n, e_n] = e$ y $A_n = [t_n, e_n] \subset [r_n, e_n]$, sucede que $\lim[t_n, e_n] = e$. Como también $\lim[t_n, e_n] = A$, tenemos que $A = \{e\}$, una contradicción. Esto demuestra que no puede suceder que $e_n \neq e_m$ si $n \neq m$. Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $e_n = e_N$ para cada $n \geq N$. Luego, $e_N = e$. Esto significa que $A_n = [t_n, e]$ para cada $n \geq N$. Podemos entonces suponer que la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está anidada. Por lo tanto, dicha sucesión es convergente y su límite es $\cap A_n$ (vea [4, 1.7 y 1.8]). Como consecuencia de esto A es un arco pues $A \notin F_1(X)$. Además e es un punto extremo de dicho arco y, si t es el otro punto extremo, entonces $A = [t, e]$ y $[t, e] \subset O(X)$ pues A_n no contiene puntos de ramificación. Esto prueba que $A \in \mathfrak{M}$ y, por lo tanto, $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) \subset F_1(X) \cup \mathfrak{M}$. \square

Junto con el Teorema 3.28, es posible demostrar que si $X \in \mathfrak{D}$, entonces $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ es topológicamente igual a X .

Teorema 3.29. *Si $X \in \mathfrak{D}$, entonces $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ es homeomorfo a X .*

Demostración. Definimos primero una función continua $g : \Omega(X) \rightarrow X$ que, posteriormente, extendemos a un homeomorfismo $\bar{g} : \text{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) \rightarrow X$. Para definir a g , utilizamos el hecho de que cada elemento de $\Omega(X)$ está contenido en un arco que es interno o bien externo en X (vea Corolario 3.27). Así, para $A \in \Omega(X)$, de acuerdo a lo demostrado en el Teorema 3.26, suceden dos cosas: (i) si A está contenido en un arco interno $[p, q]$, entonces $A = \{k\}$ para algún $k \in (p, q)$; (ii) si A está contenido en un arco externo $[r, e]$, donde $r \in R(X)$ y $e \in E_2(X)$, entonces $A = \{t\}$ para algún $t \in (r, e]$ o bien $A = [t, e]$, para algún $t \in (r, e)$.

Consideremos ahora todos los arcos externos $[r, e]$ tales que $[r, e] \cap R(X) = \{r\}$ y $e \in E_2(X)$. Para cada uno de ellos fijemos un punto $s_e \in (r, e)$ y consideremos dos homeomorfismos $f_1^{s_e} : [r, e] \rightarrow [r, s_e]$ y $f_2^{s_e} : [r, e] \rightarrow [s_e, e]$ tales que $f_1^{s_e}(r) = r$, $f_1^{s_e}(e) = s_e$, $f_2^{s_e}(r) = e$ y $f_2^{s_e}(e) = s_e$.

Estamos ahora en condiciones para definir a $g : \Omega(X) \rightarrow X$. Dada $A \in \Omega(X)$, si A satisface (i), sea $g(A) = g(\{k\}) = k$.

Si A satisface (ii), entonces consideramos el arco externo $[r, e]$ que contiene a A , así como a los homeomorfismos $f_1^{s_e}$ y $f_2^{s_e}$, correspondientes al punto s_e que fijamos en el arco $[r, e]$. Si $A = \{t\}$ para $t \in (r, e]$, definimos $g(A) = f_1^{s_e}(t)$. Si $A = [t, e]$ para $t \in (r, e)$, definimos $g(A) = f_2^{s_e}(t)$. La función g está bien definida pues, dado $A \in \Omega(X)$, sucede que A está contenido en un único arco externo o bien en un único arco interno de X . Observemos, además, que si $A \in \Omega(X)$ entonces, por definición, $g(A) \in O(X)$.

(1) Afirmamos que la función g es continua. Para ver esto, tomemos $A \in \Omega(X)$ y $\epsilon > 0$. Debemos dar una $\delta > 0$ tal que

$$(3,1) \quad g(B_{C(X)}(A, \delta) \cap \Omega(X)) \subset B_X(g(A), \epsilon).$$

Consideremos las tres situaciones para A que se desprenden de (i) y (ii). Si $A = \{k\}$ con $k \in (p, q)$ y $[p, q]$ es un arco interno de X , entonces $g(A) = \{k\}$. Si $\delta > 0$ es tal que $\delta < \min\{d(k, p), d(k, q), \epsilon\}$, entonces $B_{C(X)}(A, \delta) \subset C([p, q])$. De aquí se infiere (3,1).

Supongamos ahora que $A = \{t\}$, donde $t \in (r, e]$ y $[r, e]$ es un arco externo como indicamos en (ii). Entonces $g(A) = f_1^{s_e}(t)$. Como la función $f_1^{s_e}$ es continua, existe $\delta > 0$ tal que $f_1^{s_e}(B_X(t, \delta) \cap [r, e]) \subset B_X(f_1^{s_e}(t), \epsilon)$.

Además podemos elegir δ de modo que $B_X(t, \delta) \subset [r, e]$. Esto asegura que $B_{C(X)}(A, \delta) \cap \Omega(X) \subset F_1(X)$. Por consiguiente, por definición de las funciones g y $f_1^{s_e}$, la condición (3,1) se cumple.

Supongamos, por último, que $A = [t, e]$, donde $t \in (r, e)$ y $[r, e]$ es un arco externo como indicamos en (ii). Entonces $g(A) = f_2^{s_e}(t)$. Como la función $f_2^{s_e}$ es continua, existe $\delta_1 > 0$ tal que $f_2^{s_e}(B_X(t, \delta_1) \cap [r, e]) \subset B_X(f_2^{s_e}(t), \epsilon)$.

Tomemos ahora $\delta > 0$ tal que $\delta < \min\{d(t, e), d(t, r), \delta_1\}$. Entonces la condición (3,1) se cumple, pues los elementos de $B_{C(X)}(A, \delta) \cap \Omega(X)$ son los arcos de la forma $[m, e]$, con $m \in O(X)$ y $g([m, e]) = f_2^{s_e}(m)$.

De lo anterior concluimos que g es continua en A . Esto prueba (1).

(2) Afirmamos que la función g es inyectiva. Para ver esto sean $A, D \in \Omega(X)$ tales que $g(A) = g(D)$. Si $A = \{k\}$, donde $k \in (p, q)$ y $[p, q]$ es un arco interno en X , entonces $g(A) = g(D) = k$. Esto significa que $g(D)$ es un elemento del arco interno $[p, q]$. Como g se define de manera que la imagen de cada elemento de $\Omega(X)$ es un punto del arco interno o externo que contiene a dicho elemento de $\Omega(X)$, necesariamente $D = \{k\} = A$.

Supongamos ahora que $A \subset [r, e]$, donde $[r, e]$ es un arco externo como indicamos en (ii). Entonces $g(A) \in [r, e]$, por lo que $g(D) \in [r, e]$. Esto implica que también D está contenido en $[r, e]$. Consideremos las dos situaciones para A que se desprenden de (ii). Supongamos primero que $A = \{t\}$, con $t \in (r, e]$. Entonces $g(A) = f_1^{s_e}(t) \in (r, s_e]$. Como D está contenido en $[r, e]$, necesariamente $D = \{l\}$ donde $l \in (r, e]$ o bien $D = [b, e]$, donde $b \in (r, e)$. Si $D = [b, e]$, entonces

$f_1^{s_e}(t) = g(A) = g(D) = f_2^{s_e}(t) \in (s_e, e)$, lo cual es una contradicción, pues $f_1^{s_e}(t) \in (r, s_e]$ y los arcos $(r, s_e]$ y (s_e, e) son ajenos. Entonces $D = \{l\}$, por lo que $f_1^{s_e}(l) = g(D) = g(A) = f_1^{s_e}(t)$. Como la función $f_1^{s_e}(t)$ es inyectiva, sucede que $l = t$. De aquí, $D = A$.

Supongamos ahora que $A = [t, e]$, donde $t \in (r, e)$. Entonces $g(A) = f_2^{s_e}(t) \in (s_e, e)$. Como D está contenido en $[r, e]$, tenemos que $D = \{l\}$ para alguna $l \in (r, e]$ o bien $D = [b, e]$, para alguna $b \in (r, e)$. Si $D = \{l\}$, entonces $f_2^{s_e}(t) = g(A) = g(D) = f_2^{s_e}(l) \in (r, s_e]$, lo cual es una contradicción, pues $f_2^{s_e}(t) \in (s_e, e)$ y los arcos $(r, s_e]$ y (s_e, e) son ajenos. Entonces $D = [b, e]$, por lo que $f_2^{s_e}(b) = g(D) = g(A) = f_2^{s_e}(t)$. Como la función $f_2^{s_e}$ es inyectiva, sucede que $b = t$. De aquí, $D = [t, e] = A$. Esto prueba (2).

La extensión $\bar{g} : \text{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) \rightarrow X$ de g se define como sigue. Primero \bar{g} se define de modo que $\bar{g}|_{\Omega(X)} = g$ y, si $\{t\} \in F_1(R(X) \cup E_1(X))$, entonces $\bar{g}(\{t\}) = t$. Falta entonces definir a \bar{g} en los arcos externos $[r, e]$ con $e \in E_2(X)$ y $[r, e] \cap R(X) = \{r\}$. En dicha situación hacemos $\bar{g}([r, e]) = e$. Observemos que si $B \in \text{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) - \Omega(X)$, entonces $\bar{g}(B) \notin O(X)$.

(3) Afirmamos que la función \bar{g} es inyectiva. Para ver esto sean $A, B \in \text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ tales que $A \neq B$. Queremos probar que $\bar{g}(A) \neq \bar{g}(B)$. Si $A, B \in \Omega(X)$, entonces $\bar{g}(A) \neq \bar{g}(B)$, pues g es inyectiva. Entonces $\bar{g}(A) \neq \bar{g}(B)$, pues \bar{g} es una extensión de g . Si $A \in \Omega(X)$ y $B \in \text{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) - \Omega(X)$, entonces $\bar{g}(A) = g(A) \neq g(B)$, pues $g(A) \in O(X)$ y $g(B) \notin O(X)$. Obtenemos la misma conclusión si $A \in \text{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) - \Omega(X)$ y $B \in \Omega(X)$.

De lo comentado en el párrafo anterior, podemos suponer que $A, B \in \text{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) - \Omega(X)$. Notemos que $A \in F_1(R(X) \cup E_1(X))$ o bien A es un arco externo en X . Analicemos ambas situaciones. Supongamos primero que $A = \{t\} \in F_1(R(X) \cup E_1(X))$. Entonces $\bar{g}(A) = t$. Ahora bien, $B \in F_1(R(X) \cup E_1(X))$ o bien B es un arco externo en X . En el primer caso, haciendo $B = \{l\}$ sucede que $\bar{g}(A) \neq \bar{g}(B)$, pues $A \neq B$ y $\bar{g}(B) = l$. En el segundo caso, haciendo $B = [r, e]$ con $e \in E_2(X)$ y $[r, e] \cap R(X) = \{r\}$, tenemos que $\bar{g}(A) \neq \bar{g}(B)$, pues $\bar{g}(B) = e$.

Supongamos ahora que $A = [r_1, e_1]$ es un arco externo en X , donde $e_1 \in E_2(X)$ y $[r_1, e_1] \cap R(X) = \{r_1\}$. Entonces $\bar{g}(A) = e_1$. De nueva cuenta tenemos que $B = \{l\}$ para alguna $l \in R(X) \cup E_1(X)$ o bien $B = [r_2, e_2]$, donde $e_2 \in E_2(X)$ y $[r_2, e_2] \cap R(X) = \{r_2\}$. En el primer caso sucede que $\bar{g}(A) \neq \bar{g}(B)$, pues $\bar{g}(A) = e_1 \in E_2(X)$ y $\bar{g}(B) = l \in R(X) \cup E_1(X)$. En el segundo caso también tenemos que $\bar{g}(A) \neq \bar{g}(B)$, pues al ser A y B arcos externos y tener que $A \neq B$, sucede que $A \cap B = \emptyset$ o bien $A \cap B \in F_1(R(X))$. Esto termina la prueba de (3).

(4) Afirmamos que la función \bar{g} es suprayectiva. Para probar (4), notemos primero que $X = O(X) \cup R(X) \cup E_1(X) \cup E_2(X)$. Por lo tanto, si $t \in R(X) \cup E_1(X)$ entonces $\{t\}$ es un elemento de $F_1(X) \subset \text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ tal que $\bar{g}(\{t\}) = t$. Por lo tanto, sólo tenemos que preocuparnos por la suprayectividad de \bar{g} en $O(X) \cup E_2(X)$. Si $p \in O(X)$ entonces, de acuerdo con la parte (i) del Teorema 3.26, $A = \{p\}$ es un elemento de $\Omega(X) \subset \text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ tal que $\bar{g}(A) = g(A) = p$. Si $e \in E_2(X)$, entonces e es el extremo de algún arco externo $[r, e]$ en X , donde $[r, e] \cap R(X) = \{r\}$. Claramente $[r, e]$ es un elemento de $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ tal que $\bar{g}([r, e]) = e$. Esto prueba (4).

(5) Afirmamos, por último, que la función \bar{g} es continua. Ya demostramos que g es continua y,

como $\bar{g}|_{\Omega(X)} = g$, basta demostrar que \bar{g} es continua en $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) - \Omega(X)$. Tomemos entonces un elemento $A \in \text{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) - \Omega(X)$, así como una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ tal que $\lim(A_n) = A$. Debemos mostrar que $\lim \bar{g}(A_n) = \bar{g}(A)$. Como hemos venido utilizando, sabemos que $A \in F_1(R(X) \cup E_1(X))$ o bien $A = [r, e]$ es un arco externo en X . Debemos, por lo tanto, analizar las tres situaciones que se desprenden del comentario anterior.

Supongamos primero que $A = \{r\}$, donde $r \in R(X)$. Como los límites de puntos de ramificación de X son puntos extremos de X (vea el Teorema 3.17), los límites de puntos extremos de X son puntos extremos de X (pues $X \in \mathfrak{D}$) y $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) = F_1(X) \cup \mathfrak{M}$ según el Teorema 3.28, sucede que $A_n \in F_1(O(X))$ para una infinidad de índices n . Entonces, sin perder generalidad, podemos suponer que $A_n \in F_1(O(X))$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dada $n \in \mathbb{N}$, escribamos $A_n = \{o_n\}$. Notemos que $\lim o_n = r$. Más aún $\bar{g}(A_n) = o_n$, si o_n está en un arco interno en X ; $\bar{g}(A_n) = f_1^{se}(o_n)$, si o_n está en el arco externo $[r, e]$, donde $e \in E_2(X)$ y $[r, e] \cap R(X) = \{r\}$.

Como el conjunto de los naturales es infinito, alguna de las dos condiciones anteriores se debe cumplir para una infinidad de índices n . Supongamos que, para una infinidad de índices n , sucede que o_n está en un arco interno en X . Entonces, para dichos índices: $\lim \bar{g}(A_n) = \lim o_n = r = \bar{g}(A)$. Supongamos ahora que, para una infinidad de índices n , el punto o_n está en un arco externo de X . Como el orden de cada punto de X es finito y $\lim o_n = r$, resulta que una infinidad de puntos ordinarios o_n se encuentran en el mismo arco externo $[r, e]$ de X . Entonces, aplicando la continuidad de f_1^{se} , sucede que $\lim \bar{g}(A_n) = \lim f_1^{se}(o_n) = f_1^{se}(r) = r = \bar{g}(A)$. Esto muestra que \bar{g} es continua en A , para el caso en que $A \in F_1(R(X))$.

Supongamos ahora que $A = \{m\}$, donde $m \in E_1(X)$. Tenemos entonces que

- (a) $\bar{g}(A_n) = o_n$, si $A_n = \{o_n\} \in F_1(O(X))$ y o_n está en un arco interno en X ;
- (b) $\bar{g}(A_n) = r_n$, si $A_n = \{r_n\} \in F_1(R(X))$;
- (c) $\bar{g}(A_n) = e_n$, si $A_n = \{e_n\} \in F_1(E_1(X))$;
- (d) $\bar{g}(A_n) = f_1^{se}(t_n)$, si $A_n = \{t_n\} \in F_1(E_2(X) \cup O(X))$ y t_n está en el arco externo $[r_n, e_n]$ con $e_n \in E_2(X)$ y $[r_n, e_n] \cap R(X) = \{r_n\}$;
- (e) $\bar{g}(A_n) = f_1^{se}(t_n)$, si $A_n = [t_n, e_n]$ está contenido propiamente en el arco externo $[r_n, e_n]$ con $e_n \in E_2(X)$ y $[r_n, e_n] \cap R(X) = \{r_n\}$;
- (f) $\bar{g}(A_n) = e_n$, si $A_n = [r_n, e_n]$ es un arco externo con $e_n \in E_2(X)$ y $[r_n, e_n] \cap R(X) = \{r_n\}$.

