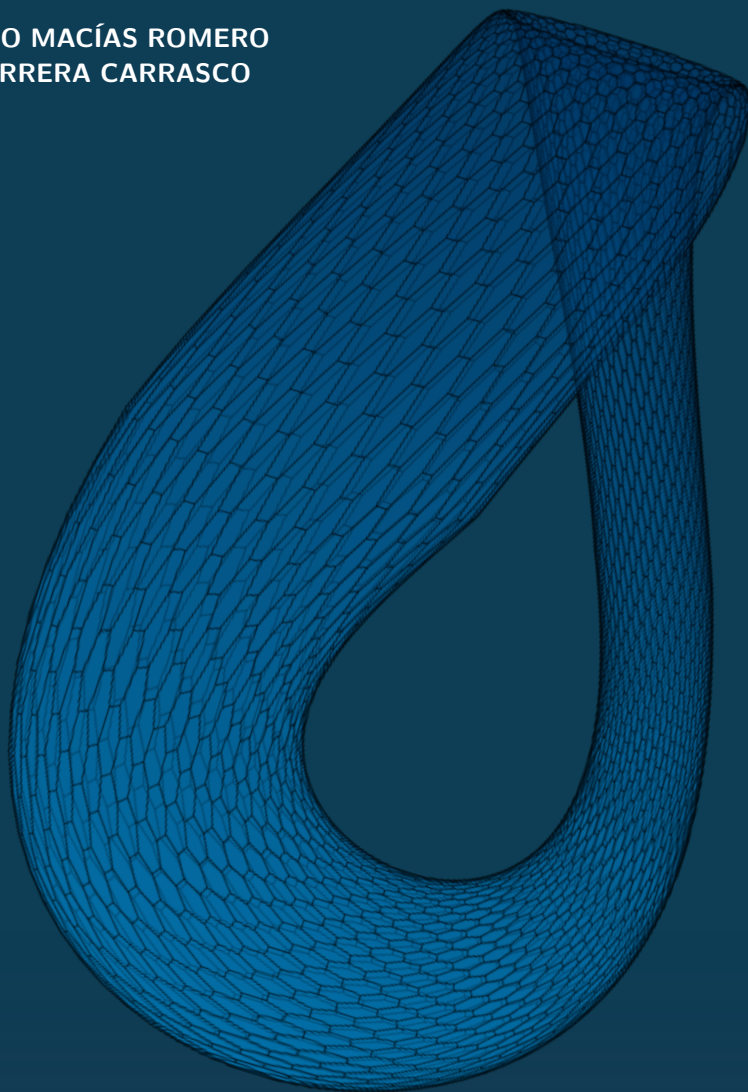


FERNANDO MACÍAS ROMERO
DAVID HERRERA CARRASCO
(editores)



Matemáticas y sus aplicaciones 30



MANUALES Y TEXTOS
ciencias exactas

Matemáticas y sus aplicaciones *30*

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

RECTORA: MARÍA LILIA CEDILLO RAMÍREZ · SECRETARIO GENERAL:
DANIÁN HERNÁNDEZ MÉNDEZ · VICERRECTOR DE EXTENSIÓN Y DI-
FUSIÓN DE LA CULTURA: ROSALINDA MERINO CALDERÓN · DIRECTOR
GENERAL DE PUBLICACIONES: MARY KRISS PARRA GÓRRIZ

PRIMERA EDICIÓN: 2026

ISBN: 978-968-9744-84-9

D.R. © BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
4 SUR 104, CENTRO HISTÓRICO, PUEBLA, PUE. CP. 72000
TELÉFONO: 2222295500

WWW.BUAP.MX

DIRECCIÓN GENERAL DE PUBLICACIONES
2 NORTE 104, CENTRO HISTÓRICO, PUEBLA, PUE., CP.72000
Tels.: 2222295500
LIBROS.DGP@CORREO.BUAP.MX | WWW.PUBLICACIONES.BUAP.MX

DISEÑO DE PORTADA: DANIEL DOMÍNGUEZ MÁLAGA

HECHO EN MÉXICO

MADE IN MEXICO

Matemáticas y sus aplicaciones 30

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de
investigación presentados en la serie
International Conference on Mathematics and its Applications
(CIMA), FCFM, BUAP.

Editores

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco

Comité científico internacional

Ermínia de Lourdes Campello Fanti (UNESP, BRA), Félix Capulín Pérez (UAEMEX), Florencio Corona Vázquez (UNACH), Antonio Díaz Ramos (UMA, ESP), Sina Greenwood (UA,NZ), Gerardo Hernández Valdez (UANL), Judy Kennedy (LU, USA), Christian Lehn (TUC, DE), Rocío Leonel Gómez (UNAM), Fernando Macías Romero (BUAP), Edgar Martínez Moro (UVA, ESP), Eiichi Matsubashi (SHIMADAI, JP), Daria Michalik (UKSW, PL), Fernando Orozco Zitli (UAEMEX), Ambrosio Ortíz Ramírez (IPN), José Gregorio Rodríguez Nieto (UNC, CO), Javier Sánchez Martínez (UNACH), Jesús Fernando Tenorio Arvide (UTM, Oax-MEX), Nomura Yamato (SHIMADAI, JP).

Contenido

Presentación	1
---------------------	---

Álgebra

Capítulo 1. Módulos con submódulos cíclicos superfluos en su cápsula inyectiva	5
---	---

Andrea Cordero Medel, César Cejudo Castilla, David Villa Hernández

1	Introducción	5
2	Módulos Cosingulares	6
3	Módulos que satisfacen (S^*)	10
4	H-Anillos	14
5	QF-Anillos	20

Análisis

Capítulo 2. Un acercamiento a la derivada de Peano	27
---	----

Francisco Javier Mendoza Torres, Gerardo Alfonso Sánchez Márquez

1	Introducción	27
2	Motivación	28
3	Propiedades de la derivada n -ésima de Peano	31
4	Conclusiones	42

Física

Capítulo 3. Unified Model of Spin–Diffusion Dynamics (UMSDD): Smoluchowski–Volterra Framework for Geminate Charge Escape in Metal Photocatalysts employing Crank–Nicolson	47
--	----

Bolivia Cuevas Otahola, Ygnacio Martínez Laguna and María Monserrat Morín Castillo

1	Introduction	47
2	Foundations and Description of the UMSDD Model	49

3	Results and Simulations	61
4	Conclusions	65

Matemática Aplicada y Probabilidad

Capítulo 4. La transformada discreta de Fourier y los efectos de la discretización en el análisis oscilatorio de señales	79
---	-----------

Denisse Amélie Sophie Bernès Carmona, Moisés Soto Bajo

1	Introducción	79
2	El Fenómeno de Wilbraham-Gibbs	89
3	El Principio de Incertidumbre	98
4	Fuga Espectral	106

Capítulo 5. Decisiones racionales óptimas en portafolio de inversión con opciones americanas y subyacente browniano fraccional	127
---	------------

María Teresa Verónica Martínez Palacios, José Antonio Climent Hernández

1	Introducción	127
2	Descripción del problema y supuestos	130
3	Dinámica de la restricción presupuestal	132
4	Modelo de control óptimo estocástico en tiempo continuo .	133
5	Solución al problema de control mediante programación dinámica estocástica en tiempo continuo, adaptada a procesos browniano-fraccional	134
6	Deducción del modelo para valorar una opción americana que incluye parámetros de riesgo browniano-fraccional	137
7	Conclusiones	138

Topología

Capítulo 6. Una introducción a modelos comunes en teoría de continuos	147
--	------------

José Alberto Ortega Becerril, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero

1	Introducción	147
2	El teorema de Hahn-Mazurkiewicz	150
3	Familia de continuos sin un modelo común	155

Capítulo 7. Resultados adicionales sobre los hiperespacios cocientes $C_n(X)/C_1(X)$	163
<i>Leonardo Ramírez Aparicio, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero</i>	
1 Introducción	163
2 Definiciones y preliminares	166
3 Construcción de espacios cocientes	170
4 Contractibilidad, retracts absolutos y la propiedad del punto fijo en $C_n(X)/C_1(X)$	171
5 Otras propiedades en $C_n(X)/C_1(X)$	176
Capítulo 8. Universalidad en los continuos y una dendrita universal	181
<i>David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Juan Carlos López Díez, David Rodríguez Hernández</i>	
1 Introducción	181
2 Preliminares	182
3 Homeomorfismos y encajes	183
4 Continuos	184
5 Continuos universales	186
6 Dendritas universales de orden finito	196
Capítulo 9. Sobre las componentes relativas en espacios topológicos	203
<i>Florencio Corona Vázquez, Jesús Díaz Reyes, Russell Aarón Quiñones Estrella y Javier Sánchez Martínez</i>	
1 Introducción	203
2 Preliminares	204
3 Componentes conexas relativas	216
4 Disconexidad relativa	221
5 Componentes relativas en hiperespacios	225
Índice de autores	231

Presentación

Las «International Conferences on Mathematics and its Applications (CIMA)» han sido una tradición consolidada durante 21 años, celebrándose anualmente con gran éxito. En este evento, la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) ha colaborado activamente como organizadora, junto con sus estudiantes, para crear un espacio de intercambio académico y divulgación de conocimiento.

La participación de destacados matemáticos a nivel internacional ha sido una constante en estas conferencias, lo que ha permitido enriquecer el debate y la discusión en torno a temas relevantes en el campo de las matemáticas. La presente edición del libro que tienen en sus manos es un reflejo de este esfuerzo colectivo y representa un logro significativo en la difusión del conocimiento matemático.

La publicación de este libro es el resultado del trabajo arduo y la generosidad de muchos matemáticos que contribuyeron al Eleventh International Conference on Mathematics and its Applications (11CIMA, 2024). Este evento ha contado con la participación de destacadas figuras de diversas universidades, tanto nacionales como extranjeras, quienes han compartido sus investigaciones y experiencias en el desarrollo del 11CIMA y en la documentación escrita que se presenta en este libro.

Los capítulos de este libro están organizados en secciones temáticas, y cada uno de ellos ha pasado por un riguroso proceso de arbitraje. Queremos expresar nuestro más sincero agradecimiento a todos los árbitros por su amabilidad, dedicación y labor científica, que han sido fundamentales para garantizar la calidad de los contenidos.

Asimismo, deseamos agradecer profundamente a Felipe de Jesús Aguilar Romero y a Leonardo Ramírez Aparicio por su invaluable apoyo en la edición de esta obra, así como a Kevin Águila Méndez por su asistencia técnica. Su contribución ha sido esencial para hacer posible esta publicación de la obra 30.

Esperamos que este libro sea de utilidad y consulta para la comunidad académica y para todos aquellos interesados en el campo de las matemáticas.

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Ingrid Carolina Martínez Barahona
Editores

Álgebra

Capítulo 1

Módulos con submódulos cíclicos superfluos en su cápsula inyectiva

Andrea Cordero Medel, César Cejudo Castilla, David
Villa Hernández
FCFM, BUAP

Resumen

En este trabajo se estudian los módulos cosingulares, definidos como aquellos que coinciden con el conjunto de sus submódulos cíclicos superfluos en su cápsula inyectiva. Además, se introducen las propiedades (S^*) y $(D1)$ adjudicadas a módulos, con el propósito de desarrollar una caracterización de los H -anillos y de los anillos cuasi-Frobenius.

1 Introducción

Dualizar es una práctica ampliamente utilizada en álgebra y teoría de módulos para construir nuevos objetos matemáticos a partir de conceptos existentes. En este contexto, recordemos a los módulos singulares. El estudio de los módulos singulares ha permitido caracterizar diversas propiedades y, además, se relaciona estrechamente con conceptos clásicos como módulos inyectivos, proyectivos y simples. Teniendo en cuenta lo anterior, la dualidad del módulo singular emerge como un tema de relevancia en este trabajo.

Özcan (2002, [2]) define la parte cosingular de un módulo y posteriormente introduce el concepto de módulo cosingular. Ahora bien, para aprovechar el análisis de los módulos cosingulares, este trabajo explorará estructuras emergentes de los módulos cosingulares denominadas (S^*) y $(D1)$, con el propósito de mostrar la generalidad de los resultados al relacionar de manera equivalente la propiedad (S^*) con los anillos cuasi-Frobenius.

En lo sucesivo, los módulos aquí mencionados se considerarán R -módulos derechos, donde R denotará un anillo asociativo con identidad. Como es usual, un submódulo N de M será denotado por $N \leq M$; si N es sumando directo de M , por $N \leq_{\oplus} M$; si N es superfluo en M , por $N \ll M$; y si N es esencial en M , por $N \leq_{es} M$. Por otra parte, $E(M)$ denotará la cápsula inyectiva del módulo M , mientras que $Rad(M)$ denotará su radical. Finalmente, si R es un anillo, $J(R)$ representará su radical de Jacobson.

2 Módulos Cosingulares

Es importante destacar que el estudio detallado de los módulos cosingulares no constituye el objetivo principal de este capítulo, más bien, esta sección tiene la intención de proporcionar la base teórica necesaria para desarrollar teoremas y resultados más avanzados. En este sentido, nos centraremos en dualizar algunos resultados conocidos para los módulos singulares e interpretarlos en el contexto de los módulos cosingulares.

Definición 2.1. Sea M un R -módulo derecho.

1. Un submódulo $A \leq M$ se dice esencial en M , si, para todo $B \leq M$, la igualdad $A \cap B = \{0\}$ implica que $B = \{0\}$.
2. Un submódulo $A \leq M$ se dice superfluo en M , denotado por $A \ll M$, si, para todo $B \leq M$, la igualdad $A + B = M$ implica que $B = M$.
3. Se dice que M es superfluo si existe un R -módulo derecho N tal que $M \ll N$. En caso de no existir ningún módulo en el que M sea superfluo, se dice que M es no superfluo.

Para el estudio de la parte cosingular de un módulo, presentaremos un lema que resume algunos resultados clásicos de la teoría de módulos y que serán utilizados más adelante.

Lema 2.2 ([9], Lemas 5.1.3 y 5.1.5). Sean A, B, M y N R -módulos derechos tales que $A \leq B \leq M \leq N$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si $B \ll M$, entonces $A \ll N$.
2. Si $A \leq_{es} N$, entonces $B \leq_{es} M$.

Sea $\varphi : M \longrightarrow M'$ un morfismo de R -módulos derechos. Entonces:

- 3) Si $A \ll M$, entonces $\varphi(A) \ll M'$.
- 4) Si $A' \leq_{es} M'$, entonces $\varphi^{-1}(A') \leq_{es} M$.

Definición 2.3. Sea M un R -módulo derecho.

1. Diremos que M es inyectivo si, para todo monomorfismo $\alpha : L \longrightarrow N$ de R -módulos derechos y todo morfismo $\beta : L \longrightarrow M$, existe un morfismo $\varphi : N \longrightarrow M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\alpha} & N \\ \beta \downarrow & \nearrow \varphi & \\ & M & \end{array}$$

2. Una cápsula inyectiva de M , denotada por $E(M)$, es un par (E, ι) , donde E es un R -módulo derecho inyectivo y $\iota : M \rightarrow E$ es un monomorfismo esencial, es decir, $\iota(M) \leq_{es} E$.

Proposición 2.4. *Un R -módulo derecho M es superfluo si y solo si es superfluo en su cápsula inyectiva.*

Demostración. Sea $E(M)$ la cápsula inyectiva del R -módulo derecho M . Supongamos que M es superfluo, en consecuencia, $M \ll M'$ para algún R -módulo derecho M' . Notemos que $M \leq M' \leq E(M')$. Entonces, por el Lema 2.2 1), se deduce que $M \ll E(M')$.

Además, dado que $E(M)$ y $E(M')$ son R -módulos derechos inyectivos, y $E(M) \leq E(M')$, según [6, Proposición 18.12], se cumple que $E(M) \leq_{\oplus} E(M')$. De este modo, por [3, Lema 1.3.7], concluimos que $M \ll E(M)$.

La implicación recíproca es inmediata. Si $M \ll E(M)$, entonces, por definición, M es superfluo. $\square$

Definición 2.5. *Sea M un R -módulo derecho. Definimos el siguiente conjunto*

$$Z^*(M) = \{m \in M \mid mR \text{ es superfluo}\}.$$

No es complicado demostrar que $Z^*(M)$ es un submódulo de M . En adelante, llamaremos a $Z^*(M)$ el *submódulo cosingular* de M .

Con esta definición, los autores de [3, Capítulo 2], mostraron que varias propiedades y resultados para los módulos singulares tienen contrapartes directas en el contexto de los módulos cosingulares. Esto se refleja en el lema que enunciaremos a continuación.

Lema 2.6. *Sean M un R -módulo derecho, N un submódulo de M y E un R -módulo derecho inyectivo. Entonces*

1. $Z^*(E) = \text{Rad}(E)$.
2. $Z^*(N) = N \cap Z^*(M)$.
3. Si $\varphi : M \rightarrow M'$ es un morfismo de R -módulos derechos, entonces $\varphi(Z^*(M)) \leq Z^*(M')$.
4. Si $M \leq E$, entonces $Z^*(M) = M \cap \text{Rad}(E(M)) = M \cap \text{Rad}(E)$.
5. Si $\{M_i\}_{i \in I}$ es una familia de R -módulos derechos, definamos $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Entonces

$$Z^*(M) = \bigoplus_{i \in I} Z^*(M_i).$$

Para el siguiente resultado conviene recordar una caracterización de los módulos superfluos. La proposición que sigue resume, de entre las equivalencias establecidas en [3, Proposición 2.0.11], aquella que necesitaremos para continuar.

Proposición 2.7. *Sea R un anillo artiniiano derecho y M un R -módulo derecho. Entonces, M es superfluo si y solo si $Mr_R(J(R)) = \{0\}$, donde $r_R(J(R))$ es el anulador derecho del radical de Jacobson de R .*

Lema 2.8. *Sea R un anillo artiniiano derecho y M un R -módulo derecho. Entonces se cumple que $Z^*(M) = \{m \in M \mid mr_R(J(R)) = \{0\}\}$.*

Demostración. Sea $m \in Z^*(M)$. Entonces mR es un submódulo superfluo. De acuerdo con la Proposición 2.7, se cumple que $(mR)r_R(J(R)) = \{0\}$. Como $m \in mR$, concluimos que $mr_R(J(R)) = \{0\}$.

Recíprocamente, consideremos $m \in M$ tal que $mr_R(J(R)) = \{0\}$. Observemos que, para todo $a \in R$, se cumple $ar_R(J(R)) \subseteq r_R(J(R))$ y, dado que el anulador es un ideal izquierdo de R , tenemos $Rr_R(J(R)) \subseteq r_R(J(R))$. Por lo tanto, $(mR)r_R(J(R)) \subseteq mr_R(J(R)) = \{0\}$. De acuerdo con la Proposición 2.7, concluimos que mR es superfluo, es decir, $m \in Z^*(M)$. $\square$

Definición 2.9. *Sea R un anillo y M un R -módulo derecho. Decimos que M es cosingular si $Z^*(M) = M$. Además, R se denomina cosingular derecho si el R -módulo derecho R_R es cosingular.*

Proposición 2.10. *Sea R un anillo perfecto derecho. Un R -módulo derecho es superfluo si y solo si es cosingular.*

Demostración. 1. Sea M un R -módulo derecho superfluo. Observemos que $Z^*(M) \leq M$. Por lo tanto, bastará demostrar que $M \leq Z^*(M)$. Dado que M es superfluo, según la Proposición 2.4, se cumple que $M \ll E(M)$. Tomemos un elemento $x \in M$. Entonces $xR \subseteq M \ll E(M)$. Como consecuencia del Lema 2.2 1), se sigue que $xR \ll E(M)$, es decir, xR es superfluo. De esta manera, concluimos que $x \in Z^*(M)$.

2. Como R es perfecto derecho, $E(M)$ es semiperfecto. Así, por [9, Teorema 11.1.7 (c)], sabemos que $Rad(E(M)) \ll E(M)$, lo que implica que $Rad(E(M))$ es el mayor submódulo superfluo de $E(M)$. Si suponemos que M es cosingular, entonces $M = Z^*(M)$. Por el Lema 2.6 4), se cumple que $Z^*(M) = M \cap Rad(E(M))$, por lo que $M \subseteq Rad(E(M))$. Dado que $Rad(E(M)) \ll E(M)$, según el Lema 2.2 1), se concluye que $M \ll E(M)$. Por lo tanto, por la Proposición 2.4, M es superfluo. $\square$

Nótese que, para demostrar la necesidad de la proposición anterior, no se utilizó la hipótesis de que el anillo R es perfecto derecho. Por lo tanto, se concluye que todo R -módulo derecho superfluo es cosingular.

Lema 2.11. *Para cualquier anillo R , la clase de R -módulos derechos cosingulares es cerrada bajo submódulos, imágenes homomorfas y sumas directas. Sin embargo, no es cerrada bajo extensiones esenciales.*

Demostración. Consideremos un R -módulo derecho cosingular M .

Para comenzar, sea $A \leq M$. Por el Lema 2.6 2), se obtiene

$$Z^*(A) = A \cap Z^*(M) = A \cap M = A,$$

lo que implica que $Z^*(A) = A$. Por lo tanto, A también es un R -módulo cosingular.

Supongamos ahora que $\varphi : M \rightarrow N$ es un morfismo de R -módulos derechos. Observe-mos que siempre ocurre que $Z^*(\varphi(M)) \leq \varphi(M)$, así que resta comprobar la otra inclusión. De acuerdo con el Lema 2.6 3), se cumple $\varphi(Z^*(M)) \leq Z^*(N)$. Como M es cosingular, se tiene $\varphi(M) \leq Z^*(N)$. Por lo tanto, si $x \in \varphi(M)$, se sigue que $x \in Z^*(N)$, lo que implica que xR es superfluo. En consecuencia, $x \in Z^*(\varphi(M))$. Concluimos que $\varphi(M) = Z^*(\varphi(M))$.

Ahora, sean $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de R -módulos derechos cosingulares y definamos $M' = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Entonces

$$M' = \bigoplus_{i \in I} Z^*(M_i).$$

Por el Lema 2.6 5), se tiene

$$Z^*(M') = \bigoplus_{i \in I} Z^*(M_i),$$

lo que implica que $M' = Z^*(M')$. Por lo tanto, $\bigoplus_{i \in I} M_i = Z^*(\bigoplus_{i \in I} M_i)$.

Por último, tomemos un campo F y consideremos el anillo conmutativo

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in F \right\}.$$

Por [10, Teorema 1.22], es artiniano. Afirmamos que el radical de Jacobson de R es

$$J(R) = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $r = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in R$. Nótese que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$r^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

Se sigue que $r^n = 0$ si y solo si $a = 0$. Por lo tanto, los elementos nilpotentes tienen la forma $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Por [9, Corolario 9.3.10 (a)], se deduce que $J(R)$ es el ideal nilpotente más grande de R . Así,

$$J(R) = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que $r_R(J(R)) = J(R)$ y, por [9, Lema 5.1.6], $J(R)$ es un ideal esencial de R_R . Por el Lema 2.8, el R -módulo $J(R)$ es cosingular, pero su extensión esencial R_R no lo es. $\square$

Corolario 2.12. *Si R es un anillo cosingular derecho, entonces todo R -módulo derecho es cosingular.*

Como ejemplos de anillos cosingulares derechos, presentamos los siguientes dos lemas. El primero muestra propiedades derivadas de una caracterización, mientras que el segundo establece condiciones que no pueden satisfacerse simultáneamente.

Lema 2.13. *Un anillo R es cosingular derecho si y solo si para todo R -módulo derecho inyectivo E , se cumple que $E = \text{Rad}(E)$.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Se deduce utilizando el Corolario 2.12 y el Lema 2.6 1).

$(\Leftarrow)$ Sea $E(R)$ la cápsula inyectiva del R -módulo derecho R_R . Por hipótesis, $E(R) = \text{Rad}(E(R))$ y, aplicando el Lema 2.6 2), se obtiene

$$\begin{aligned} Z^*(R_R) &= R_R \cap Z^*(E(R)) \\ &= R_R \cap \text{Rad}(E(R)) \quad (\text{por el Lema 2.6 1)}) \\ &= R_R \cap E(R) \\ &= R_R. \end{aligned}$$

Por lo tanto, R_R es cosingular. □

Lema 2.14. *No existen anillos perfectos derechos que sean cosingulares derechos.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Sea R un anillo perfecto derecho y además cosingular derecho. Según el Lema 2.13, si R es cosingular derecho, entonces el R -módulo derecho inyectivo $E(R)$ satisface $E(R) = \text{Rad}(E(R))$, lo cual implica que $E(R)$ no tiene submódulos máximos.

Por otra parte, como R es perfecto derecho, por [6, Teorema de Bass 28.4 (c)] todo R -módulo derecho no cero contiene un submódulo máximo, es decir, $E(R) \neq \text{Rad}(E(R))$. Esto contradice lo obtenido anteriormente.

En consecuencia, no existen anillos perfectos derechos que sean cosingulares derechos. □

3 Módulos que satisfacen (S^*)

En esta sección, nos enfocaremos primero en la construcción de los llamados $(D1)$ -módulos, que constituyen una clase especial de módulos cuya caracterización está ligada a la noción de módulos superfluos. A medida que avanzamos hacia la definición de un módulo que satisface (S^*) , entramos en un terreno donde los módulos cosingulares desempeñan un papel fundamental.

Nos concentramos en explorar las relaciones entre los $(D1)$ -módulos, los módulos que satisfacen (S^*) , y los resultados asociados con los submódulos cosingulares.

Definición 3.1. Un R -módulo derecho M se denomina $(D1)$ si, para cada submódulo N de M , existe una descomposición $M = M_1 \oplus M_2$ tal que $M_1 \leq N$ y $N \cap M_2 \ll M$.

Definición 3.2. Decimos que un R -módulo derecho M satisface (S^*) si, para todo submódulo N de M , existe un sumando directo K de M tal que $K \leq N$ y $\frac{N}{K}$ es cosingular. Un anillo R satisface (S^*) si el R -módulo derecho R_R satisface (S^*) .

Lema 3.3. Los $(D1)$ -módulos satisfacen (S^*) . Sin embargo, en general la recíproca no es verdadera.

Demostración. Sea M un $(D1)$ -módulo. Por definición, para cada $N \leq M$, existe una descomposición $M = M_1 \oplus M_2$ tal que $M_1 \leq N$ y $N \cap M_2 \ll M$. Debemos demostrar que $\frac{N}{M_1}$ es cosingular.

Como $N \cap M_2 \ll M$, y por Ley Modular, se tiene

$$N = M \cap N = (M_1 \oplus M_2) \cap N = M_1 \oplus (M_2 \cap N).$$

En consecuencia,

$$\frac{N}{M_1} \cong M_2 \cap N.$$

Por [3, Proposición 2.0.3], $\frac{N}{M_1}$ es superfluo, entonces por la Proposición 2.10, también es cosingular.

Finalmente, consideremos el anillo $\mathbb{Z}$. Dado que $\mathbb{Z} \ll \mathbb{Q}$, entonces $Z^*(\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$, así el módulo $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ satisface (S^*) . Sin embargo, por [13, pág. 56], ningún submódulo propio de $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ tiene un suplemento en $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$. Esto muestra que no es posible descomponer a $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ en una suma directa, es decir, no puede ser un $(D1)$ -módulo. $\square$

La demostración del siguiente lema se deduce directamente de las definiciones, aunque resulta útil por las propiedades que aporta. En particular, establece una caracterización de los módulos que satisfacen (S^*) , la cual será necesaria para demostrar la clausura de la propiedad (S^*) bajo submódulos.

Lema 3.4 ([3], Lema 3.0.5). Sea M un R -módulo derecho. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. M satisface (S^*) .
2. Para todo submódulo N de M , existe una descomposición $M = A \oplus B$ tal que $A \leq N$ y $N \cap B$ es cosingular.
3. Para todo submódulo N de M , existe una descomposición $N = A \oplus B$ tal que $A \leq \oplus M$ y B es cosingular.

Lema 3.5. Si M es un R -módulo derecho que satisface (S^*) , entonces cualquier submódulo de M también satisface (S^*) .

Demostración. Sean M un R -módulo derecho que satisface (S^*) , y $H \leq N \leq M$. Por el Lema 3.4 3), se tiene que $H = K \oplus B$, donde $K \leq_{\oplus} M$ y B es cosingular. Sea $L \leq M$ tal que $M = K \oplus L$. Entonces, por Ley Modular se cumple

$$N = M \cap N = (K \oplus L) \cap N = K + (L \cap N).$$

Además, $(N \cap L) \cap K \subseteq L \cap K = \{0\}$. Por lo tanto, $N = (N \cap L) \oplus K$, donde $K \leq H$.

Para ver que $\frac{H}{K}$ es cosingular, basta observar que

$$\frac{H}{K} = \frac{K + B}{K} \cong B,$$

y que, de esta manera, B es cosingular.

En consecuencia, concluimos que N satisface (S^*) . □

Anteriormente señalamos que no todo módulo que satisface (S^*) es necesariamente un $(D1)$ -módulo. Sin embargo, si la parte cosingular de un módulo es un submódulo superfluo, entonces ambos conceptos resulten equivalentes.

Lema 3.6. *Si M es un R -módulo derecho que satisface (S^*) y $Z^*(M) \ll M$, entonces M es un $(D1)$ -módulo.*

Demostración. Sea M un R -módulo derecho que satisface (S^*) y $Z^*(M) \ll M$. Por definición, para todo $N \leq M$, existe $K \leq_{\oplus} M$ tal que $K \leq N$ y $\frac{N}{K}$ es cosingular. Sea $L \leq M$ tal que $M = K \oplus L$. Entonces, por Ley Modular, se tiene

$$N = (L \cap N) \oplus K,$$

de donde se sigue que $\frac{N}{K} \cong N \cap L$. Dado que $\frac{N}{K}$ es cosingular, concluimos que $N \cap L$ también lo es.

Además,

$$N \cap L = Z^*(N \cap L) = (N \cap L) \cap Z^*(M) \leq Z^*(M) \ll M.$$

En consecuencia, por el Lema 2.2 1), $N \cap L \ll M$. Por lo tanto, M es un $(D1)$ -módulo. □

Sin embargo, cuando M es un $(D1)$ -módulo, no necesariamente $Z^*(M)$ es superfluo en M . Un ejemplo que ilustra este hecho puede consultarse en [3, Ejemplo 3.0.9].

Lema 3.7. *Si M es un R -módulo derecho, entonces $MZ^*(R_R) \leq Z^*(M)$.*

Demostración. Sea $m \in M$. Definimos la función $\varphi : R \rightarrow E(M)$ mediante $\varphi(r) = mr$ para todo $r \in R$. Entonces, φ es un morfismo y puede extenderse a un morfismo $\theta : E(R) \rightarrow E(M)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\iota} & E(R) \\ \varphi \downarrow & \swarrow \theta & \\ E(M) & & \end{array}$$

Por [9, Teorema 9.1.4 (a)], se cumple que $\theta(\text{Rad}(E(R))) \leq \text{Rad}(E(M))$. Sea $a \in Z^*(R_R)$. Según el Lema 2.6 4), se tiene $a \in R \cap \text{Rad}(E(R_R))$. Entonces,

$$ma = \varphi(a) = \theta_\iota(a) = \theta(a) \in \theta(\text{Rad}(E(R_R))) \leq \text{Rad}(E(M)).$$

De acuerdo con el Lema 2.6 4), $ma \in M \cap \text{Rad}(E(M)) = Z^*(M)$. En consecuencia, $mZ^*(R_R) \leq Z^*(M)$, y por lo tanto $MZ^*(R_R) \leq Z^*(M)$. $\square$

Proposición 3.8. *Si el anillo R satisface (S^*) , entonces $\frac{M}{Z^*(M)}$ es semisimple para todo R -módulo derecho M .*

Demostración. Si R es cosingular derecho y M es un R -módulo derecho, por el Corolario 2.12 se cumple que $M = Z^*(M)$. En consecuencia,

$$\frac{M}{Z^*(M)} = \frac{M}{M} \cong \{0\},$$

es decir, $\frac{M}{Z^*(M)}$ es semisimple.

Supongamos ahora que $R \neq Z^*(R_R)$. Dado que $Z^*(R_R) \leq R$, por [9, Teorema 2.3.11] existe un ideal derecho máximo P de R tal que $Z^*(R_R) \leq P$. Según [6, Proposición 7.1] y el Lema 3.4, existe un idempotente e y un ideal derecho cosingular C tales que $P = eR \oplus C$. Como $C = Z^*(C) \leq Z^*(R_R)$ y $Z^*(R_R) \leq P$, se sigue que

$$P + Z^*(R_R) = eR + C + Z^*(R_R) = eR + Z^*(R_R).$$

Dado que $(e + Z^*(R_R))(r + Z^*(R_R)) = er + Z^*(R_R)$, tenemos,

$$\frac{P}{Z^*(R_R)} = \frac{eR + Z^*(R_R)}{Z^*(R_R)} = (e + Z^*(R_R)) \left(\frac{R}{Z^*(R_R)} \right).$$

En consecuencia, por [6, Proposición 7.1], se sigue que $\frac{P}{Z^*(R_R)} \leq \oplus \frac{R}{Z^*(R_R)}$.