Ahora bien, como el conjunto de los naturales es infinito, alguna de las seis condiciones anteriores se debe cumplir para una infinidad de índices n . Analicemos cada caso. Supongamos que la condición (a) se cumple para una infinidad de índices n . Entonces, como $\lim A_n = A$, para dichos índices tenemos que: $\lim \bar{g}(A_n) = \lim o_n = m = \bar{g}(A)$. Supongamos ahora que la condición (b) se cumple para una infinidad de índices n . Entonces $\lim \bar{g}(A_n) = \lim r_n = m = \bar{g}(A)$. Si la condición (c) se cumple para una infinidad de índices n , entonces $\lim \bar{g}(A_n) = \lim e_n = m = \bar{g}(A)$. Suponga-

mos ahora que la condición (d) se cumple para una infinidad de índices n . Como el orden de cada punto de X es finito, sucede una de las siguientes dos condiciones: (*) una infinidad de los arcos externos $[r_n, e_n]$ son ajenos dos a dos; (**) existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $[r_n, e_n] = [r_n, e_x]$, para cada $n \geq x$. En el caso (*), como X no contiene continuos de convergencia, sucede que $\lim[r_n, e_n] \in F_1(X)$. Ahora bien, como $\{t_n\} \subset [r_n, e_n]$ y $\lim\{t_n\} = \{m\}$, tenemos que $\lim[r_n, e_n] = \{m\} = A$. Notemos también que $f_1^{se}(t_n) \in [r_n, e_n]$ para cada índice n . Luego, $\lim\bar{g}(A_n) = \lim f_1^{se}(t_n) = m = \bar{g}(A)$. En el caso (**) tenemos que $t_n \in [r_x, e_x]$, para cada $n \geq x$. Luego, $m = \lim t_n \in [r_x, e_x]$, lo cual es una contradicción, pues $m \in E_1(X)$ y $[r_x, e_x]$ no intersecta a $E_1(X)$ por ser un arco externo en X . Esto termina el análisis del caso (d).

Supongamos ahora que la condición (e) se cumple para una infinidad de índices n . De nueva cuenta, como el orden de cada punto de X es finito, se cumple una de las condiciones (*) y (**). Como $f_2^{se}(t_n) \in [r_n, e_n]$, si se cumple la condición (*), entonces podemos proceder como en la prueba del caso anterior, para concluir que $\lim\bar{g}(A_n) = \lim f_2^{se}(t_n) = m = \bar{g}(A)$. También, como en el caso anterior, la condición (**) no se puede dar, pues los arcos externos no tienen puntos de $E_1(X)$.

Supongamos, por último, que la condición (f) se cumple para una infinidad de índices n . De nueva cuenta tenemos que analizar las situaciones (*) y (**). La condición (**) no se puede dar, pues $\lim A_n = A \in F_1(X)$. Entonces se da la condición (*). Luego, $\lim\bar{g}(A_n) = \lim e_n = m = \bar{g}(A)$. Esto muestra que \bar{g} es continua en A , para el caso en que $A \in F_1(E_1(X))$.

Supongamos ahora que A es un arco externo en X . Entonces $A = [r, e]$ con $e \in E_2(X)$ y $[r, e] \cap R(X) = \{r\}$. Como $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) = F_1(X) \cup \mathfrak{M}$, $F_1(X)$ es cerrado en $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ y $A \notin F_1(X)$, podemos suponer, sin perder generalidad, que $A_n \in \mathfrak{M}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, dada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto A_n tiene la forma $[t_n, e_n]$, donde $e_n \in E_2(X)$ y A_n está contenido en un arco externo $[r_n, e_n]$, donde $[r_n, e_n] \cap R(X) = \{r_n\}$. Como el orden de cada punto de X es finito, de nueva cuenta tenemos que se cumple alguna de las condiciones (*) y (**) enunciadas anteriormente. Además, como X no contiene continuos de convergencia, la condición (*) no se puede dar. Por lo tanto, se cumple (**) y esto implica, sin perder generalidad, que $A_n = [t_n, e]$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, aplicando la continuidad de f_2^{se} , sucede que $\lim\bar{g}(A_n) = \lim f_2^{se}(t_n) = \lim f_2^{se}(r) = e = \bar{g}(A)$. Esto muestra que \bar{g} es continua en A , para el caso en que A es un arco externo en A . Esto prueba (5).

Para finalizar la prueba, como \bar{g} es una función continua, biyectiva, el conjunto $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ es compacto y X es un espacio T_2 , sucede que \bar{g} es un homeomorfismo. \square

Veamos ahora que si $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$, sucede que $\Omega(X)$ es homeomorfo a $\Omega(Y)$.

Teorema 3.30. *Si X, Y son continuos tales que $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$, entonces $\Omega(X)$ es homeomorfo a $\Omega(Y)$.*

Demostración. Sea $h : C(X) \rightarrow C(Y)$ un homeomorfismo. Si $A \in \Omega(X)$, entonces existe una 2-celda \mathcal{W} en $C(X)$ tal que $A \in \text{int}_{C(X)}(\mathcal{W}) \cap \partial\mathcal{W}$. Entonces $\mathcal{V} = h(\mathcal{W})$ es una 2-celda en $C(Y)$ tal

que $h(A) \in \text{int}_{C(Y)}(\mathcal{V}) \cap \partial\mathcal{V}$. Luego, $h(A) \in \Omega(Y)$. Por lo tanto, $h(\Omega(X)) \subset \Omega(Y)$. Como h^{-1} es un homeomorfismo, sucede que $\Omega(Y) \subset h(\Omega(X))$. Así, $h(\Omega(X)) = \Omega(Y)$. Esto muestra que $\Omega(X)$ es homeomorfo a $\Omega(Y)$. \square

Para terminar, usando el Teorema 3.29 y el Teorema 3.30 probemos que la familia \mathfrak{D} está C -determinada, originalmente este resultado se encuentra en [16, Teorema 6].

Teorema 3.31. *Sean $X, Y \in \mathfrak{D}$. Si $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y .*

Demostración. Supongamos que $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$. Por el Teorema 3.30, $\Omega(X)$ es homeomorfo a $\Omega(Y)$. Por consiguiente, $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ es homeomorfo a $\text{cl}_{C(Y)}(\Omega(Y))$ y, por el Teorema 3.29, X es homeomorfo a Y . \square

Agradecimientos

Agradecemos a los árbitros su amable revisión que hicieron mejorar esta presentación.

Bibliografía

- [1] Gerardo Acosta García, *Continuos con hiperespacio único*, Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, México D. F. 1999.
- [2] Gerardo Acosta García, *Continua with unique hyperspace*, Lecture notes in pure and applied mathematics 230, 33-49, Marcel Dekker, Inc., 2002.
- [3] Daniel Arévalo, Wlodzimierz Janusz Charatonik, Patricia Pellicer Covarrubias y Likin Simón, *Dendrites with a closed set of end points*, Topology Appl. 115 (2001), 1-17.
- [4] Janusz Jerzy Charatonik, *Monotone mappings of universal dendrites*, Topology Appl. 38 (1991), 163-187.
- [5] Janusz Jerzy Charatonik y Carl Eberhart, *On smooth dendroids*, Fund. Math. 67 (1970), 297-322.
- [6] Janusz Jerzy Charatonik y Wlodzimierz Janusz Charatonik, *Dendrites*, Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones 22, Sociedad Matemática Mexicana (1998), 227-253.
- [7] Wlodzimierz Janusz Charatonik y Anne Dilks, *On self-homeomorphic spaces*, Topology Appl. 55 (1994), 215-238.

- [8] Vianey Córdova Zalazar, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *La Topología de los Hiperespacios* (Capítulo 26), Matemáticas y sus Aplicaciones I, Textos Científicos, Fomento Editorial, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2011, págs. 291-300, Primera Edición 2011, ISBN: 978-607-487-338-2. <http://www.fcfm.buap.mx/cima/docs/publicaciones/MatematicasYSusAplicacionesI2011.pdf>
- [9] D. W. Curtis y R.M Schori, 2^X and $C(X)$ are homeomorphic to the Hilbert cube, *Bull Amer. Math. Soc.* 80 (1974), 927-931.
- [10] Carl Eberhart, *Intervals of continua which are Hilbert cubes*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 68 (1978), 220-224.
- [11] Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *Dendritas Locales* (Capítulo 27), Matemáticas y sus Aplicaciones I, Textos Científicos, Fomento Editorial, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2011, págs. 291-300, Primera Edición 2011, ISBN: 978-607-487-338-2. <http://www.fcfm.buap.mx/cima/docs/publicaciones/MatematicasYSusAplicacionesI2011.pdf>
- [12] Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *Encajes* (Capítulo 19), Matemáticas y sus Aplicaciones 2, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 271-285, Primera Edición 2013, ISBN: 978-607-487-600-0. <http://www.fcfm.buap.mx/cima/docs/publicaciones/MA2-31-10-13.pdf>
- [13] Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías Romero, *El n -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo* (Capítulo 10), Matemáticas y sus Aplicaciones 3, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 175-195, Primera Edición 2013, ISBN: 978 607 487 659 8. <http://www.fcfm.buap.mx/cima/docs/publicaciones/MatematicasYSusAplicaciones3.pdf>
- [14] Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías Romero, *Almost meshed continua have unique second and third symmetric products and n -fold hyperspace suspension*, manuscrito.
- [15] Rodrigo Hernández Gutiérrez, Alejandro Illanes, Verónica Martínez de la Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, *Rocky Mountain J. Math.* 43 (5)(2013), 1583-1624.
- [16] David Herrera Carrasco, *Dendrites with unique hyperspace*, *Houston J. Math.*, 33(3) (2007), 795-805.
- [17] David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías Romero, *Framed continua have unique n -fold hyperspace suspension*, por aparecer en *Topology and its Applications*.

- [18] David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Francisco Vázquez Juárez, *¿Tienen las Dendritas Locales Producto Simétrico Único?* (Capítulo 28), Matemáticas y sus Aplicaciones I, Textos Científicos, Fomento Editorial, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2011, págs. 291-300, Primera Edición 2011, ISBN: 978-607-487-338-2. 335 páginas. <http://www.fcfm.buap.mx/cima/docs/publicaciones/MatematicasYSusAplicacionesI2011.pdf>
- [19] David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Francisco Vázquez Juárez, *Continuos Casi Enrejados y localmente conexos con n -ésimo Producto Simétrico Único* (Capítulo 20), Matemáticas y sus Aplicaciones 2, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 287-299, Primera Edición 2013, ISBN: 978-607-487-600-0. <http://www.fcfm.buap.mx/cima/docs/publicaciones/MA2-31-10-13.pdf>
- [20] David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Francisco Vázquez Juárez, *El n -ésimo hiperespacio suspensión de gráficas finitas* (Capítulo 11), Matemáticas y sus Aplicaciones 3, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 197-214, Primera Edición 2013, ISBN: 978 607 487 659 8. <http://www.fcfm.buap.mx/cima/docs/publicaciones/MatematicasYSusAplicaciones3.pdf>
- [21] Witold Hurewicz y Henry Wallman, *Dimension Theory (revised)*, Princeton Mathematical Series, v. 4. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1969.
- [22] Alejandro Illanes y Sam Bernardo Nadler, Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, N.Y. 1999.
- [23] Kazimierz Kuratowski, *Topology*, Vol. 2, Academic Press and PWN, New York, London and Warszawa 1968.
- [24] Lewis Lum, *Weakly smooth dendroids*, Fund. Math. 83 (1974), 111-120.
- [25] Sergio Macías, *La estructura de los dendroides suaves*, Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones 10, Sociedad Matemática Mexicana, 1993.
- [26] Luis Montejano e Isabel Puga, *Shore points in dendroids and conical pointed hyperspace*, Topology Appl. 46 (1992), 41-54.
- [27] Germán Montero Rodríguez, *Continuos indescomponibles*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2012.
- [28] Sam Bernardo Nadler Jr., *Hyperspaces of sets*, Monographs and Text Books in Pure and Applied Mathematics, 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.
- [29] Sam Bernardo Nadler Jr., *Continuum Theory, An introduction*, Monographs and Text Books in Pure and Applied Mathematics, 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

-
- [30] Sam Bernardo Nadler, Jr., *Dimension Theory: An introduction with exercises*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 18, Sociedad Matemática Mexicana 2002.
- [31] Isabel Puga, *Hiperespacios con punta de cono*, Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, México D. F. (1989).

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570
dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx
213470925@alumnos.fcfm.buap.mx

Capítulo 9

Introducción a la función \mathcal{T} de Jones

María de Jesús López Toriz

FCFM, BUAP

Resumen

En este trabajo recopilamos algunas propiedades topológicas, para espacios topológicos Hausdorff, compactos y conexos, en términos de la función \mathcal{T} definida por F. Burton Jones. Dado un espacio topológico X , diremos que un subconjunto no vacío, H , de X es un *continuo* si, H como subespacio de X es Hausdorff, compacto y conexo. Para X , consideremos su conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$. Se define la función \mathcal{T} de Jones, $\mathcal{T} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, como $\mathcal{T}(A) = \{x \in X : \text{para todo continuo } H \subset X \text{ con } x \in \text{int}(H), \text{ se tiene que } H \cap A \neq \emptyset\}$. Dados un continuo X y un subcontinuo A de X , demostramos que $\mathcal{T}(A)$ es un continuo. Se estudian las relaciones entre los continuos \mathcal{T} -aditivos y \mathcal{T} -simétricos. Por último, se dan condiciones necesarias y suficientes para que un espacio topológico Hausdorff y compacto sea localmente conexo y para que sea semilocalmente conexo, en términos de la función \mathcal{T} de Jones.

1. Introducción

La idea de este capítulo es mostrar algunas propiedades topológicas en términos de la función \mathcal{T} definida por F. Burton Jones [1]. Dados un espacio topológico X y un subconjunto no vacío, H , de X , diremos que H es un *continuo* si H como subespacio de X es Hausdorff, compacto y conexo. Consideremos el conjunto potencia de X , denotado por $\mathcal{P}(X)$. Se define la función \mathcal{T} de Jones,

$$\mathcal{T} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X),$$

como

$$\mathcal{T}(A) = \{x \in X : \text{para todo continuo } H \subset X \text{ con } x \in \text{int}(H), \text{ se tiene que } H \cap A \neq \emptyset\}.$$

En la Sección 2, probamos que si X es un espacio topológico, entonces $\mathcal{T}(A)$ es cerrado, para cada $A \in \mathcal{P}(X)$ y $\mathcal{T}(D) = X$, para cualquier subconjunto denso, D , de X . Por otro lado, si X es un continuo (es decir, un espacio topológico Hausdorff, compacto y conexo) y 2^X es el hiperespacio de cerrados de X , entonces la función $\mathcal{T}|_{2^X}$ es semicontinua superiormente.

En la Sección 3, adaptamos algunos de los teoremas de golpes en la frontera, para espacios Hausdorff compactos y conexos, para demostrar que $\mathcal{T}(A)$ es un continuo, para cada subcontinuo A de X .

En la Sección 4, demostramos que todo continuo hereditariamente unicoherente es \mathcal{T} -aditivo. Si X es un continuo \mathcal{T} -aditivo y A un cerrado en X , entonces $\mathcal{T}(A) = \bigcup_{a \in A} \mathcal{T}(\{a\})$. Además, probamos que todo continuo \mathcal{T} -simétrico es \mathcal{T} -aditivo y damos un ejemplo para mostrar que el recíproco es falso.

En la última sección, probamos equivalencias para que un espacio topológico Hausdorff y compacto sea localmente conexo y para que sea semilocalmente conexo, en términos de la función \mathcal{T} de Jones. Para muchas otras propiedades relacionadas con esta función puede ver el Capítulo 3: *Jones's set function \mathcal{T}* , del libro *Topics on Continua*, de Sergio Macías [2].

Cabe mencionar que estas notas pueden ser una introducción para que el lector inicie un proyecto de investigación acerca de la función \mathcal{T} de Jones, para esto puede ver la serie de problemas abiertos que contiene la Sección 7.2 del libro de S. Macías [2]; al final del trabajo incluimos algunos de éstos.

2. Definición y propiedades básicas de la función \mathcal{T} de Jones

Recordamos que en este escrito un *continuo* es un espacio topológico no vacío Hausdorff, compacto y conexo. Un *subcontinuo* de un espacio topológico es un subespacio el cual es un continuo. Para un subconjunto A de un espacio topológico X , como es usual, denotamos el interior, la cerradura y la frontera de A en X por $\text{int}(A)$, \overline{A} y $\text{Fr}(A)$, respectivamente. Vamos a denotar $\mathcal{T}(x)$ en lugar de $\mathcal{T}(\{x\})$, cuando $x \in X$.

Por otro lado, si (Z, d) es un espacio métrico y tomamos un punto $z_0 \in Z$ y un número positivo ε , denotamos y definimos la bola en Z con centro en z_0 y radio ε , por $B_Z(z_0, \varepsilon) = \{z \in Z : d(z, z_0) < \varepsilon\}$.

Para cualquier espacio topológico X , de la definición de la función \mathcal{T} de Jones, se siguen las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$,
2. $\mathcal{T}(X) = X$ y,

3. $A \subset \mathcal{T}(A)$, para cada $A \in \mathcal{P}(X)$.