Por otro lado, afirmamos que $\frac{R}{Z^*(R_R)}$ no posee submódulos esenciales propios. En efecto, si $\frac{I}{Z^*(R_R)}$ fuera un submódulo esencial propio de $\frac{R}{Z^*(R_R)}$, entonces $I \leq R$. En consecuencia, existe un ideal derecho máximo P' de R tal que $I \leq P'$, y por tanto $\frac{I}{Z^*(R_R)} \leq \frac{P'}{Z^*(R_R)}$. Como $\frac{P'}{Z^*(R_R)}$ es máximo, se cumple que $\frac{P'}{Z^*(R_R)} \leq \oplus \frac{R}{Z^*(R_R)}$. Así, existe K tal que

$$\frac{R}{Z^*(R_R)} = \frac{P'}{Z^*(R_R)} \oplus \frac{K}{Z^*(R_R)}.$$

Como

$$\frac{I}{Z^*(R_R)} \leq_{es} \frac{R}{Z^*(R_R)} \quad \text{y} \quad \frac{I}{Z^*(R_R)} \cap \frac{K}{Z^*(R_R)} = \{0\},$$

necesariamente $\frac{K}{Z^*(R_R)} = \{0\}$, lo que implica que $\frac{P'}{Z^*(R_R)} = \frac{R}{Z^*(R_R)}$, una contradicción. Concluimos que $\frac{R}{Z^*(R_R)}$ no tiene submódulos esenciales propios.

Por lo tanto, según [3, Proposición 1.6.4. 1)], $\frac{R}{Z^*(R_R)}$ es semisimple.

Sea ahora M un R -módulo arbitrario. Por el Lema 3.7, $MZ^*(R_R) \leq Z^*(M)$. Así, para todo $r \in Z^*(R_R)$ y $m + Z^*(M) \in \frac{M}{Z^*(M)}$, se cumple

$$(m + Z^*(M))r = mr + Z^*(M) = Z^*(M).$$

Por [3, Proposición 1.1.26.], se deduce que $\frac{M}{Z^*(M)}$ es un $\frac{R}{Z^*(R_R)}$ -módulo.

Concluimos que $\frac{M}{Z^*(M)}$ es semisimple. $\square$

La proposición que sigue amplía el resultado anterior, su demostración puede consultarse en [3, Proposición 3.0.16]. Antes de presentarla, es necesario introducir la definición de $Gen(M)$.

Definición 3.9. Sea M un R -módulo derecho. Decimos que un R -módulo derecho N está generado por M si existe un epimorfismo $\varphi : M^{(\Lambda)} \rightarrow N$ para algún conjunto finito Λ . Denotamos por $Gen(M)$ a la clase de R -módulos generados por M .

Proposición 3.10. Sea M un R -módulo derecho. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\frac{M}{Z^*(M)}$ es semisimple.
2. Para todo $L \leq M$, existe un submódulo $K \leq M$ tal que $L + K = M$ y $L \cap K$ es cosingular.
3. Existe una descomposición $M = A \oplus B$ tal que A es semisimple, $\frac{B}{Z^*(B)}$ es semisimple y $Z^*(B) \leq_{es} B$.
4. Para todo $N \in Gen(M)$, $\frac{N}{Z^*(N)}$ es semisimple.
5. Para todo $N \in Gen(M)$ y para cada $L \leq N$, existe un submódulo $K \leq N$ tal que $L + K = N$ y $L \cap K$ es cosingular.
6. Para todo $N \in Gen(M)$, existe una descomposición $N = N_1 \oplus N_2$ tal que N_1 es semisimple, $\frac{N_2}{Z^*(N_2)}$ es semisimple y $Z^*(N_2) \leq_{es} N_2$.

4 H-Anillos

En esta sección se estudian los H -anillos, denominados así en honor a Manabu Harada. Esta clase de anillos admite una caracterización estrechamente vinculada al concepto de $(D1)$ -módulo. El objetivo principal será mostrar cómo dicha caracterización puede expresarse en términos de la propiedad (S^*) .

Definición 4.1. *Un anillo R se denomina de Harada derecho, o simplemente H -anillo derecho, si cada R -módulo derecho inyectivo es un $(D1)$ -módulo.*

Lema 4.2. *Un R -módulo derecho M es un $(D1)$ -módulo si y solo si, para cada submódulo $N \leq M$, existe un sumando directo M_1 de M tal que $M_1 \leq N$ y $\frac{N}{M_1} \ll \frac{M}{M_1}$.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sea $N \leq M$. Por hipótesis, existe una descomposición $M = M_1 \oplus M_2$ tal que $M_1 \leq N$ y $N \cap M_2 \ll M$. Veamos que $\frac{N}{M_1} \ll \frac{M}{M_1}$.

En efecto,

$$\frac{M}{M_1} = \frac{M_1 \oplus M_2}{M_1} \cong M_2.$$

Además, por Ley Modular,

$$N = N \cap M = N \cap (M_2 \oplus M_1) = (N \cap M_2) \oplus M_1,$$

de donde

$$\frac{N}{M_1} = \frac{(N \cap M_2) \oplus M_1}{M_1} \cong M_2 \cap N.$$

Por [3, Lema 1.3.7], $N \cap M_2 \ll M_2$, se concluye que $\frac{N}{M_1} \ll \frac{M}{M_1}$.

$(\Leftarrow)$ Sea $M_2 \leq M$ tal que $M = M_1 \oplus M_2$. Queremos ver que $N \cap M_2 \ll M_2$. En este caso,

$$\frac{M}{M_1} \cong M_2 \quad \text{y} \quad \frac{N}{M_1} \cong M_2 \cap N.$$

Por hipótesis, $\frac{N}{M_1} \ll \frac{M}{M_1}$, lo que implica que $N \cap M_2 \ll M_2$.

□

Definición 4.3. *Diremos que un R -módulo derecho M es continuo si satisface las siguientes condiciones:*

$C_1)$ *Todo submódulo de M es esencial en un sumando directo de M .*

$C_2)$ *Si $A \leq M$ es isomorfo a un sumando directo de M , entonces A es un sumando directo de M .*

La definición de módulo continuo tiene varias consecuencias. En este trabajo destacamos la siguiente proposición por su relación con los módulos inyectivos. Este resultado puede consultarse en [13, Proposición 2.1].

Proposición 4.4. *Todo R -módulo derecho inyectivo es continuo derecho.*

Proposición 4.5 ([3, Proposición 4.0.10]). *Si M es un R -módulo derecho que satisface la condición $C1)$, entonces todo sumando directo de M también satisface la condición $C1)$.*

Buscamos relacionar el concepto de módulo continuo con los $(D1)$ -módulos. Para demostrar el lema que los conecta, es necesario introducir el concepto de *sumando local* y citar la proposición presentada por Mohamed en [13, Teorema 2.17].

Definición 4.6. Una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de submódulos de un R -módulo derecho M se denomina *sumando local* de M si $\sum_{i \in I} A_i$ es directa y $\sum_{i \in I'} A_i$ es un sumando directo de M para todo subconjunto finito $I' \subseteq I$.

Proposición 4.7. Sea M un R -módulo derecho. Si todo sumando local de M es un sumando directo de M , entonces M puede expresarse como una suma directa de R -módulos derechos inescindibles.

Lema 4.8. Sea M un $(D1)$ -módulo. Si M es continuo, entonces puede expresarse como suma directa de R -módulos derechos inescindibles.

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de submódulos de M tal que $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ es un sumando local de M . Como M es un $(D1)$ -módulo, existe una descomposición $M = M_1 \oplus M_2$ tal que $M_1 \leq A$ y $A \cap M_2 \ll M_2$. Dado que $A = A \cap M = A \cap (M_1 \oplus M_2)$, por Ley Modular, se tiene $A = (M_2 \cap A) \oplus M_1$. Veamos que $A = M_1$.

Supongamos que $A \cap M_2 \neq \{0\}$. Entonces existe $x \in A \cap M_2$ distinto de cero, y en consecuencia $xR \leq A_{i_1} \oplus \cdots \oplus A_{i_n}$ para algún subconjunto finito $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$. Sea $B = A_{i_1} \oplus \cdots \oplus A_{i_n}$. Como B es un sumando directo de M , por la Proposición 4.5, B también satisface la condición C1). Por lo tanto, existe $X \leq_{\oplus} B$ tal que $xR \leq_{es} X$.

Notemos que

$$xR \cap (X \cap M_1) = (xR \cap X) \cap M_1 = xR \cap M_1 = \{0\},$$

lo que implica que $X \cap M_1 = \{0\}$. Consideremos el epimorfismo natural

$$\nu : M_1 \oplus M_2 \longrightarrow \frac{M_1 \oplus M_2}{M_1} \cong M_2.$$

Se tiene que $\nu(X) = \frac{M_1 \oplus X}{M_1} \cong X$ y $\nu(A) = \frac{A}{M_1}$. En consecuencia,

$$\frac{M_1 \oplus X}{M_1} \leq \frac{A}{M_1} \cap \frac{M_1 \oplus M_2}{M_1} = \frac{A \cap (M_1 \oplus M_2)}{M_1} = \frac{M_1 \oplus (A \cap M_2)}{M_1} \cong A \cap M_2.$$

Así,

$$X \cong \frac{M_1 \oplus X}{M_1} \leq \frac{M_1 \oplus (A \cap M_2)}{M_1} \cong A \cap M_2.$$

Por lo tanto, existe $Y \leq A \cap M_2$ tal que $X \cong Y$. Como M es continuo, se sigue que $Y \leq_{\oplus} M$. Sin embargo, $Y \leq A \cap M_2 \ll M_2 \leq M$, lo que implica que $Y \ll M$. Esto es una contradicción, pues significaría que $Y = \{0\}$ y en consecuencia $X = \{0\}$, lo que contradice que $x \neq 0$.

En conclusión, $A \cap M_2 = \{0\}$, de modo que $A = M_1$. Hemos demostrado que todo sumando local de M es un sumando directo de M . En consecuencia, por la Proposición 4.7, M puede expresarse como una suma directa de R -módulos derechos inescindibles. $\square$

Para demostrar el teorema que caracteriza a los H -anillos, presentamos una serie de resultados auxiliares que serán fundamentales en su demostración. Dichos resultados se enuncian a continuación con el fin de facilitar la lectura y comprensión del teorema.

Lema 4.9 ([3], Lema 4.0.3). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *Todo R -módulo derecho no superfluo contiene un submódulo inyectivo no cero.*
2. *Sean E un R -módulo derecho inyectivo. Si $A \leq E$ tal que A no es superfluo en E , entonces A contiene un sumando directo no cero de E .*

Lema 4.10 ([3], Lema 4.0.14). *Sea R un anillo tal que todo R -módulo derecho no superfluo contiene un submódulo inyectivo no cero. Entonces, R es artiniano derecho si y solo si es noetheriano derecho.*

Teorema 4.11. *Para un anillo R , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *R es un H -anillo derecho.*
2. *R es artiniano derecho y todo R -módulo derecho no superfluo contiene un submódulo inyectivo no cero.*
3. *Todo R -módulo derecho puede expresarse como suma directa de un R -módulo derecho inyectivo y uno superfluo.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Sea E un R -módulo derecho inyectivo. Por hipótesis, E es un $(D1)$ -módulo. Consideremos $A \leq E$ tal que A no es superfluo en E . Entonces existe una descomposición $E = E_1 \oplus E_2$ con $E_1 \leq A$ y $A \cap E_2 \ll E_2$. Nótese que $E_1 \neq \{0\}$, pues de lo contrario se tendría $E = E_1 \oplus E_2 = \{0\} \oplus E_2 = E_2$ y $A \cap E_2 = A \cap E = A \ll E$, lo cual es una contradicción.

Por el Lema 4.9, todo R -módulo derecho no superfluo contiene un submódulo inyectivo no cero. Veamos que R es artiniano derecho. Sea E un R -módulo derecho inyectivo, por la Proposición 4.4, todo R -módulo derecho inyectivo es continuo. Entonces, por el Lema 4.8,

$$E = \bigoplus_{j \in J} Q_j,$$

donde los Q_j son R -módulos derechos inescindibles. Así, por [9, Teorema 6.6.4], R es noetheriano derecho. Finalmente, por el Lema 4.10, R es artiniano derecho.

- 2) $\Rightarrow$ 1) Sea E un R -módulo derecho inyectivo y $A \leq E$. Por [9, Lema 6.6.6], existe una familia máxima $\{A_i\}_{i \in I}$ de submódulos inyectivos no cero de A tal que $\sum_{i \in I} A_i$ es directa. Sea $M_1 = \bigoplus_{i \in I} A_i$. Por el Lema 4.10, R es noetheriano derecho y, en consecuencia, por [9, Teorema 6.5.1], M_1 es inyectivo. De este modo, $E = M_1 \oplus M_2$ para algún submódulo inyectivo M_2 .

Supongamos que $A \cap M_2 \not\ll E$. Por hipótesis, existe un submódulo inyectivo no cero $I \leq A \cap M_2$. Esto contradice la maximalidad de la familia $\{A_i\}_{i \in I}$. En consecuencia, $A \cap M_2 \ll E$, lo que prueba que E es un $(D1)$ -módulo.

Por lo tanto, R es un H -anillo derecho.

- 1) $\Rightarrow$ 3) Sea M un R -módulo derecho y $E(M)$ su cápsula inyectiva. Como $M \leq E(M)$, existe una descomposición $E(M) = M_1 \oplus M_2$ tal que $M_1 \leq M$ y $M \cap M_2 \ll E(M)$. Por Ley Modular,

$$M = E(M) \cap M = (M_1 \oplus M_2) \cap M = M_1 \oplus (M_2 \cap M).$$

Como M_1 es sumando directo de $E(M)$, por [6, Proposición 18.2] es inyectivo. Además, $M \cap M_2$ es superfluo por hipótesis.

- 3) $\Rightarrow$ 1) Sea E un R -módulo derecho inyectivo y $A \leq E$. Por hipótesis, existen un R -módulo derecho inyectivo E_1 y un R -módulo derecho superfluo K tales que $A = E_1 \oplus K$. Como $A \leq E$, por [6, Proposición 18.12], se tiene $E = E(A) \oplus E_2$, para algún R -módulo derecho inyectivo E_2 . Entonces,

$$E = E(E_1 \oplus K) \oplus E_2 = E_1 \oplus E(K) \oplus E_2.$$

Nótese que $E_1 \leq_{\oplus} E$ y $E_1 \leq A$. Además,

$$\frac{A}{E_1} = \frac{E_1 \oplus K}{E_1} \cong K \ll E(K),$$

por la Proposición 2.4. Como

$$E(K) \leq E(K) \oplus E_2 \cong \frac{E_1 \oplus E(K) \oplus E_2}{E_1} = \frac{E}{E_1},$$

se sigue que

$$\frac{A}{E_1} \ll \frac{E}{E_1}.$$

En consecuencia, por el Lema 4.2, E es un $(D1)$ -módulo. □

Proposición 4.12. *Un R -módulo derecho inyectivo E satisface (S^*) si y solo si cada submódulo de E es suma directa de un R -módulo derecho inyectivo y un R -módulo derecho cosingular.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sea $N \leq E$. Por hipótesis, existen submódulos K_1 y K_2 de E tales que $E = K_1 \oplus K_2$, con $K_1 \leq N$ y $\frac{N}{K_1}$ cosingular. Por Ley Modular, se tiene

$$N = E \cap N = (K_1 \oplus K_2) \cap N = K_1 \oplus (K_2 \cap N),$$

donde K_1 es un R -módulo derecho inyectivo. Además,

$$\frac{N}{K_1} = \frac{K_1 \oplus (N \cap K_2)}{K_1} \cong N \cap K_2.$$

Así, $N \cap K_2$ es cosingular.

($\Leftarrow$) Sea $L \leq E$. Entonces $L = L_1 \oplus L_2$ para algún R -módulo derecho inyectivo L_1 y un R -módulo derecho cosingular L_2 . En particular, $L_1 \leq_{\oplus} E$ y

$$\frac{L}{L_1} = \frac{L_1 \oplus L_2}{L_1} \cong L_2.$$

Por lo tanto, $\frac{L}{L_1}$ es cosingular. □

Teorema 4.13. *Para un anillo R , los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Todo R -módulo derecho satisface (S^*) .*
2. *Todo R -módulo derecho inyectivo satisface (S^*) .*
3. *Todo R -módulo derecho es suma directa de un R -módulo derecho inyectivo y un R -módulo derecho cosingular.*

Demostración. La equivalencia entre 1) y 2) se establece observando que la implicación $1) \Rightarrow 2)$ es inmediata, mientras que, para $2) \Rightarrow 1)$ basta notar que todo R -módulo está contenido en su cápsula inyectiva y utilizar el Lema 3.5.

La equivalencia entre 1) y 3) es consecuencia directa de la Proposición 4.12. □

Definición 4.14. *Un R -módulo derecho M se denomina Σ -inyectivo si toda suma directa de copias de M es inyectiva.*

Proposición 4.15. *Supongamos que todo R -módulo derecho satisface (S^*) . Entonces, R_R es la suma directa de un ideal derecho Σ -inyectivo A y un ideal derecho cosingular B .*

Demostración. Dado que todo R -módulo derecho satisface (S^*) , por el Teorema 4.13 se tiene que $R_R = A \oplus B$, donde A es un R -módulo derecho inyectivo y B es un R -módulo derecho cosingular.

Como A es inyectivo, por el Lema 2.6 1) se cumple que $Z^*(A) = \text{Rad}(A)$. Además, de acuerdo con el Lema 2.6 5) y [9, Corolario 9.1.5 (c)], se tiene que $Z^*(A^{(\Lambda)}) = \text{Rad}(A^{(\Lambda)})$ para todo conjunto de índices Λ .

Por el Teorema 4.13, sabemos que

$$A^{(\Lambda)} = N \oplus K,$$

donde N es un R -módulo derecho inyectivo y K es cosingular. Obsérvese que

$$Z^*(N) \oplus K = Z^*(A^{(\Lambda)}) = \text{Rad}(A^{(\Lambda)}) = \text{Rad}(N) \oplus \text{Rad}(K).$$

Aplicando Ley Modular, se obtiene

$$\begin{aligned} K &= K \cap (\text{Rad}(N) \oplus \text{Rad}(K)) \\ &= K \cap (Z^*(N) \oplus \text{Rad}(K)) \quad (\text{por el Lema 2.6 1)}) \\ &= (K \cap Z^*(N)) \oplus \text{Rad}(K) \\ &= \{0\} \oplus \text{Rad}(K) \\ &= \text{Rad}(K). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\text{Rad}(K) = K$.

Si $K \neq \{0\}$, como $K \leq_{\oplus} A^{(\Lambda)}$ y $A^{(\Lambda)}$ es proyectivo, también K lo es. Así, por [6, Proposición 17.14], existiría un submódulo máximo L en K tal que $K = \text{Rad}(K) \leq L \leq K$, es decir, $L = K$, lo cual es una contradicción.

En consecuencia, $K = \{0\}$. Por lo tanto, $A^{(\Lambda)}$ es inyectivo para todo conjunto de índices Λ . $\square$

Finalmente, presentamos el teorema que caracteriza a los H -anillos a partir de los conceptos desarrollados en este capítulo. Este resultado es fundamental para establecer la relación entre los H -anillos y los QF -anillos, y resulta decisivo en el desarrollo de la última sección de este trabajo.

Teorema 4.16. *Para un anillo R , los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. R es un H -anillo derecho.
2. R es perfecto derecho y todo R -módulo derecho satisface (S^*) .
3. Para todo R -módulo derecho inyectivo E , se cumple que $\text{Rad}(E) \ll E$ y todo R -módulo derecho satisface (S^*) .

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que R es un H -anillo derecho. Por el Teorema 4.11, R es artiniiano derecho y, en consecuencia, perfecto. Además, el mismo teorema garantiza que todo R -módulo derecho se descompone como suma directa de un R -módulo inyectivo y uno superfluo. Finalmente, como todo módulo superfluo es cosingular por el Teorema 4.13, se sigue que todo R -módulo derecho satisface (S^*) .

2) $\Rightarrow$ 3) Sea R un anillo perfecto derecho y E un R -módulo derecho inyectivo. Entonces E es semiperfecto y, por [9, Teorema 11.1.7 (c)], se cumple que $\text{Rad}(E) \ll E$.

3) $\Rightarrow$ 1) Sea E un R -módulo derecho inyectivo. Por el Lema 2.6 1), $\text{Rad}(E) = Z^*(E)$. Por hipótesis, $Z^*(E) \ll E$. Dado que E satisface (S^*) , se deduce del Lema 3.6 que E es un $(D1)$ -módulo. Por lo tanto, R es un H -anillo derecho. $\square$

5 QF-Anillos

Como el título sugiere, iniciamos esta sección presentando la definición de un QF -anillo, abreviatura de su denominación en inglés *quasi-Frobenius*. El concepto de cuasi-Frobenius caracteriza aquellos anillos que vinculan de manera particular las nociones de inyectividad y proyectividad de sus módulos.

El análisis que sigue se centra en establecer las equivalencias entre diversas condiciones que definen a un QF -anillo. Más concretamente, se mostrará que un anillo R es un QF -anillo si y solo si es auto-inyectivo derecho y todo R -módulo derecho satisface la propiedad (S^*) . Asimismo, esta caracterización puede reformularse en términos de la igualdad $Z^*(R_R) = J(R)$ junto con la hipótesis de que R sea un H -anillo derecho.

Definición 5.1. *Un anillo R se denomina cuasi-Frobenius (QF -anillo) si es artiniano por la derecha (o izquierda) y es auto-inyectivo por la derecha o izquierda.*

Tal como se señaló al inicio del capítulo, el estudio de los QF -anillos ha sido amplio, proporcionando diversas caracterizaciones que abarcan distintos enfoques. A continuación, presentamos algunas de las caracterizaciones más conocidas y útiles, que resultan fundamentales para el desarrollo de esta sección. Las equivalencias de los siguientes teoremas pueden consultarse en [14, Teoremas 1.50 y 6.39], [9, Teorema 13.6.1] y [4, Teorema 18.1].

Teorema 5.2. *Las siguientes proposiciones son equivalentes para un anillo R :*

1. R es un QF -anillo.
2. R es noetheriano izquierdo (o derecho) y auto-inyectivo derecho o izquierdo.
3. R es noetheriano derecho e izquierdo, y además $r_R l_R(I) = I$ para todo ideal derecho I de R , y $l_R r_R(H) = H$ para todo ideal izquierdo H de R .
4. R es perfecto izquierdo y auto-inyectivo derecho e izquierdo.
5. R_R es Σ -inyectivo.

Teorema 5.3 (Faith-Walker). *Sea R un anillo. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. R es un QF -anillo.
2. Todo R -módulo derecho inyectivo es proyectivo.
3. Todo R -módulo derecho proyectivo es inyectivo.

Proposición 5.4 ([5], Proposición 20.3 A). *Sea E un R -módulo derecho inyectivo. Entonces E es Σ -inyectivo si y solo si toda suma directa contable de copias de E es inyectiva.*

Lema 5.5. *Sea R un anillo tal que $Z^*(R_R) = J(R)$ y supongamos que el R -módulo derecho $E(R^{(\mathbb{N})})$ satisface (S^*) . Entonces R_R es Σ -inyectivo. En consecuencia, R es un QF -anillo.*

Demostración. Sea $F = R_R \oplus R_R \oplus \cdots$ el R -módulo libre derecho tal que es una suma directa de un número contablemente infinito de copias de R_R , es decir, $F = R_R^{(\mathbb{N})}$. Por hipótesis, $E(F)$ satisface (S^*) . Según la Proposición 4.12, se tiene que $F = X \oplus Y$, donde X es inyectivo y Y es cosingular.

Supongamos que $Y \neq \{0\}$. Como $Z^*(R_R) = J(R)$, se cumple

$$\begin{aligned}
 Y &= Z^*(Y) \\
 &\leq Z^*(F) \\
 &= Z^*(R_R \oplus R_R \oplus \cdots) \\
 &= Z^*(R_R) \oplus Z^*(R_R) \oplus \cdots \quad (\text{por el Lema 2.6 5))} \\
 &= J(R) \oplus J(R) \oplus \cdots \\
 &= J(R_R \oplus R_R \oplus \cdots) \\
 &= \text{Rad}(F).
 \end{aligned}$$

Como $\text{Rad}(Y) = Y \cap \text{Rad}(F) = Y$. Además, Y es proyectivo, entonces por [9, Teorema 9.2.1], $\text{Rad}(Y) = YJ(R)$, esto implica que $Y = YJ(R)$. Dado que $\frac{F}{X} \cong Y$, $\frac{F}{X}$ es proyectivo, así

$$\text{Rad}\left(\frac{F}{X}\right) = \frac{F}{X}J(R) = \frac{F}{X}.$$

Sin embargo, por [6, Proposición 17.14], se cumple que $\text{Rad}(\frac{F}{X}) \leq \frac{F}{X}$, lo que nos conduce a una contradicción.

En consecuencia, $\frac{F}{X} \cong Y = \{0\}$, y así F es inyectivo.

Por último, según la Proposición 5.4, R_R es Σ -inyectivo. Por el inciso 5) del Teorema 5.2, se concluye que R es un QF -anillo. $\square$

Finalmente, presentamos el teorema que concluye este trabajo. Dicho resultado proporciona una caracterización adicional de los QF -anillos, formulada a partir de los conceptos desarrollados y analizados a lo largo de las secciones precedentes.

Teorema 5.6. *Para un anillo R , los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. R es un QF -anillo.
2. R es auto-inyectivo derecho y todo R -módulo derecho satisface (S^*) .
3. R es auto-inyectivo derecho y $E(R^{(\mathbb{N})})$ satisface (S^*) .
4. Se cumple que $Z^*(R_R) = J(R)$ y, además, alguna de las siguientes condiciones:
 - a) todo R -módulo derecho satisface (S^*) , o
 - b) $E(R^{(\mathbb{N})})$ satisface (S^*) , o
 - c) R es un H -anillo derecho.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Sea R un QF -anillo. Por definición, R es auto-inyectivo derecho. Para concluir que todo R -módulo derecho satisface (S^*) , basta demostrar que R es un H -anillo, según el Teorema 4.16. En efecto, si E es un R -módulo derecho inyectivo, por hipótesis también es proyectivo. Sea $A \leq E$. Como R es artiniiano derecho, es perfecto derecho, de modo que $\frac{E}{A}$ tiene cubierta proyectiva. Por [9, Corolario 11.1.2], existe una descomposición $E = E_1 \oplus E_2$ con $E_1 \leq A$ y $E_2 \cap A \ll E_2$. Como $E_2 \leq E$, por el Lema 2.2 se tiene $E_2 \cap A \ll E$. Por lo tanto, E es un $(D1)$ -módulo y se concluye que R es un H -anillo derecho.

2) $\Rightarrow$ 3) La implicación es inmediata.

3) $\Rightarrow$ 1) Es consecuencia del Lema 5.5.

1) $\Rightarrow$ 4)(c) Supongamos que R es un QF -anillo. Por el Lema 2.8,

$$Z^*(R_R) = \{x \in R \mid xr_R(J(R)) = \{0\}\} = l_R(r_R(J(R))) = J(R),$$

donde la última igualdad se sigue del inciso 3) del Teorema 5.2. Además, en el paso 1) $\Rightarrow$ 2) hemos visto que todo QF -anillo es también un H -anillo.

- 4)(c) $\Rightarrow$ 1) Por el Teorema 4.11, R es artiniiano derecho y, para un R -módulo proyectivo P , existen un R -módulo inyectivo E y un módulo superfluo S tales que $P = E \oplus S$. Por el Lema 2.10, S es cosingular, entonces por el Lema 2.8,

$$S = Z^*(S) = \text{Sr}_R(J(R)) = \{0\}.$$

Así, $P = E$ es inyectivo. Finalmente, por el Teorema 5.3, R es un QF -anillo.

Para finalizar, nótese que las implicaciones $1) \Rightarrow 4)(a) \Rightarrow 4)(b) \Rightarrow 1)$ se obtienen encadenando los resultados $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3)$ y el Lema 5.5, respectivamente. $\square$

Agradecimientos

Agradecemos a los árbitros por sus valiosas observaciones y sugerencias, que contribuyeron a mejorar la presentación de este capítulo, así como por el tiempo dedicado a su revisión.

Referencias

- [1] P. E. Bland, *Rings and their modules*, Walter de Gruyter, 2011.
- [2] A. Çiğdem Özcan, *Modules with small cyclic submodules in their injective hulls*, Communications in Algebra, **30** (2002), no. 4, 1575–1589, Taylor & Francis.
- [3] A. Cordero Medel, *Módulos con Submódulos Superfluos Cíclicos en su Cápsula Inyectiva*, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2024. Disponible en: <https://hdl.handle.net/20.500.12371/21799>
- [4] N. V. Dung, D. Van Huynh, P. F. Smith and R. Wisbauer, *Extending Modules*, CRC Press, 1994.
- [5] C. Faith, *Algebra II: Ring Theory, Vol. 2*, Springer Science & Business Media, **191**, 2012.
- [6] K. R. Fuller and F. W. Anderson, *Rings and categories of modules*, Springer-Verlag, 1992.
- [7] K. Goodearl, *Ring theory: Nonsingular rings and modules*, CRC Press, **33**, 1976.
- [8] M. Harada, *Non-small modules and non-cosmall modules*, in *Ring Theory, Proceedings of the 1978 Antwerp Conference*, Dekker, 1979, 669–690.
- [9] F. Kasch, *Modules and rings*, Academic Press, **17**, 1982.

- [10] T. Y. Lam, *A first course in noncommutative rings*, Springer, **131**, 1991.
- [11] T. Y. Lam, *Lectures on modules and rings*, Springer Science & Business Media, **189**, 2012.
- [12] W. T. H. Loggie, *Some Special Classes of Modules*, University of Glasgow (United Kingdom), 1997.
- [13] S. H. Mohamed and B. J. Müller, *Continuous and discrete modules*, Cambridge University Press, **147**, 1990.
- [14] W. K. Nicholson and M. F. Yousif, *Quasi-Frobenius rings*, Cambridge University Press, **158**, 2003.
- [15] K. Oshiro, *Lifting modules, extending modules and their applications to QF-rings*, Hokkaido Math. J., **13**(3) (1984), 310–338.
- [16] M. Rayar, *On small and cosmall modules*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica, **39** (1982), 389–392.
- [17] R. Warfield, *Decompositions of injective modules*, Pacific Journal of Mathematics, **31**(1) (1969), 263–276, Mathematical Sciences Publishers.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

cm224470497@alm.buap.mx
cesar.cejudo@correo.buap.mx
dvilla@fcfm.buap.mx

Análisis

Capítulo 2

Un acercamiento a la derivada de Peano

Francisco Javier Mendoza Torres, Gerardo Alfonso
Sánchez Márquez
FCFM, BUAP

Resumen

En este capítulo hacemos una introducción a la derivada de Peano, la cual es una generalización de la derivada clásica basada en expansiones polinomiales. Mostramos que algunas propiedades de la derivada clásica se trasladan al contexto de la n -ésima derivada de Peano. Demostramos la continuidad de las derivadas de Peano previas a la n -ésima, que resulta esencial para simplificar las demostraciones de algunos resultados importantes.

1 Introducción

En 1891, Giuseppe Peano introdujo su concepto de derivada al observar que ciertas funciones poseen un desarrollo polinómico local, similar al desarrollo de Taylor, sin ser diferenciables en el sentido usual [6].

Posteriormente, en 1912, Denjoy empleó una idea similar a la derivada de Peano [3] para construir su integral. Él observó que la derivada de la función

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right), & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

existía en todo punto de $[0, 1]$ pero no era integrable según Lebesgue, llevando a que no se pudiera recuperar la función original por los métodos de integración conocidos hasta ese momento [5]. Alrededor de 1960, con motivos similares a los de Denjoy, se desarrollaron integrales en contextos diferentes pero más simples, dando origen a las integrales de Henstock y Kurzweil, las cuales resultaron ser equivalentes entre sí y capaces de integrar una clase más amplia de funciones que la clase de funciones Lebesgue integrables.

Así como Peano y Denjoy definieron extensiones del concepto de la derivada clásica, la derivada de Peano ha experimentado un proceso similar. Gracias a distintos matemáticos,

la derivada de Peano se ha generalizado hasta desembocar en, por ejemplo, la derivada de Laplace; una derivada generalizada que, visualmente, recuerda mucho a la Transformada de Laplace y que está asociada a una integral más general que incluso a la de Henstock-Kurzweil [10].

La intención del presente trabajo es mostrar que algunas propiedades fundamentales para el desarrollo del análisis matemático se pueden trasladar al contexto de las derivadas generalizadas, en particular al de la derivada de Peano. Lo mencionado anteriormente cobra relevancia en el estudio de las derivadas generalizadas, y estas también son de interés, puesto que son la base de las teorías que surgieron con la generalización del concepto de integral.