Lema 2.1. *Si A es un subconjunto de un espacio topológico X , entonces $\mathcal{T}(A)$ es un conjunto cerrado en X .*

Demostración. Basta probar que $\overline{\mathcal{T}(A)} \subset \mathcal{T}(A)$. Para esto sean $x \in \overline{\mathcal{T}(A)}$ y H un subcontinuo de X tales que $x \in \text{int}(H)$. Se tiene que $\text{int}(H) \cap \mathcal{T}(A) \neq \emptyset$. Consideremos un punto $y \in \text{int}(H) \cap \mathcal{T}(A)$. Note que H es un subcontinuo de X con $y \in \text{int}(H)$ y $y \in \mathcal{T}(A)$, se sigue que $H \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in \mathcal{T}(A)$. \square

Proposición 2.2. *Si X es un espacio topológico y D es un subconjunto denso de X , entonces $\mathcal{T}(D) = X$.*

Demostración. Se tiene que $D \subset \mathcal{T}(D)$, luego $\overline{D} \subset \overline{\mathcal{T}(D)}$. Se sigue de la hipótesis y el Lema 2.1 que $\mathcal{T}(D) = X$. \square

Proposición 2.3. *Para cualesquiera subconjuntos, A y B , de un espacio Hausdorff y compacto X , si $A \subset B$ entonces $\mathcal{T}(A) \subset \mathcal{T}(B)$.*

Demostración. Sean $x \in \mathcal{T}(A)$ y un subcontinuo, H , de X tales que $x \in \text{int}(H)$. Se tiene que $H \cap A \neq \emptyset$. Dado que $A \subset B$, se sigue que $H \cap B \neq \emptyset$. Con lo cual $x \in \mathcal{T}(B)$. \square

Proposición 2.4. *Para cualesquiera subconjuntos A y B de un espacio Hausdorff y compacto, se tiene que $\mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B) \subset \mathcal{T}(A \cup B)$.*

Demostración. Como $A \subset A \cup B$, por la Proposición 2.3 se tiene que $\mathcal{T}(A) \subset \mathcal{T}(A \cup B)$. Similarmente, $\mathcal{T}(B) \subset \mathcal{T}(A \cup B)$, de donde $\mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B) \subset \mathcal{T}(A \cup B)$. \square

Sea X un espacio topológico, en general no se cumple que para cualquier subconjunto A de X ,

$$\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}(\overline{A}). \quad (1)$$

Respecto a la igualdad en (1) en general sólo se cumple una contención y daremos un ejemplo para mostrar que la otra contención puede ser falsa, vea la Proposición 2.5 y el Ejemplo 2.6.

Proposición 2.5. *Para cualquier subconjunto A de un espacio Hausdorff y compacto, se tiene que $\mathcal{T}(A) \subset \mathcal{T}(\overline{A})$.*

Demostración. Dado que $A \subset \overline{A}$, se tiene por la Proposición 2.3 que $\mathcal{T}(A) \subset \mathcal{T}(\overline{A})$. \square

Ejemplo 2.6. Sea \mathcal{W} el círculo de Varsovia, se tiene que existe un subconjunto A de \mathcal{W} tal que $\mathcal{T}(\overline{A}) \not\subseteq \mathcal{T}(A)$.

Para probar esto denotemos por S a la gráfica en \mathbb{R}^2 de la función $\text{sen}(\frac{1}{x})$, para cada $x \in (0, 1]$, esto es,

$$S = \{(x, \text{sen}(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}.$$

Sea X la cerradura en \mathbb{R}^2 del conjunto S . Tenemos que X es un continuo, el cual es conocido como el *continuo* $\text{sen}(\frac{1}{x})$. Ahora, denotemos por p y q a los puntos $(0, -1)$ y $(1, \text{sen}(1))$ de X , respectivamente. Sea L un arco en \mathbb{R}^2 con puntos extremos p y q tal que $X \cap L = \{p, q\}$. Consideremos $\mathcal{W} = X \cup L$, se tiene que \mathcal{W} es un continuo, el cual es conocido como el *círculo de Varsovia*. Denotemos por J la barra límite de S , es decir, $J = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$.

Ahora, fijemos una sucesión de puntos distintos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, contenida en L , que converge al punto p . Sea

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Vamos a ver que $\mathcal{T}(A) = A \cup \{p\}$. Es claro que $A \subset \mathcal{T}(A)$. Para probar que $p \in \mathcal{T}(A)$, consideremos un subcontinuo, H , de \mathcal{W} tal que $p \in \text{int}(H)$. Dado que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al punto p , tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \text{int}(H)$, para toda $n \geq N$. De aquí se sigue que $H \cap A \neq \emptyset$. Por lo cual $p \in \mathcal{T}(A)$. No es difícil ver que si $y \in \mathcal{W} \setminus (A \cup \{p\})$, entonces existe un subcontinuo, H , de \mathcal{W} tal que $y \in \text{int}(H)$ y $H \cap A = \emptyset$. Con esto podemos concluir que $\mathcal{T}(A) = A \cup \{p\}$.

Note que $\overline{A} = A \cup \{p\}$. Vamos a probar que $\mathcal{T}(\overline{A}) = A \cup J$. Es claro que $A \cup \{p\} \subset \mathcal{T}(\overline{A})$. Ahora, consideremos un punto $y \in J \setminus \{p\}$. Sea H un subcontinuo de \mathcal{W} tal que $y \in \text{int}(H)$. Se puede mostrar que sólo pueden darse los siguientes casos:

Caso 1. El continuo H es homeomorfo al continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$.

Caso 2. El continuo H es homeomorfo al continuo $\text{sen}(\frac{1}{x}) \cup B$, donde B es un arco contenido en L y contiene al punto p .

Caso 3. $H = \mathcal{W}$.

En cualquiera de los tres casos, tenemos que $p \in H$, así $H \cap \overline{A} \neq \emptyset$. De aquí se sigue que $J \setminus \{p\} \subset \mathcal{T}(\overline{A})$. Luego, $A \cup J \subset \mathcal{T}(\overline{A})$. Por otro lado, si $y \in \mathcal{W} \setminus (A \cup J)$, es fácil ver que existe un subcontinuo, H , de \mathcal{W} tal que $y \in \text{int}(H)$ y $H \cap \overline{A} = \emptyset$. Con esto se obtiene que $y \notin \mathcal{T}(\overline{A})$. De aquí se concluye que $\mathcal{T}(\overline{A}) = A \cup J$.

Por lo tanto, $\mathcal{T}(\overline{A}) \not\subseteq \mathcal{T}(A)$.

En lo que sigue vamos a ver un par de propiedades relacionadas con conjuntos abiertos.

Proposición 2.7. *Si U es un conjunto abierto en un espacio Hausdorff y compacto X , entonces el conjunto $\{x \in X : \mathcal{T}(x) \subset U\}$ es abierto en X .*

Demostración. Denotemos

$$V = \{x \in X : \mathcal{T}(x) \subset U\}.$$

Sea un punto $x \in V$. Vamos a probar que existe un conjunto abierto, W , en X tal que $x \in W$ y $W \subset V$. Para esto note que si $y \in X \setminus U$, entonces $y \notin \mathcal{T}(x)$. Luego, existe un subcontinuo, H_y , de X tal que $y \in \text{int}(H_y)$ y $H_y \cap \{x\} = \emptyset$. Se tiene que la colección $\{\text{int}(H_y) : y \in X \setminus U\}$ es una cubierta abierta del compacto $X \setminus U$. Así, existen puntos, y_1, \dots, y_n , en $X \setminus U$ tales que $X \setminus U \subset \bigcup_{i=1}^n \text{int}(H_{y_i})$. Sea $M = \bigcup_{i=1}^n H_{y_i}$. Note que M es un conjunto cerrado en X . Pongamos $W = X \setminus M$. Se tiene que W es un conjunto abierto en X y $x \in W$.

Resta probar que $W \subset V$, es decir, para cada $w \in W$ se tiene que $\mathcal{T}(w) \subset U$. Para esto sea $w \in W$. Vamos a probar que $X \setminus U \subset X \setminus \mathcal{T}(w)$. Sea $z \in X \setminus U$. Se tiene que existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $z \in \text{int}(H_{y_j}) \subset H_{y_j} \subset M$. Note que $H_{y_j} \cap W = \emptyset$; como $w \in W$, se sigue que $H_{y_j} \cap \{w\} = \emptyset$, así se obtiene que $z \notin \mathcal{T}(w)$. Por lo tanto, V es un conjunto abierto en X . \square

Para un continuo X consideremos la colección

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío en } X\}.$$

A este conjunto se le da una topología como sigue; consideremos una colección finita, U_1, \dots, U_n , de subconjuntos abiertos de X , denotamos

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Ahora, pongamos

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, \dots, U_n \rangle : U_i \text{ es un abierto en } X, i \in \{1, \dots, n\} \text{ y } n \in \mathbb{N}\}.$$

Se tiene que \mathcal{B} es una base para una topología para 2^X ; la cual se conoce como la topología de Vietoris. La demostración de este resultado la puede consultar en [4, Teorema 4.5]. El conjunto 2^X con la topología de Vietoris se llama el hiperespacio de cerrados de X .

Consideremos un continuo X , por el Lema 2.1, tenemos que $\mathcal{T}(A)$ es un subconjunto cerrado de X , para cada $A \in \mathcal{P}(X)$. De este modo la función

$$\mathcal{T}|_{2^X} : 2^X \rightarrow 2^X$$

está bien definida. En el resultado que sigue vamos a probar que la función $\mathcal{T}|_{2^X}$ es semicontinua superiormente, usando la equivalencia (ver [4, 7.15 (a)]): para cada conjunto abierto U en X , el conjunto

$$\{A \in 2^X : \mathcal{T}(A) \subset U\}$$

es un abierto en 2^X , con la topología de Vietoris.

Teorema 2.8. *Si X es un continuo, entonces $\mathcal{T}|_{2^X} : 2^X \rightarrow 2^X$ es una función semicontinua superiormente.*

Demostración. Sea U un conjunto abierto en X . Denotemos

$$\mathcal{V} = \{A \in 2^X : \mathcal{T}(A) \subset U\}.$$

Tomemos un elemento $A \in \mathcal{V}$. Vamos a probar que existe un conjunto abierto, W , en 2^X tal que $A \in W$ y $W \subset \mathcal{V}$.

Para cada $y \in X \setminus U$ se tiene que $y \notin \mathcal{T}(A)$. Luego, existe un subcontinuo, H_y , de X tal que $y \in \text{int}(H_y)$ y $H_y \cap A = \emptyset$. Se tiene que la colección $\{\text{int}(H_y) : y \in X \setminus U\}$ es una cubierta abierta del compacto $X \setminus U$. Así, existen puntos, y_1, \dots, y_n , en $X \setminus U$ tales que $X \setminus U \subset \bigcup_{i=1}^n \text{int}(H_{y_i})$. Sea $M = \bigcup_{i=1}^n H_{y_i}$. Note que M es un conjunto cerrado en X . Sea $W = X \setminus M$, se tiene que W es un conjunto abierto en X . Pongamos $\mathcal{W} = \langle W \rangle$. Note que $A \in \mathcal{W}$.

Resta probar que $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$, es decir, para cada $D \in \mathcal{W}$ se tiene que $\mathcal{T}(D) \subset U$. Para esto sea $D \in \mathcal{W}$. Vamos a probar que $X \setminus U \subset X \setminus \mathcal{T}(D)$. Sea un punto $z \in X \setminus U$. Se tiene que existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $z \in \text{int}(H_{y_j}) \subset H_{y_j} \subset M$. Note que $H_{y_j} \cap W = \emptyset$; como $D \in \mathcal{W}$, se sigue que $H_{y_j} \cap D = \emptyset$, así se obtiene que $z \notin \mathcal{T}(D)$.

Por lo tanto, \mathcal{V} es un conjunto abierto en 2^X . □

3. La imagen bajo la función \mathcal{T} de Jones de un continuo

En esta parte, vamos a demostrar que la imagen bajo la función \mathcal{T} de Jones de un continuo es un continuo (ver Teorema 3.4). Para esto adaptamos algunos resultados relacionados con la teoría de los teoremas de golpes en la frontera, para espacios Hausdorff compactos y conexos. El primer teorema de golpes en la frontera es el siguiente, una prueba de este resultado está en [5, Teorema 1.10].

Teorema 3.1. *Si U es un subconjunto abierto, propio y no vacío de un continuo X y K es una componente de \overline{U} , entonces $K \cap \text{Fr}(U) \neq \emptyset$.*

Como consecuencia del Teorema 3.1 se obtienen los siguientes dos resultados de golpes en la frontera.

Teorema 3.2. *Si A es un subcontinuo propio de un continuo X y U es un subconjunto abierto de X tal que $A \subset U$. Entonces existe un subcontinuo B de X tal que $A \subset B \subset U$ y $A \neq B$.*

Demostración. Como X es un espacio Hausdorff y compacto, por [3, Teorema 32.3], se tiene que X es normal. Note que A es cerrado en X , así existe un conjunto abierto, V , en X tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Note que si $V = X$, tomando $B = X$ se tiene la conclusión. Luego, supongamos que $V \neq X$. Ahora, como A es conexo y $A \subset \overline{V}$, podemos considerar la componente, B , de \overline{V} que contiene a A . Se tiene que B es cerrado en X y así compacto. Además, $A \subset B \subset U$. Luego, por el Teorema 3.1, tenemos que $B \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$. Con lo cual $A \neq B$. \square

Teorema 3.3. *Sean E un subconjunto propio y no vacío de un continuo X y K una componente de E . Se tiene que $\overline{K} \cap \overline{X \setminus E} \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $\overline{K} \cap \overline{X \setminus E} = \emptyset$. Como $K \neq \emptyset$ y E es un subconjunto propio de X , se tiene que $\overline{K} \neq \emptyset$ y $\overline{X \setminus E} \neq \emptyset$. Note que \overline{K} es un subconjunto compacto, conexo y propio de X . Vamos a denotar por $U = X \setminus \overline{X \setminus E}$. Por el Teorema 3.2, tenemos que existe un subcontinuo, B , de X tal que $\overline{K} \subset B \subset U$ y $\overline{K} \neq B$. Ahora, como $X \setminus E \subset \overline{X \setminus E}$, tenemos que $U \subset E$. De donde, B es un subconjunto conexo de E el cual contiene propiamente a K . Lo cual contradice el hecho de que K es una componente de E . Por lo tanto, $\overline{K} \cap \overline{X \setminus E} \neq \emptyset$. \square

Teorema 3.4. *Si X es un continuo y A es un subconjunto conexo de X , entonces $\mathcal{T}(A)$ es conexo.*

Demostración. Supongamos lo contrario, esto es, supongamos que $\mathcal{T}(A) = H \cup K$, donde H y K son no vacíos, ajenos y cerrados en $\mathcal{T}(A)$. Por el Lema 2.1, $\mathcal{T}(A)$ es cerrado en X y así, H y K también son cerrados en X . Dado que X es Hausdorff y compacto por [3, Teorema 32.3], se tiene que X es normal. Luego, existen conjuntos ajenos y abiertos en X , U y V , tales que $H \subset U$ y $K \subset V$. Como A es conexo, podemos suponer que $A \subset H$.

Observe que $\overline{U} \cap V = \emptyset$, luego $\overline{U} \cap K = \emptyset$. Como $Fr(U) \subset \overline{U}$ se sigue que $Fr(U) \cap K = \emptyset$. También, como U es abierto y $Fr(U) \subset \overline{X \setminus \overline{U}} = X \setminus U$, se tiene que $Fr(U) \cap U = \emptyset$. Se sigue que $Fr(U) \cap H = \emptyset$ y así $Fr(U) \cap \mathcal{T}(A) = \emptyset$. Esto es, para cada $z \in Fr(U)$ se tiene que $z \notin \mathcal{T}(A)$, luego existe un subcontinuo A_z de X tal que

$$z \in \text{int}(A_z) \text{ y } A_z \cap A = \emptyset.$$

Note que la colección $\{int(A_z) : z \in Fr(U)\}$ es una cubierta abierta del cerrado $Fr(U)$. Como $Fr(U)$ es compacto, existen puntos, z_1, \dots, z_n , en $Fr(U)$ tales que $Fr(U) \subset \bigcup_{i=1}^n int(A_{z_i})$. Denotemos

$$E = (X \setminus U) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n A_{z_i} \right).$$

Se tiene que E es un conjunto cerrado en X y así compacto. Es claro que $E \cap A = \emptyset$. Además, $K \subset X \setminus \bar{U} \subset X \setminus U \subset E$, como $X \setminus \bar{U}$ es un conjunto abierto en X , se sigue que $K \subset int(E)$. Vamos a probar que:

$$E \text{ tiene sólo un número finito de componentes.} \quad (2)$$

Dada $i \in \{1, \dots, n\}$, como A_{z_i} es conexo, podemos tomar la componente C_i de E tal que $A_{z_i} \subset C_i$. Para probar (2) vamos a demostrar que $E = \bigcup_{i=1}^n C_i$. Para esto sea un punto $x \in E$. Se tienen dos casos:

Caso 1. Si $x \in X \setminus U$, entonces consideremos la componente, L , de $X \setminus U$ tal que $x \in L$. Como X es un continuo, por el Teorema 3.3, se tiene que $\bar{L} \cap \overline{(X \setminus (X \setminus U))} \neq \emptyset$. Esto es, $\bar{L} \cap \bar{U} \neq \emptyset$. Ahora, como $L \subset X \setminus U$ se sigue que $\bar{L} \cap \overline{(X \setminus U)} = \bar{L}$. Además,

$$\bar{L} \cap Fr(U) = \bar{L} \cap (\bar{U} \cap \overline{(X \setminus U)}) = (\bar{L} \cap \overline{X \setminus U}) \cap \bar{U} = \bar{L} \cap \bar{U} \neq \emptyset,$$

así obtenemos que $\bar{L} \cap Fr(U) \neq \emptyset$. Notemos que L es cerrado en X , por lo cual $L \cap Fr(U) \neq \emptyset$. Luego, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $L \cap A_{z_i} \neq \emptyset$. Así, $L \cap C_i \neq \emptyset$. Como L es un conexo contenido en E y C_i es una componente de E , se sigue que $L \subset C_i$. Con esto, $x \in \bigcup_{i=1}^n C_i$.