2 Motivación

Con la intención de motivar nuestra exposición, veamos lo siguiente.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que esta función tiene n -ésima derivada en el punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Por Taylor, sabemos que

$$f(x_0 + h) = \sum_{i=0}^n \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(x_0) + h^n \epsilon_n(x_0 + h), \quad (1)$$

donde $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_n(x_0 + h) = 0$. Denotando

$$P_n(h) := \sum_{i=0}^n \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(x_0),$$

la ecuación (1) queda de la siguiente forma

$$f(x_0 + h) = P_n(h) + h^n \epsilon_n(x_0 + h). \quad (2)$$

Consideremos la función $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma

$$\beta(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Se observa que β no tiene segunda derivada en el punto $x_0 = 0$, por lo que se podría pensar que no es posible obtener un polinomio de segundo grado similar a la expresión (2). Pese a que no es posible aplicar el Teorema de Taylor bajo estas condiciones, escribamos la función como un polinomio de segundo grado junto a un error

$$\beta(x_0 + h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 \frac{h^2}{2!} + \frac{h^2}{2!} \epsilon_1(x, h).$$

Luego, sustituyamos los valores de la función y su primera derivada en el punto x_0 , es decir, sustituyendo los valores $\alpha_0 = \beta(0) = 0$, $\alpha_1 = \beta'(0) = 0$, se tiene que

$$\beta(0+h) = 0 + 0 \cdot h + \alpha_2 \frac{h^2}{2!} + \frac{h^2}{2!} \epsilon_1(x, h).$$

Se desea obtener un valor para α_2 . De tal forma que este valor tenga un comportamiento similar a una derivada de segundo orden. Entonces se tendría que

$$\alpha_2 + \epsilon_1(x, h) = \frac{\beta(h)}{\frac{h^2}{2!}}.$$

Lo cual nos lleva a que

$$\alpha_2 + \epsilon_1(x, h) = 2h \operatorname{sen} \left(\frac{1}{h} \right).$$

Tomando el límite cuando el incremento h se hace muy pequeño se tiene que, en el lado izquierdo de la igualdad el error se vuelve despreciable, en el lado derecho, la expresión desaparece. Dando como resultado que $\alpha_2 = 0$. El valor de α_2 , al que se le identificaría como una derivada de segundo orden, será nulo.

Así, notamos que es posible escribir la función β en el punto $x_0 = 0$ como el siguiente polinomio

$$\beta(h) = 0 + 0 \cdot h + 0 \cdot \frac{h^2}{2!} + \frac{h^2}{2!} \epsilon_1(x, h) = \frac{h^2}{2!} \epsilon_1(x, h)$$

sin haber recurrido al Teorema de Taylor. Este fenómeno llevó a Peano a definir su extensión del concepto de derivada. Formalmente, esta definición es la siguiente.

Definición 2.1 (Derivada de Peano). *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f tiene n -ésima derivada de Peano en $x \in [a, b]$ si existe una función $\varepsilon(x, h)$ tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(x, h) = 0$, y si existen números reales $f^{[1]}(x), f^{[2]}(x), \dots, f^{[n]}(x)$ tales que*

$$f(x+h) = f(x) + hf^{[1]}(x) + \frac{h^2}{2!} f^{[2]}(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} \{f^{[n]}(x) + \varepsilon(x, h)\}.$$

Observación 2.2. *Nótese que los números $f^{[i]}(x)$, para $i = 1, 2, \dots, n$, los identificamos con derivadas generalizadas. Pero se puede dar el caso, y es necesario para ser una generalización, que las derivadas usual y de Peano coincidan hasta cierto número de derivadas.*

De manera equivalente reescribimos la definición de Peano de la siguiente manera.

Definición 2.3. *Una función f es n -derivable en el sentido de Peano en el punto x si existe una función $\varepsilon(x, h)$ tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(x, h) = 0$, y si existe un polinomio de la variable h , centrado en x y grado n , $P_n(h; x)$, tal que*

$$f(x+h) - P_n(h; x) = \frac{h^n}{n!} \varepsilon(x, h).$$

Un ejemplo más drástico que el presentado inicialmente como motivación para la derivada de Peano, pero igualmente ilustrativo para enfatizar que es una derivada más general que la derivada clásica, es el siguiente, considerado en [4]:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ x^4, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Esta función, una variante del ejemplo de Dirichlet, es discontinua en todo punto salvo en $x = 0$, donde es continua. De hecho, la derivada, $f'(x)$, solo existe en el origen y su valor es cero, y no admite derivadas clásicas de mayor orden. No obstante, en el sentido de Peano, la función admite derivadas generalizadas de primer, segundo y tercer orden en dicho punto, todas ellas nulas como veremos a continuación.

La primer derivada derivada de Peano coincide con la derivada, así que solo se calculan la segunda y la tercera. La segunda derivada de Peano de la función en $x = 0$ es:

$$\begin{aligned} f^{[2]}(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0) - hf^{[1]}(0)}{h^2/2!} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 0 - h \cdot 0}{h^2/2!} \\ &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h^2}. \end{aligned}$$

Si nos aproximamos a cero por los racionales tenemos que la función vale cero, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^2} = 0.$$

Por otro lado, si nos acercamos a cero por los irracionales, tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^4}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 0.$$

Así que, $f^{[2]}(0) = 0$. La tercer derivada de Peano en $x = 0$ es

$$\begin{aligned} f^{[3]}(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0) - hf^{[1]}(0) - h^2/2!f^{[2]}(0)}{h^3/3!} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 0 - h \cdot 0 - h^2/2! \cdot 0}{h^3/3!} \\ &= 3! \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h^3}. \end{aligned}$$

Por un argumento similar al de la segunda derivada, al acercarnos a cero por los racionales, se sigue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0.$$

Si nos aproximamos a cero por los irracionales, se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^4}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0.$$

Así que, $f^{[3]}(0) = 0$.

3 Propiedades de la derivada n –ésima de Peano

En los procesos de generalización, es deseable mantener propiedades fundamentales del concepto a generalizar. En este caso, veremos que la derivada n –ésima de Peano sigue satisfaciendo propiedades como la continuidad de la función precedente, el Teorema de Rolle, el Teorema del Valor Medio, la propiedad de Darboux, etc [8], [2]. Dichas propiedades son fundamentales en el Análisis Matemático porque nos proporcionan información sobre el comportamiento analítico y geométrico de las funciones.

Recordemos que la propiedad de Darboux es, para funciones continuas, el conocido Teorema del Valor Intermedio. Se nombra a esta propiedad de Darboux ya que él fue el primero en demostrar que las funciones derivadas, en el sentido usual, sobre intervalos cerrados, cumplen con el Teorema del Valor Intermedio sin ser necesariamente continuas [9], [7].

Una propiedad empleada de forma usual en los cursos básicos de Análisis pero no nombrada como tal es el de función de Baire. Este concepto lo definimos a continuación.

Definición 3.1. *Se dice que una función es una función de Baire del tipo f_0 si es una función continua, una función es de Baire del tipo f_1 si es el límite de una sucesión de funciones continuas (f_0), una función es de Baire del tipo f_2 si es el límite de una sucesión de funciones del tipo f_1 , y así sucesivamente [1].*

A continuación exponemos las propiedades mencionadas anteriormente para la derivada n –ésima de Peano.

Continuidad

Es bien sabido que si una función tiene derivada clásica en un punto, entonces es continua en ese punto. Esta propiedad la generaliza la n –ésima derivada de Peano, como veremos a continuación.

Observación 3.2. *Para el caso de la primera derivada de Peano: $f(x+h) = f(x) + h[f^{[1]}(x) + \varepsilon(x,h)]$, se infiere que $f^{[1]}(x) = f'(x)$.*

Teorema 3.3. *Si $f^{[n]}$ existe en $[a,b]$, entonces $f^{[k]}$ es continua en $[a,b]$ para todo $k = 0, 1, \dots, n-1$.*

Demostración. Se demuestra por inducción.

Veamos primero el caso $k = 0$, es decir, probemos que $f = f^{[0]}$ es continua en $x_0 \in [a, b]$; en caso de que x_0 coincida con a o b nos acercamos por la derecha o la izquierda, respectivamente. Como la función f tiene n -ésima derivada de Peano en el punto x_0 , tiene las derivadas de Peano anteriores a la n -ésima, esto por definición de derivada de Peano. Luego, f tiene la primera derivada de Peano en x_0 , que sabemos coincide con la primera derivada clásica en x_0 . Como la diferenciabilidad en un punto implica continuidad en dicho punto, se tendrá que f es continua en x_0 .

Veamos que $f^{[1]}$ es continua en x_0 . Sean $x_0, x_0 + t \in [a, b]$. Por definición, la segunda derivada de Peano de f evaluada en x_0 y en $x_0 + t$ satisfacen, respectivamente,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf^{[1]}(x_0) + \frac{h^2}{2!} \left(f^{[2]}(x_0) + \varepsilon_0(x_0, h) \right), \quad (3)$$

$$f(x_0 + t + h) - f(x_0 + t) = hf^{[1]}(x_0 + t) + \frac{h^2}{2!} \left(f^{[2]}(x_0 + t) + \varepsilon_1(x_0 + t, h) \right), \quad (4)$$

donde $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_0(x_0, h) = 0$ y $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(x_0 + t, h) = 0$.

Como f es continua en x_0 y en $x_0 + h$, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0} (f(x_0 + t + h) - f(x_0 + t)) = f(x_0 + h) - f(x_0).$$

Luego, tomando el límite cuando t tiende a cero en (4) y por (3), se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ hf^{[1]}(x_0 + t) + \frac{h^2}{2!} \left(f^{[2]}(x_0 + t) + \varepsilon_1(x_0 + t, h) \right) \right\} \\ = hf^{[1]}(x_0) + \frac{h^2}{2!} \left(f^{[2]}(x_0) + \varepsilon_0(x_0, h) \right). \end{aligned}$$

Esto es

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f^{[1]}(x_0 + t) + \frac{h}{2!} \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ f^{[2]}(x_0 + t) + \varepsilon_1(x_0 + t, h) \right\} \\ = f^{[1]}(x_0) + \frac{h}{2!} \left(f^{[2]}(x_0) + \varepsilon_0(x_0, h) \right). \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando h tiende a cero, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} f^{[1]}(x_0 + t) + \frac{h}{2!} \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ f^{[2]}(x_0 + t) + \varepsilon_1(x_0 + t, h) \right\} \right\} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ f^{[1]}(x_0) + \frac{h}{2!} \left(f^{[2]}(x_0) + \varepsilon_0(x_0, h) \right) \right\}, \end{aligned}$$

lo cual nos lleva a la siguiente igualdad

$$\lim_{t \rightarrow 0} f^{[1]}(x_0 + t) = f^{[1]}(x_0).$$

Concluyendo que $f^{[1]}$ es continua en x_0 .

Ahora, supóngase que $f^{[k]}$ es continua en x_0 para $k = 0, 1, \dots, n-2$. Veamos que $f^{[n-1]}$ es continua en x_0 . Sean $x_0, x_0 + t \in [a, b]$. Por definición, las n -ésimas derivadas de Peano de f en x_0 y en $x_0 + t$ satisfacen las siguientes expresiones, respectivamente,

$$f(x_0 + h) - P_{n-2}(h; x_0) = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{[n-1]}(x_0) + \frac{h^n}{n!} \left(f^{[n]}(x_0) + \varepsilon_0(x_0, h) \right) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f(x_0 + t + h) - P_{n-2}(h; x_0 + t) &= \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{[n-1]}(x_0 + t) \\ &+ \frac{h^n}{n!} \left(f^{[n]}(x_0 + t) + \varepsilon_1(x_0 + t, h) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

donde $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_0(x_0, h) = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(x_0 + t, h) = 0$, $P_{n-2}(h; x_0) = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{h^j}{j!} f^{[j]}(x_0)$ y $P_{n-2}(h; x_0 + t) = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{h^j}{j!} f^{[j]}(x_0 + t)$.

Tomando en cuenta que para cada $k = 0, 1, \dots, n-2$, $f^{[k]}$ es continua en x_0 , se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \{f(x_0 + t + h) - P_{n-2}(h; x_0 + t)\} = f(x_0 + h) - P_{n-2}(h; x_0).$$

Tomando el límite cuando t tiende a cero en el lado derecho de (6), se obtiene que esta expresión es igual a la parte derecha de (5). Esto es

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{[n-1]}(x_0 + t) + \frac{h^n}{n!} \left(f^{[n]}(x_0 + t) + \varepsilon_1(x_0 + t, h) \right) \right\} \\ = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{[n-1]}(x_0) + \frac{h^n}{n!} \left(f^{[n]}(x_0) + \varepsilon_0(x_0, h) \right). \end{aligned}$$

Dividiendo por $h^{n-1}/(n-1)!$ en la igualdad anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ f^{[n-1]}(x_0 + t) \right\} + \frac{h}{n} \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \left(f^{[n]}(x_0 + t) + \varepsilon_1(x_0 + t, h) \right) \right\} \\ = f^{[n-1]}(x_0) + \frac{h}{n} \left(f^{[n]}(x_0) + \varepsilon_0(x_0, h) \right). \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando h tiende a cero

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ f^{[n-1]}(x_0 + t) \right\} + \frac{h}{n} \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \left(f^{[n]}(x_0 + t) + \varepsilon_1(x_0 + t, h) \right) \right\} \right\} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ f^{[n-1]}(x_0) + \frac{h}{n} \left(f^{[n]}(x_0) + \varepsilon_0(x_0, h) \right) \right\}, \end{aligned}$$

lo cual nos lleva a la continuidad de $f^{[n-1]}$ en x_0 .

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ f^{[n-1]}(x_0 + t) \right\} = f^{[n-1]}(x_0),$$

concluyendo con esto la prueba. □

Por el teorema anterior tenemos que si la derivada n -ésima de Peano existe en todo $x \in [a, b]$, tendremos que todas las derivadas de Peano de orden anterior son continuas en el intervalo $[a, b]$.

Clase de Baire

Para demostrar el teorema relacionado con la clase de Baire necesitamos el siguiente lema.

Lema 3.4. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \dots, n-1, \\ n!, & k = n. \end{cases}$$

Demostración. Sea

$$G(x) := (1 - e^x)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} e^{ix}.$$

Derivando k -veces y evaluando en $x = 0$, se obtiene:

$$G^{(k)}(0) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} i^k,$$

de modo que

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k = (-1)^n G^{(k)}(0).$$

Escribimos $G(x) = (-1)^n x^n \omega(x)$, donde

$$\omega(x) := \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^n,$$

la cual no presenta problemas de diferenciación en $x = 0$. Al aplicar la regla de Leibniz para derivadas:

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^n \cdot \omega(x)) = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \left(\frac{d^i}{dx^i} x^n \right) \left(\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} \omega(x) \right),$$

se observa que: para $k < n$, $G^{(k)}(0) = 0$, pues cada término contiene alguna potencia de x ; para $k = n$, el único término no nulo proviene de derivar x^n exactamente n veces, resultando:

$$G^{(n)}(0) = (-1)^n n!,$$

obteniendo la igualdad

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^n = n!.$$

□

Teorema 3.5 (Clase de Baire). *Si la n -ésima derivada de Peano, $f^{[n]}$, existe en todo punto de $[a, b]$, entonces $f^{[n]}$ pertenece a la primera clase de Baire.*

Demostración. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $h \neq 0$, sea

$$\Delta_h^n f(x) := \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(x + ih). \quad (7)$$

Nótese que la función anterior es continua. Demostremos que $\Delta_h^n f(x)/h^n \rightarrow f^{[n]}(x)$ cuando $h \rightarrow 0$.

Para cada i fijo, tenemos que

$$f(x + ih) = f(x) + ih f^{[1]}(x) + \frac{(ih)^2}{2!} f^{[2]}(x) + \cdots + \frac{(ih)^n}{n!} (f^{[n]}(x) + \varepsilon_i(x, h)),$$

donde $\varepsilon_i(x, h) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.

Sustituyendo esta expansión en $\Delta_h^n f(x)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta_h^n f(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} & \left[f(x) + ih f^{[1]}(x) + \frac{(ih)^2}{2!} f^{[2]}(x) \right. \\ & \left. + \cdots + \frac{(ih)^n}{n!} (f^{[n]}(x) + \varepsilon_i(x, h)) \right]. \end{aligned}$$

Al agrupar términos semejantes en potencias de h , aparecen sumas del tipo

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k.$$

Por el Lema 3.4 se tiene que

$$\Delta_h^n f(x) = h^n (f^{[n]}(x) + \varepsilon(x, h)),$$

donde $\varepsilon(x, h) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.

Por lo tanto,

$$\frac{\Delta_h^n f(x)}{h^n} \rightarrow f^{[n]}(x) \quad \text{cuando } h \rightarrow 0.$$

Es decir, la derivada de Peano de orden n se obtiene como el límite de cocientes de funciones continuas.

Obsérvese que, para cada h fijo, la función $\Delta_h^n f(x)/h^n$ es continua, pues se obtiene mediante combinaciones lineales y traslaciones de f . Por tanto, $f^{[n]}$ es el límite puntual de funciones continuas, y en consecuencia pertenece a la *primera clase de Baire*. $\square$

De los Teoremas 3.3 y 3.5 se obtiene el siguiente corolario, el cual muestra que si una función tiene n -ésima derivada de Peano en un intervalo, entonces cada derivada es función del tipo f_1 .

Corolario 3.6. Si f es n -veces derivable en el sentido de Peano en todo punto de $[a, b]$, entonces cada $f^{[j]}$ con $1 \leq j \leq n$ es función de la primera clase de Baire.

Demostración. La demostración es casi idéntica a la demostración del Teorema 3.5, pero sumando j términos en la expresión (7). De esta forma, para cualquier j , se sigue la conclusión. $\square$

Propiedad de Darboux

Para las derivadas de Peano se mantiene un teorema análogo al Teorema del Valor Intermedio, la propiedad de Darboux. En el contexto de las derivadas de Peano se le llama propiedad de Darboux puesto que, como ya se demostró en el Teorema 3.5, no hay garantía de que la n -ésima derivada de Peano sea una función continua. A continuación enunciamos el teorema y se da la demostración.

Teorema 3.7. Si $f^{[n]}$ existe en todo punto de $[a, b]$, y si para $h \neq 0$ existe un x' , entre x y $x + h$, ambos en $[a, b]$, que satisfice

$$\frac{f(x+h) - f(x) - hf^{[1]}(x) - \dots - \frac{h^{[n-2]}}{(n-2)!}f^{[n-2]}(x)}{h^{n-1}/(n-1)!} = f^{[n-1]}(x'), \quad (8)$$

entonces $f^{[n]}$ tiene la propiedad de Darboux en $[a, b]$.

Demostración. Sea $[a', b'] \subset [a, b]$. Supóngase que $f^{[n]}(b') < f^{[n]}(a')$. Tomemos $y \in (f^{[n]}(b'), f^{[n]}(a'))$.

Supongamos que $y = 0$. Luego, se tiene que $f^{[n]}(a') > 0$ y $0 > f^{[n]}(b')$. Como $f^{[n]}(a') > 0$, existe un $h > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{f(a'+h) - f(a') - hf^{[1]}(a') - \dots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{[n-1]}(a')}{h^n/n!} \\ &= \frac{\frac{f(a'+h) - f(a') - hf^{[1]}(a') - \dots - \frac{h^{n-2}}{(n-2)!}f^{[n-2]}(a')}{h^{n-1}/(n-1)!} - f^{[n-1]}(a')}{h/n}. \end{aligned} \quad (9)$$

Usando la hipótesis (8), con $x' \in (a', a' + h)$, en (9) se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{f^{[n-1]}(x') - f^{[n-1]}(a')}{h/n} \\ \implies f^{[n-1]}(a') &< f^{[n-1]}(x'). \end{aligned}$$

Por la suposición inicial

$$f^{[n-1]}(b') < f^{[n-1]}(a') < f^{[n-1]}(x'),$$

lo que implica que ni a' ni b' son puntos donde $f^{[n-1]}$ alcance el máximo.

Por el Teorema 3.3, $f^{[n-1]}$ es continua en $[a', b']$, se sigue que $f^{[n-1]}$ alcanza su máximo en algún $x_0 \in (a', b')$.

Como $f^{[n-1]}(x_0) > f^{[n-1]}(x)$ para cualquier $x \in (a', b')$, existe un $h > 0$ suficientemente pequeño y un $x'_0 \in (x_0, x_0 + h)$ que

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - hf^{[1]}(x_0) - \dots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{[n-1]}(x_0)}{h^n/n!} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-hf^{[1]}(x_0)-\dots-\frac{h^{n-2}}{(n-2)!}f^{[n-2]}(x_0)}{h^{n-1}/(n-1)!} - f^{[n-1]}(x_0)}{h/n} \\ &= \frac{f^{[n-1]}(x'_0) - f^{[n-1]}(x_0)}{h/n} < 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Por un argumento similar, ajustando h suficientemente pequeño, existe un $x''_0 \in (x_0 - h, x_0)$ que satisfacen

$$0 < \frac{f^{[n-1]}(x''_0) - f^{[n-1]}(x_0)}{-h/n}. \quad (12)$$

Dado que el cociente (11) es negativo y el cociente (12) es positivo, para un h suficientemente pequeño, y que no hay dependencia de x'_0 ni x''_0 en la expresión (10), y por lo tanto no habrá dependencia en la expresión correspondiente al cociente de (12), se tiene, por definición de la n -ésima derivada de Peano, que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - hf^{[1]}(x_0) - \dots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{[n-1]}(x_0)}{h^n/n!} = f^{[n]}(x_0).$$

Concluyendo así que $f^{[n]}(x_0) = 0$.

Por lo tanto, $f^{[n]}$ tiene la propiedad de Darboux en $[a', b']$. □

Los Teoremas de Rolle y del Valor Medio

A continuación demostramos la generalización del Teorema de Rolle para la n -ésima derivada de Peano. El objetivo es mostrar que el Teorema del Valor Medio, tanto para la derivada de primer orden como para derivadas de orden superior, se cumple también para las derivadas de Peano.

En [8] se propone que la derivada n -ésima de Peano $f^{[n]}$ satisface el Teorema del Valor Medio si existe un $x_{k,n} \in (x, x + h)$ tal que

$$\frac{f^{[k]}(x + h) - f^{[k]}(x) - \dots - \frac{h^{n-k-1}}{(n-k-1)!}f^{[n-1]}(x)}{h^{n-k}/(n-k)!} = f^{[n]}(x_{k,n}). \quad (13)$$

Obsérvese que el cociente de la izquierda juega un papel análogo a la pendiente de la recta secante en el Teorema del Valor Medio clásico.

Sabemos que en el caso del Teorema del Valor Medio para la derivada clásica, el Teorema de Rolle juega un papel básico en su prueba. Considerando esto, se verá que no podemos hacer una justificación de la igualdad (13) por medio del Teorema de Rolle clásico, lo cual nos obliga a ajustar dicho teorema a la teoría de la derivada n -ésima de Peano.

Intento mediante el método clásico

Para hacerlo más evidente consideremos el caso $k = 0$ y $n = 3$ en la expresión (13). Se define la función auxiliar

$$g(y) := f(y) - f^{[1]}(x)(y - x) - f^{[2]}(x)\frac{(y - x)^2}{2!} - C_3(h; x)\frac{(y - x)^3}{3!},$$

donde

$$C_3(h; x) = \left(\frac{f(x + h) - f(x) - hf^{[1]}(x) - (h^2/2!)f^{[2]}(x)}{(h^3/3!)} \right).$$

Nótese que $g(x + h) = g(x) = f(x)$. Además, por el Teorema 3.3, tanto f como sus derivadas de Peano son continuas. Por lo tanto, g es continua y derivable, y además cumple $g(x + h) = g(x)$, es decir, satisface las hipótesis del Teorema Rolle clásico, de ahí que exista un $x' \in (x, x + h)$ tal que

$$0 = g^{[1]}(x') = f^{[1]}(x') - f^{[1]}(x) - f^{[2]}(x)(x' - x) - C_3(h; x)\frac{(x' - x)^2}{2!}.$$

De aquí se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{f^{[1]}(x') - f^{[1]}(x)}{x' - x} - f^{[2]}(x) = C_3(h; x)\frac{(x' - x)}{2!}. \quad (14)$$

Supongamos que f satisface la siguiente expresión, con $x'' \in (x, x')$,

$$f^{[2]}(x'') = \frac{f^{[1]}(x') - f^{[1]}(x)}{x' - x}.$$

Sustituyendo la igualdad anterior en (14), se tiene que

$$\begin{aligned} f^{[2]}(x'') - f^{[2]}(x) &= C_3(h; x)\frac{(x' - x)}{2!} \\ \implies \frac{f^{[2]}(x'') - f^{[2]}(x)}{\frac{(x' - x)}{2!}} &= C_3(h; x) \\ \implies \frac{f^{[2]}(x'') - f^{[2]}(x)}{\frac{x'}{2!} - \frac{x}{2!}} &= C_3(h; x). \end{aligned}$$

Podemos aplicar el Teorema del Valor Medio de Cauchy. Para ello necesitamos una función h tal que $h(x) = x/2$ y $h(x'') = x'/2$. Es decir,

$$\frac{f^{[2]}(x'') - f^{[2]}(x)}{h(x'') - h(x)} = \frac{f^{[2]}(x'') - f^{[2]}(x)}{\frac{x'}{2!} - \frac{x}{2!}}.$$

La función que satisface dichas condiciones es

$$h(y) := \left(\frac{\frac{x'}{2!} - \frac{x}{2!}}{x'' - x} \right) (y - x) + \frac{x}{2!}.$$

Por el Teorema de Cauchy, existe $x_{0,3} \in (x, x'')$ tal que

$$\frac{f^{[2]}(x'') - f^{[2]}(x)}{h(x'') - h(x)} = \frac{f^{[3]}(x_{0,3})}{h^{[1]}(x_{0,3})} = \frac{f^{[3]}(x_{0,3})}{\left(\frac{\frac{x'}{2!} - \frac{x}{2!}}{x'' - x} \right)}.$$

Por lo tanto

$$f^{[3]}(x_{0,3}) = \left(\frac{\frac{x'}{2!} - \frac{x}{2!}}{x'' - x} \right) C_3(h; x).$$

Sin embargo, este resultado no coincide con la expectativa que se tenía con la expresión (13) con $k = 0$ y $n = 3$. Esto llevó a concluir que el Teorema de Rolle clásico no es suficiente en el contexto de derivadas de Peano.

Modificación del Teorema de Rolle

Se introducirá la notación $\mathcal{R}_n^k$ y $\mathcal{M}_n^k$ para referirnos a que una función satisface el Teorema de Rolle Generalizado y el Teorema del Valor Medio Generalizado (en el contexto de las derivadas de Peano), respectivamente.

A continuación se enuncia lo que se entiende por el Teorema del Valor Medio en el contexto de las derivadas de Peano.

Definición 3.8. Sea f una función que tiene n -ésima derivada de Peano en todo punto de $[a, b]$. Se dice que f satisface el Teorema del Valor Medio $\mathcal{M}_n^k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ (o que $f \in \mathcal{M}_n^k$), si, para cada $x, x+h \in [a, b]$, existe un $x_{k,n} \in (x, x+h)$ tal que

$$\frac{f^{[k]}(x+h) - f^{[k]}(x) - hf^{[k+1]}(x) - \dots - \frac{h^{n-k-1}}{(n-k-1)!} f^{[n-1]}(x)}{h^{n-k}/(n-k)!} = f^{[n]}(x_{k,n}).$$

Para la prueba de los Teoremas de Rolle y del Valor Medio generalizados se enunciará un lema auxiliar que será útil en su demostración.

Lema 3.9. Si $f^{[n]}$ existe y es positiva para todo $x \in [a, b]$, y si $f \in \mathcal{M}_{n-1}^0$, entonces $f^{[n-1]}$ es estrictamente creciente.

Demostración. Sean $[a'', b'']$ un subintervalo de $[a, b]$,

$$P_{n-1}(h; x_0) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{h^j}{j!} f^{[j]}(x_0),$$

y

$$C_{n-1}(h; x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - hf^{[1]}(x_0) - \dots - \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} f^{[n-2]}(x_0)}{h^{n-1}/(n-1)!}.$$

Por el Teorema 3.3, $f^{[n-1]}$ es continua en el subintervalo $[a'', b'']$. Consideremos un subintervalo $[a', b'] \subset [a'', b'']$. Entonces, $f^{[n-1]}$ también es continua en $[a', b']$, así que alcanza su máximo en algún $x_0 \in [a', b']$.

Vamos a demostrar que alcanza su máximo en b' . Supongamos que $x_0 \in [a', b')$. Por hipótesis, $f^{[n]} > 0$ en todo $[a, b]$, entonces existe un $h > 0$, $x_0 < x_0 + h < b'$ de forma que

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{f(x_0 + h) - P_{n-1}(h; x_0)}{h^n/n!} \\ &= \frac{C_{n-1}(h; x_0) - f^{[n-1]}(x_0)}{h/n}. \end{aligned} \quad (15)$$

Por la hipótesis $f \in \mathcal{M}_{n-1}^0$ ($f^{[n-1]}(x') = C_{n-1}(h; x_0)$, $x' \in (x_0, x_0 + h)$) y la expresión (15) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{h/n} [f^{[n-1]}(x') - f^{[n-1]}(x_0)] &> 0 \\ \implies f^{[n-1]}(x') &> f^{[n-1]}(x_0). \end{aligned}$$

Lo anterior contradice que $f^{[n-1]}$ alcance su máximo en x_0 . Así, se concluye que $f^{[n-1]}$ alcanza su máximo en $x_0 = b'$.

Para concluir. Tenemos que $f^{[n-1]}$ alcanza su máximo en el extremo derecho del subintervalo arbitrario $[a', b']$, entonces se sigue que alcanza su máximo en $x_0 = b''$, es decir, $f^{[n-1]}$ es creciente en $[a'', b'']$, y por lo tanto en $[a, b]$. $\square$

Teorema 3.10 (Teorema de Rolle Generalizado). *Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Supongamos que g tiene n -ésima derivada de Peano en todo punto de $[a, b]$, que para todo $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ se cumple que $g \in \mathcal{M}_n^k$ y se satisface que*

$$g^{[k]}(x+h) - g^{[k]}(x) - hg^{[k+1]}(x) - \dots - \frac{h^{n-k-1}}{(n-k-1)!} g^{[n-1]}(x) = 0,$$

entonces existe $x_{k,n} \in (x, x+h)$ tal que

$$g^{[n]}(x_{k,n}) = 0.$$

Demostración. Para $k = n - 1$, la hipótesis se reduce a $g^{[n-1]}(x + h) = g^{[n-1]}(x)$.

Supóngase $h > 0$. Si $g^{[n]}(x') > 0$ para todo $x' \in (x, x + h)$, y por la hipótesis $g \in \mathcal{M}_{n-1}^0$, se tiene que $g^{[n-1]}$ es estrictamente creciente en $(x, x + h)$, por el Lema 3.9.

Como $g^{[n-1]}$ es continua y creciente en $(x, x + h)$, también lo es en $[x, x + h]$. Lo que contradice la igualdad $g^{[n-1]}(x + h) = g^{[n-1]}(x)$. Por lo tanto, $g^{[n]}$ debe anularse en algún punto de $(x, x + h)$, o bien cambiar de signo. En caso de cambiar de signo, por el Teorema 3.7, $g^{[n]}$ es cero para algún elemento en $(x, x + h)$. Así se concluye que $\mathcal{R}_n^{n-1}$ se cumple.

Para probar ahora $\mathcal{R}_n^k$ para k entre 0 y $n - 2$, hacemos lo siguiente. Escribimos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{g^{[k]}(x + h) - g^{[k]}(x) - hg^{[k+1]}(x) - \dots - \frac{h^{n-k-1}}{(n-k-1)!}g^{[n-1]}(x)}{h^{n-k}/(n-k)!} \\ &= \frac{\frac{g^{[k]}(x + h) - g^{[k]}(x) - hg^{[k+1]}(x) - \dots - \frac{h^{n-k-2}}{(n-k-2)!}g^{[n-2]}(x)}{h^{n-k-1}/(n-k-1)!} - g^{[n-1]}(x)}{h/(n-k)}. \end{aligned}$$

Dado que $g \in \mathcal{M}_{n-1}^k$, existe $x'' \in (x, x + h)$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{g^{[n-1]}(x'') - g^{[n-1]}(x)}{h/(n-k)} \\ \implies g^{[n-1]}(x'') &= g^{[n-1]}(x). \end{aligned}$$

Como $g \in \mathcal{R}_n^{n-1}$, por lo que probamos anteriormente, entonces existe un punto $x' \in (x, x'')$ de manera que se tiene que $g^{[n]}(x') = 0$.

De este modo, el caso $\mathcal{R}_n^k$ queda verificado para cada $k = 0, 1, \dots, n - 1$. $\square$

Teorema 3.11 (Teorema del Valor Medio Generalizado). *Si $f^{[n]}$ existe en todo punto de $[a, b]$, entonces $f^{[n]}$ satisface los Teoremas del Valor Medio $\mathcal{M}_n^k$ para cada $k = 0, 1, \dots, n - 1$ en $[a, b]$.*

Demostración. La demostración se realiza por inducción.