Caso 2. Si $x \in \bigcup_{i=1}^n A_{z_i}$, entonces $x \in A_{z_j}$, para algún $j \in \{1, \dots, n\}$, y como $A_{z_j} \subset C_j$. Se sigue que $x \in \bigcup_{i=1}^n C_i$.

Por lo tanto, (2) está demostrado.

Por otro lado, fijemos un punto $x \in K$. Como $K \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$, se tiene que $K \subset E$. Luego, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in C_i$. Sin perder generalidad supongamos que $i = 1$, así $x \in C_1$. Ahora, pongamos

$$W = (X \setminus \bar{U}) \cap \left(X \setminus \bigcup_{i=2}^n C_i \right).$$

Se tiene que W es un conjunto abierto en X , tal que $x \in W$ y $W \subset C_1$. Note que C_1 es un subcontinuo de X tal que $x \in int(C_1)$ y $C_1 \cap A = \emptyset$, esto implica que $x \notin \mathcal{T}(A)$. Lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $\mathcal{T}(A)$ es conexo. □

Como una consecuencia del Lema 2.1 y el Teorema 3.4 obtenemos que la imagen bajo la función \mathcal{T} de Jones de un continuo, es también un continuo. Esto es:

Teorema 3.5. *Si X es un continuo y A un subcontinuo de X , entonces $\mathcal{T}(A)$ es un continuo.*

Finalizamos esta sección con una propiedad interesante, en espacios Hausdorff compactos.

Teorema 3.6. *Si A es un subconjunto conexo de un espacio Hausdorff compacto X y $\mathcal{T}(A)$ no es conexo. Entonces X tiene un número infinito de componentes.*

Demostración. Lo que vamos a probar es que:

si X tiene un número finito de componentes y A es conexo en X , entonces $\mathcal{T}(A)$ es conexo.

Para esto consideremos las componentes de X , digamos C_1, \dots, C_n . Como A es conexo en X , podemos suponer que $A \subset C_1$.

Primero vamos a demostrar que $\mathcal{T}(A) \subset C_1$. Para probar esto supongamos lo contrario, es decir, supongamos que $\mathcal{T}(A) \not\subset C_1$. Esto implica que existen un número $i \in \{2, \dots, n\}$ y un punto $x \in X$ tales que $x \in \mathcal{T}(A) \cap C_i$. Note que C_i es un subcontinuo de X . Por otro lado,

$$C_i = X \setminus \left(\bigcup \{C_j : j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}\} \right),$$

además, note que C_i es un subconjunto cerrado de X , para cada $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$. Con lo cual C_i es un conjunto abierto en X . Así, $x \in \text{int}(C_i)$. Como $i \neq 1$, tenemos que $C_i \cap C_1 = \emptyset$, de donde $C_i \cap A = \emptyset$. Con todo hemos probado que $x \notin \mathcal{T}(A)$, lo cual es una contradicción. Esto demuestra que $\mathcal{T}(A) \subset C_1$.

Finalmente, aplicando el Teorema 3.4 al continuo C_1 como espacio base y al subconjunto conexo A de C_1 , obtenemos que $\mathcal{T}(A)$ es conexo. Esto termina la prueba del teorema. \square

4. Continuos \mathcal{T} -simétricos y \mathcal{T} -aditivos

Un continuo X se llama \mathcal{T} -simétrico si para cualesquiera conjuntos cerrados, A y B , en X , $A \cap \mathcal{T}(B) = \emptyset$ implica que $\mathcal{T}(A) \cap B = \emptyset$. Un continuo X se llama \mathcal{T} -aditivo si para cualesquiera conjuntos cerrados, A y B , en X , se tiene que $\mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B) = \mathcal{T}(A \cup B)$.

Un espacio topológico conexo, X , es *unicoherente* si cada par de continuos cuya unión es X tiene intersección conexa. Si cualquier continuo en X es unicoherente, el espacio se llama *hereditariamente unicoherente*.

El resultado que sigue lo vamos a usar para probar que los continuos \mathcal{T} -aditivos no necesariamente son continuos \mathcal{T} -simétricos.

Teorema 4.1. *Si X es un continuo hereditariamente unicoherente, entonces X es \mathcal{T} -aditivo.*

Demostración. Sean A y B conjuntos cerrados en X . Por la Proposición 2.4 tenemos que $\mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B) \subset \mathcal{T}(A \cup B)$. Resta probar que $\mathcal{T}(A \cup B) \subset \mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B)$. Para esto consideremos un punto $x \in X \setminus (\mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B))$. Luego, $x \notin \mathcal{T}(A)$ y $x \notin \mathcal{T}(B)$. Así, existen subcontinuos, H y K , de X tales que

$$x \in \text{int}(H), x \in \text{int}(K), H \cap A = \emptyset \text{ y } K \cap B = \emptyset.$$

Note que $x \in H \cap K$. Como X es hereditariamente unicoherente se tiene que $H \cap K$ es un conjunto conexo. Luego, $H \cap K$ es un subcontinuo de X tal que $x \in \text{int}(H \cap K)$ y $(H \cap K) \cap (A \cup B) = \emptyset$, esto implica que $x \notin \mathcal{T}(A \cup B)$. Esto es $x \in X \setminus \mathcal{T}(A \cup B)$. Por lo tanto, $\mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B) = \mathcal{T}(A \cup B)$. \square

Lema 4.2. *Sean X un espacio Hausdorff compacto, A y B subconjuntos cerrados de X tales que $\mathcal{T}(A) \cap B = \emptyset$. Entonces existen subconjuntos cerrados, M y N , de X tales que $A \subset \text{int}(M)$, $B \subset \text{int}(N)$ y $\mathcal{T}(M) \cap N = \emptyset$.*

Demostración. Por hipótesis, para cada $b \in B$ existe un subcontinuo, H_b , de X tal que $b \in \text{int}(H_b)$ y $H_b \cap A = \emptyset$. Por la compacidad de B , existe un subconjunto finito, $\{b_1, \dots, b_n\}$, de B tal que $B \subset \bigcup_{i=1}^n \text{int}(H_{b_i})$. Como $A \cap H_b = \emptyset$, para cada $b \in B$, tenemos que $A \subset X \setminus \bigcup_{i=1}^n H_{b_i}$. Por la normalidad de X , existen conjuntos abiertos, U y V , en X tales que

$$A \subset U \subset \bar{U} \subset (X \setminus \bigcup_{i=1}^n H_{b_i}) \text{ y } B \subset V \subset \bar{V} \subset \bigcup_{i=1}^n \text{int}(H_{b_i}).$$

Pongamos $M = \bar{U}$ y $N = \bar{V}$. Es claro que M y N son subconjuntos cerrados de X , $A \subset \text{int}(M)$ y $B \subset \text{int}(N)$. Por otra parte, note que si $x \in N$ entonces $x \in \text{int}(H_{b_k})$, para algún $k \in \{1, \dots, n\}$. Además, $H_{b_k} \cap M = \emptyset$, así $x \notin \mathcal{T}(M)$. Luego, $\mathcal{T}(M) \cap N = \emptyset$. \square

Lema 4.3. *Sean X un espacio Hausdorff compacto y A un subconjunto cerrado de X . Si $x \in X \setminus \mathcal{T}(A)$, entonces existe un subconjunto abierto, U , de X tal que $A \subset U$ y $x \in X \setminus \mathcal{T}(\bar{U})$.*

Demostración. Se tiene que $\{x\}$ y A son subconjuntos cerrados de X . Por hipótesis, notemos que $\{x\} \cap \mathcal{T}(A) = \emptyset$. Luego, por el Lema 4.2, existen subconjuntos cerrados, M y N , de X tales que

$$A \subset \text{int}(M), \{x\} \subset \text{int}(N) \text{ y } \mathcal{T}(M) \cap N = \emptyset.$$

Pongamos $U = \text{int}(M)$. Es claro que U es un conjunto abierto en X y $A \subset U$. Por otra parte, como $\bar{U} \subset \bar{M} = M$, se sigue de la Proposición 2.3 que $\mathcal{T}(\bar{U}) \subset \mathcal{T}(\bar{M}) = \mathcal{T}(M)$, luego $x \in X \setminus \mathcal{T}(\bar{U})$. \square

Cabe mencionar que para el resultado que sigue vamos a usar el Lema 4.3, no es difícil ver que en su prueba no se usa la conexidad del espacio. La supondremos porque en la definición de \mathcal{T} -aditivo está hecha para continuos.

Teorema 4.4. *Si X es un continuo \mathcal{T} -aditivo y A un subconjunto cerrado de X , entonces $\mathcal{T}(A) = \bigcup_{a \in A} \mathcal{T}(a)$.*

Demostración. Por la Proposición 2.3, obtenemos que $\bigcup_{a \in A} \mathcal{T}(a) \subset \mathcal{T}(A)$. Así, resta probar que $\mathcal{T}(A) \subset \bigcup_{a \in A} \mathcal{T}(a)$. Para esto consideremos un punto $x \in X \setminus \bigcup_{a \in A} \mathcal{T}(a)$. Esto es, $x \in X \setminus \mathcal{T}(a)$, para cada $a \in A$. Por el Lema 4.3, para cada $a \in A$, existe un conjunto abierto, U_a , en X tal que $a \in U_a$ y $x \in X \setminus \mathcal{T}(\overline{U_a})$. Note que A es compacto en X , así existe un subconjunto finito, $\{a_1, \dots, a_n\}$, de A tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{a_i}$. Note que, en particular, $x \in X \setminus \mathcal{T}(\overline{U_{a_i}})$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Luego, $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathcal{T}(\overline{U_{a_i}})$. Como X es un continuo \mathcal{T} -aditivo, se tiene que

$$\bigcup_{i=1}^n \mathcal{T}(\overline{U_{a_i}}) = \mathcal{T}\left(\bigcup_{i=1}^n \overline{U_{a_i}}\right),$$

luego $x \in X \setminus \mathcal{T}\left(\bigcup_{i=1}^n \overline{U_{a_i}}\right)$. Notemos que $A \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{U_{a_i}}$. Por lo tanto, $x \in X \setminus \mathcal{T}(A)$. \square

Teorema 4.5. *Si X es un continuo \mathcal{T} -simétrico, entonces X es \mathcal{T} -aditivo.*

Demostración. Sean A y B subconjuntos cerrados de X . Por la Proposición 2.4 se tiene que $\mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B) \subset \mathcal{T}(A \cup B)$. Ahora, vamos a probar que $\mathcal{T}(A \cup B) \subset \mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B)$. Para esto consideremos un punto $x \in \mathcal{T}(A \cup B)$. Note que $\{x\}$ y $A \cup B$ son conjuntos cerrados en X y $\{x\} \cap \mathcal{T}(A \cup B) \neq \emptyset$. Como X es \mathcal{T} -simétrico se tiene que $\mathcal{T}(\{x\}) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. Luego, $\mathcal{T}(\{x\}) \cap A \neq \emptyset$ o bien $\mathcal{T}(\{x\}) \cap B \neq \emptyset$. Otra vez, como X es \mathcal{T} -simétrico se tiene que $\{x\} \cap \mathcal{T}(A) \neq \emptyset$ o bien $\{x\} \cap \mathcal{T}(B) \neq \emptyset$. De aquí se sigue que $x \in \mathcal{T}(A)$ o bien $x \in \mathcal{T}(B)$, así $x \in \mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B)$. \square

Concluimos esta sección con un ejemplo de un continuo \mathcal{T} -aditivo que no es \mathcal{T} -simétrico.

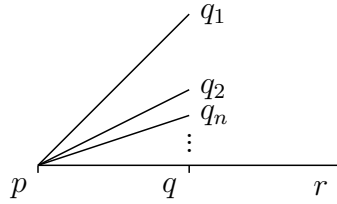
Ejemplo 4.6. Sea \mathcal{A} el abanico armónico con pata larga. Se tiene que \mathcal{A} es un continuo \mathcal{T} -aditivo y no es \mathcal{T} -simétrico. Para probar esto consideremos los puntos en el plano \mathbb{R}^2 :

$$p = (0, 0), \quad q = (1, 0), \quad r = (2, 0) \quad \text{y, para cada } n \in \mathbb{N}, \quad \text{sea } q_n = \left(1, \frac{1}{n}\right).$$

Sea L el segmento con puntos extremos p y r . Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea L_n es el segmento con puntos extremos p y q_n . Pongamos

$$\mathcal{A} = L \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n\right).$$

Se tiene que \mathcal{A} es un continuo.



Veamos que \mathcal{A} es hereditariamente unicoherente. Para esto sea Y un subespacio cerrado y conexo de \mathcal{A} . Se tiene que $p \in Y$ o bien $p \notin Y$. Si ocurre que $p \notin Y$, en este caso, Y es un arco contenido en L o bien existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Y \subset L_n$. Ahora, si $Y = C \cup D$, donde C y D son cerrados y conexos en Y . Claramente tenemos que $C \cap D$ es un punto o un arco, por lo cual $C \cap D$ es conexo. Así, Y es unicoherente. Por otro lado, no es difícil probar que Y es unicoherente en el caso cuando $p \in Y$.

Ahora, aplicando el Lema 4.1, obtenemos que \mathcal{A} es un continuo \mathcal{T} -aditivo.

Por otro lado, para ver que \mathcal{A} no es \mathcal{T} -simétrico, consideremos los conjuntos cerrados, $A = \{p\}$ y $B = \{q\}$, en \mathcal{A} .

Veamos que $\mathcal{T}(A)$ es el segmento con puntos extremos p y q , denotemos a éste por Q . Consideremos un punto $y \in Q$. Sea H un subcontinuo de \mathcal{A} tal que $y \in \text{int}(H)$. Esto implica que $p \in H$, así obtenemos que $H \cap A \neq \emptyset$. Con lo cual $Q \subset \mathcal{T}(A)$. Ahora, si $y \in \mathcal{A} \setminus Q$ entonces, no es difícil convencerse de que existe un subcontinuo, H , de \mathcal{A} tal que $y \in \text{int}(H)$ y $H \cap A = \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{T}(A) = Q$.

Para probar que $\mathcal{T}(B) = \{q\}$. Basta considerar un punto $y \in \mathcal{A} \setminus B$. No es difícil ver que podemos hallar un subcontinuo, H , de \mathcal{A} tal que $y \in \text{int}(H)$ y $H \cap B = \emptyset$.

Finalmente, note que $A \cap \mathcal{T}(B) = \emptyset$ y $\mathcal{T}(A) \cap B = \{q\}$. Por lo cual \mathcal{A} no es \mathcal{T} -simétrico.

5. Propiedades de conexidad local y conexidad semilocal: equivalencias

En esta parte damos condiciones necesarias y suficientes para la conexidad local y la conexidad semilocal de un espacio Hausdorff y compacto, en términos de la función \mathcal{T} de Jones.

Recordamos que un espacio topológico X es *localmente conexo* en el punto $x \in X$ si, para cada conjunto abierto, U , en X con $x \in U$, existe un conjunto abierto y conexo, V , en X tal que $x \in V \subset U$. Así, X es *localmente conexo* si lo es en cada uno de sus puntos.

Por otro lado, el espacio X es *conexo en pequeño* en el punto $x \in X$ si, para cada conjunto abierto, U , en X con $x \in U$, existe un conjunto conexo, V , en X tal que $x \in \text{int}(V) \subset V \subset U$. Luego, X es *conexo en pequeño* si lo es en cada uno de sus puntos.

Para probar la Proposición 5.3 vamos a usar la siguiente equivalencia de la conexidad local.

Proposición 5.1. *Si X es un espacio topológico, entonces son equivalentes las siguientes condiciones,*

- (1) X es localmente conexo;
- (2) las componentes de los conjuntos abiertos de X son abiertos;
- (3) X es conexo en pequeño.

Demostración. Veamos que (1) implica (2): sean U un conjunto abierto de X y C una componente de U . Tomemos un punto $x \in C$. Por hipótesis, existe un abierto y conexo, V , en X tal que $x \in V \subset U$. Note que $V \subset C$, así, $x \in \text{int}(C)$. Por lo tanto, C es un conjunto abierto en X .

Para ver que (2) implica (3), sean un punto $x \in X$ y U un conjunto abierto en X con $x \in U$. Consideremos la componente C de U tal que $x \in C$. Por hipótesis, se tiene que C es un conjunto abierto en X . Así, X es conexo en pequeño en el punto x .

Para probar que (3) implica (1), primero vamos a probar que (3) implica (2). Para esto sean U un conjunto abierto en X y C una componente de U . Consideremos un punto $x \in C$. Por hipótesis, X es conexo en pequeño en el punto $x \in U$, luego existe un conjunto conexo, V , en X tal que $x \in \text{int}(V) \subset V \subset U$. Se tiene que $x \in \text{int}(V) \subset C$. Por lo tanto, C es un conjunto abierto en X . Finalmente, sean un punto $x \in X$ y un conjunto abierto, U , de X tal que $x \in U$. Consideremos la componente C de U tal que $x \in C$. Luego, la hipótesis en (2) implica que C es abierto en X . Por lo tanto, X es localmente conexo en el punto x . \square

Proposición 5.2. *Si A es un subconjunto de un espacio Hausdorff, compacto y localmente conexo X , entonces $\mathcal{T}(A) = \overline{A}$.*

Demostración. Como $A \subset \mathcal{T}(A)$ se sigue que $\overline{A} \subset \overline{\mathcal{T}(A)}$. Por el Lema 2.1 se obtiene que $\overline{A} \subset \mathcal{T}(A)$.

Por otro lado, sean un punto $x \in \mathcal{T}(A)$ y U un conjunto abierto en X tal que $x \in U$. Por hipótesis, existe un conjunto abierto y conexo, V , en X tal que $x \in V \subset U$. Dado que X es normal, podemos suponer que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Note que \overline{V} es un subcontinuo de X tal que $x \in \text{int}(\overline{V})$. Dado que $x \in \mathcal{T}(A)$, se tiene que $\overline{V} \cap A \neq \emptyset$. Así $U \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in \overline{A}$. Por lo tanto, $\mathcal{T}(A) \subset \overline{A}$. \square

Proposición 5.3. *Si para cada subconjunto, A , de un espacio topológico X se tiene que $\mathcal{T}(A) = \overline{A}$, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Vamos a probar que X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos, así por la Proposición 5.1, se obtiene la conclusión. Para esto sean un punto $x \in X$ y U un conjunto abierto en X tal que $x \in U$. Note que $X \setminus U$ es un conjunto cerrado en X . Luego, por hipótesis, se tiene que

$$\mathcal{T}(X \setminus U) = \overline{X \setminus U} = X \setminus U.$$

Ahora, dado que $x \notin X \setminus U$, se tiene que $x \notin \mathcal{T}(X \setminus U)$. Se sigue que existe un subcontinuo, H , de X tal que $x \in \text{int}(H)$ y $H \cap (X \setminus U) = \emptyset$. De donde, $x \in \text{int}(H) \subset H \subset U$. Por lo tanto, X es conexo en pequeño en el punto x . \square

Como consecuencia de las Proposiciones 5.2 y 5.3 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.4. *Si X es un espacio Hausdorff y compacto, entonces X es localmente conexo si, y sólo si, $\mathcal{T}(A) = \overline{A}$, para cada $A \subset X$.*

Ahora, recordamos que un espacio topológico X es *semilocalmente conexo* en el punto x si para cada conjunto abierto, U , en X con $x \in U$, existe un conjunto abierto, V , en X tal que $x \in V \subset U$ y $X \setminus V$ tiene sólo un número finito de componentes. Así, un espacio X es *semilocalmente conexo* si lo es en cada uno de sus puntos.

Lema 5.5. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto cerrado de X con sólo un número finito de componentes. Si $x \in \text{int}(A)$ y C es la componente de A tal que $x \in C$, entonces $x \in \text{int}(C)$.*

Demostración. Sean C_1, \dots, C_n las componentes de A . Como $x \in \text{int}(A)$, existe un conjunto abierto, U en X tal que $x \in U \subset A$. Como A es cerrado en X , se tiene que C_i es cerrado en X , para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Sin perder generalidad supongamos que $C = C_1$. Sea

$$V = U \cap (X \setminus \bigcup_{i=2}^n C_i).$$

Se tiene que V es un conjunto abierto de X y $x \in V$. Note que $V \cap (\bigcup_{i=2}^n C_i) = \emptyset$ y $V \subset U \subset A$, de aquí se sigue que $V \subset C_1 = C$. De donde, $x \in \text{int}(C)$. \square

Teorema 5.6. *Sean X un espacio topológico Hausdorff y compacto y un punto $x \in X$, entonces X es semilocalmente conexo en x si, y sólo si, $\mathcal{T}(x) = \{x\}$.*

Demostración. Es claro que $x \in \mathcal{T}(x)$. Para ver la otra contención sea $y \in X \setminus \{x\}$. Vamos a probar que $y \notin \mathcal{T}(x)$. Como X es Hausdorff, existen conjuntos abiertos y ajenos, U y W , de X tales que $x \in U$ y $y \in W$. Por hipótesis, como X es semilocalmente conexo en el punto x , tenemos que existe un conjunto abierto, V , en X tal que

$$x \in V \subset U \text{ y } X \setminus V \text{ tiene sólo un número finito de componentes.}$$

Note que $X \setminus V$ es un conjunto cerrado en X y $y \in W \subset X \setminus V$, de donde $y \in \text{int}(X \setminus V)$. Sea C la componente de $X \setminus V$ que contiene al punto y . Se sigue del Lema 5.5, que $y \in \text{int}(C)$. En conclusión tenemos que

$$C \text{ es un subcontinuo de } X \text{ tal que } y \in \text{int}(C) \text{ y } C \cap \{x\} = \emptyset.$$

De donde $y \notin \mathcal{T}(x)$. Por lo tanto, $\mathcal{T}(x) = \{x\}$.

Recíprocamente, sea U un conjunto abierto de X tal que $x \in U$. Por hipótesis, para cada $y \in X \setminus U$, tenemos que $y \notin \mathcal{T}(x)$. Así existe un subcontinuo, W_y , de X tal que $y \in \text{int}(W_y)$ y $W_y \cap \{x\} = \emptyset$. Se tiene que la colección $\{\text{int}(W_y) : y \in X \setminus U\}$, es una cubierta abierta del conjunto compacto $X \setminus U$. Luego, existen puntos, y_1, \dots, y_n , de $X \setminus U$ tales que

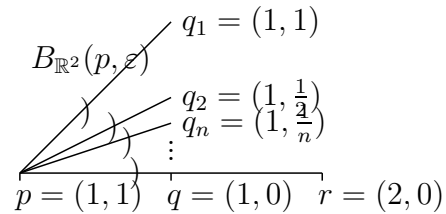
$$X \setminus U \subset \bigcup_{i=1}^n \text{int}(W_{y_i}).$$

Sea $V = X \setminus \bigcup_{i=1}^n W_{y_i}$. Se tiene que V es un conjunto abierto en X tal que $x \in V \subset U$. Note que $X \setminus V = \bigcup_{i=1}^n W_{y_i}$ y, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, tenemos que W_{y_i} es un conjunto conexo. De aquí se sigue que cada W_{y_i} está contenido en alguna componente de $X \setminus V$. Por lo cual, $X \setminus V$ tiene sólo un número finito de componentes. Por lo tanto, X es semilocalmente conexo en el punto x . \square

Ahora, notamos que los conceptos de localmente conexo y semilocalmente conexo, son diferentes.

Ejemplo 5.7. El abanico armónico con pata larga \mathcal{A} es un continuo localmente conexo en el punto p y no es semilocalmente conexo en el punto p . Por otro lado, \mathcal{A} es semilocalmente conexo en el punto q y no es localmente conexo en el punto q .

Recordemos que \mathcal{A} está definido en el Ejemplo 4.6 y que $p = (0, 0)$ y $q = (1, 0)$.



Veamos que \mathcal{A} es localmente conexo en el punto p . Para esto sea U un conjunto abierto en \mathcal{A} tal que $p \in U$. Se tiene que podemos hallar un número positivo $\varepsilon > 0$ tal que $(B_{\mathbb{R}^2}(p, \varepsilon) \cap \mathcal{A}) \subset U$. Note que $B_{\mathbb{R}^2}(p, \varepsilon) \cap \mathcal{A}$ es un conjunto conexo y abierto en \mathcal{A} tal que $p \in B_{\mathbb{R}^2}(p, \varepsilon) \cap \mathcal{A}$. Con esto se concluye que \mathcal{A} es localmente conexo en p .

Por otra parte, en el Ejemplo 4.6 probamos que $\mathcal{T}(p)$ es el segmento con puntos extremos p y q . Por el Teorema 5.6 concluimos que \mathcal{A} no es semilocalmente conexo en el punto p .

Por otro lado, en el Ejemplo 4.6 demostramos que $\mathcal{T}(q) = \{q\}$. Por el Teorema 5.6 obtenemos que el continuo \mathcal{A} es semilocalmente conexo en el punto q .

Finalmente, el continuo \mathcal{A} no es localmente conexo en el punto q , dado que no existe un abierto y conexo en \mathcal{A} que contenga al punto q y que esté contenido en el abierto $B_{\mathbb{R}^2}(q, \frac{1}{3}) \cap \mathcal{A}$.

Por último, anotamos algunos problemas abiertos en relación con la función \mathcal{T} de Jones. Para esto recordamos los siguientes conceptos: un continuo es *descomponible* si se puede representar como la unión de dos de sus subcontinuos propios, en otro caso se llama *indescomponible*. Una función continua y suprayectiva entre continuos $f : X \rightarrow Z$ se dice *monótona* si para cada punto $z \in Z$ se tiene que $f^{-1}(z)$ es un subconjunto conexo de X . La función f es abierta si para cada conjunto abierto U en X se tiene que $f(U)$ es abierto en Z .

Problema [2, 7.2.1]: ¿Si la función \mathcal{T} de Jones, $\mathcal{T}|_{2^X}$, es continua para el continuo X , entonces X es \mathcal{T} -aditivo?

Problema [2, 7.2.3]: ¿Si la función \mathcal{T} de Jones, $\mathcal{T}|_{2^X}$, es continua para el continuo X y existe un punto x en X tal que $\mathcal{T}(x)$ tiene interior no vacío, entonces X es indescomponible?

Problema [2, 7.2.5]: ¿Si la función \mathcal{T} de Jones, $\mathcal{T}|_{2^X}$, es continua para el continuo descomponible X , entonces para cada punto x en X se tiene que $\text{int}(\mathcal{T}(x)) = \emptyset$?

Problema [2, 7.2.7]: ¿Si X es un continuo indescomponible y W es un subcontinuo de $X \times X$ tal que $\text{int}(W) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{T}(W) = X \times X$? (aquí $\mathcal{T} : \mathcal{P}(X \times X) \rightarrow \mathcal{P}(X \times X)$.)

Problema [2, 7.2.9]: ¿Si la función \mathcal{T} de Jones, $\mathcal{T}|_{2^X}$, es continua para el continuo X , Z es un continuo y $f : X \rightarrow Z$ es una función monótona, entonces la función \mathcal{T} de Jones, $\mathcal{T}|_{2^Z}$, también es continua para el continuo Z ?

Problema [2, 7.2.12]: ¿Si $f : X \rightarrow Z$ es una función abierta y X es un continuo \mathcal{T} -aditivo, entonces Z es un continuo \mathcal{T} -aditivo?

Problema [2, 7.2.12]: ¿Si $f : X \rightarrow Z$ es una función abierta y X es un continuo \mathcal{T} -simétrico, entonces Z es un continuo \mathcal{T} -simétrico?

Agradecimientos

La autora le da las gracias al árbitro(a) por la revisión exhaustiva y comentarios al trabajo. Por otro lado, algunos de los resultados que se exponen en este capítulo fueron discutidos colectivamente en el seminario de Teoría de los Continuos, bajo la dirección del profesor Raúl Escobedo, en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, de la BUAP. Gracias al esfuerzo de cada uno de los participantes, la autora pudo compartir la belleza de este tema.

Bibliografía

- [1] F. B. Jones, *Concerning Nonaposyndetic Continua*, Amer. Math., 70 (1948), 403-413.
- [2] S. Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2005.
- [3] J. R. Munkres, *Topology, a first course*, Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1975.
- [4] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.
- [5] V. Sánchez Gutiérrez, *Semi fronteras en hiperespacios de continuos*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 2012.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570
mjlopez@fcfm.buap.mx

Capítulo 10

Espacios de dimensión cero y su relación con los espacios totalmente desconexos

Fernando Macías Romero, Arturo Sánchez González
FCFM, BUAP

Resumen

En el presente capítulo se presentan algunos resultados elementales en Teoría de la Dimensión, vista como una rama de la Topología. En primer lugar se estudian algunos conceptos básicos, después se presentan los primeros teoremas de espacios de dimensión cero y aparece el conjunto de Cantor \mathbf{C} como un caso general de ellos. Esta revisión concluye con un ejemplo de un espacio totalmente desconexo que no es de dimensión cero.

1. Introducción

En 1912, H. Poincaré escribió: “. . . de todos los teoremas del analysis situs, el más importante es el que expresamos diciendo que el espacio tiene tres dimensiones. Es esta proposición la que vamos a considerar y proponemos una pregunta en los siguientes términos: cuando decimos que el espacio tiene tres dimensiones, ¿qué queremos decir?” (vea [?]). Dicho texto motivó a que un año después Brouwer desarrollara la noción de un invariante topológico llamado *dimensión*, sin embargo, dicho concepto se mantuvo desconocido para la comunidad matemática, por lo cual en 1922, Menger y Urysohn formularon la misma definición, de forma independiente.

Desde la época de los griegos hasta antes del uso de la teoría de conjuntos en su forma actual, los matemáticos usaron la palabra *dimensión* con un sentido vago. Por ejemplo, una configuración tenía n dimensiones si el menor número de parámetros reales necesarios para describir sus puntos, de alguna manera inespecífica, es n . Al principio todo funcionaba bien, pero fue en el siglo *XIX* cuando surgió un problema importante: Cantor descubrió una correspondencia biyectiva entre los puntos de una línea y los puntos del plano, mientras que Peano descubrió una función continua del intervalo cerrado en la totalidad de un cuadrado. Esto trajo a la luz un problema importante: ¿era correcta nuestra intuición geométrica de que si m y n son números naturales diferentes, entonces \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n son diferentes?, esto es, en términos topológicos, ¿existe un homeomorfismo

entre \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n si m y n son naturales distintos? Fue Brouwer quien respondió negativamente en 1911, aunque su prueba no mostró relación explícita con la “dimensión” de \mathbb{R}^n . Afortunadamente no fue el único intento de prueba, ya que Lebesgue intentó algo diferente. Él observó que un cuadrado puede ser cubierto por *bloques* arbitrariamente pequeños de forma que ningún punto del cuadrado esté contenido en más de dos de dichos bloques, pero que si los bloques son lo suficientemente pequeños, entonces al menos tres de ellos tienen un punto en común. De forma similar, un hiper-cubo en \mathbb{R}^n puede ser descompuesto en bloques arbitrariamente pequeños de forma que no más de $n+1$ de ellos se intersecten. Fueron estas ideas las que dieron lugar al concepto de *dimensión de cubierta*, el cual será tratado en el presente texto. Asimismo, se presentarán algunos teoremas básicos dentro de la Teoría de la Dimensión, en particular respecto a los espacios de dimensión cero, se construirán ejemplos de dichos espacios y se presentará cuál es su relación con los espacios totalmente desconexos. El resultado principal será la construcción de un espacio totalmente desconexo que no es de dimensión cero.

2. Preliminares

En el presente capítulo con **espacio** nos referimos a un espacio topológico metrizable y separable, esto es, un espacio topológico T_3 y segundo numerable. Notemos que cada espacio tiene una base numerable, de donde se sigue que es Lindelof. Además, como es usual, \mathbb{R} , \mathbb{Q} y \mathbb{N} denotan al conjunto de números reales, el conjunto de los números racionales y el conjunto de números naturales, respectivamente, y con I y J denotamos a los intervalos $[0, 1]$ y $[-1, 1]$, respectivamente. También, si $f : X \rightarrow Y$ es una función, siempre consideramos que f es continua a menos que se indique lo contrario, si $A \subset X$, la restricción de f a A se denotará por $f|_A$, y si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y $t \in \mathbb{R}$, entonces $f \equiv t$ significa que f es una función constante con valor t .

Una métrica d es **admisibile** sobre un espacio X si la topología inducida por d coincide con la topología de X . Como es usual, si X es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces $int_X(A)$, $cl_X(A)$, $fr_X(A)$ denotan el interior, la cerradura y la frontera de A en X , donde $fr_X(A) = cl_X(A) \setminus int_X(A)$. Cuando no haya lugar a confusión se omitirá el subíndice. También, con $diám(A)$ se denotará el diámetro de A .