1. Para $m = 1$ sólo se tiene el caso $k = 0$, que reproduce los Teoremas clásicos de Rolle y del Valor Medio.
2. Supongamos que para $m = n - 1$ se satisfacen los teoremas $\mathcal{R}_{n-1}^k$ y $\mathcal{M}_{n-1}^k$ para todo $k = 0, 1, \dots, n - 2$.
3. Probemos el caso $m = n$. Sea

$$g(y) = f(y) - C_{n-k}(h; x) \frac{(y - x)^n}{n!},$$

donde

$$C_{n-k}(h; x) = \frac{f^{[k]}(x + h) - f^{[k]}(x) - hf^{[k+1]}(x) - \dots - \frac{h^{n-k-1}}{(n-k-1)!}f^{[n-1]}(x)}{h^{n-k}/(n-k)!}.$$

Nótese que

$$\begin{aligned}
& g^{[k]}(x+h) - g^{[k]}(x) - hg^{[k+1]}(x) - \dots - \frac{h^{n-k-1}}{(n-k-1)!}g^{[n-1]}(x) \\
&= \left[f^{[k]}(x+h) - C_{n-k}(h; x) \frac{h^{n-k}}{(n-k)!} \right] - h \left[f^{[k+1]}(x) - C_{n-k}(h; x) \cdot 0 \right] \\
&- \dots - \frac{h^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \left[f^{[n-k-1]}(x) - C_{n-k}(h; x) \cdot 0 \right] \\
&= f^{[k]}(x+h) - hf^{[k+1]}(x) - \dots - \frac{h^{n-k-1}}{(n-k-1)!}f^{[n-k-1]}(x) \\
&- C_{n-k}(h; x) \frac{h^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= f^{[k]}(x+h) - f^{[k]}(x) - hf^{[k+1]}(x) - \dots - \frac{h^{n-k-1}}{(n-k-1)!}f^{[n-1]}(x) \\
&- \left[f^{[k]}(x+h) - f^{[k]}(x) - hf^{[k+1]}(x) - \dots - \frac{h^{n-k-1}}{(n-k-1)!}f^{[n-1]}(x) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple que

$$g^{[k]}(x+h) - g^{[k]}(x) - hg^{[k+1]}(x) - \dots - \frac{h^{n-k-1}}{(n-k-1)!}g^{[n-1]}(x) = 0,$$

es decir, se satisfacen las hipótesis de $\mathcal{R}_n^k$.

Aplicando el Teorema de Rolle Generalizado, existe un $x_{k,n}$ entre x y $x+h$ tal que

$$g^{[n]}(x_{k,n}) = 0 = f^{[n]}(x_{k,n}) - C_{n-k}(h; x).$$

Concluyendo de esta manera que existe $x_{k,n} \in (x, x+h)$ tal que

$$f^{[n]}(x_{k,n}) = \frac{f^{[k]}(x+h) - f^{[k]}(x) - hf^{[k+1]}(x) - \dots - \frac{h^{n-k-1}}{(n-k-1)!}f^{[n-1]}(x)}{h^{n-k}/(n-k)!}. \quad \square$$

4 Conclusiones

El Teorema 3.3 fue un resultado original de este trabajo y permitió formular y demostrar los Teoremas 3.7 y 3.10, así como el Lema 3.9 y el Corolario 3.6. Si bien varios de estos resultados fueron previamente planteados por Oliver en [8], nuestras formulaciones y demostraciones difieren de las suyas.

En particular, en el Teorema 3.7 fue posible emplear el Teorema de Weierstrass para funciones continuas en conjuntos compactos, gracias a la continuidad previamente establecida de las derivadas de Peano de orden inferior al n -ésimo, lo que permitió obtener el resultado de una manera más simplificada, logrando una prueba más directa. También, el Lema 3.9 fue demostrado sin recurrir explícitamente a la condición de la Propiedad de Darboux, de nuevo como consecuencia de la continuidad de las derivadas de Peano, y este mismo lema repercutió en las demostraciones de los Teoremas de Rolle y Valor Medio Generalizados.

Por otra parte, el Corolario 3.6 y el Lema 3.4 fueron formulados y demostrados de manera original, pues eran necesarios y no fueron encontrados en la literatura consultada.

Finalmente, es importante hacer notar el papel que jugó la propiedad del Valor Medio como hipótesis de algunos resultados importantes obtenidos, ya que se necesitaba de un cociente similar al de la derivada clásica.

Agradecimientos

Agradecemos a los editores por la oportunidad de colaborar en este libro. También agradecemos a los revisores por su trabajo que, sin duda, llevaron a la mejora de este capítulo.

Bibliografía

- [1] R. L. Bingham, *Borel Sets and Baire Functions*. Ph.D. thesis, The University of Montana, 1962.
- [2] E. Corominas, *Contribution à la théorie de la dérivation d'ordre supérieure*, Bull. Soc. Math. France **81** (1953), 177–222.
- [3] A. Denjoy, Sur l'intégration des coefficients différentiels d'ordre supérieur, *Fund. Math.* **25** (1935), no. 1, 273–326.
- [4] I. Ginchev, Angelo Guerraggio and Matteo Rocca, *Equivalence of $(n+1)$ -th order Peano and usual derivatives for n -convex functions*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 229 (1999), 25–43.
- [5] R. A. Gordon, *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*. American Mathematical Society, 1994.
- [6] J. Mawhin, *Some contributions of Peano to analysis in the light of the work of Belgian mathematicians*, en *Giuseppe Peano between Mathematics and Logic: Proceedings of the International Conference in honour of Giuseppe Peano on the 150th anniversary of his birth and the centennial of the Formulario Mathematico, Turin (Italy), October 2–3, 2008*, Springer, 2011, 13–28.

- [7] F. J. Mendoza Torres y M. G. Morales Macías, Consideraciones sobre continuidad y el teorema de Darboux, en *Memorias de las Grandes Semanas Nacionales de la Matemática*, D. Herrera Carrasco y F. Macías Romero (eds.), Dirección de Fomento Editorial, 2009, 116–120.
- [8] H. W. Oliver, *The exact Peano derivative*, Trans. Amer. Math. Soc. **76** (1954), no. 3, 444–456.
- [9] L. Olsen, *A New Proof of Darboux's Theorem*, Amer. Math. Monthly **111** (2004), no. 8.
- [10] S. Ray, *A Generalised Continuous Primitive Integral and Some of Its Applications*, Real Anal. Exchange **47** (2022), no. 2, 297–322.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

jmandoza@fcfm.buap.mx
sm224470500@alm.buap.mx

Física

Capítulo 3

Unified Model of Spin–Diffusion Dynamics (UMSDD): Smoluchowski–Volterra Framework for Geminate Charge Escape in Metal Photocatalysts employing Crank–Nicolson

Bolivia Cuevas Otahola¹, Ygnacio Martínez Laguna² and
María Monserrat Morín Castillo³
IA-UNAM¹, ICUAP-BUAP², FCE-BUAP³

Abstract

Quantum efficiency in photoredox catalysis is often limited by the cage escape yield (Φ_{CE}), which arises from the competition between the diffusive separation of geminate radical pairs and geminate charge recombination (GCR) inside the solvent cage. Closed-shell photosensitizers such as Ir(III) and Ru(II) can exhibit high Φ_{CE} due to spin selection (spin blockade), whereas open-shell Fe(III) systems typically display stronger solvent dependence and faster recombination, governed in part by dielectric permittivity and viscosity. Here we introduce the Unified Model of Spin-Diffusion Dynamics (UMSDD), a non-Markovian integro-differential framework that couples Smoluchowski transport under a potential of mean force with Volterra-type memory kernels and spin-resolved channel dynamics driven by spin–orbit coupling. Using a Crank–Nicolson finite-difference implementation, UMSDD reproduces reported Φ_{CE} trends for Fe(III), Ru(II), Os(II), and Ir(III) across solvents and enables systematic parameter exploration to support rational design of earth-abundant photocatalysts.

1 Introduction

Photoinduced electron transfer (PET) is a cornerstone of solar energy conversion and light-mediated synthesis. Yet, overall quantum efficiency is not determined solely by photoexcitation, but by the ultrafast dynamics that follow the formation of a geminate

radical pair inside the solvent cage [1]. A central quantity that controls this fate is the cage escape yield Φ_{CE} , which measures the fraction of geminate pairs that separate before geminate charge recombination (GCR). As emphasized in the systematic study of Ripak et al. [2, 3], Φ_{CE} is a mechanistic bottleneck where diffusion entropy and spin thermodynamics compete in a genuinely stochastic regime [4]. Despite major advances in Marcus theory and Brownian transport, predicting Φ_{CE} has remained a theoretical gray area, particularly when one seeks a unified description that simultaneously accounts for d^6 closed-shell and d^5 open-shell photosensitizers [5].

The cage effect originates from the classic idea that geminate products must traverse solvent “walls” to achieve separation, an early concept due to Franck and Rabinowitsch [4, 5] and supported by hallmark experiments on geminate recombination [6]. In modern photochemistry, however, the cage is not only a structural and dielectric confinement: recombination pathways are further filtered by quantum selection rules associated with spin. This explains why canonical systems (e.g., Ru(bpy)₃/viologen) often display intermediate Φ_{CE} values that depend on viscosity, polarity, driving force, and spin-state interconversion [7, 8, 9, 10, 11, 12]. The renewed interest in Φ_{CE} is driven by its demonstrated impact on catalytic efficiency and selectivity [13, 14, 15, 16, 17, 18], together with more reliable determination protocols via transient absorption spectroscopy and comparative actinometry [2, 19].

Motivated by these developments, this chapter introduces the Unified Model of Spin-Diffusion Dynamics (UMSDD) as a mathematically grounded framework that converts the physicochemical narrative of cage escape into a reproducible, predictive, and controllable model. The key aim is not only to replicate reported Φ_{CE} trends, but to enable parameter-driven *in silico* exploration of solvent and metal-center effects. The core contribution is developed in Sec. 2, which provides the foundations and full construction of UMSDD and constitutes the main theoretical engine of this chapter. There, we formulate a coupled transport–spin model in which diffusion under a potential of mean force is linked to spin-dependent recombination and non-Markovian solvent memory, yielding a unified description for both open-shell and closed-shell regimes.

UMSDD transcends classical first-order, memoryless diffusion models by adopting a non-Markovian description of ionic motion via Volterra integro differential equations of the second kind [21]. The corresponding memory kernel $\mathcal{K}$ captures persistent correlations in the liquid that modulate re-encounter statistics, consistent with the physical content of collision-mediated transport [22]. Spatial evolution is governed by a generalized Smoluchowski (Fokker–Planck) transport equation [23] under a potential of mean force W_{eff} that integrates solvent structure and thermal bath fluctuations [24], thereby grounding the experimentally observed dielectric sensitivity of *Fe(III)* systems [25]. Reactive and escape processes are encoded through radiative (Robin-type) boundary conditions, which provide a natural mathematical representation of imperfect reactivity at the cage interface.

Crucially, UMSDD incorporates spin selectivity through Hilbert-space projection operators [27], formalizing spin blockade as a structural constraint on recombination for closed-shell photosensitizers [26]. Spin–orbit coupling (SOC) enters as an effective perturbation that enables leakage between spin manifolds, offering a mechanistic route to rationalize heavy-atom effects such as the Osmium(II) anomaly [28] and the competition between diffusion

and recombination when the radical pair is born in a $^3\text{MLCT}$ triplet manifold [29] while the ground state is singlet S_0 [30]. For computation, UMSDD is discretized using a Crank-Nicolson scheme [31], applied to the Smoluchowski dynamics on logarithmic grids, which allows stable resolution across ultrafast recombination and slower diffusive escape regimes. This numerical realization supports direct comparison with transient absorption kinetics and solvent-dependent Φ_{CE} trends [19, 32] and enables systematic exploration of viscosity effects [33] and intrinsic electron-transfer parameters (e.g., k_{act}) [20]. Altogether, UMSDD establishes a coherent mathematical and computational foundation for turning cage escape from a descriptive concept into predictive excited-state reactivity engineering.

2 Foundations and Description of the UMSDD Model

This section provides the foundations and description of the Unified Model of Spin-Diffusion Dynamics (UMSDD), laying the groundwork for the construction of algorithms that guide the mathematical paradigms of UMSDD. We also present the necessary generalities to substantiate UMSDD and establish the premises that lead to the model, as well as the construction of algorithms to simulate quantum particle dynamics.

Generalities

Fundamental mathematical generalities connect the concepts of metric spaces and functional analysis [34, 35] with the physical principles required for the Crank-Nicolson numerical implementation [31] and the quantum mechanics of the model. Thus, to define the location and existence of geminate radicals and how to measure their distances within the solvent, we resort to the topology of metric spaces.

Definition 2.1. *A set X (also a vector space) that forms the pair (X, d) , whose elements we call points (in UMSDD terms, these will be radical pair configurations), is called a metric space if associated with each pair of points p and q in X is a real number $d(p, q)$ (i.e., $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$), called the metric from p to q , such that the following properties hold: $d(x, y) \geq 0$ and $d(x, y) = 0 \iff x = y$; $d(x, y) = d(y, x)$ (symmetry); and $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (triangle inequality). Therefore, X is a metric space [34, 35].*

In this case, the domain Ω outside the cage is modeled as a subset of a metric space $(\mathbb{R}^3, d)$, where the metric (distance) d determines the intensity of the Coulomb electrostatic potential $V(r)$. This allows establishing the notion of "closeness" necessary to discuss trajectory convergence and the stability of approximations. For example, a radial variable r is within an interval (a, R) with the usual metric $d(r, s) = |r - s|$. The states of UMSDD (densities per channel) belong to function spaces where the metric is induced by a norm.

Definition 2.2. *A set E is open if for every point $p \in E$ there exists a radius $r > 0$ such that the neighborhood $N_r(p) \subset E$. A set is closed if it contains all its limit points [34, 35].*

In this context, the "Cage" can be topologically defined as a closed set with a reaction boundary Γ_R , and cage escape implies that the radical trajectory evolves towards the open exterior of the compact interaction set.

Theorem 2.3. *Every complete normed linear metric space is a Banach space [35].*

To ensure that probability densities $P(r, t)$ converge (in the Cauchy sense [35]) to a stable solution, we work in complete L^p spaces, ensuring that the Cauchy sequences of our simulations converge within the space.

Definition 2.4. *The "solvent cage" is topologically defined as an open ball $B(r, \delta) = \{q \in X : d(r, q) < \delta\}$, where δ is the critical contact radius R_{cont} [1].*

The boundary of this ball, ∂B , is where Robin boundary conditions for escape are applied [35]. Subsequently, time evolution and the calculation of the yield Φ_{CE} require rigorous calculus tools. Thus:

Definition 2.5. *Let f be a mapping from a metric space X into a metric space Y . f is said to be uniformly continuous on X if for every $\epsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that $d_Y(f(p), f(q)) < \epsilon$ for all $p, q \in X$ with $d_X(p, q) < \delta$ [34].*

The effective potential $V_{eff}(\epsilon_{diel})$ must be a continuous function with respect to the dielectric constant to guarantee that small changes in solvent polarity do not cause abrupt and unphysical jumps in the simulation, except at critical phase transitions.

Definition 2.6. *The spin state of the radical pair $\{PS^{\bullet-}; Q^{\bullet+}\}$ resides in a complex vector space with an inner product, where each state is a unit vector ψ . Thus, a complex vector space H is called an inner product space if with each pair of vectors $x, y \in H$ there is associated a complex number $\langle x, y \rangle$ satisfying linearity, conjugate symmetry, and positive definiteness [34]; thereby defining a Hilbert space by the inner product [35].*

Quantum states such as a Singlet or Triplet are vectors in some Hilbert space; the transition probability (GCR) is calculated using the square of the inner product $|\langle \Psi_S | \hat{H}_{SOC} | \Psi_T \rangle|^2$. If the radical pair state is a pure Triplet (T) and the ground state is a Singlet (S), in the absence of spin-orbit coupling, $\langle S | T \rangle = 0$. This constitutes a rigorous mathematical basis for the "Spin Blockade" that explains the high efficiency of closed-shell complexes in UMSDD.

Definition 2.7. *For open-shell systems (such as $Fe(III)$ [7, 25]) and closed-shell systems (such as $Ir(III)$ [71]), the system is described by a self-adjoint and positive linear operator, such that $Tr(\hat{\rho}) = 1$, defining the density operator.*

The evolution of this operator under the spin Hamiltonian is the heart of the Spin Blockade in UMSDD. The difference in cage escape yields between Ruthenium (triplet) and Iron (doublet) [1, 25] is mathematically mapped as the projection of the system state onto orthogonal subspaces of $\mathcal{H}$ [34], satisfying widely known principles such as the Superposition Principle and Multiplicity.

Definition 2.8. Let α be a monotonically increasing function on $[a, b]$. If f is bounded on $[a, b]$, we define the upper and lower sums. If the infimum of the upper sums equals the supremum of the lower sums, we define the integral of f with respect to α as $\int_a^b f d\alpha$, which we call the Riemann-Stieltjes Integral [34].

Def. 2.8 is fundamental for the Volterra kernel because the system's "memory" is calculated by integrating the temporal evolution of the density $P(t)$ weighted by the recombination kernel, where the calculation of population observables is formally a Riemann-Stieltjes integral. With these results, we can define the following theorem as a generalization of metric spaces [35]:

Theorem 2.9. If X is a complete metric space and $T : X \rightarrow X$ is a contraction, then T has a unique fixed point (Contraction Mapping Theorem generalized in complete metric spaces) [35].

Proof. Let (X, d) be the complete metric space of continuous and bounded density functions defined in Def. 2.1 endowed with the supremum metric $d(f, g) = \sup_{t \in [0, T]} \|f(t) - g(t)\|_{L^2}$. We define the Volterra operator T associated with the UMSDD evolution equation as:

$$T(\mathbf{P})(t) = \mathbf{P}_0 - \int_0^t \mathcal{K}(t - \tau) \mathbf{P}(\tau) d\tau$$

Then, to prove that T is a contraction, we take two densities $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in X$ such that

$$d(T(\mathbf{P}), T(\mathbf{Q})) = \sup_t \left\| \int_0^t \mathcal{K}(t - \tau) (\mathbf{P}(\tau) - \mathbf{Q}(\tau)) d\tau \right\|;$$

and applying the triangle inequality and the boundedness of the memory kernel $\|\mathcal{K}\| \leq M$ (a physical assumption of finite solvent energy [21]), we have:

$$d(T(\mathbf{P}), T(\mathbf{Q})) \leq \sup_t \int_0^t M \|\mathbf{P}(\tau) - \mathbf{Q}(\tau)\| d\tau$$

$$d(T(\mathbf{P}), T(\mathbf{Q})) \leq M \cdot T_{max} \cdot d(\mathbf{P}, \mathbf{Q}).$$

For a short time interval such that $M \cdot T_{max} < 1$, the operator T is a strict contraction. By the Banach Fixed-Point Theorem [35], there exists a unique $\mathbf{P}^* \in X$ such that $T(\mathbf{P}^*) = \mathbf{P}^*$. For longer times, the argument is extended via analytical continuation, ensuring the global existence and uniqueness of the UMSDD solution. $\square$

Theo. 2.9 ensures that the integral equation arising from UMSDD has a unique solution, guaranteeing that the iterative scheme for solving the Volterra integro-differential equation [21] will converge to a unique solution for the population $N(t)$. Subsequently, Crank-Nicolson (CN) [31] is implemented as a second-order implicit time scheme (based on Taylor series [34, 35]) applied to linear diffusive equations, recognized for its stability in the standard sense of controlled norm growth, where a metric space induces a normed space [35].

Definition 2.10. We define $P(r, t)$ as a Lebesgue-measurable function [34]. The integral $\int_X P(r, t) d\mu = S(t)$ represents the survival probability of the radical pair at time t , thereby defining the Probability Distribution Function.

Theorem 2.11. For UMSDD to be valid, the sequence of probability functions under fluctuating forces must converge uniformly to the solution of the Smoluchowski equation [34].

Theo. 2.11 justifies that in viscous solvents [32], inertia is ignored compared to friction. Thus, the Marcus dynamics and Intrinsic Rate allow the constant k_{act} to be defined as the charge transfer limit at the metric space boundary, where the overlap of wavefunctions is maximal [12]. Considering the above and that we will simulate certain elements, numerical considerations are necessary, leading to the following:

Definition 2.12. Let Δr be the spatial step and Δt the temporal step. We define the nodes $r_j = a + j \Delta r$ with $j = 0, \dots, J$ and $t^n = n \Delta t$ with $n = 0, 1, 2, \dots$

This existence naturally fits within the framework of sequences and convergence in metric or normed spaces [35]. Unlike explicit methods, Crank-Nicolson (CN) is a second-order implicit scheme whose stability does not depend on the time step size Δt , allowing it to capture both ultrafast recombination and slow escape [31].

Definition 2.13. We approximate the temporal derivative through an average of the derivatives at times n and $n + 1$, satisfying $\frac{P_j^{n+1} - P_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}[\mathcal{L}P_j^{n+1} + \mathcal{L}P_j^n]$; where $\mathcal{L}$ is the Smoluchowski differential operator that defines the Finite Differences of UMSDD.

Def. 2.13 allows establishing the operator $\mathcal{L}$ as the Smoluchowski-Arriaga operator within the finite differences of UMSDD.

Definition 2.14. For a linear evolution $u_t = Au$ (where A is a spatial operator), the Crank-Nicolson (CN) scheme is written as $\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}A(u^{n+1} + u^n)$.

All the above supports the variational form of CN in Def. 2.13 and subsequently in a numerical form intended for computational algorithms in Def. 2.14. To formalize the efficiency, convergence, and stability of CN in numerical processes, we have:

Theorem 2.15. Given that the scheme is consistent and stable, by the Lax Equivalence Theorem, the numerical solution converges to the analytical solution of the integrated Volterra equation in UMSDD [34].

Proof. Let $\mathbf{P}(t)$ be the exact solution of the evolution equation $\partial_t \mathbf{P} = \mathcal{A}\mathbf{P}$ and $\mathbf{P}^n$ be the numerical solution at step n generated by the scheme $C(\Delta t)\mathbf{P}^{n+1} = B(\Delta t)\mathbf{P}^n$. We define the global error as $E^n = \mathbf{P}(t_n) - \mathbf{P}^n$, considering the Lax Equivalence Theorem [34, 40], which states that Consistency + Stability imply Convergence, where:

Consistency (interpreted in the UMSDD context as): The local truncation error τ^n of the Crank-Nicolson scheme is obtained by expanding in Taylor series around $t_{n+1/2}$, satisfying:

$$\frac{\mathbf{P}^{n+1} - \mathbf{P}^n}{\Delta t} - \frac{1}{2}\mathcal{A}(\mathbf{P}^{n+1} + \mathbf{P}^n) = \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta r^2);$$

since $\lim_{\Delta t, \Delta r \rightarrow 0} \tau^n = 0$, the scheme is consistent.

Stability (interpreted in the UMSDD context as): The scheme can be written as $\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{G}\mathbf{P}^n$, where the amplification matrix is $\mathbf{G} = (\mathbb{I} - \frac{\Delta t}{2}\mathcal{A}_h)^{-1}(\mathbb{I} + \frac{\Delta t}{2}\mathcal{A}_h)$. Given that the operator $\mathcal{A}_h$ (discrete Smoluchowski) is negative-definite, the eigenvalues λ_k of $\mathcal{A}_h$ are negative. Thus, the eigenvalues of $\mathbf{G}$ are:

$$\mu_k = \frac{1 + \frac{\Delta t}{2}\lambda_k}{1 - \frac{\Delta t}{2}\lambda_k},$$

and since $\lambda_k < 0$, then $|\mu_k| < 1$ for all k . Therefore, $\|\mathbf{G}\| \leq 1$, which implies unconditional stability in the L^2 norm [31]. Thus, by satisfying consistency and stability, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \|E^n\| = 0$, proving that the UMSDD simulation converges to the analytical solution. $\square$

UMSDD description

The formalization of the UMSDD model (Unified Model of Spin-Diffusion Dynamics) provides a rigorous bridge between the quantum mechanics of excited states and the statistical mechanics of electron transport processes in solution within mathematical modeling [36]. In photoinduced electron transfer (PET), the decisive event for overall quantum efficiency is not merely the creation of the excited state, but the ultrafast dynamics within the solvent cage: the cage escape yield Φ_{CE} quantifies the fraction of geminate pairs that separate before recombining. Although in modern photocatalysis Φ_{CE} has historically been treated as a phenomenological parameter adjusted by observation, this work proposes the yield as a deterministic result of a competitive dynamics governed by differential operators defined in Hilbert spaces and configuration space [36]; where transferring an electron does not necessarily imply generating free radicals.

In metallic complexes, geminate recombination kinetics are further filtered by quantum selection rules, creating the contrast between *closed-shell* systems (with high and relatively robust Φ_{CE}) and *open-shell* systems with low Φ_{CE} , sensitive to medium properties as a variable modulating charge separation yield and overall synthetic performance. Thus, UMSDD is modeled [36] and constructed to transform this narrative into a mathematical structure that is simultaneously interpretive (where each parameter corresponds to a physical mechanism) and verifiable (simulatable or reproducible), admitting stable and convergent discretization. It couples an overdamped Smoluchowski-Fokker–Planck approach under a potential of mean force W_{eff} (integrating solvent structure and reorganization), Robin-type radiative boundaries encoding an intrinsic reactivity connectable with Marcus-type rates k_{act} , internal channel dynamics (spin-multiplicity) controlled by SOC, and a non-Markovian extension with Volterra-type memory motivated by projections and transport kernels. This ensures that any prediction regarding *Fe*, *Ru*, *Ir*, or *Os* complexes is shielded by the rigor of functional analysis and operator theory, guaranteeing that results do not depend on ad-hoc adjustments but on a solid mathematical formulation.

The phenomenology of cage escape (Φ_{CE}), initially described by Franck and Rabinowitsch [6, 37], has historically remained a problem treated through semi-empirical kinetic approximations. However, recent findings by Ripak et al. [13] regarding the critical dependence on dielectric permittivity in Fe complexes and spin blockade in Ir constitute UMSDD as a bridge between the topology of metric spaces, functional analysis in Hilbert spaces, and dissipative quantum dynamics. It is imperative to first demonstrate that the evolving mathematical object (probability density) is well-defined within a suitable functional space. UMSDD does not assume the existence of the solution but guarantees it through rigorous functional analysis. In the modeling of continuous physical systems [36], the choice of functional space determines the admissibility of solutions. Thus, considering the theory of parabolic partial differential equations [36] by Glowinski [40] and real analysis [34], we postulate that the probability density $P(\mathbf{r}, t)$ resides in the space of square-integrable functions $L^2(\Omega)$. The use of the L^2 space grounds P as a physical probability measure with finite energy and norm, avoiding non-physical singularities that would invalidate the simulation. The guaranteed uniqueness ensures that UMSDD is a deterministic predictive model; for a given set of solvent parameters (ϵ, η) and electronic configuration, the model satisfies our objectives of being reproducible and simulatable, allowing for the replication of experimental kinetic decays and the making of predictions [1, 13].

Theorem 2.16. *Given a Dirac delta initial condition $P(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r} - R_{cont})$ centered at the contact radius, there exists a unique solution for the probability density $P(\mathbf{r}, t)$ that satisfies the UMSDD transport equation in the Hilbert space $L^2(\Omega)$:*

$$\frac{\partial P(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\mathbf{D} \cdot \left(\nabla P(\mathbf{r}, t) + \frac{P(\mathbf{r}, t)}{k_B T} \nabla W_{eff}(\mathbf{r}, \epsilon) \right) \right]. \quad (1)$$

Proof. Without loss of generality, we can assume $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is the bounded domain (the cage and its effective neighborhood) and consider the weak formulation of the problem. Then, multiplying Eq. 1 by a test function $v \in H^1(\Omega)$ and integrating by parts, we obtain the bilinear form $a(P, v)$:

$$\langle \partial_t P, v \rangle + a(P, v) = 0$$

where clearly

$$a(P, v) = \int_{\Omega} \mathbf{D} \cdot \left(\nabla P \cdot \nabla v + \frac{P}{k_B T} \nabla W_{eff} \cdot \nabla v \right) d\Omega.$$

Thus, to apply the Lax-Milgram Theorem (or Hille-Yosida semigroup theory), we must prove the coercivity of the bilinear form $a(\cdot, \cdot)$. Given that the potential W_{eff} is coercive ($W_{eff} \rightarrow \infty$ as $r \rightarrow 0$ and is bounded below), we define the Gibbs invariant measure $\mu(r) = \exp(-W_{eff}/k_B T)$; furthermore, if we perform the transformation $P(r, t) = \psi(r, t) \sqrt{\mu(r)}$, we can infer that the operator $\mathcal{L}_{SM}$ transforms into a self-adjoint operator $\tilde{\mathcal{L}}$ in the space $L^2(\Omega, \mu^{-1})$ satisfying

$$\langle -\tilde{\mathcal{L}}u, u \rangle \geq C \|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

Since the diffusion coefficient $\mathbf{D}(\eta)$ is positive-definite and bounded, there exists a constant $\alpha > 0$ such that the bilinear form is coercive:

$$a(P, P) \geq \alpha \|P\|_{H^1}^2 - \lambda \|P\|_{L^2}^2,$$

and by the Lions-Magenes Theorem for parabolic equations, given $P_0 \in L^2(\Omega)$, there exists a unique solution $P \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$. $\square$

Therefore, a Dirac delta initial condition $P(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r} - R_{cont})$ centered at the contact radius enables the conception of a unique solution for the probability density $P(\mathbf{r}, t)$ (Eq. 1) that satisfies the UMSDD transport equation in the Hilbert space $L^2(\Omega)$. This constitutes Theo. 2.16 in its base scalar form, upon which the vector generalization of the model will be built. Once the existence of the solution to Eq. 1 is guaranteed, we must define the forces directing the probability flow. The interaction between the photosensitizer and the quencher does not occur in an inert vacuum but in a dielectric medium that modulates the energetics; a dichotomy [13] between open-shell (Fe^{III}) and closed-shell complexes with a free energy functional incorporating shielding physics (the predictive power of UMSDD). Being open-shell and lacking spin blockade [8, 9], iron's escape depends critically on the slope of this potential. We will demonstrate that the solvent is not a passive spectator when reducing the dielectric constant ϵ because the Coulomb term generates a repulsive gradient that "deforms" the phase space metric, accelerating the outward flow and "saving" the radicals from immediate recombination [25].

Definition 2.17. *The potential W_{eff} is a functional describing the free energy of the radical pair as a function of the medium's dielectric permittivity ϵ and ionic strength:*

$$W_{eff}(r) = \frac{Z_A Z_B e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} e^{-\kappa r} + V_{rep}(r), \quad (2)$$

where the first term is the shielded Coulomb interaction (Debye–Hückel) and V_{rep} includes hard-sphere and Born solvation potentials [41].

The dynamical consequence of Def. 2.17 is the breaking of diffusive symmetry, as in the absence of a potential, diffusion is isotropic. The existence of W_{eff} introduces a vectorial escape field formalized in the "field-assisted" mechanism that UMSDD uses to simulate the increase of Φ_{CE} in non-polar solvents (low ϵ) [2].

Proposition 2.18. *The gradient ∇W_{eff} acts as a drift term within the Smoluchowski Arriaga Operator, breaking the isotropy of thermal diffusion and orienting the probability trajectory preferentially toward escape ($r \rightarrow \infty$) when the radical charges have the same sign ($Z_A Z_B > 0$), as described in:*

$$\mathbf{J}_{drift} = -\frac{P}{k_B T} \mathbf{D} \cdot \nabla W_{eff}(\epsilon). \quad (3)$$

Proof. Consider the total probability flux equation in UMSDD:

$$\mathbf{J}_{total} = -\mathbf{D}\nabla P - \frac{\mathbf{D}P}{k_B T} \nabla W_{eff};$$

in the absence of an external potential ($W_{eff} = const$), $\nabla W_{eff} = 0$, and we recover Fick's Law $\mathbf{J} = -\mathbf{D}\nabla P$, which is isotropic (the flux depends only on the radial concentration gradient). If we introduce the potential $W_{eff}(r)$ defined in Eq. 2, its gradient is:

$$\nabla W_{eff} = \left(-\frac{Z_A Z_B e^2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2} (1 + \kappa r) e^{-\kappa r} + \nabla V_{rep} \right) \hat{\mathbf{r}}.$$

If $Z_A Z_B > 0$ (i.e., like charges, thus physical repulsion), then $\nabla W_{eff} \cdot \hat{\mathbf{r}} < 0$ (for r outside the repulsive nuclear range). The drift term is $\mathbf{J}_{drift} \propto -P(\nabla W_{eff})$. Since ∇W_{eff} is a non-zero radial vector, the product induces a forced directed flux that adds to diffusion. This breaks the pure spherical symmetry of free Brownian motion, orienting the probability density toward $r \rightarrow \infty$ (escape), which proves the proposition. $\square$

The complexity of the electron transfer phenomenon, involving the coexistence of Singlet and Triplet spin states, necessitates abandoning the scalar description by generalizing the system state to a vector of densities. This allows for the coupling between spatial and quantum dynamics. Given that the reactive boundary Γ_R does not absorb all particles equally because its reactivity depends on the internal spin state (Singlet vs. Triplet) [3]. Therefore, we decompose the total probability density into "channels" or vector components, enabling the simultaneous treatment of spatially diffusing populations and quantum state transitions. This grounds the model's ability to simulate closed-shell systems such as $Ru(II)$ and $Ir(III)$ [42].