Si X un espacio topológico y $A \subset X$, entonces

$$B(A, \varepsilon) = \{y \in X : d(A, y) < \varepsilon\}$$

es la bola abierta (generalizada) alrededor de A y de radio ε , y

$$D(A, \varepsilon) = \{y \in X : d(A, y) \leq \varepsilon\}$$

es la bola cerrada (generalizada) alrededor de A y de radio ε . Cuando $A = \{x\}$ para algún $x \in X$, escribimos $B(x, \varepsilon)$ y $D(x, \varepsilon)$ en lugar de $B(\{x\}, \varepsilon)$ y $D(\{x\}, \varepsilon)$, respectivamente.

Si \mathcal{U} y \mathcal{V} son cubiertas abiertas de un espacio X , entonces \mathcal{U} es un *refinamiento* de \mathcal{V} , denotado $\mathcal{U} < \mathcal{V}$, si para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U \subset V$.

El *Cubo de Hilbert* \mathbb{Q}_H se define como el producto topológico

$$\mathbb{Q}_H = \prod_{i=1}^{\infty} J_i,$$

donde cada $J_i = J$. En general, a la i -ésima coordenada de un punto x en un espacio producto la denotamos por x_i . Ya que nos interesa trabajar con espacios métricos, dotemos al Cubo de Hilbert con una métrica “natural” que induce su topología: Si $x, y \in \mathbb{Q}_H$, entonces la función $d : \mathbb{Q}_H \times \mathbb{Q}_H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{0\}$ dada por

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

es una métrica sobre \mathbb{Q}_H que induce su topología (cf. [1]).

El siguiente resultado será útil en el presente texto.

Teorema 2.1. [*Lema de Urysohn*] Sea X un espacio. Si A y B son subconjuntos cerrados de X , entonces existe una función continua $\alpha : X \rightarrow I$ tal que $\alpha|_A \equiv 0$ y $\alpha|_B \equiv 1$.

Es importante recordar que a las funciones α como en el Teorema 2.1 se les llama *funciones de Urysohn*. Una prueba del Teorema 2.1 se encuentra en cualquier libro de Topología General.

A continuación vemos un resultado que siempre nos permitirá trabajar con subespacios del Cubo de Hilbert.

Teorema 2.2. Si X es un espacio, entonces X es homeomorfo a un subespacio del Cubo de Hilbert \mathbb{Q}_H .

Demostración. Como X es un espacio, entonces X es segundo numerable, esto es, existe \mathcal{U} base numerable de X . Para cada par (U, V) elementos de \mathcal{U} tales que $cl(U) \subset V \neq X$, consideremos una función de Urysohn $f : X \rightarrow I$ tal que $f|_{cl(U)} \equiv 0$ y $f|_{(X \setminus V)} \equiv 1$, la cual existe por el Teorema 2.1. Ahora, sea $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ la colección de todas las funciones de Urysohn obtenidas anteriormente. Para concluir, definamos una función $i : X \rightarrow \mathbb{Q}_H$ dada por

$$(i(x))_n = f_n(x), \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Como puede verse, i es un encaje. Esto concluye la demostración. □

3. Dimensión de cubierta de un espacio X

En la presente sección se enuncian y demuestran algunos resultados básicos en la Teoría de Dimensión.

Definición 3.1. Sean X un espacio y A, B subconjuntos cerrados de X . Un subconjunto cerrado C en X es una **partición entre A y B** si existen subconjuntos abiertos $U, V \subset X$ tales que $A \subset U, B \subset V, U \cap V = \emptyset$, y $X \setminus C = U \cup V$.

Como podemos ver, esto incluye la condición de que $U \cup V$ con la topología relativa sea un espacio topológico disconexo.

- Ejemplo 3.2.**
1. En el espacio de Sierpiński $X = \{0, 1\}$ se tiene que \emptyset es una partición entre $\{0\}$ y $\{1\}$.
 2. En I con la topología usual se cumple que $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ es una partición entre $\{\frac{1}{2}\}$ y $\{0, 1\}$, ya que basta considerar $U = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y $V = [0, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, 1]$.
 3. En \mathbb{R}^n con la topología usual, $C = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ es una partición entre $A = \{(0, \dots, 0)\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geq 2\}$, para verlo es suficiente tomar $U = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ y $V = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > 1\}$.
 4. Notemos que si X es un espacio, $A, B \subset X$ son subconjuntos cerrados en X , ajenos y U es un conjunto abierto en X tal que $A \subset U$ y $cl(U) \cap B = \emptyset$, entonces $fr(U)$ es una partición entre A y B .

Definición 3.3. Sean X un espacio y Γ un conjunto de índices. Una familia $\tau = \{(A_i, B_i) : i \in \Gamma\}$ de parejas de conjuntos cerrados en X , ajenos es **esencial** si para cada familia $\{C_i : i \in \Gamma\}$, con C_i una partición entre A_i y B_i para cada $i \in \Gamma$, se cumple que $\bigcap_{i \in \Gamma} C_i \neq \emptyset$. En otro caso, se dirá que τ es **no esencial**.

Observación 3.4. Cada subfamilia de una familia esencial es esencial.

Para construir ejemplos de familias esenciales presentamos los siguientes resultados auxiliares.

Lema 3.5. Sea X un espacio. Si A y B son subconjuntos no vacíos ajenos cerrados en X , entonces existe una función continua $\alpha : X \rightarrow I$ tal que $\alpha^{-1}(0) = A$ y $\alpha^{-1}(1) = B$.

Demostración. Supongamos que $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. Sea $\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Como $A \cap B = \emptyset$, para cada $x \in X$ se cumple que $d(x, A) + d(x, B) > 0$, lo cual implica que α está bien definida. Además, $\alpha(X) \subseteq I$. Para concluir observemos que, como A y B son cerrados,

$\alpha(x) = 0$ si y sólo si $d(x, A) = 0$, y $\alpha(x) = 1$ si y sólo si $d(x, B) = 0$. Por lo tanto, α cumple las condiciones del lema. \square

Notemos que en caso de que $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$, podemos asegurar que existe una función continua $\alpha : X \rightarrow I$ tal que $A \subset \alpha^{-1}(0)$ y $B \subset \alpha^{-1}(1)$, para ello basta considerar $\alpha \equiv 1$ o $\alpha \equiv 0$, respectivamente.

Recordemos que una función continua $f : X \rightarrow X$ tiene un punto fijo si existe $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Lema 3.6. [Teorema de punto fijo de Brouwer] Si $f : I^n \rightarrow I^n$ es una función continua, entonces f tiene un punto fijo.

Una prueba este resultado que utiliza n -simpliciales se puede encontrar en la página 106 de [8], y otra prueba que resulta ser corolario de un teorema de no retracción se puede encontrar en la página 308 de [1].

Lema 3.7. [Teorema de particiones] Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el espacio J^n y para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ sean $A_i = \{x \in J^n : x_i = 1\}$ y $B_i = \{x \in J^n : x_i = -1\}$. Si para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se satisface que C_i es una partición entre A_i y B_i , entonces $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$.

Demostración. La prueba se hará por contradicción. Supongamos que existe una familia $\mathcal{C} = \{C_i : 1 \leq i \leq n\}$ tal que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que C_i es una partición entre A_i y B_i y $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$.

Sea $i \in \{1, \dots, n\}$. Construyamos una función $\xi_i : J^n \rightarrow J$ como sigue:

Notemos que existen subconjuntos cerrados E_i y F_i de J^n tales que

$$A_i \subset E_i, B_i \subset F_i, E_i \cup F_i, \text{ y } E_i \cap F_i = C_i.$$

Por el Lema 3.5 existen funciones continuas $\alpha_i : E \rightarrow I$ y $\beta_i : F \rightarrow I$ tales que

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(0) &= C_i \text{ y } \alpha^{-1}(1) = A_i, \\ \beta^{-1}(0) &= C_i \text{ y } \beta^{-1}(1) = B_i. \end{aligned}$$

Así, podemos definir $\xi_i : J^n \rightarrow J$ dada por

$$\xi_i(x) = \begin{cases} -\alpha_i(x) & \text{si } x \in E_i, \\ \beta_i(x) & \text{si } x \in F_i. \end{cases}$$

Esto concluye la construcción de ξ_i . Vemos que ξ_i es una función continua, la cual satisface que

$$\xi_i(A_i) = \{-1\}, \xi_i(B_i) = \{1\} \text{ y } \xi_i^{-1}(0) = C_i.$$

Definamos $f : J^n \rightarrow J^n$ dada por $f(x) = (\xi_1(x), \dots, \xi_n(x))$. Es claro que f es una función continua, además se tiene que $f^{-1}((0, \dots, 0)) = \emptyset$ ya que si $x \in f^{-1}((0, \dots, 0))$, entonces $f(x) = (0, \dots, 0)$, esto es, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $\xi_i(x) = 0$, lo cual implica que $x \in C_i$ para $1 \leq i \leq n$, entonces $x \in \bigcap_{i=1}^n C_i$, esto es una contradicción porque $\bigcap_{i=1}^n C_i = \emptyset$ por hipótesis.

Ahora, notemos que para cada $x \in J^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, el rayo que va de $(0, \dots, 0)$ a x intersecta a la "frontera" $B = \bigcup_{i=1}^n A_i \cup \bigcup_{i=1}^n B_i$ de J^n en exactamente un punto, digamos $r(x)$. Definamos la función $r : J^n \setminus \{(0, \dots, 0)\} \rightarrow B$ tal que $x \mapsto r(x)$ y observemos que r es una función continua.

Consideremos $g = r \circ f : J^n \rightarrow B$. Vemos que g satisface que $g((0, 1)^n) \cap (0, 1)^n = \emptyset$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $g(A_i) \subset B_i$ y $g(B_i) \subset A_i$, esto implica que g no tiene puntos fijos lo cual contradice el Teorema 3.6. Esto concluye la prueba. \square

Del Lema 3.7 anterior se obtiene el siguiente

Corolario 3.8. *Sea \mathbb{Q}_H el Cubo de Hilbert. Para cada $\theta \in \{-1, 1\}$ e $i \in \mathbb{N}$ sea*

$$W_i(\theta) = \{x \in \mathbb{Q}_H : x_i = \theta\}.$$

Si para cada $i \in \mathbb{N}$, C_i es una partición entre $W_i(-1)$ y $W_i(1)$, entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \neq \emptyset$.

Demostración. En la prueba, usamos la notación del Lema 3.7.

Consideremos para cada $i \in \mathbb{N}$ una partición C_i entre $W_i(-1)$ y $W_i(1)$. También, para cada $m \in \mathbb{N}$ sea $f_m : J^m \rightarrow \mathbb{Q}_H$ definida por

$$f_m(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots).$$

Es claro que f_m es un encaje.

Sea $m \in \mathbb{N}$ y consideremos $i \leq m$. Vemos que $f_m^{-1}(C_i)$ es un conjunto cerrado en J^m . También, $f_m^{-1}(C_i) \cap A_i = \emptyset$ y $f_m^{-1}(C_i) \cap B_i = \emptyset$, y por esto, para cada $i \leq m$ se cumple que C_i es una partición entre A_i y B_i .

Por el Lema 3.7 se obtiene que $\bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset$. Vemos que la familia de los C_i tiene la propiedad de intersección finita, como \mathbb{Q}_H es compacto, se tiene que $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \neq \emptyset$. \square

El Lema 3.7 muestra que I^n tiene una familia esencial, de parejas de conjuntos cerrados ajenos, de cardinalidad n , y el Corolario 3.8 muestra que \mathbb{Q}_H tiene, para cada $n \in \mathbb{N}$, una familia esencial de cardinalidad n y también que tiene una familia esencial de cardinalidad infinita.

Antes de definir la dimensión de cubierta de un espacio, damos una prueba de que si $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$, entonces I^m no es homeomorfo a I^n , y para ello usamos los conceptos aquí presentados.

Teorema 3.9. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Se cumple que I^n tiene una familia esencial de cardinalidad n y que cada familia de al menos $n + 1$ parejas de subconjuntos cerrados ajenos de I^n es no esencial.*

Demostración. El Lema 3.7 prueba la primera parte, por lo cual resta demostrar la segunda parte del teorema.

Sean A y B subconjuntos cerrados ajenos de I^n y $E \subset I$ denso en I .

Se afirma que existe una partición D entre A y B tal que

$$D \subset \{x \in I^n : \exists i \leq n \text{ tal que } x_i \in E\}.$$

Para demostrarlo, notemos que para cada $x \in A$ existe una vecindad de la forma $\prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$, con $a_i, b_i \in E$ para cada $i \leq n$ tal que $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \cap B = \emptyset$. Notemos que existe una familia finita \mathcal{F} de tales vecindades cuya unión cubre a A , además, $D = fr(\cup \mathcal{F}) \subset \cup \{fr(F) : F \in \mathcal{F}\}$. Concluimos que D es una partición entre A y B que cumple la condición pedida.

Sea $\tau = \{(A_i, B_i) : i \leq n+1\}$ una familia de $n+1$ parejas de subconjuntos cerrados ajenos de I^n . Observemos que existen $n+1$ subconjuntos densos y ajenos por pares de I , podemos tomar, por ejemplo,

$$E_1 = (\sqrt{2} + \mathbb{Q}) \cap I, E_2 = (\sqrt{3} + \mathbb{Q}) \cap I, E_3 = (\sqrt{5} + \mathbb{Q}) \cap I, \dots,$$

respectivamente. Por lo dicho anteriormente, existen particiones D_i entre A_i y B_i tales que

$$D_i \subset \{x \in I^n : \exists i \leq n \text{ tal que } x_i \in E_i\}, \text{ para cada } i \leq n+1.$$

Como los E_i 's son ajenos por pares se observa que $\bigcap_{i=1}^{n+1} D_i = \emptyset$. □

Notemos que el Teorema 3.9 formula una propiedad topológica de I^n que no comparte con I^m si $m \neq n$, por lo tanto, es inmediato el siguiente

Corolario 3.10. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Si $m \neq n$ entonces I^m no es homeomorfo a I^n .

El resultado anterior motiva la siguiente

Definición 3.11. Sea X un espacio. La **dimensión de cubierta** de X ¹, denotada $\dim X$, está dada por

$$\begin{aligned} \dim X = -1 &\Leftrightarrow \text{si } X = \emptyset, \\ \dim X \leq n, n \geq 0 &\Leftrightarrow \text{si } X \neq \emptyset \text{ y cada familia de } n+1 \text{ pares de conjuntos} \\ &\text{ajenos cerrados en } X \text{ es no esencial,} \\ \dim X = n &\Leftrightarrow \dim X \leq n \text{ y } \dim X \text{ no es menor que } n, \\ \dim X = \infty &\Leftrightarrow \dim X \neq n \text{ para cada } n \geq -1. \end{aligned}$$

Si $\dim X < \infty$ decimos que X es de **dimensión finita**, en caso contrario es de **dimensión infinita**.

¹En inglés *covering dimension*.

Observación 3.12. 1. Se cumple que $\dim X \geq n$ si y sólo si existe una familia esencial formada por n parejas de subconjuntos ajenos cerrados en X .

2. Si X y Y son espacios homeomorfos, entonces $\dim X = \dim Y$.

Antes de proseguir con el estudio de la Teoría de Dimensión, veamos algunas propiedades adicionales de las familias esenciales de parejas de subconjuntos cerrados ajenos. Para ello, hagamos las siguientes convenciones: Si X es un espacio, denotemos por ρX a la colección de subconjuntos cerrados de X y para cada $x \in X$ consideremos $d(x, \emptyset) = \infty$.

Teorema 3.13. Sean X un espacio y Y un subespacio de X . La función $\kappa : \rho Y \rightarrow \rho X$ definida por $\kappa(A) = \{x \in X : d(x, A) \leq d(x, Y \setminus A)\}$ tiene las siguientes propiedades:

- (1) $\kappa(\emptyset) = \emptyset$, $\kappa(Y) = X$,
- (2) $\kappa(A) \cap Y = A$ para cada $A \in \rho X$,
- (3) si $A, B \in \rho Y$ y $A \subseteq B$, entonces $\kappa(A) \subseteq \kappa(B)$,
- (4) si $A, B \in \rho Y$, entonces $\kappa(A \cup B) = \kappa(A) \cup \kappa(B)$.

Demostración. (1), (2) y (3) son claros.

(4) Tenemos que, por (3), $\kappa(A) \cup \kappa(B) \subset \kappa(A \cup B)$. Ahora, sea $x \in \kappa(A \cup B)$. Notemos que $d(x, A \cup B) \in \{d(x, A), d(x, B)\}$, por lo cual podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $d(x, A \cup B) = d(x, A)$; probemos que $x \in \kappa(A)$. Ya que $x \in \kappa(A \cup B)$, se tiene que

$$d(x, A) = d(x, A \cup B) \leq d(x, Y \setminus (A \cup B)),$$

también se cumple que

$$d(x, A) = d(x, A \cup B) \leq d(x, B),$$

de donde se sigue que

$$d(x, A) \leq d(x, (Y \setminus (A \cup B)) \cup B) \leq d(x, Y \setminus A)$$

ya que $Y \setminus A \subset (Y \setminus (A \cup B)) \cup B$. Esto concluye la prueba. \square

Redordemos que dado un espacio X , dos subconjuntos $A, B \subset X$ están *separados* si $cl(A) \cap B = \emptyset = A \cap cl(B)$. Observemos que si A y B son subconjuntos ajenos y ambos cerrados en X , o ambos abiertos, entonces A y B están separados. Tenemos que algunos de los ejemplos más interesantes de conjuntos separados se pueden obtener de la siguiente manera: consideremos un subespacio Y de X , si U y V subconjuntos abiertos en Y ajenos, entonces U y V están separados en X . Para esto notemos que existe un subconjunto abierto en X , digamos U' tal que $U' \cap Y = U$, entonces $U' \cap V = \emptyset$, es decir, $cl(V) \cap U = \emptyset$; asimismo, se puede hacer una construcción análoga para V .