Definition 2.19. Let the spatial domain be $\Omega = (a, R)$ and the set of internal state indices be $\mathcal{I} = \{1, \dots, m\}$. We define the mesoscopic state vector by:

$$\mathbf{P}(r, t) = (P_1(r, t), \dots, P_m(r, t))^T, \quad P_i(r, t) \geq 0, \quad (4)$$

subject to the initial normalization condition in the space $L^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ satisfying

$$\sum_{i=1}^m \int_a^R P_i(r, 0) 4\pi r^2 dr = 1$$

.

The spatial evolution of each component of the vector $\mathbf{P}$ depends on Fokker-Planck processes [17, 18], for which we propose the Smoluchowski-Arriaga Operator governing the evolution of densities (where each channel possesses its own diffusive dynamics under the effective potential) under the drift of effective free energy from Def. 2.17.

Definition 2.20. Let $D_i(r) > 0$ be the diffusion coefficient (dependent on viscosity η [48]), $W_{eff_i}(r)$ the potential of channel i , and $\beta = (k_{BT})^{-1}$. We define the radial differential operator for channel i :

$$(L_{sm}^{(i)} f)(r) = \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 D_i(r) (\partial_r f + \beta f \partial_r W_{eff_i}) \right). \quad (5)$$

In the complete formulation of UMSDD, we define the Smoluchowski-Arriaga Operator as the diagonal matrix of operators $L_{sm} := \text{diag}(L_{sm}^{(1)}, \dots, L_{sm}^{(m)})$. The coupling between spatial channels occurs through internal transitions governed by Spin-Orbit Coupling (SOC). Thus, interconversion between states (e.g., $T \rightarrow S$) does not imply spatial movement but a spin rotation in Hilbert space. UMSDD models this phenomenon using a coarse-grained approach as a Markovian generator over the index set $\mathcal{I}$, controlled by the magnitude of the SOC Hamiltonian [38, 30, 39]. This allows for an explanation of the "Osmium Anomaly" [11], where high SOC increases mixing and facilitates recombination.

Definition 2.21. Let $K_{mat}(r) = [k_{ij}(r)]$ be the transition rate matrix, with off-diagonal elements $k_{ij}(r) \geq 0$ for $i \neq j$ (transition rates) and diagonal elements ensuring local probability conservation given by $k_{ii}(r) = -\sum_{j \neq i} k_{ji}(r)$.

It is fundamental for UMSDD to ensure that spin mixing alone does not destroy matter because mixing redistributes probability between channels without creating or destroying mass; population losses (recombination) occur strictly through the boundary conditions at the reactive frontier.

Proposition 2.22. Let $\mathbf{I} = (1, \dots, 1)^\top$ be the unit vector. Then, due to the stochastic structure of the transition matrix, $\mathbf{I}^\top K_{mat}(r) = \mathbf{0}^\top$ holds, and therefore, the internal mass divergence is zero, satisfying $\sum_i (k_{mat} \mathbf{P})_i = 0$.

Proof. Let $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^m$ be the population vector in the m internal channels. Evolution due purely to internal mixing is $\partial_t \mathbf{P} = \mathbf{K}_{mat} \mathbf{P}$, thus the rate of change of the total local population is $\partial_t (\sum_i P_i) = \mathbf{1}^\top (\partial_t \mathbf{P}) = \mathbf{1}^\top \mathbf{K}_{mat} \mathbf{P}$. By definition of the stochastic transition matrix (Def. 2.21), the diagonal elements are constructed to balance the outflow represented by $k_{ii} = -\sum_{j \neq i} k_{ji}$. We calculate the sum of the i -th column of the vector $\mathbf{1}^\top \mathbf{K}_{mat}$ by:

$$(\mathbf{1}^\top \mathbf{K}_{mat})_i = \sum_{row=1}^m k_{row,i} = k_{ii} + \sum_{j \neq i} k_{ji};$$

and substituting the definition of k_{ii} , we have:

$$(\mathbf{1}^\top \mathbf{K}_{mat})_i = \left(-\sum_{j \neq i} k_{ji} \right) + \sum_{j \neq i} k_{ji} = 0.$$

Since this is valid for every column i , then $\mathbf{1}^\top \mathbf{K}_{mat} = \mathbf{0}^\top$; consequently, $\partial_t (\sum P_i) = 0$, demonstrating that probabilistic mass is conserved under the internal mixing operation. $\square$

Standard diffusive models assume an instantaneous response of the medium; UMSDD transcends this limitation by introducing a causal memory of the solvent, represented mathematically through a temporal convolution with a non-negative kernel, as established by Volterra's theory of integro-differential equations [15, 21]. This has broad significance for correctly simulating the high-viscosity effects observed in solvents such as DMSO [39], where hydrodynamic correlations persist over time. With this, the complete evolution of the state vector is given by:

$$\partial_t \mathbf{P} = L_{sm} \mathbf{P} + K_{mat} \mathbf{P} - \int_0^t M(t - \tau) R_{op} \mathbf{P}(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Eq. 6 represents a Volterra equation of the second kind [21], where $M(t - \tau)$ is the memory kernel and R_{op} is the reaction operator at the boundary. Furthermore, for numerical resolution and stability analysis, it is convenient to transform the differential equation into its integral form. Based on Theo. 2.16 and Volterra's theory [15, 21], we can implement stable iterative algorithms such as the modified Crank-Nicolson scheme.

Lemma 2.23. *Let $A_{op} = L_{sm} + K_{mat}$ be the total linear operator (Transport + Mixing). Then, the solution satisfies the integral equation*

$$\mathbf{P}(t) = e^{tA_{op}} \mathbf{P}_0 - \int_0^t e^{(t-s)A_{op}} \left(\int_0^s M(s - \tau) R_{op} \mathbf{P}(\tau) d\tau \right) ds.$$

Proof. We consider the integro-differential equation (Eq. 6) rearranged as a non-homogeneous linear equation in a Banach space

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} - \mathcal{A}_{op} \mathbf{P}(t) = \mathcal{F}(t),$$

where the inhomogeneous "source" term is the memory integral

$$\mathcal{F}(t) = - \int_0^t M(t - \tau) \hat{R}_{op} \mathbf{P}(\tau) d\tau.$$

We utilize the integrating factor method in semigroups, whereby we can multiply by $e^{-tA_{op}}$ on the left (assuming time-commutativity of the operator or using propagators) obtaining

$$e^{-tA_{op}} \frac{d\mathbf{P}}{dt} - e^{-tA_{op}} \mathcal{A}_{op} \mathbf{P} = e^{-tA_{op}} \mathcal{F}(t).$$

We recognize the left side as the total derivative of the product:

$$\frac{d}{dt} (e^{-tA_{op}} \mathbf{P}(t)) = e^{-tA_{op}} \mathcal{F}(t),$$

then by integrating both sides from 0 to t we have

$$e^{-tA_{op}} \mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(0) = \int_0^t e^{-sA_{op}} \mathcal{F}(s) ds;$$

and multiplying by $e^{tA_{op}}$ we have

$$\mathbf{P}(t) = e^{tA_{op}} \mathbf{P}_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_{op}} \mathcal{F}(s) ds,$$

and substituting $\mathcal{F}(s)$ by its explicit definition, we obtain the integral form of the lemma. $\square$

To understand the experimentally measured lifetimes, we must analyze the spectrum of the evolution operator considering Theo. 2.16. Thus, the relaxation dynamics of the radical pair toward equilibrium (or escape) is not arbitrary; it is quantized by the eigenvalues of the UMSDD evolution operator. This is based on the spectral theory of compact operators in Hilbert spaces [34] applied to transport operators [40].

Theorem 2.24. *The Smoluchowski-Arriaga Operator $\mathcal{A}_{op} = \mathcal{L}_{SM} + \mathcal{K}_{mat}$ possesses a discrete spectrum in the bounded domain of interaction. Then the probability density $\mathbf{P}(r, t)$ admits an expansion in the basis of eigenfunctions $\{\phi_k\}$ given by*

$$\mathbf{P}(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(r) e^{\lambda_k t} + \mathbf{P}_{\infty}.$$

Proof. The evolution operator in UMSDD is of the Fokker-Planck type: $\mathcal{A}_{op} = \nabla \cdot \mathbf{D}(\nabla + \nabla \Phi)$, where $\Phi = \beta W_{eff}$. This operator is not symmetric in $L^2(\Omega)$ with the standard Lebesgue measure [35, 34, 36], which would hinder spectral analysis. However, it is symmetric with respect to the inner product weighted by the inverse equilibrium distribution $w = e^{\Phi}$. Let us consider the unitary similarity transformation $S : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ given by $SP = e^{\Phi/2}P = \Psi$. The transformed operator is $\mathcal{H} = S^{-1}\mathcal{A}_{op}S$, which takes the form of a Schrödinger operator (Sturm-Liouville type) given by

$$\mathcal{H}\Psi = \nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla\Psi) - V_{Sch}(\mathbf{r})\Psi$$

where the effective "Schrödinger potential" is given by

$$V_{Sch} = \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{2}\nabla^2\Phi.$$

Since the domain Ω (cage) is compact [35, 34, 36] implying that the potential W_{eff} is confining (Def. 2.17), the operator $\mathcal{H}$ is self-adjoint and bounded below. By the Spectral Theorem for compact self-adjoint operators, $\mathcal{H}$ (and by similarity $\mathcal{A}_{op}$) possesses a purely discrete spectrum of real eigenvalues $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots$ and its eigenfunctions form a complete orthonormal basis in the weighted Hilbert space [35, 34]. This guarantees the validity of the series expansion

$$\mathbf{P}(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(r) e^{\lambda_k t} + \mathbf{P}_{\infty}$$

as expected, proving the theorem. □

In this case, λ_k are negative real eigenvalues ($0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$). The first eigenvalue λ_1 (the spectral gap) determines the dominant asymptotic escape rate, while the higher modes ($\lambda_k, k > 1$) govern the ultrafast transient dynamics. This theorem (Theo. 2.24) provides the mathematical foundation for transient absorption spectroscopy experiments in [13, 2, 3, 19] which often require bi-exponential or multi-exponential fits instead of simple first-order kinetics. The interpretation of UMSDD into a computational algorithm

requires ensuring not only energetic stability but also physical consistency (non-negative probabilities). Although Theo. 2.15 guarantees stability in the L^2 norm (bounded energy), finite difference schemes such as Crank-Nicolson can induce spurious numerical oscillations near sharp potential gradients, resulting in local negative probabilities that lack physical meaning. To safeguard UMSDD simulations and ensure their robustness in the design of photocatalysts [31, 34], we establish a rigorous condition on discretization based on M-Matrix theory.

Lemma 2.25. *Let $\mathbf{M} = (\mathbb{I} - \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathcal{L}}_h)$ be the implicit iteration matrix of the UMSDD numerical scheme (Def. 2.14). If the time step Δt satisfies the local parabolic CFL condition $\Delta t \leq \min_j \frac{(\Delta r_j)^2}{2D_{max}}$, then the discrete operator preserves the positivity of the state vector*

$$\mathbf{P}^n \geq 0 \implies \mathbf{P}^{n+1} \geq 0. \quad (7)$$

Proof. Considering UMSDD (Def. 2.14) the premises of the Lemma are written in matrix form as

$$(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}) \mathbf{P}^{n+1} = (\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}) \mathbf{P}^n.$$

Now, let us denote $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}$ and $\mathbf{B} = \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}$, considering the intention to prove that; if $\mathbf{P}^n \geq 0$ then $\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^n \geq 0$. For this to be unconditionally satisfied, $\mathbf{A}$ must be a matrix whose inverse is non-negative and $\mathbf{B}$ must also be non-negative. This can be fulfilled by analyzing both $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ as follows:

Since $\mathbf{L}$ is the discretization of an elliptic operator (diffusion operator), it has negative diagonal elements and positive off-diagonal elements. Thus, $\mathbf{A}$ has a positive diagonal ($1 - \frac{\Delta t}{2} L_{ii} > 0$) and negative off-diagonal elements, where it is also diagonally dominant. By matrix properties, we have $\mathbf{A}^{-1} \geq 0$ in all cases.

On the other hand, the off-diagonal elements of $\mathbf{B}$ are $\frac{\Delta t}{2} L_{ij}$ (positive) and the diagonal elements are $1 + \frac{\Delta t}{2} L_{ii}$. Since $L_{ii} < 0$ due to the Laplacian discretization $-2/\Delta r^2$, for $\mathbf{B} \geq 0$, we need:

$$1 - \frac{\Delta t}{2} \frac{2D}{(\Delta r)^2} \geq 0 \implies \Delta t \leq \frac{(\Delta r)^2}{D}.$$

Under this Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition as a local parabolic condition for convergence and stability in the numerical resolution of partial differential equations given by

$$C = \frac{D \cdot \Delta t}{(\Delta r)^2} \leq C_{max}$$

where D is the diffusion coefficient, Δt is the time step, and Δr is the spatial step (the distance between points in our mesh) supported by Defs. 2.13-2.14 and Theo. 2.15. Thus, both $\mathbf{A}^{-1}$ and $\mathbf{B}$ are non-negative matrices. The product of non-negative matrices preserves the positive cone. Therefore, $\mathbf{P}^{n+1} \geq 0$. $\square$

Lemma 2.25 ensures that the survival function $S(t)$ is monotonically decreasing (or constant), which is consistent with the irreversible thermodynamics of the escape process and eliminates numerical artifacts in the prediction of Φ_{CE} . Finally, we connect the probability density with the macroscopic experimental observable: the escape yield Φ_{CE} . The physical magnitude measured in transient absorption experiments [4, 43] is the total population of radicals that have not recombined, and survival $S(t)$ is defined as the total probabilistic mass remaining in the spatial domain Ω (the cage and its surroundings); where its temporal decay explains exactly the loss fluxes at the boundary, given by

$$S(t) = \sum_{i=1}^m \int_a^R P_i(r, t), 4\pi r^2 dr. \quad (8)$$

To guarantee that UMSDD is consistent with physics, it must be ensured that the population probability is never negative nor exceeds unity. Derived from the properties of L^1 space and the positivity of evolution operators [44], the fundamental bounds of the simulation are established.

Lemma 2.26. *If the initial condition is normalized and the density vector is non-negative $\mathbf{P} \geq 0$, then the survival function is strictly bounded satisfying*

$$0 \leq S(t) \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Based on the above, the cage escape yield is then obtained as the asymptotic limit $\Phi_{CE} = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$.

3 Results and Simulations

There is no doubt that the vital core of this chapter is Sec. 2, which contains the UMSDD description. It consists of the formalism for modeling quantum mechanical elements and electron transfer, correlating these with Crank-Nicolson numerical methods to understand and simulate electron transfers of confined heavy elements (cages). UMSDD allows for a numerical reconstruction of results under different experimental conditions; furthermore, UMSDD enables the development of future events through simulations and the design of electronic configurations considering various parameters—such as the dielectric constant or mass—to simulate eventualities and other phenomena. To guarantee the efficiency of UMSDD and its predictions, we compare it against the results in the work of Ripak et al. [19], first through visual inspection and then numerically with the available results.

In Fig. 1, we show the UMSDD simulation results aimed at obtaining the basic elements of an experimental design like that of Ripak et al. [19]. We simulate the results of Figure 2 from Ripak et al. [19], specifically the slope of the linear fit that provided the corresponding electron transfer rate constants, which matched the quenching rate constants determined through Stern-Volmer analysis. Additionally, we represent an example of excited-state

Figure 2. Experimental characterization of photosensitizers

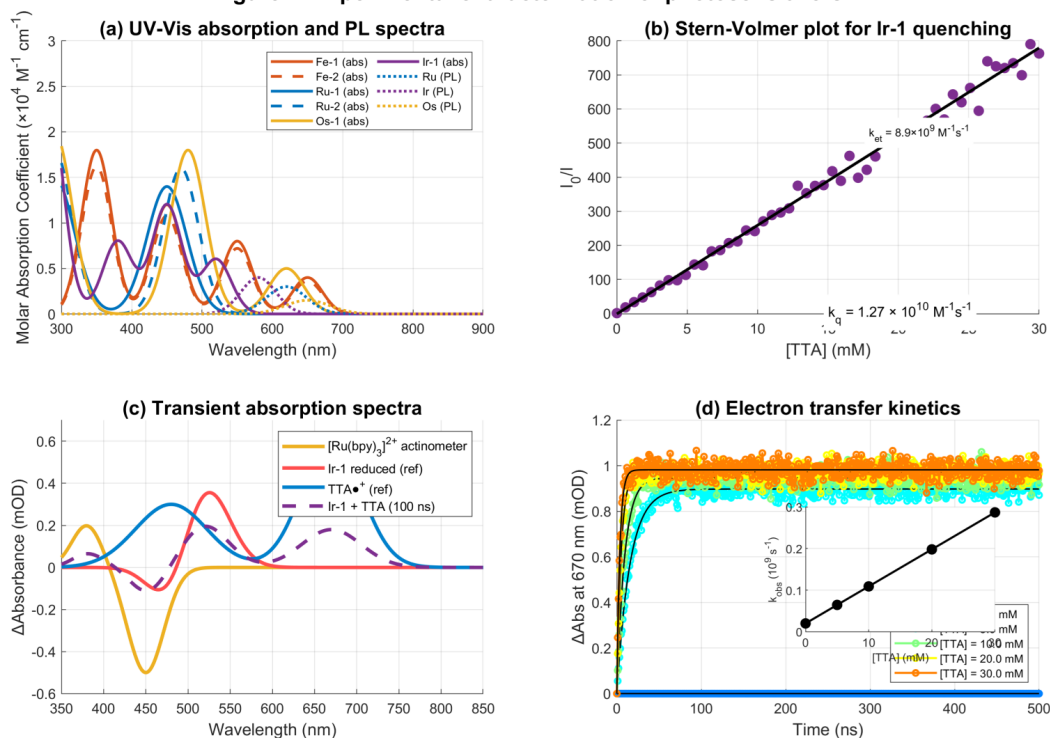


Figure 1: UMSSD simulation results for basic experimental design elements as in Ripak et al. [19], obtaining equivalent curves for Fig. 2 in a), b), c), and d) respectively.

biomolecular electron transfer between **Ir-1** and **TTA** in dichloromethane. Fig. 1 displays simulations under different considerations: (a) UV-visible absorption spectra (solid line) and steady-state photoluminescence spectra (dashed line) of the six photosensitizers in acetonitrile; (b) steady-state photoluminescence quenching of **Ir-1** by **TTA** in argon-purged dichloromethane. The inset represents the Stern-Volmer plot from which the quenching rate constant $k_q = 1.27 \times 10^{10} \text{ M}^{-1} \text{ s}^{-1}$ was determined; (c) nanosecond transient absorption spectrum of the actinometer [Ru(bpy)₃]²⁺ (orange), as well as transient absorption changes recorded 100 ns after 420 nm pulsed light excitation of a solution containing **Ir-1** and **TTA** in argon-purged acetonitrile (magenta dashed line). Reference spectra of monoreduced **Ir-1** (red) and **TTA**•⁺ (blue) are also presented; (d) single-wavelength absorption changes recorded at 670 nm following excitation of **Ir-1** with 420 nm pulsed light in the presence of increasing amounts of **TTA** in dichloromethane. The growth of the single-wavelength absorption changes was fitted (overlaid yellow line) and used to determine the electron transfer rate constant $k_{\text{et}} = 1.27 \times 10^9 \text{ M}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

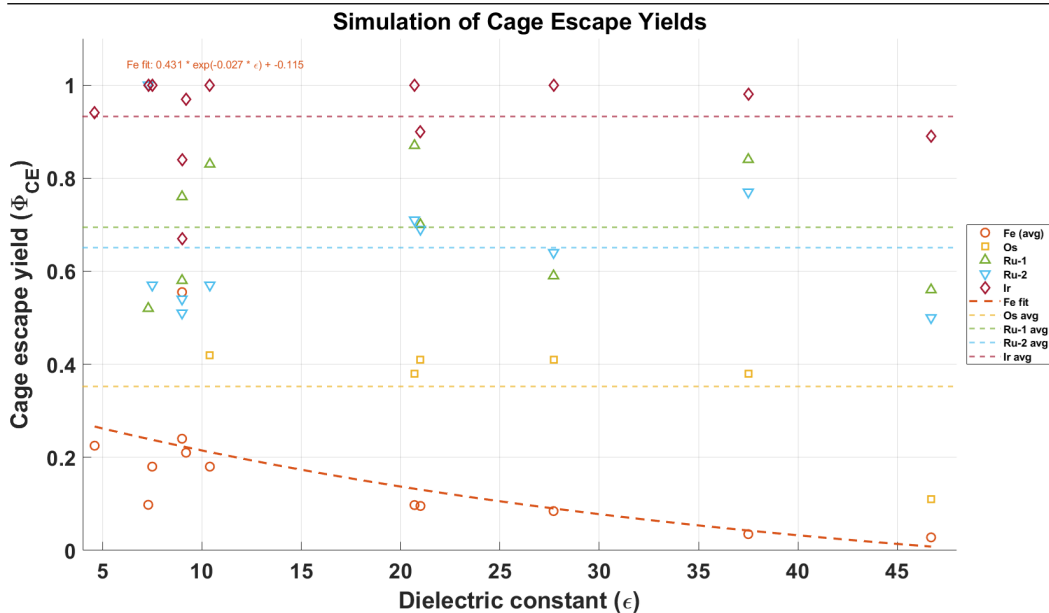


Figure 2: Simulation of cage escape yield Φ_{CE} for metal photosensitizer complexes. Data from Table 3 of Ripak et al. [19] for Fe(III), Ru(II), and Ir(III) with **TTA** in 11 solvents with different dielectric constant using UMSDD.

Since UMSDD is a control model capable of modifying electronic configurations, Fig. 2 presents a simulation for the cage escape yield Φ_{CE} of metal complex photosensitizers. The data were obtained from Table 3 of Ripak et al. [19], which studied photoinduced electron transfer between six Fe(III), Ru(II), and Ir(III) photosensitizers with tri-*p*-tolylamine (**TTA**) in 11 solvents with different dielectric constants. The figure illustrates the marked dependence of Φ_{CE} on solvent polarity for open-shell complexes such as Fe(III), in contrast to the almost constant behavior observed for closed-shell complexes like Ir(III). This is attributed to the spin blockade effect described in the UMSDD model.

Subsequently, Fig. 3 presents another case modifying control parameters with UMSDD to simulate the cage escape yield Φ_{CE} of metal complexes. The UMSDD model formally integrates liquid statistical mechanics with molecular quantum mechanics through Volterra integro-differential equations, considering solvent memory effects, spin-orbit coupling (SOC), and potentials of mean force. In this simplified simulation, phenomenological parameters were adjusted via least squares, capturing the exponential dependence of Φ_{CE} on the dielectric constant for Fe(III) and the constant behavior for Ir(III) due to spin blockade.

Fig. 4 shows UMSDD simulation results for the basic elements of an experimental design like Ripak et al. [19]. The data in the figure are purely simulated, obtained as a screenshot of the Matlab workspace from Table 3 data; here, we compare simulated data against

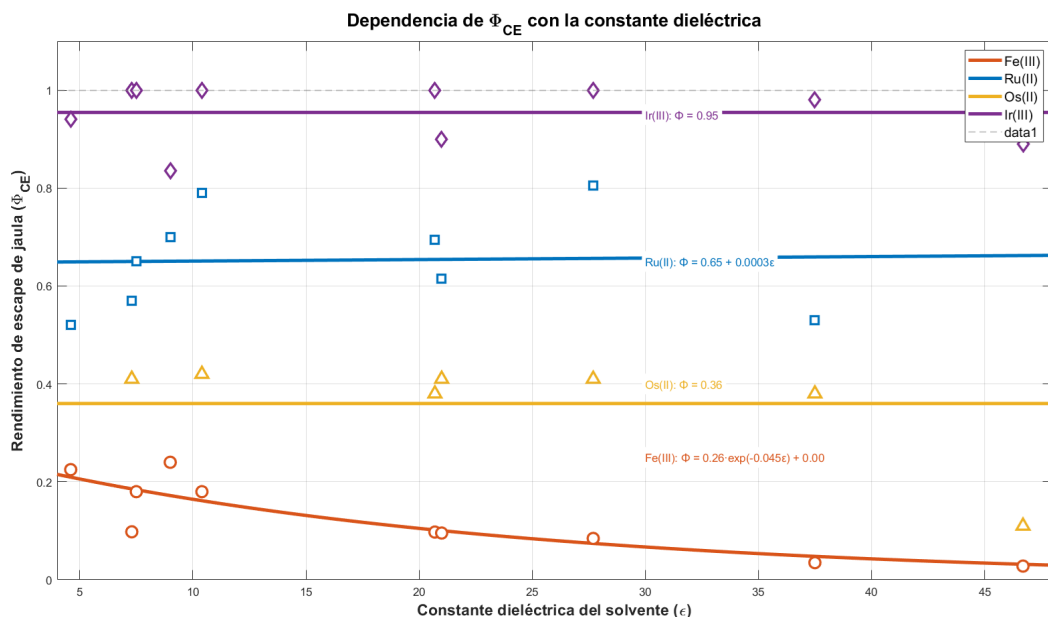


Figure 3: Simulation of the cage escape yield Φ_{CE} for photosensitizing metal complexes. Data were obtained from Table 3 of Ripak et al. [19], for Fe(III), Ru(II), and Ir(III) with tri-p-tolylamine TTA across 11 solvents with varying dielectric constants, by applying UMSDD.

Solvente	Epsilon	Eta_cP	Fe_1	Fe_2	Os_1	Ru_1	Ru_2	Ir_1
"CHCl3"	4.6	0.54	0.23	0.22	NaN	NaN	NaN	0.94
"Glyme"	7.3	0.46	0.097	0.099	0.41	0.52	1	1
"THF"	7.5	0.5	0.18	0.18	NaN	NaN	0.57	1
"CH2Cl2"	9	0.44	0.26	0.22	NaN	0.76	0.54	0.67
"CH2Cl2_alumina"	9	0.44	0.58	0.53	NaN	0.58	0.51	0.84
"PhCF3"	9.2	0.47	0.22	0.2	NaN	NaN	NaN	0.97
"DCE"	10.4	0.78	0.19	0.17	0.42	0.83	0.57	1
"BuCN"	20.7	0.6	0.1	0.095	0.38	0.87	0.71	1
"Acetone"	21	0.36	0.098	0.093	0.41	0.7	0.69	0.9
"PropCN"	27.7	0.44	0.08	0.089	0.41	0.59	0.64	1
"CH3CN"	37.5	0.38	0.03	0.04	0.38	0.84	0.77	0.98
"DMSO"	46.7	1.99	0.02	0.036	0.11	0.56	0.5	0.89

Figure 4: MUDED model predictions for cage escape yields Φ_{CE} of metal complexes in different solvents, based on experimental data from Ripak et al. [19]. The simulated values reflect the dielectric and viscous dependence of electron escape, validating the predictive capability of the model.

experimental values. To validate the predictive power of UMSDD, Fig. 4 presents the simulation results of the cage escape yield Φ_{CE} for metal complexes in various solvents. Fig. 4 shows the values simulated by UMSDD for Fe(III), Ru(II), Os(II), and Ir(III) complexes as a function of the dielectric constant ϵ and viscosity η . The results demonstrate the model’s ability to reproduce experimental trends and predict behaviors in solvents not experimentally reported.

Finally, Fig. 5 shows a comparison between UMSDD simulated data and experimental results in a typical electron encapsulation and leakage experiment, considering various parameters but highlighting the dielectric constant. We compare against experimental data from Ripak et al. [19] in Fig. 5 a) for experimental data vs. UMSDD, and in b) for an open-shell Fe configuration data vs. a simulation with similar phenomenology by UMSDD, considering Table 3 data.

4 Conclusions

The development and formalization of the Unified Model of Spin-Diffusion Dynamics (UMSDD) represent a significant advancement in the theoretical-computational modeling of photoinduced electron transfer processes in metallo-organic systems. UMSDD transcends traditional phenomenological approaches by establishing a rigorous bridge between molecular quantum mechanics and liquid statistical mechanics, self-consistently integrating spatial diffusion dynamics with quantum spin evolution. The mathematical robustness of the model is supported by a non-Markovian integro-differential framework, based on

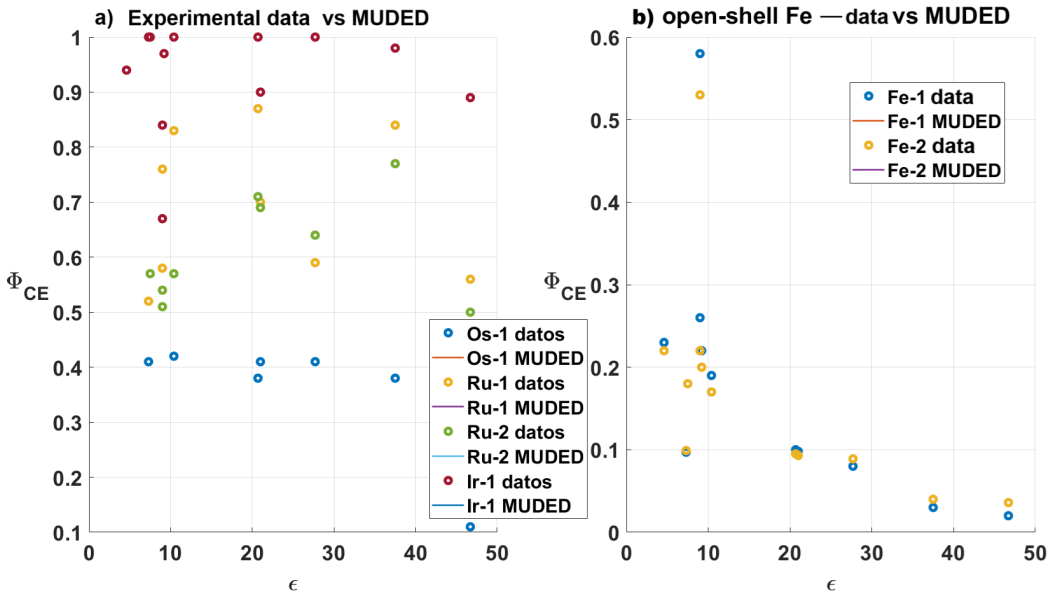


Figure 5: We show in a) experimental data vs. MUDED, and in b) open-shell Fe configuration data vs. a simulation with similar phenomenology by MUDED; considering the data from Table 3 of Ripak et al. [19].

Volterra equations of the second kind that incorporate a memory kernel $\mathcal{K}$, which captures the persistence of hydrodynamic and dielectric correlations in the solvent. This formalism allows for modeling the critical dependence of the cage escape yield Φ_{CE} on medium parameters, such as the dielectric constant ϵ and viscosity η , as well as intrinsic properties of the metallic center, such as spin-orbit coupling H_{SOC} and electronic configuration.

The central mathematical proofs presented and modeled for the phenomenology—such as the Fixed Point Theorem in Banach spaces applied to the Volterra operator (Theo. 2.9), the guarantee of existence and uniqueness of the solution in $L^2(\Omega)$ for the generalized Smoluchowski equation (Theo. 2.16), and the spectral analysis of the evolution operator (Theo. 2.24)—provide the necessary theoretical scaffolding to ensure that numerical simulations are stable, convergent, and physically consistent. The implementation of the Crank-Nicolson scheme for temporal discretization, coupled with a finite difference formulation on logarithmic grids, allows for the efficient resolution of the system’s master equation, capturing both the ultrafast kinetics of geminate recombination and the slow dynamics of diffusive escape. Furthermore, the positivity condition established in Lemma 2.25, based on matrix theory and the parabolic CFL condition, ensures that simulated probability densities remain non-negative, eliminating numerical artifacts and guaranteeing the physical interpretability of the results.

The graphical results and simulations presented in Figs. 1 through 5 strongly validate the predictive capacity of UMSDD. In particular, Figs. 4-5 demonstrate how the model quantitatively reproduces the experimental trends reported by Ripak et al. [19], capturing the marked dependence of Φ_{CE} on ϵ for open-shell complexes like Fe(III), in contrast to the robust and almost solvent-independent behavior observed for closed-shell complexes like Ir(III), attributed to spin blockade. The simulation of the temporal evolution of survival $S(t)$ and the direct calculation of Φ_{CE} as an asymptotic limit allow for a direct comparison with transient spectroscopy data, showing remarkable agreement. Beyond data reproduction, UMSDD stands as an *in silico* rational design tool, enabling the systematic exploration of parameter space (modifying η , H_{SOC} , W_{eff_i} , or the electronic configuration) to predict the performance of new photosensitizers based on abundant metals. In conclusion, UMSDD not only unifies the description of open-shell and closed-shell systems under the same rigorous mathematical formalism but also transforms electron transfer photochemistry from a predominantly descriptive discipline into a predictive engineering of the excited state, with profound implications for the development of sustainable and high-quantum-efficiency photocatalysts.

Acknowledgments

The authors thank SECIHTI (Secretaría de Ciencias, Humanidades, Tecnología e Innovación and Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Postgrado (VIEP) at Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, for the support given during the course of this investigation.

Bibliography

- [1] S. De Kreijger, M. Gillard and L. Troian Gautier, *Spectroscopic Techniques to Unravel Mechanistic Details in Light-Induced Transformations and Photoredox Catalysis*, *ChemCatChem*, (**16**); No. e202301100, 2024.
- [2] A. Ripak, S. De Kreijger, B. Elias and L. Troian Gautier, *A Protocol for Determining Cage-Escape Yields Using Nanosecond Transient Absorption Spectroscopy*, *STAR Protoc.*, (**4**); 102312, 2023.
- [3] M. J. Goodwin, J .C. Dickenson, A. Ripak, A. M. Deetz, J. S. McCarthy, G. J. Meyer and L. Troian Gautier, *Factors That Impact Photochemical Cage Escape Yields*, *Chem. Rev.*, (**124**); 7379–7464, 2024.
- [4] G. Kornfeld, L. Farkas and E. Rabinowitsch, *General Discussion*, *Trans. Faraday Soc.*, (**30**); 130–131, 1934.
- [5] J. Franck and E. Rabinowitsch, *Some Remarks About Free Radicals and the Photochemistry of Solutions*, *Trans. Faraday Soc.*, (**30**); 120–130, 1934.
- [6] R. K. Lyon and D. H. Levy *Demonstration of the “Cage” Effect*, *J. Am. Chem. Soc.*, (**83**); 4290, 1961.
- [7] M. Z. Hoffman *Cage Escape Yields from the Quenching of Excited Tris(Bipyridyl)Ruthenium(2+) by Methylviologen in Aqueous Solution*, *J. Phys. Chem.*, (**92**); 3458–3464, 1988.
- [8] H. Sun, A. Yoshimura and M. Z. Hoffman, *Oxidative Quenching of the Excited State of Tris(2,2'-Bipyridine)Ruthenium(2+) Ion by Methylviologen. Variation of Solution Medium and Temperature*, *J. Phys. Chem.*, (**98**); 5058–5064, 1994.
- [9] C. D. Clark and M. Z. Hoffman, *Ion-Pairing Control of Excited-State Electron-Transfer Reactions. Quenching, Charge Recombination, and Back Electron Transfer*, *J. Phys. Chem.*, (**100**); 7526–7532, 1996.
- [10] C. D. Clark and M. Z. Hoffman, *Ion-Pairing Control of Excited-State Electron-Transfer Reactions: Effect of Cations on Cationic Reactants*, *J. Photochem. Photobiol., A*, (**111**); 9–13, 1997.
- [11] J. Olmsted and T. J. Meyer, *Factors Affecting Cage Escape Yields Following Electron-Transfer Quenching*, *J. Phys. Chem.*, (**91**); 1649–1655, 1987.
- [12] M .Z. Hoffman, F. Bolletta, L. Moggi and G. L. Hug, *Rate Constants for the Quenching of Excited States of Metal Complexes in Fluid Solution*, *J. Photochem. Photobiol., A*, (**18**); 219–543, 1989.

- [13] S. Sittel, A. C. Sell, K. Hofmann, C. Wiedemann, J. P. Nau, C. Kerzig, G. Manolikakes and K. Heinze. *Visible-Light Induced Fixation of SO_2 into Organic Molecules with Polypyridine Chromium(III) Complexes*, *ChemCatChem*, **(15)**; No. e202201562, 2023.
- [14] A. Aydogan, R. E. Bangle, A. Cadranel, M. D. Turlington, D. T. Conroy, E. Cauët, M. Singleton, G. J. Meyer, R. N. Sampaio, B. Elias and L. Troian Gautier, *Accessing Photoredox Transformations with an Iron(III) Photosensitizer and Green Light*, *J. Am. Chem. Soc.*, **(143)**; 15661–15673, 2021.
- [15] A. Aydogan, R. E. Bangle, S. De Kreijger, J. C. Dickenson, M. L. Singleton, E. Cauët, A. Cadranel, G. J. Meyer, B. Elias, R. N. Sampaio and L. Troian Gautier, *Mechanistic Investigation of a Visible Light Mediated Dehalogenation/Cyclisation Reaction Using Iron(III), Iridium(III) and Ruthenium(II) Photosensitizers*, *Catal. Sci. Technol.*, **(11)**; 8037–8051, 2021.
- [16] T. H. Bürgin, Glaser F. and O. S. Wenger, *Shedding Light on the Oxidizing Properties of Spin-Flip Excited States in a Cr(III) Polypyridine Complex and Their Use in Photoredox Catalysis*, *J. Am. Chem. Soc.*, **(144)**; 14181–14194, 2022.
- [17] O. S. Sinha, C. Wegeberg, Häussinger D., Prescimone A. and Wenger O.S. *Photoredox-Active Cr(0) Luminophores Featuring Photophysical Properties Competitive with Ru(II) and Os(II) Complexes*, *Nat. Chem.*, **(15)**; 1730–1736, 2023.
- [18] A. Ripak, S. De Kreijger, R. N. Sampaio, C. A. Vincent, Cauët É., I. Jabin, U. K. Tambar, B. Elias and L. Troian Gautier, *Photosensitized Activation of Diazonium Derivatives for C–B Bond Formation*, *Chem Catal.*, **(3)**; 100490, 2023.
- [19] A. Ripak, A. K. Vega Salgado, D. Valverde, S. Cristofaro, de A. Gary, Y. Olivier, B. Elias, L. Troian Gautier *Factors Controlling Cage Escape Yields of Closed- and Open-Shell Metal Complexes in Bimolecular Photoinduced Electron Transfer*, *J. A. Che. Soc.*, **32(146)**; 22818–22828, 2024.
- [20] I. R. Gould, D. Ege, J. E. Moser and S. Farid, *Efficiencies of Photoinduced Electron-Transfer Reactions: Role of the Marcus Inverted Region in Return Electron Transfer within Geminate Radical-Ion Pairs*, *J. Am. Chem. Soc.*, **(112)**; 4290–4301, 1990.
- [21] V. Volterra, *Theory of Functionals and of Integral and In-tegro-differential Equations*, Dover Publications, Inc., N.Y., 1959.
- [22] H. Mori, *Transport, Collective Motion, and Brownian Motion*, *Pro. of Theo. Phy.*, **3(33)**; 423–455, 1965.

- [23] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications*, Springer Berlin, Heidelberg, 1996.
- [24] R. Zwanzig, *Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Oxford University Press, Oxford, 2001.
- [25] F. D. Lewis, A. M. Bedell, R. E. Dykstra, J. E. Elbert, I. R. Gould and J. R. Farid, *Photochemical Generation, Isomerization, and Oxygenation of Stilbene Cation Radicals*, *J. Am. Chem. Soc.*, (**112**); 8055–8064, 1990.
- [26] P. Douglas, G. Waechter and A. Mills, *Ionic Strength Effects on the Ground State Complexation and Triplet State Electron Transfer Reaction Between Rose Bengal and Methyl Viologen*, *Photochem. Photobiol.*, (**52**); 473–479, 1990.
- [27] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, Oxford, 1930.
- [28] P. Iwa, U. E. Steiner, E. Vogelmann and H. E. A. Kramer, *Linear Free-Enthalpy Relation for Radical Yield in Fluorescence Quenching by Electron Transfer*, *J. Phys. Chem.*, (**86**); 1277–1285, 1982.
- [29] E. S. Klimtchuk, G. Irinyi, I. V. Khudyakov, L. A. Margulis and V. A. Kuzmin, *Effect of Magnetic Field on Radical Yields During the Photoreduction of Xanthene Dyes in Viscous Media*, *J. Chem. Soc., Faraday Trans. 1*, (**85**); 4119–4128, 1989.
- [30] H. J. Wolff, D. Burssher and E. U. Steiner, *Spin-Orbit Coupling Controlled Spin Chemistry of $\text{Ru}(\text{bpy})_3^{2+}$ Photooxidation: Detection of Strong Viscosity Dependence of in-Cage Backward Electron Transfer Rate*, *Pure Appl. Chem.*, (**67**); 167–174, 1995.
- [31] J. Crank, P. Nicolson, *A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type*, *Adv. Comput. Math.*, (**6**); 207–226, 1996.
- [32] S. Jayanthi and P. Ramamurthy *Excited Singlet State Reactions of Thiopyrylium with Electron Donors: Electron Transfer, Induction of Triplet by Internal and External Heavy Atom Effect, and Comparison of Pyrylium and Thiopyrylium Reactions*, *J. Phys. Chem. A*, (**102**); 511–518, 1998.
- [33] L. Onsager *Theories and Problems of Liquid Diffusion*, *Annals of the N.Y. A. of Sci.*, (**46**); 241–465, 1945.
- [34] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, Cambridge University Press, 1964.
- [35] I. L. Iribarren, *Topología de Espacios Métricos*, Limusa-Wiley, 1973.

- [36] J. A. Arriaga, J. Cuevas Otahola, J. J. Oliveros Oliveros and Morin-Castillo M.M. *Fourier Series Method with Circular and Spheric Harmonics applied to physical phenomena regarding the direct problem solution* Matemáticas y sus Aplicaciones 17, Chap. 7, 161-188, BUAP ed., 2021.
- [37] T. Niwa, K. Kikuchi, N. Matsusita, M. Hayashi, T. Katagiri, Y. Takahashi and T. Miyashi, *Solvent Effects on Photoinduced Electron-Transfer Reactions*, *J. Phys. Chem.*, (**97**); 11960–11964, 1993.
- [38] A. Aydogan, R. E. Bangle, A. Cadranet, M. D. Turlington, D. T. Conroy, E. Cauët, M. L. Singleton, G. J. Meyer, R. N. Sampaio, B. Elias and L. Troian Gautier, *Accessing Photoredox Transformations with an Iron(III) Photosensitizer and Green Light*, *J. Am. Chem. Soc.*, (**143**); 15661–15673, 2021.
- [39] K. Miedlar and P. K. Das *Tris(2,2'-Bipyridine)Ruthenium(II)-Sensitized Photooxidation of Phenols. Environmental Effects on Electron Transfer Yields and Kinetics*, *J. Am. Chem. Soc.*, (**104**); 7462–7469, 1982.
- [40] R. Glowinski and P. Neittaanmäki, *Partial Differential Equations: Modelling and Numerical Simulation*, Springer Science, 2008.
- [41] E. Caldeweyher, J. M. Mewes, S. Ehlert and S. Grimme, *Extension and Evaluation of the D4 London-Dispersion Model for Periodic Systems*, *Phys. Chem. Chem. Phys.*, (**22**); 8499–8512, 2020.
- [42] P. Müller and K. Brettel, $[Ru(bpy)_3]^{2+}$ as a Reference in Transient Absorption Spectroscopy: Differential Absorption Coefficients for Formation of the Long-Lived ^3MLCT Excited State, *Photochem. Photobiol. Sci.*, (**11**); 632–636, 2012.
- [43] W. L. Armarego, *Purification of Inorganic and Metal-Organic Chemicals*. In *Purification of Laboratory Chemicals*; 8th ed.; Armarego W.L.F., Ed.; Butterworth-Heinemann, 2017; Chapter 4, pp 635–770.
- [44] M. Z. Hoffman, *Cage Escape Yields from the Quenching of $^*Ru(bpy)_3^{2+}$ by Methylviologen in Aqueous Solution*, *J. Phys. Chem.*, (**92**); 3458–3464, 1988.
- [45] S. Jayanthi and P. Ramamurthy, *Photoinduced Electron Transfer Reactions of 2,4,6-Triphenylpyrylium: Solvent Effect and Charge-Shift Type of Systems*, *Phys. Chem. Chem. Phys.*, (**1**); 4751–4757, 1999.
- [46] T. Ohno and N. N. Lichtin *Electron Transfer in the Quenching of Triplet Methylene Blue by Complexes of Iron(II)*, *J. Am. Chem. Soc.*, (**102**); 4636–4643, 1980.
- [47] H. Sun, G. Neshvad and M. Z. Hoffman, *Energy Gap Dependence of the Efficiency of Charge Separation Upon the Sacrificial Reductive Quenching of the Excited States of Ru(II)-Diimine Photosensitizers in Aqueous Solution*, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, (**194**); 141–150, 1991.

- [48] S. DiLuzio, T. U. Connell, V. Mdluli, J. F. Kowalewski and S. Bernhard *Understanding Ir(III) Photocatalyst Structure-Activity Relationships: A Highly Parallelized Study of Light-Driven Metal Reduction Processes*, *J. Am. Chem. Soc.*, (**144**); 1431–1444, 2022.
- [49] D. J. Gibbons, A. Farawar, P. Mazzella, S. Leroy Lhez and R. M. Williams *Making Triplets from Photo-Generated Charges: Observations, Mechanisms and Theory*, *Photochem. Photobiol. Sci.*, (**19**); 136–158, 2020.
- [50] J. Olmsted, III and T. J. Meyer, *Factors Affecting Cage Escape Yields Following Electron-Transfer Quenching*, *J. Phys. Chem.*, (**91**); 1649–1655, 1987.
- [51] K. Kikuchi, M. Hoshi, T. Niwa, Y. Takahashi. and T. Miyashi *Heavy-Atom Effects on the Excited Singlet-State Electron-Transfer Reaction*, *J. Phys. Chem.*, (**95**); 38–42, 1991.
- [52] K. Kalyanasundaram and M. Neumann Spallart *Influence of Added Salts on the Cage Escape Yields in the Photoredox Quenching of Ru(bpy)₃²⁺ Excited States*, *Chem. Phys. Lett.*, (**88**); 7–12, 1982.
- [53] F. Glaser, A. Aydogan, B. Elias and L. Troian Gautier. *The Great Strides of Iron Photosensitizers for Contemporary Organic Photoredox Catalysis: On Our Way to the Holy Grail?*, *Coord. Chem. Rev.*, (**500**); 215522, 2024.
- [54] K. S. Kjær, K. Kaul, O. Prakash, P. Chábera, K. Wärnmark, K. Honarfar, O. Gordivsk, L. A. Fredin, K. E. Bergquis, L. Häggström *et al. Luminescence and Reactivity of a Charge-Transfer Excited Iron Complex with Nanosecond Lifetime*, *Science*, (**363**); 249–253, 2019.
- [55] C. Wang, H. Li, Bürgin T.H. and Wenger O.S. *Cage Escape Governs Photoredox Reaction Rates and Quantum Yields*, *Nat. Chem.*, (**16**); 1151–1159, 2024.
- [56] A. Yoshimura, M. Z. Hoffman and M. Z. Sun *An Evaluation of the Excited State Absorption Spectrum of Ru(bpy)₃²⁺ in Aqueous and Acetonitrile Solutions*, *J. Photochem. Photobiol., A*, (**70**); 29–33, 1993.
- [57] M. Z. Goez, D. von Ramin-Marro, M. H. Musa and M. Schiewek *Photoionization of [Ru(bpy)₃]²⁺: A Catalytic Cycle with Water as Sacrificial Donor*, *J. Phys. Chem. A*, (**108**); 1090–1100, 2004.
- [58] C. Wang, P. Dixneuf and J. Soulé, *Photoredox Catalysis for Building C–C Bonds from C(sp²)–H Bonds*, *Chem. Rev.*, (**118**); 7532–7585, 2018.
- [59] N. Tay, D. Lehnher and T. Rovis *Photons or Electrons? A Critical Comparison of Electrochemistry and Photoredox Catalysis for Organic Synthesis*, *Chem. Rev.*, (**122**); 2487–2649, 2022.

- [60] J. Narayanam and C. Stephenson, *Visible Light Photoredox Catalysis: Applications in Organic Synthesis*, *Chem. Soc. Rev.*, (**40**); 102–113, 2011.
- [61] F. Glaser and O. Wenger *Recent Progress in the Development of Transition-Metal Based Photoredox Catalysts*, *Coord. Chem. Rev.*, (**405**); 213129, 2020.
- [62] J. Earley, A. Zieleniewska, H. Ripberger, N. Shin, *et al.* *Ion-Pair Reorganization Regulates Reactivity in Photoredox Catalysts*, *Nat. Chem.*, (**14**); 746–753, 2022.
- [63] A. Chan, I. Perry, N. B. Bissonnette, B. Buksh, G. Edwards, *et al.* *Metallaphotoredox: The Merger of Photoredox and Transition Metal Catalysis*, *Chem. Rev.*, (**122**); 1485–1542, 2022.
- [64] B. Xu, L. Troian Gautier, *Photocatalyzed Diastereoselective Isomerization of Cinnamyl Chlorides to Cyclopropanes*, *J. Am. Chem. Soc.*, (**142**); 6206–6215, 2020.
- [65] C. Morton, Q. Zhu, H. Ripberger, *C–H Alkylation Via Multisite Proton-Coupled Electron Transfer of an Aliphatic C–H Bond*, *J. Am. Chem. Soc.*, (**141**); 13253–13260, 2019.
- [66] Note that the values reported in dichloromethane are different from the one initially reported. This is due the value of $\Delta\epsilon$ for the actinometer. In the present study, we used a value of $-11,000\text{ M}^{-1}\text{cm}^{-1}$ while previous reports have used a value of $-15,000\text{ M}^{-1}\text{cm}^{-1}$.
- [67] V. Barone and M. Cossi, *Quantum Calculation of Molecular Energies and Energy Gradients in Solution by a Conductor Solvent Model*, *J. Phys. Chem. A*, (**102**); 1995–2001, 1998.
- [68] E. van Lenthe, J. Snijders and E. Baerends, *The Zero-Order Regular Approximation for Relativistic Effects: The Effect of Spin-Orbit Coupling in Closed Shell Molecules*, *J. Chem. Phys.*, (**105**); 6505–6516, 1996.
- [69] F. Neese, *The Orca Program System*, *Wiley Interdiscip. Rev. Comput. Mol. Sci.*, (**2**); 73–78, 2012.
- [70] F. Plasser, *Theodore: A Toolbox for a Detailed and Automated Analysis of Electronic Excited State Computations*, *J. Chem. Phys.*, (**152**); 084108, 2020.
- [71] A. Singa, K. Teegardin, M. Kelly, *Facile Synthesis and Complete Characterization of Homoleptic and Heteroleptic Cyclometalated Iridium(III) Complexes for Photocatalysis*, *J. Organomet. Chem.*, (**776**); 51–59, 2015.
- [72] Y. Olivier, B. Yurash, L. Muccioli, *Nature of the Singlet and Triplet Excitations Mediating Thermally Activated Delayed Fluorescence*, *Phys. Rev. Mater.*, (**1**); 075602, 2017.

- [73] I. Place, A. Farran and P. Piotrowiak, *Triplet Energy Transfer through the Walls of Hemarcerands: Temperature Dependence and the Role of Internal Reorganization Energy*, *J. Am. Chem. Soc.*, (**120**); 12626–12633, 1998.
- [74] C. Moser and P. Dutton, *Distance Metrics for Heme Protein Electron Tunneling*, *Biochim. Biophys. Acta Bioenerg.*, (**1777**); 1032–1037, 2008.
- [75] P. Dutton and C. Mosser, *Quantum Biomechanics of Long-Range Electron Transfer in Protein: Hydrogen Bonds and Reorganization Energies*, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, (**91**); 10247–10250, 1994.
- [76] L. Reynolds and M. Maroncelli, *Dipole Solvation in Nondipolar Solvents: Experimental Studies of Reorganization Energies and Solvation Dynamics*, *J. Phys. Chem.*, (**100**); 10337–10354, 1996.
- [77] E. Piechota and G. Meyer, *Introduction to Electron Transfer: Theoretical Foundations and Pedagogical Examples*, *J. Chem. Educ.*, (**96**); 2450–2466, 2019.
- [78] A. Gillett , C. Tonnelé, *et al. Spontaneous Exciton Dissociation Enables Spin State Interconversion in Delayed Fluorescence Organic Semiconductors*, *Nat. Commun.*, (**12**); 6640, 2021.
- [79] E. Epifanovsky, A. T. B. Gilbert, *et al. Software for the Frontiers of Quantum Chemistry: An Overview of Developments in the Q-Chem 5 Package*, *J. Chem. Phys.*, (**155**); 084801, 2021.
- [80] M. Lowry and S. Bernhard, *Single-Layer Electroluminescent Devices and Photoinduced Hydrogen Production from an Ionic Iridium(III) Complex*, *Chem. Mater.*, (**17**); 5712–5719, 2005.
- [81] S. Wehlin and G. Meyer, *Ter-Ionic Complex That Forms a Bond Upon Visible Light Absorption*, *J. Am. Chem. Soc.*, (**140**); 7799–7802, 2018.
- [82] L. Troian Gautier and G. Meyer, *Redox Active Ion-Paired Excited States Undergo Dynamic Electron Transfer*, *J. Am. Chem. Soc.*, (**138**); 16815–16826, 2016.
- [83] A. Maurer and G. Meyer, *Stark Spectroscopic Evidence That a Spin Change Accompanies Light Absorption in Transition Metal Polypyridyl Complexes*, *J. Am. Chem. Soc.*, (**142**); 6847–6851, 2020.
- [84] A. Maurer, E. Piechota and G. Meyer, *Excited-State Dipole Moments of Homoleptic $[Ru(bpy')_3]^{2+}$ Complexes Measured by Stark Spectroscopy*, *J. Phys. Chem. A*, (**123**); 8745–8754, 2019.

Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México (IAUNAM)
Cto. Bicipuma 3000, C.U., Coyoacán, CDMX, México, C.P. 04510

Centro de Detección Biomolecular del Instituto de Ciencias (ICUAP) de la Benemérita
Universidad Autónoma de Puebla

Av San Claudio 1814, Jardines de San Manuel
Puebla, Pue. México, C.P. 72570

Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Av. San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. México C.P., 72570

`bcuevas@astro.unam.mx`

`ignacio.martinez@correo.buap.mx`

`morin.monserrat@gmail.com`

Matemática Aplicada y Probabilidad

Capítulo 4

La transformada discreta de Fourier y los efectos de la discretización en el análisis oscilatorio de señales

Denisse Amélie Sophie Bernès Carmona, Moisés Soto
Bajo
FCFM, BUAP

Resumen

El propósito del presente capítulo es discutir algunos fenómenos que ocurren en el análisis oscilatorio de señales finitas, similares a otros que son clásicos en la teoría de series e integrales de Fourier, pero en un contexto finito, haciendo énfasis en la influencia que el proceso de discretización o muestreo tiene en este. La herramienta básica en este análisis es la Transformada discreta de Fourier, que se presentará de forma concisa. Se tratan efectos como el fenómeno de Wilbraham-Gibbs, un principio de incertidumbre discreto, y la fuga espectral (spectral leakage).

1 Introducción

Permítanos el atrevimiento de comenzar con una semblanza libre del tema con ánimo meramente pedagógico.

Una de las formas más comunes de modelar la codificación de información es hablando de señales. Por señal entendemos aquí, grosso modo, una función numérica que a todo elemento de un conjunto le asigna un escalar, real o complejo. Por ejemplo, el conjunto puede ser un intervalo o cualquier otro conjunto en la recta real $\mathbb{R}$, o estar en el plano complejo $\mathbb{C}$, o en general ser un subconjunto de un espacio euclídeo $\mathbb{R}^d$. Pero también puede tener naturaleza discreta, como un retículo en los números enteros $\mathbb{Z}$ o en $\mathbb{Z}^d$, o incluso finita. Es más, incluso puede ser un grupo (finito o infinito), o un espacio de Hilbert, y aprovecharnos de su estructura algebraica y/o topológica. O incluso ser el conjunto de vértices de un grafo.

El área de conocimiento que fundamentalmente se encarga de cómo manejar, reorganizar e interpretar la información contenida en las señales es el procesamiento de señales,

originalmente habitada por ingenieros pero colonizada en las últimas décadas por matemáticos y físicos, entre otros. Si se quiere, puede enmarcarse como un enfoque en la Ciencia de datos, tan en boga recientemente.

Una de las ramificaciones más célebres y utilizadas del procesamiento de señales es el análisis oscilatorio de señales. Esencialmente, consiste en describir lo más detalladamente posible la manera en que una señal oscila o vibra (al menos localmente), es decir, sube o baja alrededor de un punto de equilibrio. Esto puede entenderse de varias maneras. Aquí nos ceñiremos al caso “unidimensional”, en el que se asume que el conjunto viene parametrizado por un parámetro (discreto o continuo), que se puede pensar como el “tiempo”. Así, al avanzar linealmente el tiempo, se pretende averiguar si los “sucesivos” valores de la señal oscilan alrededor de cierto valor de referencia en un patrón reconocible. Típicamente, con una dependencia sinusoidal del tiempo, o como superposición de modos sinusoidales (véase [105], [127], [14], [137], [98]).

Dicho lo anterior, no debiera extrañar al lector que en la génesis de la disciplina se encuentre el Análisis de Fourier, o Análisis armónico (véase [41], [64], [43]¹). Las teorías de las series e integrales de Fourier son la herramienta básica y fuente y destino incesante de ejemplos, métodos e ideas, en una retroalimentación continua y en extremo fecunda entre teoría y aplicaciones. En un principio, las Series de Fourier son el marco para el estudio de señales periódicas, o definidas en un intervalo, mientras que la Transformada de Fourier se ocupa de señales definidas en la recta real.

Sin embargo, en el caso de las aplicaciones más mundanas (por ejemplo, en ingeniería²), y especialmente con el auge del poder computacional de los dispositivos electrónicos, el caso relevante es el finito. Aquí nos centraremos en el caso de señales en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, en el que pueden pensarse como n -uplas en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$. El análogo de las herramientas matemáticas anteriores en este contexto son las bases discretas de Fourier y la Transformada discreta de Fourier (TDF), o mejor dicho, las Transformadas discretas de Fourier, que se presentarán más adelante (véase [16], [133], [24], [3]). Es menester señalar en este punto que el amplísimo éxito cosechado por esta herramienta se debe en grandísima medida a la Transformada rápida de Fourier (TRF), o mejor dicho, a las Transformadas rápidas de Fourier, que son un conjunto de algoritmos que permiten calcular las TDF más eficientemente (en la práctica, en un tiempo asequible). Es imposible exagerar la importancia de este hecho y su influencia en el mundo en que vivimos (véase [28], [16], [39], [105], [132], [133], [24], [8], [165]). En [75], [16], [39], [142], [52], [113] se trata la TDF multidimensional y algunas de sus aplicaciones, en particular en el procesamiento de señales (véanse también las referencias en la introducción de [105]), y también la implementación y cómo adaptar las TRF al caso multidimensional. En [135] se trata la historia de la Transformada Rápida de Fourier, con algunas reflexiones que surgen a raíz de esta y que quizá sean de interés del lector.

En el trabajo teórico y aplicado con estas herramientas del Análisis de Fourier, tanto

¹A los lectores más inexpertos, les recomendamos también la serie de excelentes videos [161], [162], [163] como introducción al tema.

²Aunque no solo. Véase la relación de la TRF y los trabajos de Gauss en Astronomía, por poner un ejemplo clásico [68].

en variable continua como discreta, han ido apareciendo una serie de fenómenos que por un lado condicionan su uso, y por otro han sido acicate para la comprensión teórica más profunda de las herramientas. El estudio de estos fenómenos y el diseño de métodos para reducir sus efectos no deseados es un tema bien estudiado en la literatura, tanto de Procesamiento de señales como de Análisis armónico (véase por ejemplo [81], [127], [24], [3], [112], [137], [98]). En este texto nos proponemos explicar de manera accesible algunos de estos efectos, como son el fenómeno de Wilbraham-Gibbs, un principio de incertidumbre discreto, o la fuga espectral (spectral leakage).

Notación

Denotaremos por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ los conjuntos de números naturales (enteros positivos), enteros, reales y complejos, respectivamente. i denotará la unidad imaginaria. Dado $x \in \mathbb{R}$, el suelo y techo, respectivamente, son los enteros dados por $\lfloor x \rfloor = \max\{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\}$ y $\lceil x \rceil = \min\{p \in \mathbb{Z} : x \leq p\}$.

Sea $n \geq 2$ entero. Consideramos al $\mathbb{C}$ -espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ de n -tuplas de números complejos. Enumerar las entradas de los vectores de 0 a $n-1$ (en vez de hacerlo de la forma más común, iniciando en 1 y terminando en n) es más natural para las definiciones aquí presentadas. Es común usar como sistema de representación a la **base canónica** de $\mathbb{C}^n$

$$C_n := \{e_k\}_{k=0}^{n-1} \subseteq \mathbb{C}^n, \quad (1)$$

o sea, la base donde

$$e_k[\mu] = \delta_{k,\mu}, \quad (2)$$

para $0 \leq \mu \leq n-1$, siendo $\delta_{k,\mu}$ la delta de Kronecker. Si $x = (x[k])_{k=0}^{n-1} \in \mathbb{C}^n$ es una n -tupla de complejos cualquiera, su representación respecto a C_n es

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} x[k] \cdot e_k \in \mathbb{C}^n. \quad (3)$$

En este texto, como suele ser común en muchas referencias de procesamiento de señales, interpretaremos al número $x[k]$ (que es la k -ésima entrada de x , es decir, el k -ésimo coeficiente de la representación en (3)) como información temporal - $x[k]$ indica una medición al instante k . Denotamos al vector cero por $\mathbf{0}_n$, y por $\mathbf{1}_n$ al vector cuyas entradas son todas uno. En ocasiones, será conveniente pensar a las entradas de los elementos de $\mathbb{C}^n$ no de forma lineal, sino en forma circular, o sea, como enteros módulo n , véase [120]. De este modo, la entrada siguiente a $x[n-1]$ ("el final") es $x[0]$ ("el inicio"), y tiene sentido hablar de la entrada k -ésima de x , con $k \in \mathbb{Z}$ cualquiera (véase la Figura 1).

Consideramos la estructura euclídea usual en $\mathbb{C}^n$, es decir, la dada por el producto interior y la norma inducida por este,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} x[k] \cdot \overline{y[k]} \in \mathbb{C} \quad , \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} |x[k]|^2} \quad (4)$$

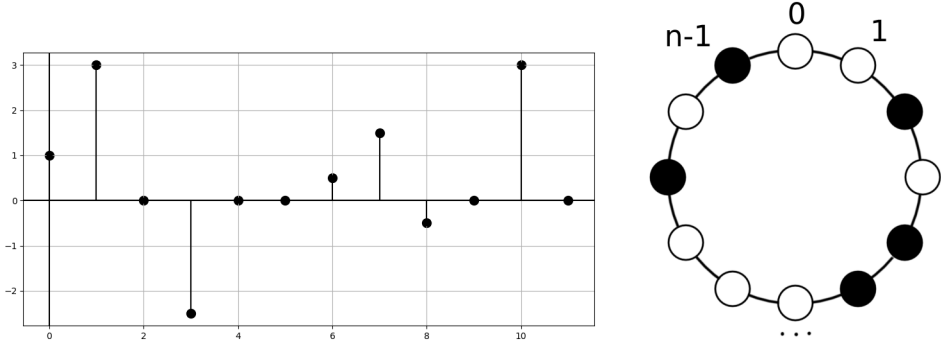


Figura 1: Señal n -dimensional como n -tupla finita y en su versión circular.

para $x = (x[k])_{k=0}^{n-1}$, $y = (y[k])_{k=0}^{n-1} \in \mathbb{C}^n$. Definimos la operación de **convolución** como el vector $x * y \in \mathbb{C}^n$ de entradas

$$(x * y)[\mu] = \sum_{k=0}^{n-1} x[k] \cdot y[\mu - k] = \sum_{k=0}^{n-1} x[\mu - k] \cdot y[k]. \quad (5)$$

donde $0 \leq \mu \leq n - 1$, para cualesquiera vectores $x = (x[k])_{k=0}^{n-1}$, $y = (y[k])_{k=0}^{n-1} \in \mathbb{C}^n$.

Usar una base para $\mathbb{C}^n$ distinta a la canónica C_n para representar vectores puede ayudar a ver un mismo fenómeno (descrito matemáticamente por un $x \in \mathbb{C}^n$) desde un punto de vista distinto, dependiendo de la naturaleza de la base y la señal estudiada. De esta forma, ciertas propiedades de la nueva base pueden contribuir a describir la señal en esos términos, siendo el sustento de un análisis enfocado en ciertos aspectos de las señales. Concretamente, para el análisis oscilatorio de señales, se suele usar la base discreta de Fourier (explicada más adelante), compuesta por señales oscilatorias con un modo puro de vibración, asociado a una frecuencia concreta cada una.