Corolario 3.14. *Si A y B son subconjuntos separados de un espacio X , entonces A y B pueden ser separados por subconjuntos ajenos abiertos en X .*

Demostración. Ya que A y B son cerrados en su unión $A \cup B$, por el Teorema 3.13, existen subconjuntos A' y B' de X tales que $A \subseteq A'$, $B \subseteq B'$ y $A' \cup B' = X$. Consideremos $U = X \setminus B'$ y $V = X \setminus A'$. Tenemos que U y V son vecindades abiertas de A y B , respectivamente. \square

El siguiente resultado es importante en el desarrollo de la Teoría de Dimensión.

Teorema 3.15. *Sean Y subespacio de un espacio X , A y B subconjuntos cerrados en X ajenos. Si U y V son vecindades abiertas (en X) que contienen a A y B , respectivamente, tales que $cl_X U \cap cl_X V = \emptyset$, y S es una partición, en Y , entre $Y \cap cl_X(U)$ y $Y \cap cl_X(V)$, entonces existe una partición T entre A y B tal que $T \cap Y \subseteq S$.*

Demostración. Escribamos $Y \setminus S$ como la unión disjunta de dos conjuntos abiertos E y F en Y tales que $Y \cap cl_X(U) \subseteq E$ y $Y \cap cl_X(V) \subseteq F$.

Ya que $E \cap V = \emptyset$, se tiene que $cl_X(E) \cap B = \emptyset$; análogamente se obtiene que $cl_X(F) \cap A = \emptyset$. De lo anterior se sigue que $A \cup E$ y $B \cup F$ son separados. Por el Corolario 3.14, existen vecindades abiertas disjuntas U' y V' de $A \cup E$ y $B \cup F$, respectivamente. Finalmente se obtiene que $T = X \setminus (U' \cup V')$ cumple lo solicitado. \square

Corolario 3.16. *Sean Y un subespacio cerrado de un espacio X , A y B subconjuntos cerrados ajenos de X . Si S es una partición, en Y , entre $Y \cap A$ y $Y \cap B$, entonces existe una partición T en X entre A y B tal que $T \cap Y \subseteq S$.*

Estos resultados nos permiten demostrar lo siguiente.

Teorema 3.17. *Sean X un espacio, $\{(A_i, B_i) : i \in \Gamma\}$ una familia esencial en X y $\Gamma(0) \subset \Gamma$. Si para cada $i \in \Gamma(0)$, L_i es una partición entre A_i y B_i y $L = \bigcap_{i \in \Gamma(0)} L_i$, entonces $\{(L \cap A_i, L \cap B_i) : i \in \Gamma \setminus \Gamma(0)\}$ es esencial en L .*

Demostración. Sea $i \notin \Gamma(0)$, y consideremos E_i una partición, en L , entre $L \cap A_i$ y $L \cap B_i$. Por el Corolario 3.16, existe una partición F_i , en X , entre A_i y B_i tal que $F_i \cap L \subseteq E_i$. Entonces

$$\emptyset \neq \bigcap_{i \in \Gamma(0)} L_i \cap \bigcap_{i \in \Gamma \setminus \Gamma(0)} F_i \subseteq L \cap \bigcap_{i \in \Gamma \setminus \Gamma(0)} E_i = \bigcap_{i \in \Gamma \setminus \Gamma(0)} E_i.$$

Esto concluye la prueba. \square

Corolario 3.18. *Sean X un espacio y $n \geq 0$. Si $\dim X \geq n$, entonces existen subconjuntos cerrados ajenos A y B en X tales que si L es una partición entre A y B , entonces $\dim L \geq n - 1$.*

Demostración. Si $n = 0$, se tiene el resultado. Supongamos que $n \geq 1$. Si $\dim X \geq n$, entonces $\dim X$ no es menor o igual que $n - 1 \geq 0$, esto es, existe una familia esencial $\tau = \{(A_i, B_i) : i \leq n\}$ en X . Ahora, sea L una partición entre A_1 y B_1 . Tenemos que $L \neq \emptyset$ porque τ es esencial. Consideremos dos casos. Si $n = 1$, ya que $L \neq \emptyset$, se sigue que $\dim L \geq 0$. Si $n > 1$, por el Teorema 3.17, L tiene una familia esencial de cardinalidad $n - 1$, a saber, $\{(L \cap A_i, L \cap B_i) : i = 2, \dots, n\}$, de donde $\dim L \geq n - 1$. \square

4. Espacios de dimensión cero

Iniciamos esta sección con el concepto siguiente.

Definición 4.1. Un espacio X es de **dimensión cero** si $\dim X = 0$.²

Para notar que esta definición no es una trivialidad hagamos la siguiente

Observación 4.2. (1) Sea X un espacio. X es de dimensión cero si y sólo si para cualesquiera dos subconjuntos ajenos A y B cerrados en X se cumple que el conjunto vacío \emptyset es una partición entre A y B .

(2) Sea X un espacio. X es de dimensión cero si y sólo si dados dos subconjuntos ajenos A y B cerrados en X existe un subconjunto cerrado y abierto U de X tal que U contiene a A y no interseca a B .

Es importante notar, a partir de la Observación 4.2, que los espacios X de dimensión cero ($\dim X = 0$) son, en cierto sentido, los “bloques constructores” de otros espacios.

En adelante, para simplificar la redacción, si X es un espacio y A es un subconjunto de X que es cerrado y abierto en X , decimos que A es un conjunto cerrado–abierto en X .

A continuación exponemos algunas caracterizaciones de los espacios de dimensión cero que nos brindarán herramientas para trabajar con dichos espacios.

Teorema 4.3. *Sea X un espacio no vacío. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) X es de dimensión cero.

(b) Para cualesquiera $x \in X$ y cualquier vecindad U de x existe un subconjunto C cerrado–abierto en X tal que $x \in C \subseteq U$.

(c) La familia de subconjuntos cerrado–abiertos de X es una base de X .

²En inglés se usa *zero-dimensional spaces*, por lo cual algunos autores lo traducen literalmente como *espacios cero-dimensionales*, aquí hemos preferido usar una traducción alternativa que nos ha parecido más apropiada lingüísticamente.

(d) X tiene una base numerable formada por conjuntos cerrado-abiertos.

(e) cualquier cubierta abierta \mathcal{U} de X tiene un refinamiento abierto \mathcal{V} tal que los elementos de \mathcal{V} son ajenos dos a dos, es decir, dichos conjuntos son cerrado-abiertos.

Demostración. (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) Se sigue de la Observación 4.2.

(c) \Rightarrow (d) Consideremos \mathcal{B} una base numerable de X . Por (c) se tiene que para cada $B \in \mathcal{B}$ existe una familia $\mathcal{U}(B)$ de conjuntos cerrado-abiertos tales que $\cup \mathcal{U}(B) = B$. Como cada $B \in \mathcal{B}$ es Lindelof, ya que es un espacio métrico separable, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{U}(B)$ es numerable. De esto obtenemos que $(\mathcal{U}) = \cup_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{U}(B)$ es una base numerable para X formada por conjuntos cerrado-abiertos.

(d) \Rightarrow (e) Sean \mathcal{B} una base numerable de X formada por conjuntos cerrado-abiertos y \mathcal{U} una cubierta abierta de X . Tenemos que para cada $x \in X$ existe $B(x) \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B(x)$ y $B(x)$ está contenido en algún elemento de \mathcal{U} .

Notemos que $\mathcal{C} = \{B(x) : x \in X\}$ es una cubierta de X , es numerable y refina a \mathcal{U} . Así, podemos suponer que $\mathcal{C} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$V_n = B_n \setminus \cup_{m < n} B_m.$$

Observemos que $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de conjuntos abiertos en X , ajenos por parejas y además cada elemento de \mathcal{V} está contenido en algún elemento de \mathcal{U} . Resta probar que \mathcal{V} es una cubierta abierta de X , para ello, dado $x \in X$, sea $n(x)$ el menor natural tal que $x \in B_n$, entonces $x \in V_n$.

(e) \Rightarrow (a) Sean A y B subconjuntos cerrados en X , ajenos. Vemos que para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta $U(x)$ de x tal que $U(x) \cap A = \emptyset$ o $U(x) \cap B = \emptyset$. Por (e), la cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U(x) : x \in X\}$ tiene un refinamiento abierto \mathcal{V} de conjuntos ajenos por parejas. Consideremos $U = \cup \{V \in \mathcal{V} : V \cap A \neq \emptyset\}$. Vemos que U es un conjunto cerrado-abierto, contiene a A y no interseca a B . Por la Observación 4.2(2) se sigue que X es de dimensión cero. \square

En el siguiente resultado se reúne información relevante acerca de los espacios de dimensión cero.

Teorema 4.4. (1) Si X es de dimensión cero y $Y \subseteq X$ es no vacío, entonces Y es de dimensión cero.

(2) Si X_n es de dimensión cero para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es de dimensión cero.

(3) Si X es de dimensión cero, entonces X puede ser encajado en $\{0, 1\}^{\infty}$.

(4) Si X es de dimensión cero, entonces X admite una compactación de dimensión cero.

(5) Sea X un subespacio de dimensión cero de un espacio Y . Se cumple que para cada par de subconjuntos cerrados A y B en Y , ajenos existe una partición S entre A y B en Y tal que $S \cap X = \emptyset$.

(6) Si un espacio X es la unión de a lo más $n + 1$ subespacios de dimensión cero, entonces $\dim X \leq n$.

Demostración. (1) La prueba se sigue del Teorema 4.3(c).

(2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea \mathcal{B}_n una base numerable de X_n formada por conjuntos cerrado-abiertos. Vemos que la familia de conjuntos de la forma

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m \times X_{m+1} \times X_{m+2} \times \cdots$$

donde $m \in \mathbb{N}$ y para $i \leq m$, $E_i \in \mathcal{B}_i$, es una base numerable para $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ formada por conjuntos cerrado-abiertos. Ahora, por el Teorema 4.3(d) se tiene el resultado deseado.

(3) Como X es de dimensión cero, por el Teorema 4.3(d) existe una base numerable \mathcal{B} para X formada por conjuntos cerrado-abiertos. Consideremos $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in B_n, \\ 1 & \text{si } x \notin B_n. \end{cases}$$

Se tiene que f_n es continua. Se cumple que la función evaluación $e : X \rightarrow \{0, 1\}^{\infty}$ definida por $e(x)_n = f_n(x)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, es un encajamiento.

(4) Por la parte (3), podemos suponer que X es un subespacio de $K = \{0, 1\}^{\infty}$. Ya que K es compacto y, por la parte (2), es de dimensión cero, una compactación de X tal que su cerradura es de dimensión cero, es la cerradura de X en K .

(5) Sean A y B subconjuntos en Y , ajenos y sean U y V vecindades disjuntas de A y B , respectivamente tales que $cl(U) \cap cl(V) = \emptyset$. Ya que X es de dimensión cero, \emptyset es una partición entre $cl(U) \cap X$ y $cl(V) \cap X$ en X . Por el Teorema 3.15 se tiene el resultado pedido.

(6) Sea $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} X_i$ con $\dim X_i \leq 0$ para $i \leq n+1$. Sea $\tau = \{(A_i, B_i) : i \leq n+1\}$ una familia de $n+1$ parejas de subconjuntos en X , ajenos. Por la parte (5), para cada $i \leq n+1$ existe una partición L_i entre A_i y B_i en X tal que $L_i \cap X_i = \emptyset$. Se sigue que $\bigcap_{i=1}^{n+1} L_i = \emptyset$, esto es, τ es una familia no esencial. Concluimos que $\dim X \leq n$. \square

Ahora caracterizamos los subespacios de dimensión cero de la recta real \mathbb{R} .

Teorema 4.5. *Un subespacio X de \mathbb{R} , no vacío es de dimensión cero sí y sólo si no contiene ningún intervalo (no degenerado).*

Demostración. Sea $X \subset \mathbb{R}$ de dimensión cero. Si X contiene un intervalo E , entonces X contiene un subespacio que no es de dimensión cero, ya que por conexidad se obtiene que $\dim X \geq 1$. Esto contradice (1) del Teorema 4.4.

Ahora, supongamos que $X \subset \mathbb{R}$ no contiene intervalos. Se tiene que el conjunto $D = \mathbb{R} \setminus X$ es denso en \mathbb{R} . Notemos que la colección $\{(d_1, d_2) \cap X : d_1 < d_2 \text{ y } d_1, d_2 \in D\}$ es una base de X formada por subconjuntos cerrado-abiertos de X . De esto se sigue que X es de dimensión cero por (c) del Teorema 4.3. \square

Ejemplo 4.6. Resulta del Teorema 4.5 que los números racionales \mathbb{Q} , los números irracionales $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, el producto $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, etc., son espacios de dimensión cero.

El siguiente ejemplo es muy interesante.

Ejemplo 4.7. El conjunto ternario de Cantor \mathbf{C} . Este conjunto se obtiene de forma “geométrica” como sigue:

Construyamos una sucesión E_1, E_2, \dots de subconjuntos de I de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \\ E_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right], \\ &\vdots \end{aligned}$$

En general, E_n se obtiene de E_{n-1} descartando los intervalos abiertos que son el intervalo abierto tercio de en medio de cada uno de los intervalos cerrados que forman E_{n-1} .

El conjunto de Cantor \mathbf{C} es la intersección de los intervalos cerrados resultantes:

$$\mathbf{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

Notemos que para cada $i \in \mathbb{N}$, E_i es cerrado en I , de donde se sigue que \mathbf{C} es cerrado en I , y como I es compacto se obtiene que \mathbf{C} es compacto. Vemos que el conjunto de Cantor \mathbf{C} es de dimensión cero porque no contiene ningún intervalo no degenerado y, por el Teorema 4.5, esto es equivalente a que el espacio sea de dimensión cero.

Lema 4.8. *El conjunto de Cantor \mathbf{C} no tiene puntos aislados.*

Demostración. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea \mathcal{F}_i la familia de los 2^i intervalos cerrados de longitud $\frac{1}{3^i}$ que están contenidos en E_i . Consideremos $x \in \mathbf{C}$ y supongamos que $a < x < b$. Por propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^{n_0}} < \min\{x - a, x - b\}$. Sea $F \in \mathcal{F}_{n_0}$ tal que $x \in F$. Entonces $F \subset (a, b)$. Vemos que hay exactamente dos elementos de \mathcal{F}_{n_0+1} , digamos F_1 y F_2 , contenidos en F .

Es claro que para cada $F \in \mathcal{F}_n$, con $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $F \cap \mathbf{C} \neq \emptyset$. De lo anterior se sigue que $F_1 \cap \mathbf{C} \neq \emptyset$ y $F_2 \cap \mathbf{C} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $(a, b) \cap \mathbf{C}$ contiene al menos dos puntos. Esto concluye la prueba. \square

Antes de mostrar la importancia del Lema 4.8 requerimos la siguiente

Definición 4.9. Sean X un espacio y \mathcal{U} una colección de subconjuntos de X . La **mall**a de \mathcal{U} es

$$\text{mesh}(\mathcal{U}) = \sup \{ \text{diám}(U) : U \in \mathcal{U} \}.$$

Se permite que $\text{mesh}(\mathcal{U}) = \infty$.

Veamos el siguiente resultado.

Teorema 4.10. *El conjunto de Cantor \mathbf{C} es (topológicamente) el único espacio compacto de dimensión cero sin puntos aislados.*

Demostración. El Ejemplo 4.7 muestra que existen espacios compactos de dimensión cero sin puntos aislados, por ello, resta demostrar que si X y Y son espacios compactos de dimensión cero sin puntos aislados entonces X y Y son homeomorfos.

Sean X y Y espacios compactos de dimensión cero sin puntos aislados. Por inducción sobre n , construyamos elementos $m(n) \in \mathbb{N}$ y una cubierta finita de conjuntos cerrado-abiertos ajenos $\mathcal{U}_n = \{U_{(n,i)} : i \leq m(n)\}$ y $\mathcal{V}_n = \{V_{(n,i)} : i \leq m(n)\}$ de X y Y , respectivamente, formadas por conjuntos no vacíos, tales que $m(1) = 1$, $\mathcal{U}_1 = \{X\}$, $\mathcal{V}_1 = \{Y\}$, y para $n \geq 2$ se satisface que

- (1) $\text{mesh}(\mathcal{U}_n) < \frac{1}{n}$, $\text{mesh}(\mathcal{V}_n) < \frac{1}{n}$,
- (2) $\mathcal{U}_n < \mathcal{U}_{n+1}$, $\mathcal{V}_n < \mathcal{V}_{n+1}$,
- (3) para cada $i \leq m(n-1)$ y cualesquiera $j \leq m(n)$ se cumple que $U_{(n,j)} \subset U_{(n-1,i)}$ si y sólo si $V_{(n,j)} \subset V_{(n-1,i)}$.