Sobre la ortogonalidad en el procesamiento de señales

Para aprovechar la estructura métrica del espacio, es conveniente usar una **base ortormal** (abreviada **BON**), es decir, una base

$$F_n = \{f_k\}_{k=0}^{n-1} \subseteq \mathbb{C}^n \quad (6)$$

cuyos elementos tengan norma uno y sean mutuamente ortogonales (véase [51]). En primer lugar, sabemos que los coeficientes de un vector x respecto a una BON (6) son los productos interiores de x con los elementos de la base:

$$\forall x \in \mathbb{C}^n : \quad x = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, f_k \rangle \cdot f_k. \quad (7)$$

Así, en contraste con otras bases, no es necesario resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas para encontrar los coeficientes. En segundo lugar, se vale la *Identidad de Parseval*, que relaciona linealmente el módulo al cuadrado de x (“la energía del vector”) con el de sus coeficientes:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |\langle x, f_k \rangle|^2. \quad (8)$$

Esta hace legítimo relacionar directamente el tamaño del k -ésimo coeficiente $|\langle x, f_k \rangle|$ con la importancia que el correspondiente vector f_k de la BON tiene para reconstruir a x . Si, por ejemplo, $|\langle x, f_{n-1} \rangle| < \epsilon$, entonces el vector $x' := \sum_{k=0}^{n-2} \langle x, f_k \rangle \cdot f_k$, que, comparado con (7), es el vector que resulta de ignorar el sumando $n-1$ en la reconstrucción (“síntesis”) de x , es tal que

$$\|x - x'\| = \|\langle x, f_{n-1} \rangle \cdot f_{n-1}\| = |\langle x, f_{n-1} \rangle| \cdot \|f_{n-1}\| = |\langle x, f_{n-1} \rangle| < \epsilon,$$

y, por la Identidad de Parseval,

$$\|x'\|^2 = \sum_{k=0}^{n-2} |\langle x, f_k \rangle|^2 = \|x\|^2 - \epsilon,$$

es decir, la reconstrucción incompleta x' y el vector original x están a distancia menor a ϵ , y sus energías difieren por ϵ . Este paradigma, aquí en su versión más sencilla, es una de las patas en las que se sustentan muchos procedimientos en el procesamiento de señales. Con este andamiaje, es claro cómo mantener el control del tamaño cuando se realizan distintas operaciones sobre las señales.

A continuación, damos la construcción de unas bases ortonormales para el $\mathbb{C}$ -espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ y para el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ compuestas de modos puros de vibración, concretamente de muestreos uniformes de exponenciales trigonométricas o de senos y cosenos.

Construcción de las TDF compleja y real

Para lo que sigue, necesitaremos de las siguientes propiedades de la exponencial compleja: para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\exp(ia) = \cos(a) + i \sin(a), \quad (9)$$

$$\overline{\exp(ia)} = \exp(-ia), \quad (10)$$

$$\exp(iab) = (\exp(ia))^b, \quad \exp(i(a+b)) = \exp(ia) \cdot \exp(ib), \quad (11)$$

$$\exp(ia) = 1 \quad \text{si y solo si} \quad a \in 2\pi\mathbb{Z}. \quad (12)$$

Definición 1.1. Dado $\omega \in \mathbb{Z}$, denotamos

$$\zeta_\omega := \exp(2\pi i \omega / n) \in \mathbb{C}. \quad (13)$$

Si $\omega \in [0, n-1] \cap \mathbb{Z}$, estas son las **raíces n -ésimas de la unidad** (véase [120]), es decir, los únicos n números complejos que satisfacen la ecuación

$$\zeta^n = 1, \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$

Por la periodicidad de la exponencial compleja, ζ_ω será igual a uno de los valores (13) para algún entero entre 0 y $n-1$.

Considerando potencias de las raíces n -ésimas de la unidad, hacemos las definiciones siguientes:

Definición 1.2. Definimos a los n vectores

$$f_\omega := \frac{1}{\sqrt{n}} (\zeta_\omega^k)_{k=0}^{n-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \exp(2\pi i \omega k / n) \right)_{k=0}^n \in \mathbb{C}^n, \quad (14)$$

donde $\omega \in [0, n-1] \cap \mathbb{Z}$.

Definición 1.3. Definimos la **base ortonormal de Fourier** F_n para $\mathbb{C}^n$ como

$$F_n := \{f_\omega\}_{\omega=0}^{n-1} \subseteq \mathbb{C}^n. \quad (15)$$

Aunque la siguiente prueba es clásica, la damos ahora, pues la idea de usar propiedades de la exponencial para expresar una suma como suma geométrica será ampliamente usada en este texto.

Teorema 1.4. El conjunto F_n en (15) es una base ortonormal para $\mathbb{C}^n$.

Demostración. Mostremos que, para cualesquiera frecuencias enteras $0 \leq \omega, \omega' \leq n-1$, se tiene que $\langle f_\omega, f_{\omega'} \rangle = \delta_{\omega, \omega'}$. Usando (10) y (11),

$$\begin{aligned} \langle f_\omega, f_{\omega'} \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp(2\pi i \omega k / n) \cdot \overline{\exp(2\pi i \omega' k / n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp(2\pi i (\omega - \omega') k / n) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\exp(2\pi i (\omega - \omega') / n))^k; \end{aligned} \quad (16)$$

la importancia de este último paso es que expresamos el producto punto a calcular en términos de una suma geométrica. Según la propiedad (12), la razón de esta suma geométrica es igual a 1 cuando $\omega - \omega'$ es múltiplo de n ; por los rangos de estas frecuencias, $-(n-1) \leq \omega - \omega' \leq n-1$, luego, solo cuando $\omega = \omega'$ se tiene que $\exp(2\pi i (\omega - \omega') / n) = 1$; en este caso, usando (16),

$$\langle f_\omega, f_\omega \rangle = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (1)^k = 1.$$

Por último, si $\omega \neq \omega'$, de (16) obtenemos que

$$\langle f_\omega, f_{\omega'} \rangle = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \exp(2\pi i (\omega - \omega'))}{1 - \exp(2\pi i (\omega - \omega') / n)} = 0.$$

□

Usando la propiedad (9), tenemos que la entrada k -ésima de f_ω es

$$f_\omega[k] = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(2\pi\omega k/n) + i \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(2\pi\omega k/n). \quad (17)$$

Entonces, las partes reales (resp. imaginarias) del vector f_ω se consiguen muestreando uniformemente la función coseno $c_\omega(t) := \cos(2\pi\omega \cdot t)$ (resp. la función seno $s_\omega(t) := \sin(2\pi\omega \cdot t)$) uniformemente en $[0, 1]$, a partir de 0. Así, tenemos que la representación del vector arbitrario x en (3) respecto a la BON de Fourier es

$$x = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\omega=0}^{n-1} \langle x, f_\omega \rangle \left(\cos\left(2\pi\omega \frac{k}{n}\right) + i \cdot \sin\left(2\pi\omega \frac{k}{n}\right) \right)_{k=0}^{n-1}. \quad (18)$$

Observe que (3) y (18) son representaciones del mismo vector x , pero los coeficientes de la primera dan *información temporal*, mientras que los de la segunda dan *información frecuencial*; por la identidad de Parseval, el módulo del coeficiente $\langle x, f_\omega \rangle$ indica la proporción en la que el vector f_ω (construido a partir de muestreos uniformes de sinusoides de frecuencia ω) “importa” para representar al vector x .

Al isomorfismo de cambio de base de la canónica C_n a la de Fourier F_n

$$\mathcal{F}_n : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

se le denomina la **Transformada Discreta de Fourier** (abreviada como “TDF”) n -dimensional. Su inversa, $\mathcal{F}_n^{-1}$, se denomina la **Transformada Discreta inversa de Fourier** n -dimensional. En el contexto de la ingeniería de señales, la primera realiza el “análisis” de la señal, y la segunda la “síntesis”. Entonces, la imagen de $x = (x[k])_{k=0}^{n-1}$ bajo $\mathcal{F}_n$ es el vector de productos interiores entre x y los vectores f_ω

$$\mathcal{F}_n(x) = (\langle x, f_\omega \rangle)_{\omega=0}^{n-1} \in \mathbb{C}^n. \quad (19)$$

Usando la definición (4) del producto interior y la propiedad (10), claro que

$$\langle x, f_\omega \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} x[k] \cdot \exp(-2\pi i \omega k/n). \quad (20)$$

Empleando esta última expresión es fácil definir la acción de $\mathcal{F}_n$ en términos de multiplicación de matrices; si

$$A_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} \zeta_0^0 & \zeta_0^1 & \cdots & \zeta_0^{n-1} \\ \zeta_{-1}^0 & \zeta_{-1}^1 & \cdots & \zeta_{-1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{-(n-1)}^0 & \zeta_{-(n-1)}^1 & \cdots & \zeta_{-(n-1)}^{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} \zeta_0^0 & \zeta_0^1 & \cdots & \zeta_0^{n-1} \\ \zeta_{n-1}^0 & \zeta_{n-1}^1 & \cdots & \zeta_{n-1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1^0 & \zeta_1^1 & \cdots & \zeta_1^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

entonces

$$\forall x \in \mathbb{C}^n : \quad \mathcal{F}_{n-1}(x) = A_n \cdot x. \quad (22)$$

Como F_n es base ortonormal, la matriz inversa de A_n es su *transpuesta conjugada* (véase [51]), es decir,

$$A_n^{-1} = (\overline{A_n})^T =: A_n^*.$$

Usando la primera igualdad para A_n en (21) se calcula rápidamente esta adjunta:

$$A_n^{-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} \zeta_0^0 & \zeta_1^0 & \cdots & \zeta_{n-1}^0 \\ \zeta_0^1 & \zeta_1^1 & \cdots & \zeta_{n-1}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_0^{n-1} & \zeta_1^{n-1} & \cdots & \zeta_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

En resumen, usando variables μ y ν (para no asociarles una interpretación y solo comparar fórmulas), en base a las representaciones matriciales A_n y A_n^{-1} de los operadores $\mathcal{F}_n$ y $\mathcal{F}_n^{-1}$, tenemos que, para cualquier $x = (x[\nu])_{\nu=0}^{n-1} \in \mathbb{C}^n$, las entradas de los vectores $\mathcal{F}_n(x)$, $\mathcal{F}_n^{-1}(x)$ son

$$\mathcal{F}_n(x)[\mu] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\nu=0}^{n-1} x[\nu] \cdot \exp(-2\pi i \mu \nu / n), \quad (24)$$

y

$$\mathcal{F}_n^{-1}(x)[\mu] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\nu=0}^{n-1} x[\nu] \cdot \exp(2\pi i \mu \nu / n). \quad (25)$$

La única diferencia entre las fórmulas para $\mathcal{F}_n(x)[\mu]$ y $\mathcal{F}_n^{-1}(x)[\mu]$ es el signo del argumento de la exponencial. Algunos autores intercambian las fórmulas (24) y (25), por ejemplo, el popular libro [113]. El software Mathematica programa la TDF con signo positivo para el argumento de la exponencial (véase [168]), pero Python la programa con signo negativo (véase [167]). También podrán observarse en las referencias cambios en los factores de normalización. De la n -periodicidad de la función de variable entera $\exp(2\pi i \cdot / n)$ se sigue que las entradas de los vectores $\mathcal{F}_n(x)$ y $\mathcal{F}_n^{-1}(x)$ son, salvo el orden, las mismas, por lo que podría argumentarse que “tienen la misma información”, aunque claramente es necesario recordar el significado de estas para poder interpretar los resultados de un análisis espectral.

Las simetrías apreciadas en la Figura 2 no son casualidad. Si $x = (x[k])_{k=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n$, usando la expresión (24) para las entradas de $\mathcal{F}_n(x)$ y escribiendo a la exponencial como en (9), tenemos rápidamente las partes reales e imaginarias de las entradas de $\mathcal{F}_n(x)$; para toda $0 \leq \omega \leq n-1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(x)[\omega] &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} x[k] \cdot \cos(2\pi \omega k / n) \right] + \\ &+ i \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} x[k] \cdot \sin(2\pi \omega k / n) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Después de inspeccionar la Figura 2, parece útil hacer la definición siguiente:

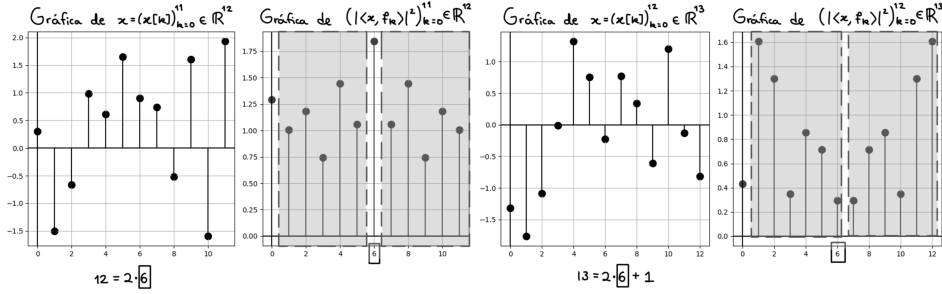


Figura 2: Se consideran dos vectores cuyas entradas son todas reales, el de la izquierda es elemento de $\mathbb{R}^{12}$ (espacio de dimensión par) y el de la derecha, de $\mathbb{R}^{13}$ (espacio de dimensión impar). Se han graficado también los módulos de las coordenadas de las TDF de estos vectores. Con el área gris se marcan las simetrías en estas últimas gráficas.

Definición 1.5. Dado n , definimos el entero

$$m := \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil, \quad (27)$$

de manera que

$$\begin{cases} n = 2m & \text{si } 2 \mid n, \\ n = 2m + 1 & \text{si } 2 \nmid n. \end{cases}$$

Aquí, $2 \mid n$ significa que 2 divide a n (n es par), y $2 \nmid n$ lo contrario.

Usando m , dividimos al intervalo de frecuencias de la manera siguiente:

$$[0, n-1] \cap \mathbb{Z} = \begin{cases} \{0\} \cup \{1, \dots, m-1\} \cup \{m\} \cup \{m+1, \dots, n-1\} & \text{si } 2 \mid n, \\ \{0\} \cup \{1, \dots, m\} \cup \{m, \dots, n-1\} & \text{si } 2 \nmid n. \end{cases}$$

Pongamos n par, y consideremos a la biyección de $\{1, \dots, m-1\}$ a $\{m+1, \dots, n-1\}$ que mapea ω a $n-\omega$. Por la 2π -periodicidad de las funciones seno y coseno, claro que para cualesquiera $1 \leq \omega \leq m-1$ y $0 \leq k \leq n-1$,

$$\cos(2\pi\omega k/n) = \cos(2\pi\omega(n-\omega)/n), \quad \sin(2\pi\omega k/n) = -\sin(2\pi\omega(n-\omega)/n),$$

luego, usando (26), tenemos que

$$\forall 1 \leq \omega \leq m-1: \quad |\mathcal{F}_n(x)[n-\omega]|^2 = |\mathcal{F}_n(x)[\omega]|^2, \quad (28)$$

simetría que notamos en la Figura 1. Se hace un análisis similar si n es impar, comparando los intervalos de frecuencia $\{1, \dots, m\}$ y $\{m+1, \dots, n-1\}$.

Para no calcular información repetida, si se trabaja en el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, puede resultar conveniente usar la siguiente base.

Definición 1.6. Fijada una dimensión $n \geq 2$, si $m := \lceil (n-1)/2 \rceil$, definimos los vectores

$$c_{n,0} := \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^n, \quad (29)$$

y, para toda $1 \leq j \leq m$,

$$c_{n,j} := \sqrt{\frac{2}{n}} \left(\cos(2\pi jk/n) \right)_{k=0}^{n-1}, \quad s_{n,j} := \sqrt{\frac{2}{n}} \left(\sin(2\pi jk/n) \right)_{k=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n. \quad (30)$$

A partir de ellos, definimos lo siguiente:

Definición 1.7. Definimos la **base discreta de Fourier real** n -dimensional como

$$F_{n,\mathbb{R}} = \begin{cases} \{c_{n,0}\} \cup \{c_{n,j}, s_{n,j}\}_{j=1}^{m-1} \cup \{c_{n,m}\} & \text{si } 2 \mid n, \\ \{c_{n,0}\} \cup \{c_{n,j}, s_{n,j}\}_{j=1}^m & \text{si } 2 \nmid n. \end{cases}$$

De manera similar a como se demostró el Teorema 1.4, se tiene lo siguiente.

Teorema 1.8. $F_{n,\mathbb{R}}$ es una base ortonormal para el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.³

Simplificará mucho la notación considerar en general el sistema

$$\{c_{n,0}\} \cup \{c_{n,j}, s_{n,j}\}_{j=1}^m, \quad (31)$$

y, en el caso en el n que sea par, recordar que el último vector seno $s_{n,m}$ es el vector cero (por lo que en realidad no debería agregarse, pero incluirlo en los cálculos no afectará).

Definición 1.9. Fijado un vector $x \in \mathbb{R}^n$, definimos su **Transformada Discreta de Fourier Real** como el vector $\hat{x}$ de coeficientes de x respecto a la BON $F_{n,\mathbb{R}}$.

Es decir, $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ es tal que

$$\hat{x}[0] = \langle x, c_{n,0} \rangle \in \mathbb{R}, \quad (32)$$

y, para toda $1 \leq j \leq m$,

$$\hat{x}[2j-1] = \langle x, c_{n,j} \rangle, \quad \hat{x}[2j] = \langle x, s_{n,j} \rangle \in \mathbb{R}. \quad (33)$$

Según conveniencia, se puede incluir el caso $j = m$ para n par.

La herramienta básica para el análisis oscilatorio de señales es la TDF, que se analiza con ayuda del espectro de la señal. La gráfica del espectro se denomina espectrograma.

³Considerando coeficientes complejos, $F_{n,\mathbb{R}}$ también es una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$.

Definición 1.10. Definimos el **espectro** de un vector $x \in \mathbb{R}^n$ como el vector $\sigma(x) \in \mathbb{R}^{m+1}$ con entradas

$$\sigma(x)[0] = |\hat{x}[0]|^2, \quad (34)$$

y, para toda $1 \leq j \leq m$,

$$\sigma(x)[j] = |\hat{x}[2j-1]|^2 + |\hat{x}[2j]|^2. \quad (35)$$

Por la discusión anterior, las TDF compleja y real de un vector $x \in \mathbb{R}^n$ se relacionan como

$$\sigma(x)[0] = |\mathcal{F}_n(x)[0]|^2,$$

y

$$\forall 1 \leq j \leq m: \quad \sigma(x)[j] = |\mathcal{F}_n(x)[j]|^2 + |\mathcal{F}_n(x)[n-j]|^2.$$

Claramente, la Identidad de Parseval se reescribe en términos del espectro como

$$\|x\|^2 = \sum_{j=0}^M \sigma(x)[j] = \|\sigma(x)\|_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n: \quad (36)$$

2 El Fenómeno de Wilbraham-Gibbs

El fenómeno de Wilbraham-Gibbs es un efecto bien estudiado que ocurre en relación al comportamiento de las series de Fourier. Bajo ciertas hipótesis sobre la regularidad de la función periódica, siendo las más clásicas las de Dirichlet-Jordan o Dini-Lipschitz, se tiene convergencia puntual de la serie de Fourier. Estas condiciones se pueden generalizar al caso de una discontinuidad de salto finito, imponiendo regularidad a ambos lados. Si se refuerzan las hipótesis (pidiendo mayor regularidad), se puede asegurar la convergencia uniforme de la serie de Fourier a la función. Es bien conocido que esto es necesario, pues la mera continuidad no asegura la convergencia, como mostró du Bois-Reymond (véase [41], [42], [43]).

Es evidente que la convergencia de la serie de Fourier, caso de haberla, en el entorno de un punto en que la función tiene una discontinuidad de salto finito, no puede ser uniforme, ya que esto implicaría la continuidad de la función en dicho punto. En su lugar, la magnitud relativa del error de aproximación de las sumas parciales de Fourier con respecto al tamaño del salto permanece por encima de un valor fijo, aunque “acercándose” al punto de discontinuidad a medida que se toman más sumandos. La historia de este fenómeno, y el papel de la “onda cuadrada” (“square wave”) o la función “dientes de sierra” (“saw tooth”) como ejemplos destacados, y la función “seno integral” $Si(t) = \int_0^t \sin s/s \, ds$, que en ella tienen, es muy interesante (véase [76], [82], [92], [17]).

Fenómenos análogos se dan también en la Transformada de Fourier (véase [82], [17]) y en otros sistemas de representación o esquemas aproximativos, donde también han sido estudiados (véase [50], [123], [124], [82], [144], [5], [145], [49], [83], [116], [9], [67], [10], [11], [12], entre otros). El diseño de métodos de filtrado para reducir el efecto de este fenómeno, como el uso de medias de Fejér o de Lanczos, es un tema con extensa literatura

dedicada a ello en el procesamiento de señales, y que sigue en desarrollo, lo que muestra su complejidad y relevancia (véase por ejemplo [81], [63], [82], [106], [132], [155], [103], [146], [24], [156], [80], [3], [92], [2], entre muchos otros).

Este fenómeno también se da en el ámbito multidimensional, en el que ha sido estudiado desde el punto de vista teórico y práctico; en particular, se ha estudiado cómo reducir este fenómeno (véase [40], [101], [22], [58], [59], [60], [61], [109], [110], [27], [82], [73], [74], [125], [7], [3]). En otros contextos multidimensionales, más allá del Análisis de Fourier clásico, se ha estudiado este fenómeno: en el caso de sistemas ortogonales, como los sistemas de ondículas ([82], [86], [126], [96]), funciones radiales ([111], [85]), series de Fourier fraccionarias ([159], [32], [160]), funciones de Fourier-Bessel ([44]), etc. Desde el punto de vista de las aplicaciones, se ha sacado provecho a las características de este fenómeno, especialmente en el procesamiento de imágenes, por ejemplo para la detección de “bordes” y “contornos” (discontinuidades 2D) en imágenes ([82], [88]). Otras aplicaciones presentes en la literatura se dan en la solución de ecuaciones diferenciales ([138], [33], [139]) o en el estudio de los espacios de elementos finitos ([140], [77]).

En relación con la Transformada Discreta de Fourier, en [70] (véase también [71], [72], [82]) se estudió la aparición de este fenómeno en la interpolación trigonométrica de una función a partir de sus valores en una malla uniforme finita, haciendo uso de la TDF como coeficientes de la interpolación. En estos trabajos se muestra que la magnitud del fenómeno de Wilbraham-Gibbs en este caso depende de la ubicación del punto de la discontinuidad con respecto a los nodos de la malla (para más detalles, véase [70], [82]).

En esta sección, nos proponemos explorar el caso netamente finito. Es decir, cuando se tiene una señal en $\mathbb{C}^n$, provenga o no de un muestreo, y se le aplica la TDF. A priori, es razonable conjeturar que, siendo el ambiente discreto una aproximación de los objetos continuos, pueda darse un fenómeno similar.

Las sumas parciales discretas de Fourier

En principio, en el caso finito, parece no ser necesario el considerar sumas parciales, ya que todo vector se puede reconstruir exactamente con una suma finita. Sin embargo, en varias tareas de procesamiento de señales, como pueden ser el análisis espectral, la limpieza, compresión, etc., es frecuente el uso de aproximaciones basadas en la TDF. Un ejemplo destacado es el de los filtros de paso bajo, que filtran únicamente las frecuencias bajas de la señal. El caso más sencillo es el de las sumas parciales.

Vamos a estudiar los operadores de suma parcial de Fourier discretos. Dado $n \in \mathbb{N}$, denotamos $m = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Nos restringimos al caso $n = 2m + 1$ impar, por simplicidad (el caso n par es análogo). Dado J entero con $0 \leq J \leq m$, definimos el espacio $V_0 = \text{span}\{\mathbf{1}_n\}$, es decir, el espacio de vectores constantes, y para $J \geq 1$

$$V_J = \text{span}\{\mathbf{1}_n, c_{n,j}, s_{n,j} : 1 \leq j \leq J\}. \quad (37)$$

Claramente $\dim V_J = 2J + 1$, y $V_m = \mathbb{C}^n$.

Definimos el J -ésimo operador de suma parcial discreto de Fourier como la proyección ortogonal sobre V_J : $S_J = \Pi_{V_J}$. Así, dados $x = (x[k])_{k=0}^{n-1} \in \mathbb{C}^n$ y $1 \leq J \leq m$, el J -ésimo

operador de suma parcial discreto es

$$S_J x = \hat{x}[0] c_{n,0} + \sum_{j=1}^J (\hat{x}[2j-1] c_{n,j} + \hat{x}[2j] s_{n,j}). \quad (38)$$

Para $J = 0$, simplemente $S_0 x = \hat{x}[0] c_{n,0}$. Ahora, si $0 \leq k < n$ y $1 \leq J \leq m$, se tiene

$$\begin{aligned} S_J x[k] &= \frac{\hat{x}[0]}{\sqrt{n}} + \sum_{j=1}^J \left[\hat{x}[2j-1] \sqrt{\frac{2}{n}} \cos\left(2\pi \frac{jk}{n}\right) + \hat{x}[2j] \sqrt{\frac{2}{n}} \sin\left(2\pi \frac{jk}{n}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\mu=0}^{n-1} x[\mu] + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^J \left[\sum_{\mu=0}^{n-1} x[\mu] \cos\left(2\pi \frac{j\mu}{n}\right) \cos\left(2\pi \frac{jk}{n}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\mu=0}^{n-1} x[\mu] \sin\left(2\pi \frac{j\mu}{n}\right) \sin\left(2\pi \frac{jk}{n}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\mu=0}^{n-1} x[\mu] \left[1 + 2 \sum_{j=1}^J \left(\cos\left(2\pi \frac{j\mu}{n}\right) \cos\left(2\pi \frac{jk}{n}\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin\left(2\pi \frac{j\mu}{n}\right) \sin\left(2\pi \frac{jk}{n}\right) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\mu=0}^{n-1} x[\mu] \left[1 + 2 \sum_{j=1}^J \cos\left(2\pi \frac{j(k-\mu)}{n}\right) \right]. \end{aligned}$$

Esto nos lleva a definir los núcleos de Dirichlet discretos D_J . Es conveniente definirlos en los enteros. Si $J = 0$, simplemente $D_J[\mu] = 1/n$ para todo $\mu \in \mathbb{Z}$. Ahora, si $1 \leq J \leq m$ y $\mu \in \mathbb{Z}$, definimos

$$D_J[\mu] = \frac{1}{n} \left[1 + 2 \sum_{j=1}^J \cos\left(2\pi \frac{j\mu}{n}\right) \right].$$

De acuerdo a lo anterior, se tiene

$$S_J x = x * D_J.$$

Es claro que los núcleos son n -periódicos: $D_J[\mu + n] = D_J[\mu]$ para todo $\mu \in \mathbb{Z}$, luego su definición en $\mathbb{Z}$ es simplemente por conveniencia en la notación. Además, son simétricos: $D_J[-\mu] = D_J[\mu]$ para todo $\mu \in \mathbb{Z}$. Por otro lado, si $\mu \in \mathbb{Z}$ y $1 \leq J \leq m$, tenemos

$$D_J[\mu] = \frac{1}{n} \left[1 + \sum_{j=1}^J \left(e^{2\pi i \frac{j\mu}{n}} + e^{-2\pi i \frac{j\mu}{n}} \right) \right] = \frac{1}{n} \sum_{j=-J}^J e^{2\pi i \frac{j\mu}{n}}.$$

Claramente $D_J[0] = \frac{2J+1}{n}$, mientras que si $\mu \neq 0$, sumando una suma geométrica se tiene

$$D_J[\mu] = \frac{1}{n} \frac{e^{-2\pi i \frac{J\mu}{n}} - e^{2\pi i \frac{(J+1)\mu}{n}}}{1 - e^{2\pi i \frac{\mu}{n}}} = \frac{1}{n} \frac{e^{-\pi i \frac{(2J+1)\mu}{n}} - e^{\pi i \frac{(2J+1)\mu}{n}}}{e^{-\pi i \frac{\mu}{n}} - e^{\pi i \frac{\mu}{n}}} = \frac{1}{n} \frac{\sin\left(\pi \frac{(2J+1)\mu}{n}\right)}{\sin\left(\pi \frac{\mu}{n}\right)}.$$

Es fácil ver que para el caso n par las expresiones son las mismas.

En resumen, hemos demostrado el resultado siguiente.

Teorema 2.1. Sean $n \geq 2$ entero y $m = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Entonces:

1. Los núcleos de Dirichlet discretos D_J están dados por:

$$D_J[\mu] = \frac{1}{n} \left[1 + 2 \sum_{j=1}^J \cos\left(2\pi \frac{j\mu}{n}\right) \right] = \frac{1}{n} \sum_{j=-J}^J e^{2\pi i \frac{j\mu}{n}} \quad (39)$$

si $1 \leq J \leq m$ y $\mu \in \mathbb{Z}$, y $D_0[\mu] = 1/n$ para todo $\mu \in \mathbb{Z}$ si $J = 0$. Para el caso $n = 2m$ y $J = m$, la fórmula anterior se debe sustituir por

$$D_m[\mu] = \frac{1}{n} \left[1 + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \cos\left(2\pi \frac{j\mu}{n}\right) + \cos\left(2\pi \frac{m\mu}{n}\right) \right] = \frac{1}{n} \sum_{j=-(m-1)}^m e^{2\pi i \frac{j\mu}{n}}.$$

2. La expresión anterior resulta ser $D_J[\mu] = \frac{2J+1}{n}$ si $\mu \in n\mathbb{Z}$, y en caso contrario,

$$D_J[\mu] = \frac{1}{n} \frac{\sin\left(\pi \frac{(2J+1)\mu}{n}\right)}{\sin\left(\pi \frac{\mu}{n}\right)}. \quad (40)$$

Para el caso $n = 2m$ y $J = m$, la fórmula anterior no es válida, pero se tiene $D_m[\mu] = \delta_{0,\mu}$ para todo $\mu \in \mathbb{Z}$.

3. Para todo $\mu \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq J \leq m$ se tiene

$$D_J[\mu + n] = D_J[\mu] \quad \text{y} \quad D_J[-\mu] = D_J[\mu]. \quad (41)$$

4. Para $0 \leq J \leq m$ y todo $x = (x[k])_{k=0}^{n-1} \in \mathbb{C}^n$ el J -ésimo operador de suma parcial discreto de Fourier aplicado a x cumple

$$S_J x = x * D_J. \quad (42)$$

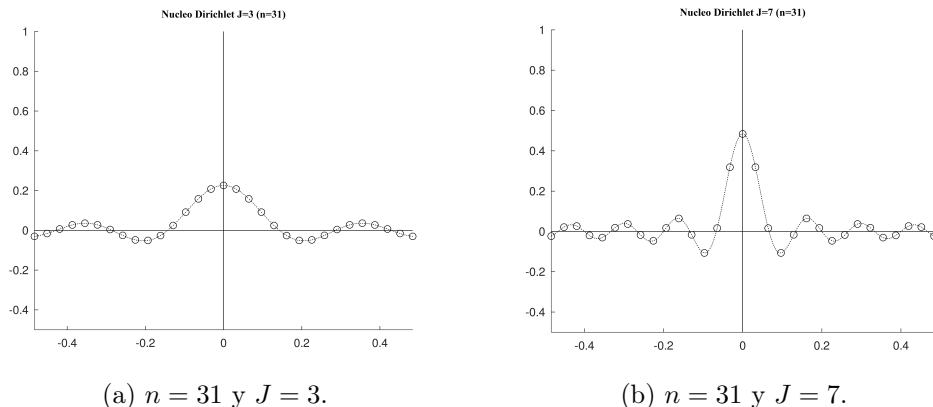


Figura 3: Núcleos de Dirichlet discretos.

En la Figura 3 y la Figura 4 se han graficado algunos núcleos de Dirichlet discretos para $n = 31$. Realmente se trata de n -uplas, marcadas con círculos en las figuras. Las líneas discontinuas marcan la curva extendiendo la fórmula en (40) para $t \in [-m/n, m/n]$, de manera que los puntos $t = \mu/n$ coinciden con el núcleo.

Es fácil ver que si $J = m$, $D_m[\mu] = \delta_{\mu,0}$, luego $S_m x = x * D_m = x$, en coherencia con el Teorema 1.4. En general, D_J (para $0 \leq \mu < n$) se va aproximando a e_0 a medida que J crece hasta m . Es sencillo comprobar que $|D_J|$ para $1 \leq J < m$ tiene su máximo absoluto en los puntos $\mu \in n\mathbb{Z}$. Entre cada uno de estos nodos la señal oscila con una amplitud decreciente a medida que se acerca al punto intermedio, que está en $n\mathbb{Z} + n/2$, que no está en la malla si n es impar. Concretamente, restringiéndonos al intervalo entre 0 y n , el punto medio $n/2$ está cercano a m , siendo igual a este si n es par, mientras que si n es impar se tiene $m < n/2 < m + 1$. Es conveniente fijar nuestra atención en un periodo con centro en el origen. Si $n = 2m + 1$, este puede ser $-m \leq \mu \leq m$, mientras que si $n = 2m$, se puede tomar $-m < \mu \leq m$. La oscilación proviene del término $\sin(\pi(2J + 1)\mu/n)$, de frecuencia mayor que la sinusoidal en el divisor. Por otra parte, la amplitud viene dada por el resto, $1/n \sin(\pi\mu/n)$. En particular, si μ está cercano a m , y por tanto a $n/2$, se tiene $1/n \sin(\pi\mu/n) \sim 1/n$. En toda esta discusión, es clara la analogía con la teoría de las series de Fourier, y los núcleos de Dirichlet clásicos.