Supongamos que ya se han construido las cubiertas \mathcal{U}_p y \mathcal{V}_p para cada $p \leq n$, con $n \geq 1$, y tomemos $i \leq m(n)$ arbitrario. Por (e) del Teorema 4.3 existen cubiertas \mathcal{E} y \mathcal{F} de $U_{(n,i)}$ y $V_{(n,i)}$, respectivamente, formadas por conjuntos abiertos en X y Y , respectivamente, ajenos por pares tales que

- (4) $\mathcal{E} < \{B(x, \frac{1}{2(n+1)}) : x \in U_{(n,i)}\}$, y
- (5) $\mathcal{F} < \{B(y, \frac{1}{2(n+1)}) : y \in V_{(n,i)}\}$.

Ya que $U_{(n,i)}$ y $V_{(n,i)}$ son compactos, podemos suponer que las cubiertas \mathcal{E} y \mathcal{F} son finitas y, además, que cada elemento de \mathcal{E} y de \mathcal{F} es no vacío.

Si $|\mathcal{E}| < |\mathcal{F}|$, fijemos $E \in \mathcal{E}$. Ya que X no tiene puntos aislados, existen dos puntos diferentes $x, y \in E$, y ya que X es de dimensión cero, por el inciso (c) del Teorema 4.3, los conjuntos cerrado-abiertos de X forman una base para X , lo cual implica que existe un subconjunto cerrado-abierto $C \subset E$ tal que $x \in C$ y $y \notin C$. De esta manera, E se puede descomponer en dos conjuntos cerrado-abiertos no vacíos (C y $E \setminus C$). Si repetimos el procedimiento con C o con $E \setminus C$, es posible obtener tantos conjuntos cerrado-abiertos como deseemos. Por lo anterior, existe una cubierta \mathcal{G} de E formada por $|\mathcal{F}| - |\mathcal{E}| + 1$ conjuntos cerrado-abiertos, no vacíos, ajenos. Si sustituimos \mathcal{E} por $(\mathcal{E} \setminus E) \cup \mathcal{G}$. Por esto podemos suponer sin pérdida de generalidad que $|\mathcal{E}| = |\mathcal{F}|$.

Vemos que para cada $i \leq m(n)$, existen cubiertas \mathcal{E}_i y \mathcal{F}_i de $U_{(n,i)}$ y $V_{(n,i)}$, respectivamente, tales que

$$(6) \quad |\mathcal{E}_i| = |\mathcal{F}_i|,$$

(7) \mathcal{E}_i y \mathcal{F}_i están formados por conjuntos abiertos no vacíos y ajenos por pares, cada uno con diámetro menor que $\frac{1}{n+1}$.

Sean $\mathcal{U}_{n+1} = \cup_{i=1}^{m(n)} \mathcal{E}_i$ y $\mathcal{V}_{n+1} = \cup_{i=1}^{m(n)} \mathcal{F}_i$. Por la construcción, podemos enumerar \mathcal{U}_{n+1} y \mathcal{V}_{n+1} de forma que (3) se cumpla para $n+1$. Esto completa la construcción inductiva. Notemos que $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$ es una base para X y, de manera similar, $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ es una base para Y .

Ahora, si $x \in X$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un único $i(n, x) \leq m(n)$ tal que $x \in U_{n,i(n,x)}$. Por (3) se sigue que la colección $\{V_{n,i(n,x)} : n \in \mathbb{N}\}$ es decreciente y, ya que Y es compacto, tenemos que $\cap_{n \in \mathbb{N}} V_{n,i(n,x)} \neq \emptyset$. Luego, por (1), se obtiene que $\cap_{n \in \mathbb{N}} V_{n,i(n,x)}$ consiste precisamente en un punto. Intercambiamos a X y Y , y por estas consideraciones, la función $f : X \rightarrow Y$ definida por $f(x) = y$ si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N}$, y para cada $i \leq m(n)$ se cumple que $x \in U_{(n,i)}$ si y sólo si $y \in V_{(n,i)}$, es una biyección. También se tiene que f es continua ya que para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $i \leq m(n)$, se cumple que $f^{-1}(V_{(n,i)}) = U_{(n,i)}$. De forma similar se muestra que f^{-1} es continua. Concluimos que f es un homeomorfismo. \square

De ahora en adelante, cualquier espacio X homeomorfo a \mathbf{C} se llamará *conjunto de Cantor*. Además, la caracterización de \mathbf{C} permite identificar “muchos” conjuntos de Cantor.

Corolario 4.11. *Si X es un espacio compacto de dimensión cero, entonces $X \times \mathbf{C}$ es un conjunto de Cantor.*

Demostración. Vemos que $X \times \mathbf{C}$ es compacto. Tenemos que, por el inciso (2) del Teorema 4.4, $X \times \mathbf{C}$ es de dimensión cero. Ya que \mathbf{C} no tiene puntos aislados, se sigue que $X \times \mathbf{C}$ no tiene puntos aislados. Finalmente, por el Teorema 4.10 se tiene el resultado deseado. \square

Ya que $\{0, 1\}$ es compacto y de dimensión cero se sigue, por el inciso (2) del Teorema 4.4, que $\{0, 1\}^\infty$ es compacto y de dimensión cero, además, $\{0, 1\}^\infty$ no tiene puntos aislados, lo cual implica que \mathbf{C} es homeomorfo a $\{0, 1\}^\infty$. Notamos, por un argumento diagonal, que $\{0, 1\}^\infty$ es no numerable, de donde se deduce que \mathbf{C} es no numerable. Ahora, por el Corolario 4.11, \mathbf{C} es homeomorfo a $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ de donde existe una familia no numerable de conjuntos de Cantor ajenos por parejas en \mathbb{R} . Ahora, dado que hay sólo una cantidad numerable de números racionales en \mathbb{R} , se tiene que existe un conjunto de Cantor K que no intersecta a \mathbb{Q} , es decir, K está formado únicamente por números irracionales.

Ya que por el inciso (3) del Teorema 4.4, todo espacio de dimensión cero se puede encajar en $\{0, 1\}^\infty$, obtenemos el siguiente

Corolario 4.12. *Si X es un espacio de dimensión cero, entonces X puede ser encajado en \mathbf{C} y en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

A continuación nos interesa demostrar que para cada espacio compacto X existe una función continua y sobreyectiva $f : \mathbf{C} \rightarrow X$. Este resultado es importante dentro de la Teoría de Dimensión porque implica que existe una función continua y sobreyectiva del espacio de dimensión cero \mathbf{C} al espacio de dimensión 1, $[0, 1]$, esto implica que las funciones continuas pueden aumentar la dimensión.

Lema 4.13. *La función $f : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow [-1, 1]$ definida para cada $(x, y) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ por $f(x, y) = x - y$ es una función continua y sobreyectiva.*

Demostración. Ya que $\mathbf{C} \subset I$ se tiene que f está bien definida. Además, es claro que f es continua. Consideremos $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, esto es, la primera aproximación a \mathbf{C} . Notemos que $E_1 - E_1 = \{x - y : x, y \in E_1\} = [-1, 1]$. Vemos que la segunda aproximación a \mathbf{C} , $E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ también cumple que $E_2 - E_2 = [-1, 1]$. Por inducción sobre n , se puede ver que para cada $n \in \mathbb{N}$ se satisface que la n -ésima aproximación a \mathbf{C} , E_n , cumple que $E_n - E_n = [-1, 1]$. Ya que los E_n 's forman una sucesión decreciente y $\mathbf{C} = \bigcap_{i=1}^\infty E_n$, se sigue por compacidad que $\mathbf{C} - \mathbf{C} = [-1, 1]$, es decir, $f(\mathbf{C} \times \mathbf{C}) = [-1, 1]$. \square

Veamos el último resultado de esta sección.

Teorema 4.14. *Si X es un espacio compacto, entonces existe una función continua y sobreyectiva $h : \mathbf{C} \rightarrow X$.*

Demostración. Aplicamos el Lema 4.13 para ver que existe una función continua y sobreyectiva $f : \mathbf{C}^\infty \rightarrow \mathbb{Q}_H$. Sea X un espacio compacto. Por el Teorema 2.2, podemos considerar que $X \subset \mathbb{Q}_H$. Sea $Y = f^{-1}(X)$. La restricción $g = f|_Y : Y \rightarrow X$ es una función continua y sobreyectiva. Por el inciso (2) del Teorema 4.4 tenemos que \mathbf{C}^∞ es de dimensión cero, y por el inciso (1) del mismo Teorema 4.4 se obtiene que Y es de dimensión cero. Así, por el Corolario 4.11, $\mathbf{C} \times Y$ y \mathbf{C} son

homeomorfos. Sean $\pi_2 : \mathbf{C} \times Y \rightarrow Y$ la segunda proyección y $m : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \times Y$ un homeomorfismo, que existe por el Corolario 4.11. La función $h = g \circ \pi_2 \circ m : \mathbf{C} \rightarrow X$ cumple lo pedido. \square

5. Espacios totalmente desconexos

El concepto que da título a esta sección es el siguiente.

Definición 5.1. Sea X un espacio. X es **totalmente desconexo** si para cualesquiera $x, y \in X$, con $x \neq y$, entonces existe un conjunto cerrado-abierto C en X tal que $x \in C$ y $y \notin C$.

Observación 5.2. Todo espacio X de dimensión cero es totalmente desconexo.

En vista del inciso (b) del Teorema 4.3 una pregunta natural es la siguiente

Pregunta 5.3. ¿Es todo espacio totalmente desconexo de dimensión cero?

Antes de responder la Pregunta 5.3, construyamos el *espacio de Hilbert* ℓ^2 .

Sea ℓ^2 la colección de todas las sucesiones infinitas (x_i) en \mathbb{R} tales que $\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 < \infty$. Al conjunto ℓ^2 se le llama **conjunto de Hilbert**. Definimos una norma p sobre ℓ^2 tal que si $x = (x_i)$ es un elemento de ℓ^2 , entonces $p(x) = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2}$, la cual induce una métrica sobre ℓ^2 como sigue: si $x = (x_i)$ y $y = (y_i)$ son elementos de ℓ^2 , entonces $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}$. El espacio topológico generado por la topología inducida por ρ se llama **espacio de Hilbert**.

Denotemos $\underline{0} = (0_i) \in \ell^2$.

Ahora ya podemos contestar a la Pregunta 5.3 con el siguiente

Ejemplo 5.4. El espacio de Erdős \mathbf{E} .

Sea $\mathbf{E} = \{x \in \ell^2 : x_i \in \mathbb{Q} \text{ para cada } i \in \mathbb{N}\}$. Primero vemos que \mathbf{E} es totalmente desconexo. Para ello, notemos que existe una función continua inyectiva sobre el producto \mathbb{Q}^∞ . Vemos que \mathbb{Q}^∞ es de dimensión cero por el Teorema 4.5 y el inciso (b) del Teorema 4.4. Esto implica que \mathbf{E} es totalmente desconexo.

Ahora demostremos que \mathbf{E} no tiene dimensión cero, para ello, mostremos que si $U \subset \ell^2$ es un conjunto abierto tal que $\underline{0} \in U \subset \{x \in \ell^2 : p(x) < 1\}$, entonces $U \cap \mathbf{E}$ no es conjunto cerrado-abierto en \mathbf{E} . Para esto, sea U una vecindad abierta de $\underline{0}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ definimos una sucesión $q_i \in \mathbb{Q}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$x_i = (q_1, \dots, q_i, 0, 0, \dots) \in U \text{ y } \rho(x_i, \ell^2 \setminus U) \leq \frac{1}{i}. \quad (1)$$

Sea $q_1 = 0$ y supongamos que para $j \leq i - 1$, con $i \geq 2$, se ha definido q_j . Para cada $m \in \{0, \dots, i\}$ sea

$$x(i, m) = \left(q_1, \dots, q_{i-1}, \frac{m}{i}, 0, 0, \dots \right).$$

Notemos que $x(i, 0) = x_{i-1} \in U$ y que $x(i, i) = (q_1, \dots, q_{i-1}, 1, 0, 0, \dots)$ tiene norma al menos uno por lo cual $x(i, i) \notin U$. Luego, existe $m_0 \in \{0, \dots, i-1\}$ tal que $x(i, m_0) \in U$ y $x(i, m_0 + 1) \notin U$. Consideremos $q_i = \frac{m_0}{i}$, entonces q_i cumple que

$$x_i = (q_1, \dots, q_i, 0, 0, \dots) = x(i, m_0) \in U,$$

y también,

$$\rho(x_i, \ell^2 \setminus U) \leq \rho(x(i, m_0), x(i, m_0 + 1)) = p\left(0, 0, \dots, \frac{1}{i}, 0, 0, \dots\right) = \frac{1}{i}.$$

Esto completa la construcción inductiva.

Por (1) se sigue que para cada $i \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\sum_{j=1}^i q_j^2 \leq 1,$$

y, por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{\infty} q_i^2 \leq 1.$$

De lo anterior se concluye que $q = (q_1, q_2, \dots) \in \ell^2$ y, por su forma, $q \in \mathbf{E}$. Ya que $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = q$, en ℓ^2 , se sigue de (1) que $q \in cl_{\mathbf{E}}(U \cap \mathbf{E})$.

Por otro lado, $\rho(q, \ell^2 \setminus U) = \lim_{i \rightarrow \infty} \rho(q_i, \ell^2 \setminus U) = 0$, lo cual implica que, $q \notin U$.

Finalmente, concluimos que $U \cap \mathbf{E}$ no es cerrado en \mathbf{E} y, por tanto, no es un cerrado-abierto en \mathbf{E} .

Como puede verse, el espacio de Erdős muestra que hay espacios totalmente desconexos que no son de dimensión cero. De hecho, en la página 179 de [8], en el Teorema 4.7.10 se presenta el resultado siguiente:

Teorema 5.5. *Para cada $n \geq 0$ existe un espacio topológicamente completo y totalmente desconexo de dimensión n . Además, existe un espacio totalmente desconexo y topológicamente completo de dimensión infinita fuertemente.*

Dicho resultado hace uso del *hiperespacio* 2^X de un espacio X y de algunas de sus propiedades, las cuales escapan al objetivo del presente texto, remitimos al lector a [8] para desarrollos ulteriores.

Bibliografía

- [1] Charles O. Christenson y William L. Voxman, *Aspects of Topology*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., vol. 39, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.
- [2] Witold Hurewicz y Henry Wallman, *Dimension Theory (revised)*, Princeton Mathematical Series, v. 4. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1969.
- [3] Fernando Macías Romero y Arturo Sánchez González, El Cubo de Hilbert. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Otoño 2011, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2011.
- [4] Fernando Macías Romero y Arturo Sánchez González, Teoremas de Extensión. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Primavera 2012, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2012.
- [5] Fernando Macías Romero y Arturo Sánchez González, Topología Elemental del Plano. Memorias en Extenso del Programa La Ciencia en tus Manos XII, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2012.
- [6] Fernando Macías Romero y Arturo Sánchez González, Teoría Elemental de Dimensión. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Otoño IV (2012), organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2012.
- [7] Fernando Macías Romero y Arturo Sánchez González, Teoría elemental de dimensión 2. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Primavera VIII, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2013.
- [8] Jan van Mill, *Infinite-Dimensional Topology. Prerequisites and Introduction*, North-Holland mathematical library, vol. 43, Elsevier Science Publishers B. V., Netherlands, 1989.
- [9] Lynn Artur Steen and J. Arthur Seebach, Jr., *Counterexamples in Topology*, Springer-Verlag, USA, 2nd. ed., 1978.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel
Puebla, Pue. C.P. 72570
fmacias@fcfm.buap.mx, 200919713@alumnos.fcfm.buap.mx

Índice de autores

A

Aparicio Hernández, Aarón, 109

B

Bykov, Alexander, 131

C

Córdova Salazar, Vianey, 159

D

Djordjević, Slaviša, 37

Domínguez, Patricia, 89

G

García Corte, Julio César, 37

Garduño Castañeda, Héctor Manuel, 37

H

Herrera Carrasco, David, 159, 183

I

Ibarra Contreras, Manuel, 65

J

Juárez Flores, Raúl, 131

K

Kantún Montiel, Aura Lucina, 131

L

López Andrade, Carlos Alberto, 5

López Toriz, María de Jesús, 209

M

Macías Romero, Fernando, 159, 183, 227

Martínez García, Armando, 65

Montero Rodríguez, Germán, 183

S

Sánchez González, Arturo, 227

V

Vázquez, Josué, 89

Matemáticas y sus aplicaciones 4
su composición, diseño y cuidado, estuvo a cargo
de Fernando Macías Romero
se terminó de imprimir en noviembre de 2014, en los talleres de
El Errante editor, S. A. de C. V., sito en privada Emiliano Zapata 5947,
Col. San Baltazar Campeche, Puebla, Pue., México.

El tiraje consta de 500 ejemplares.