El fenómeno de Wilbraham-Gibbs en la TDF

En esta subsección vamos a argumentar que en la TDF, concretamente al aproximar una señal $x \in \mathbb{R}^n$ con sus sumas parciales discretas de Fourier, ocurre un fenómeno análogo al de Wilbraham-Gibbs. A priori, esto no tiene ningún sentido, ya que el fenómeno trata de la convergencia de las sumas parciales de Fourier en el entorno de una discontinuidad de salto finito, y aquí no tiene sentido ni la convergencia ni la noción de discontinuidad

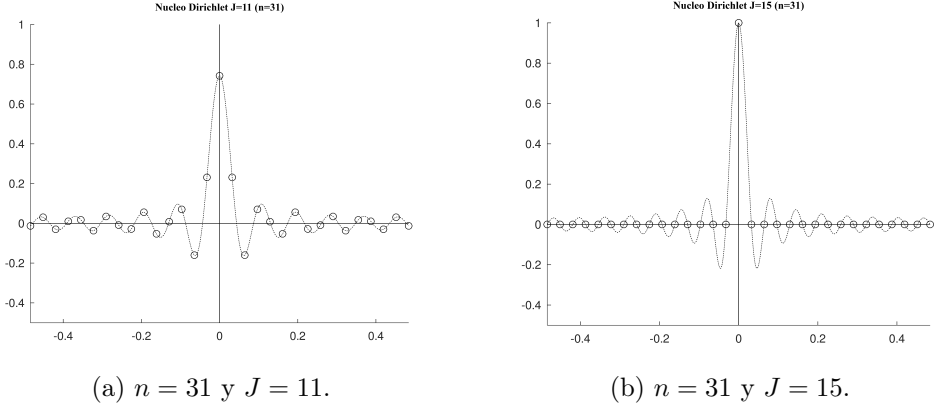


Figura 4: Núcleos de Dirichlet discretos.

(la señal x es finita). Sobre la primera objeción, simplemente estudiaremos qué ocurre con los valores de las sumas parciales discretas de Fourier $S_J x$ a medida que J crece hasta m , en las posiciones aledañas a un nodo concreto de la malla. Sobre la segunda, asumiremos que entre dos nodos consecutivos de la malla temporal el salto de la señal $x_{k_0} - x_{k_0-1}$ es notablemente mayor que el resto de saltos, al menos para los nodos cercanos, y no despreciable con respecto a la magnitud de la señal. No incidiremos mucho en estos detalles técnicos, haciendo hincapié en las ideas esenciales. Lo que sigue, pues, será una discusión en cierto modo informal.

En primer lugar, argumentamos que sin pérdida de generalidad se puede asumir que el punto medio de los valores del salto es nulo: esto es, $(x_{k_0} + x_{k_0-1})/2 = 0$, o $x_{k_0-1} = -x_{k_0}$. Esto es así ya que el añadir una constante a una señal no afecta la variación de las sumas parciales discretas. Efectivamente, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $y = \alpha \mathbf{1}_n$, como $y \in V_0 \subset V_J$ para $1 \leq J \leq m$, se tiene $S_J y = S_0 y = y$. Puesto que los operadores de suma parcial discretos son lineales, simplemente se añade el valor α a todas las componentes, lo que no altera sus diferencias. Concretamente, si $\alpha = (x_{k_0} + x_{k_0-1})/2$ y definimos $z = x - y$, para $1 \leq J \leq m$ tenemos $S_J z = S_J x - y$, y por tanto $S_J z[k] = S_J x[k] - \alpha$ para $0 \leq k < n$, mientras que $z[k_0] = (x_{k_0} - x_{k_0-1})/2$ y $z[k_0 - 1] = -(x_{k_0} - x_{k_0-1})/2$.

Tomemos ahora el análogo discreto de la señal cuadrada. Por simplicidad, suponemos n impar. Definimos pues $x = \sum_{k=m}^{2m} e_k - \sum_{k=0}^{m-1} e_k \in \mathbb{R}^n$. Es decir, $x[k] = -1$ si $0 \leq k < m$ y $x[k] = 1$ si $m \leq k \leq 2m$, teniendo un salto de magnitud 2 entre los nodos $k = m-1$ y $k = m$. Obviamente el ejemplo se puede reescalar para obtener el salto requerido. Analicemos las sumas parciales discretas de Fourier de x . Claramente $S_0 x[k] = \frac{m+1-m}{n} = 1/n$ para todo k . Asumimos ahora $1 \leq J \leq m$. Fijémonos en primer lugar en el nodo m . Usando (42) y (41), tenemos

$$S_J x[m] = x * D_J[m] = \sum_{\mu=0}^{n-1} x[\mu] D_J[m - \mu] = \sum_{\nu=-m}^m x[m + \nu] D_J[-\nu] =$$

$$= \sum_{\nu=-m}^m x[m+\nu]D_J[\nu] = D_J[0] + \sum_{\nu=1}^m D_J[\nu] - \sum_{\nu=-m}^{-1} D_J[\nu] = D_J[0] = \frac{2J+1}{n}.$$

Así, en el nodo m la discrepancia es

$$x[m] - S_J x[m] = 1 - \frac{2J+1}{n},$$

que se va reduciendo linealmente a medida que J crece hasta m .

Procedemos de manera análoga para el nodo $m-1$. Sin embargo, esta vez al agrupar los sumandos que se cancelan, aparecen otros términos aparte del principal.

$$\begin{aligned} S_J x[m-1] &= x * D_J[m-1] = \sum_{\mu=0}^{n-1} x[\mu]D_J[m-1-\mu] = \\ &= \sum_{\nu=-m}^m x[m+\nu]D_J[-1-\nu] = \sum_{\nu=-m}^m x[m+\nu]D_J[\nu+1] = \\ &= \sum_{\nu=1}^{m-1} D_J[\nu] + \sum_{\nu=m}^{m+1} D_J[\nu] - D_J[0] - \sum_{\nu=-(m-1)}^{-1} D_J[\nu] = \\ &= - \left(D_J[0] - \sum_{\nu=m}^{m+1} D_J[\nu] \right). \end{aligned}$$

Así, en el nodo $m-1$ la discrepancia es

$$x[m-1] - S_J x[m-1] = - \left(1 - \frac{2J+1}{n} \right) - \sum_{\nu=m}^{m+1} D_J[\nu].$$

Puesto que $|D_J[m]|, |D_J[m+1]| \sim 1/n$, esta cantidad es muy cercana al opuesto de la anterior.

Veamos ahora qué ocurre en nodos cercanos. Fijemos λ con $1 \leq \lambda \leq m/2$, y estudiemos qué ocurre en el nodo $m+\lambda$.

$$\begin{aligned} S_J x[m+\lambda] &= \sum_{\mu=0}^{n-1} x[\mu]D_J[m+\lambda-\mu] = \sum_{\nu=-m}^m x[m+\nu]D_J[\lambda-\nu] = \\ &= \sum_{\nu=2\lambda+1}^m D_J[\lambda-\nu] + \sum_{\nu=0}^{2\lambda} D_J[\lambda-\nu] - \sum_{\nu=-m+2\lambda}^{-1} D_J[\lambda-\nu] - \sum_{\nu=-m}^{-m+2\lambda-1} D_J[\lambda-\nu] = \\ &= \sum_{\eta=\lambda-m}^{-\lambda-1} D_J[\eta] + \sum_{\eta=-\lambda}^{\lambda} D_J[\eta] - \sum_{\eta=\lambda+1}^{m-\lambda} D_J[\eta] - \sum_{\eta=m+1-\lambda}^{m+\lambda} D_J[\eta] = \end{aligned}$$

$$= \sum_{\eta=-\lambda}^{\lambda} D_J[\eta] - \sum_{\eta=m+1-\lambda}^{m+\lambda} D_J[\eta].$$

El agrupamiento realizado es como sigue. Hay un bloque central de $2\lambda + 1$ nodos, para $m \leq \mu \leq m + 2\lambda$, que es el que aporta el término principal ($\sum_{\eta=-\lambda}^{\lambda} D_J[\eta]$). A ambos lados de este, hay dos bloques de $m - 2\lambda$ nodos ($m + 2\lambda < \mu \leq 2m$ y $2\lambda \leq \mu < m$), que se cancelan mutuamente por la simetría, y un bloque residual de 2λ nodos ($0 \leq \mu < 2\lambda$), que se espera sea del orden de a lo sumo $2\lambda/n$ si λ es pequeño, sin contar además las posibles cancelaciones en la suma por las oscilaciones del núcleo. Así, en el nodo $m + \lambda$ la discrepancia es

$$x[m + \lambda] - S_J x[m + \lambda] = 1 - \sum_{\eta=-\lambda}^{\lambda} D_J[\eta] + \sum_{\eta=m+1-\lambda}^{m+\lambda} D_J[\eta].$$

Presumiblemente, la discrepancia será mayor cuando λ sea tal que los nodos del bloque central ($|\eta| \leq \lambda$) sean los del lóbulo principal del núcleo, y las cancelaciones debidas a la oscilación del núcleo no reduzcan el valor de la suma principal. Esto merece un análisis detallado. Si asumimos $|\eta| \leq m$, los nodos del lóbulo principal cumplen $\pi(2J+1)|\eta|/n < \pi$, lo que equivale a $|\eta| < n/(2J+1)$. Es fácil ver que si $|\eta| \leq 1$ esto siempre ocurre, mientras que si $|\eta| = 2$ solo ocurre si $J < (n-2)/4$. Así, si $J \geq (n-2)/4$, solo los tres nodos centrales están en el lóbulo principal. Por otra parte, los lóbulos secundarios, con valores negativos, comprenden los nodos que satisfacen $\pi < \pi(2J+1)|\eta|/n < 2\pi$, lo que equivale a $n/(2J+1) < |\eta| < 2n/(2J+1)$. Es fácil ver que si $|\eta| = 2$, esto ocurre precisamente cuando $J > (n-2)/4$, luego estos nodos ($|\eta| = 2$) están únicamente en el lóbulo principal, o en los secundarios. Así pues, podemos centrarnos en el valor $\lambda = 1$. En este caso, se tiene

$$\sum_{\eta=-1}^1 D_J[\eta] = \frac{2J+1}{n} + \frac{2}{n} \frac{\sin\left(\pi \frac{2J+1}{n}\right)}{\sin(\pi/n)} \sim \frac{2J+1}{n} + \frac{2}{\pi} \sin\left(\pi \frac{2J+1}{n}\right)$$

si n es grande.

Finalmente, en el lado izquierdo ocurre algo similar. Como antes, supongamos $1 \leq \lambda \leq (m-1)/2$. Se tiene

$$\begin{aligned} S_J x[m - \lambda - 1] &= \sum_{\mu=0}^{n-1} x[\mu] D_J[m - \lambda - 1 - \mu] = \sum_{\nu=-m}^m x[m + \nu] D_J[-\lambda - 1 - \nu] = \\ &= \sum_{\eta=-m-\lambda-1}^{-\lambda-1} D_J[\eta] - \sum_{\eta=-\lambda}^{m-\lambda-1} D_J[\eta] = \sum_{\eta=\lambda+1}^{m+\lambda+1} D_J[\eta] - \sum_{\eta=\lambda+1-m}^{\lambda} D_J[\eta] = \\ &= \sum_{\eta=\lambda+1}^{m-\lambda-1} D_J[\eta] + \sum_{\eta=m-\lambda}^{m+\lambda+1} D_J[\eta] - \sum_{\eta=-\lambda}^{\lambda} D_J[\eta] - \sum_{\eta=\lambda+1-m}^{-\lambda-1} D_J[\eta] = \end{aligned}$$

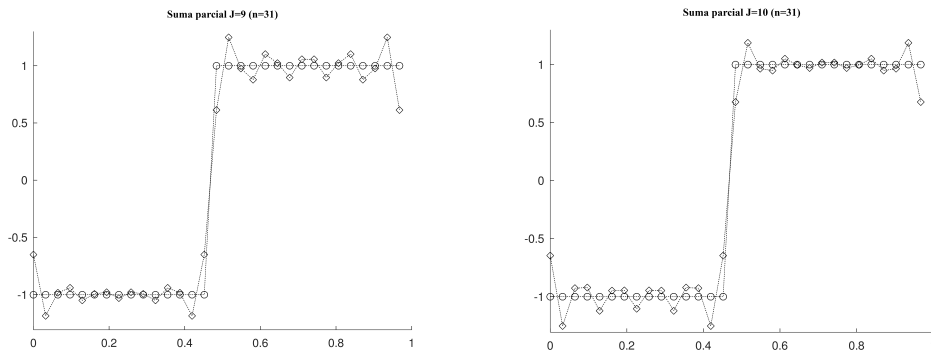


Figura 5: La señal cuadrada (círculo) y sus sumas parciales (rombo) para $n = 31$.

$$= - \left(\sum_{\eta=-\lambda}^{\lambda} D_J[\eta] - \sum_{\eta=m-\lambda}^{m+\lambda+1} D_J[\eta] \right).$$

En este caso, el agrupamiento realizado es como sigue: hay un bloque central de $2\lambda+1$ nodos, para $m-2\lambda-1 \leq \mu < m$, aportando el término principal $\sum_{\eta=-\lambda}^{\lambda} D_J[\eta]$; dos bloques a ambos lados de este de $m-2\lambda-1$ nodos ($m \leq \mu \leq 2m-2\lambda-2$ y $0 \leq \mu \leq m-2\lambda-2$), que se cancelan mutuamente por la simetría; y un bloque residual de $2\lambda+2$ nodos ($2m-2\lambda-1 \leq \mu \leq 2m$). Así, en el nodo $m-\lambda-1$ la discrepancia es

$$x[m-\lambda-1] - S_J x[m-\lambda-1] = - \left(1 - \sum_{\eta=-\lambda}^{\lambda} D_J[\eta] \right) - \sum_{\eta=m-\lambda}^{m+\lambda+1} D_J[\eta].$$

El análisis es similar al anterior.

En la Figura 5 y la Figura 6 se han graficado la señal cuadrada para $n = 31$, junto con algunas sumas parciales. Se puede apreciar el comportamiento alrededor de los dos saltos de la señal, que se dan entre los nodos $k = 15, 16$, en el centro, y $k = 0, 30$, en los extremos. Es notable la magnitud y el signo de la discrepancia en cada caso, dependiendo del lado del salto en el que esté el nodo y la distancia con este.

Este estudio se limita a una señal cuadrada. Sin embargo, bajo ciertas hipótesis sobre una señal genérica, puede argumentarse que este análisis es en cierto grado aplicable con más generalidad, como ocurre en el caso continuo del fenómeno de Wilbraham-Gibbs [82]. La idea básica es que debido a la propiedad de concentración del núcleo de Dirichlet discreto, el comportamiento se vuelve local. Nótese la similitud con el Principio de localización de Riemann para las series de Fourier [43].

En la Figura 7 se han graficado la señal dientes de sierra para $n = 31$, dada por $x[k] = k/n - 1/2$ ($0 \leq k < n$), junto con algunas sumas parciales. Se puede apreciar que el

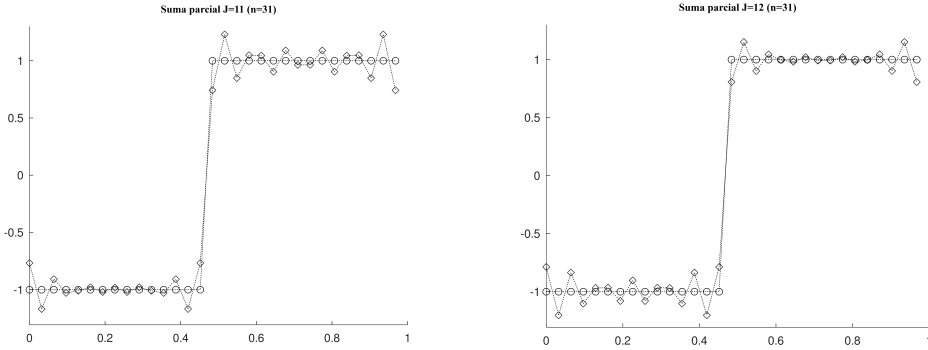


Figura 6: La señal cuadrada (círculo) y sus sumas parciales (rombo) para $n = 31$.

ritmo de aproximación de las sumas parciales discretas a la señal es sensiblemente más lento alrededor del salto, que se da entre los nodos $k = 0, 30$, en los extremos. En la Figura 8 se han graficado una señal sinusoidal, dada por $x[k] = \cos(2\pi\omega k/n)$ ($0 \leq k < n$) con $n = 31$ y $\omega = 3.5$. El salto se ubica entre los dos extremos ($k = 0, 30$), debido a que la frecuencia no es entera. Se puede apreciar la tendencia a acercarse al punto medio de los valores en los extremos $((x[0] + x[n - 1])/2)$, que se va corrigiendo a medida que J crece.

3 El Principio de Incertidumbre

Fue W. Heisenberg quien introdujo en [69] por primera vez, en forma de experimento mental, el Principio de Incertidumbre. En este artículo plantea que, si se quiere hablar de la acción de “determinar la posición de un electrón” (o, en general, de una partícula “muy pequeña” para la que, como se había evidenciado ya experimentalmente en su época, las leyes de la mecánica clásica no daban buenos resultados), se debe proponer un experimento que permita realizar dicha acción. Una de sus propuestas es usar un microscopio de rayos gamma para ubicarlo. Se argumenta que el hacer más precisa la medición espacial obligará a hacer cada vez más pequeña la longitud de onda del rayo de luz, siendo una consecuencia inevitable de esto la perturbación del momento (llamado “impulso” en su artículo) del electrón. Es decir, el querer precisar un aspecto del electrón (a saber, su posición) implica el tener menos información sobre otro (en este caso, su momento). Poco después, H. Weyl (véase [148]) planteó en términos matemáticos esta situación y demostró teóricamente el resultado. Sobre esta historia desde un enfoque matemático, puede consultarse [48].

La formulación matemática del resultado, conocido como Desigualdad de Heisenberg, de Heisenberg-Weyl, de Heisenberg-Pauli-Weyl, etc. (atribuida a Weyl, Kennard, o a Pauli, véase [87], [148], [119], [48], [65], [102]), es la siguiente:

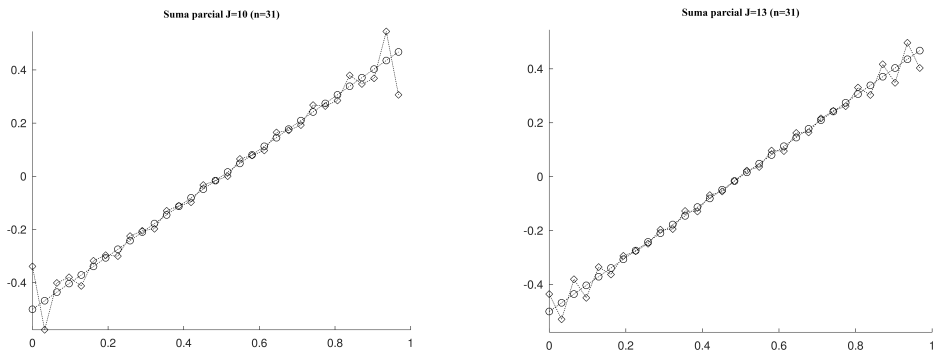


Figura 7: La señal dientes de sierra (círculo) y sus sumas parciales (rombo) para $n = 31$.

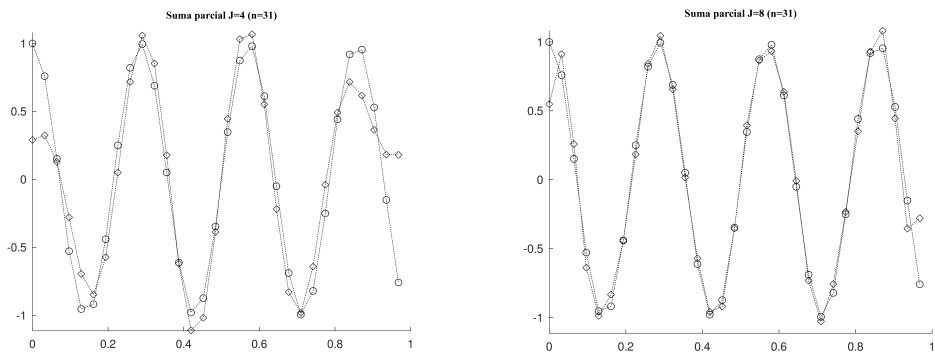


Figura 8: Una señal sinusoidal (círculo) y sus sumas parciales (rombo) para $n = 31$.

Teorema 3.1. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $\|f\|_2 = 1$. Denotemos $\hat{f}$ a la transformada de Fourier de f . Definimos

$$M(|f|^2) := \int_{\mathbb{R}} x \cdot |f(x)|^2 dx \quad y \quad M(|\hat{f}|^2) := \int_{\mathbb{R}} \xi \cdot |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi, \quad (43)$$

y también

$$V(|f|^2) := \int_{\mathbb{R}} |x - M(|f|^2)|^2 \cdot |f(x)|^2 dx \quad (44)$$

y

$$V(|\hat{f}|^2) := \int_{\mathbb{R}} |\xi - M(|\hat{f}|^2)|^2 \cdot |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \quad (45)$$

Entonces

$$V(|f|^2) \cdot V(|\hat{f}|^2) \geq \frac{1}{16\pi^2}. \quad (46)$$

Una explicación simplificada de este fenómeno en términos modernos sería como sigue⁴ (véase [48], [65]). Fijamos una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $\|f\|_2 = 1$, interpretada de manera que $\int_a^b |f(x)|^2 dx$ es la probabilidad de que la partícula se ubique en el intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, es decir, $|f|^2$ es la densidad de probabilidad de la posición. En sintonía con las definiciones clásicas en probabilidad, su *media* (o *esperanza*), interpretada como la posición esperada, es $M(|f|^2)$, y su *varianza* es $V(|f|^2)$. Si la varianza es “pequeña”, entonces la función f , y por tanto la partícula, se concentra alrededor de su media (véase [26]). Si $\hat{f}$ es la transformada de Fourier de f , que por el Teorema de Plancherel cumple $\|\hat{f}\|_2 = 1$ (véase [121]), $|\hat{f}|^2$ representa la densidad de probabilidad del momento, de manera análoga a lo anterior. Análogamente, si la varianza $V(|\hat{f}|^2)$ es “pequeña”, el momento se concentra alrededor de la media $M(|\hat{f}|^2)$. Lo que la desigualdad (46) indica es que las dos varianzas no pueden ser arbitrariamente pequeñas. Por lo tanto, una concentración alta en tiempo (es decir, una varianza $V(|f|^2)$ “pequeña”) impide que se tenga también una concentración alta en frecuencia, y viceversa.

Otro teorema, esencialmente debido a Paley-Wiener (véanse [35], [48], [121], [149]), en esta línea de pensamiento es el siguiente:

Teorema 3.2. Una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ no trivial y su transformada de Fourier $\hat{f}$ no pueden tener ambas soporte compacto.

El argumento es esencialmente el siguiente: si f tiene soporte compacto, entonces uno puede derivar bajo el signo integral en la integral de Fourier que define $\hat{f}$. Esto permite comprobar que la transformada de Fourier $\hat{f}$ es de hecho una función entera (de variable compleja). Entonces, aplicando la analiticidad, si tuviera soporte compacto sería idénticamente nula. Pero en este caso, por la identidad de Plancherel, la misma f sería trivial.

Es interesante notar que no hay únicamente un principio de incertidumbre, sino multitud de ellos, que expresan de maneras diferentes la misma idea: la imposibilidad para

⁴Recomendamos también el video [164].

una función de concentrarse arbitrariamente y simultáneamente ella y su transformada de Fourier. Para otras versiones del principio de incertidumbre, véase [19], [45], [35], [131], [36], [48], [65], [37], [18], [55], [56], [99], [29], [102], [118], [107], [108], [104], [84], [149], [38], [54], [100], [1], [117], [95]. Específicamente para el caso multidimensional, véase [90], [91].

Sobre el papel de los principios de incertidumbre en el procesamiento de señales, referimos a [19], [130], [35], [36], [48], [37], [18], [118], [154]. En particular en el procesamiento de imágenes, véase [150], [30]. Es interesante ver la analogía con la partitura musical en [19] (véase [65]). A su vez, este tema está muy relacionado con uno de los problemas centrales en el Análisis de Fourier aplicado: el problema de la localización simultánea en tiempo y frecuencia. Esto consiste en buscar sistemas de representación (bases, frames, etc.) de señales que estén concentrados (lo más posible) en tiempo y en frecuencia. La motivación para esto es que así, estos sistemas permiten analizar las señales localmente en tiempo y en frecuencia, es decir, identificar dónde y cómo oscilan (véanse [130], [26], [48], [47], [65], [14], [23], [13]). Aparte de la transformada de Fourier, se han desarrollado muchas herramientas para ello, como las funciones de banda limitada, las ondas esferoidales prolata, los sistemas de Gabor, las ondículas, etc. En todos estos contextos, los principios de incertidumbre juegan un papel fundamental como limitante para la localización simultánea en tiempo y frecuencia (véanse [53], [128], [93], [94], [129], [130], [35], [26], [48], [47], [65], [37], [23], [13], [1]).

En particular, en el caso de la TDF, y en general en espacios finito-dimensionales, diversos principios de incertidumbre han sido estudiados (véanse [35], [37], [18], [99], [102], [118], [13], [149]). Veamos uno de estos principios de incertidumbre para espacios finito dimensionales, que de alguna forma es un análogo discreto (aunque más cuantitativo) del teorema 3.2.

Este establece que *el vector x y su Transformada Discreta de Fourier $\mathcal{F}_n(x)$ no pueden estar ambos “altamente concentrados”*, en términos de su soporte (véase [35]). Para formalizar esta última frase, consideremos a la “**norma**” **cero** de un vector⁵, que se define como la cantidad de entradas no cero de este, es decir,

$$\forall x \in \mathbb{C}^n : \quad \|x\|_0 := \#\{0 \leq k \leq n-1 : x[k] \neq 0\}. \quad (47)$$

Entonces, el entero $0 \leq \|x\|_0 \leq n$ es la cantidad de coeficientes no nulos (los índices corresponden al soporte de x), que son, informalmente hablando, “los que importan” para reconstruir temporalmente a x , véase (3).

A continuación, damos la prueba del Principio de Incertidumbre, siguiendo los argumentos expuestos en [35].

Teorema 3.3. (Principio de Incertidumbre) *Si $n \geq 2$ es un entero cualquiera, entonces*

$$\forall x \in \mathbb{C}^n - \{\mathbf{0}_n\} : \quad \|x\|_0 \cdot \|\mathcal{F}_n(x)\|_0 \geq n. \quad (48)$$

Demostración. Para simplificar la notación, hagamos

$$N := \|x\|_0. \quad (49)$$

⁵A pesar de lo que parece indicar el nombre, la expresión (47) no da lugar a una norma en $\mathbb{R}^n$.

Como x no es el vector cero, $1 \leq N \leq n$. Digamos que el conjunto de índices donde x no se anula es

$$T = \{0 \leq k \leq n-1 : x[k] \neq 0\} = \{\tau_\ell\}_{\ell=0}^{N-1}.$$

Fijando un $0 \leq \mu \leq n-1$, consideremos al bloque de N índices consecutivos

$$\mu + \nu, \quad 0 \leq \nu \leq N-1. \quad (50)$$

Recuérdese que estamos pensando a los índices de entradas como enteros módulo n (véase la Figura 1). Las entradas de $\mathcal{F}_n(x)$ de índices (50) son, según (24),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(x)[\mu + \nu] &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} x[k] \cdot \exp(-2\pi i(\mu + \nu)k/n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} x[k] \cdot [\exp(-2\pi i k/n)]^{\mu + \nu}. \end{aligned} \quad (51)$$

Expresando estas exponenciales como raíces n -ésimas de la unidad (véase (13)) y usando el que sólo los sumandos con índice igual a algún τ_ℓ son no cero, tenemos que

$$\forall 0 \leq \nu \leq N-1 : \quad \mathcal{F}_n(x)[\mu + \nu] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[\tau_\ell] \cdot \zeta_{-\tau_\ell}^{\mu + \nu}. \quad (52)$$

Supongamos ahora que, para toda $0 \leq \nu \leq N-1$, la entrada $\mu + \nu$ de $\mathcal{F}_n(x)$ es cero. Usando (52), esta suposición se escribe matricialmente como

$$B \cdot x_T = \mathbf{0}_N, \quad (53)$$

donde $x_T = (x[\tau_\ell])_{\ell=0}^{N-1}$ (o sea, x_T es el vector que se obtiene al retirar las entradas cero de x sin alterar el orden), y B es la matriz cuadrada

$$B := \begin{bmatrix} \zeta_{-\tau_0}^\mu & \zeta_{-\tau_1}^\mu & \cdots & \zeta_{-\tau_{N-1}}^\mu \\ \zeta_{-\tau_0}^{\mu+1} & \zeta_{-\tau_1}^{\mu+1} & \cdots & \zeta_{-\tau_{N-1}}^{\mu+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{-\tau_0}^{\mu+N-1} & \zeta_{-\tau_1}^{\mu+N-1} & \cdots & \zeta_{-\tau_{N-1}}^{\mu+N-1} \end{bmatrix}.$$

Usando propiedades de determinantes (consúltase, por ejemplo, [57]), calculamos que el determinante de la matriz B del sistema (53) es

$$\det(B) = \det(V) \cdot \prod_{\ell=0}^{N-1} \zeta_{-\tau_\ell}^\mu, \quad (54)$$

donde V es la matriz de Vandermonde (véase [78] p. 37)

$$V := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \zeta^{-\tau_0} & \zeta^{-\tau_1} & \cdots & \zeta^{-\tau_{N-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta^{N-1} & \zeta^{N-1} & \cdots & \zeta^{N-1} \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Por el rango en el que hemos tomado a los valores τ_ℓ , las entradas de la segunda fila de V son todas distintas entre sí, luego, V es invertible, es decir, su determinante no es cero. Como en la expresión (54) para $\det(B)$ los otros factores tampoco son cero, inferimos que la matriz B es invertible. Multiplicando ambos lados de la igualdad (53) por B^{-1} , llegamos a que $x_T = \mathbf{0}_N$, contradiciendo el que todas las entradas del vector x_T son no nulas. Nótese que en (51) fue importante poner a la variable de frecuencia $\mu + \nu$ (y no a la de tiempo k) como potencia, pues esto nos permitió llegar a una matriz V cuyas columnas estén compuestas por potencias consecutivas de raíces de la unidad.

Como el punto de partida μ fue arbitrario, hemos demostrado que $\mathcal{F}_n(x)$ *no puede tener N entradas cero consecutivas*.

Sea ahora $0 \leq \mu \leq N - 1$ el índice correspondiente a la primera entrada no cero de $\mathcal{F}_n(x)$. Por el Algoritmo de la División (véase [120]), existe un único entero $0 \leq r \leq N - 1$ tal que

$$n = N \cdot \lfloor n/N \rfloor + r, \quad (56)$$

entonces, a partir de la entrada μ -ésima, podemos agrupar las n entradas de $\mathcal{F}_n(x)$ en $\lfloor n/N \rfloor$ bloques consecutivos y disjuntos de cardinalidad N , en el sentido de las manecillas del reloj, como se indica en la Figura 9.

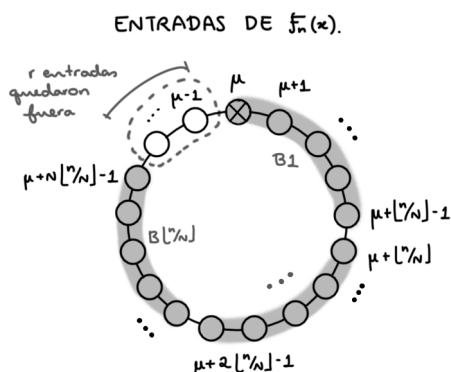


Figura 9: Se dibujan las entradas de $\mathcal{F}_n(x)$ agrupadas en bloques consecutivos de longitud N , llamados $B1, B2, \dots, BN$. Se han quedado $0 \leq r \leq N - 1$ entradas sin agrupar, estas se marcan en la figura con un contorno punteado. Se marca la entrada μ -ésima con una cruz, para indicar que no es cero.

Por lo demostrado antes, cada uno de estos bloques contendrá al menos una entrada no cero, luego,

$$\|\mathcal{F}_n(x)\|_0 \geq \lfloor n/N \rfloor. \quad (57)$$

Esta cota es suficiente para demostrar el Principio de Incertidumbre (48) cuando N divide a n (o sea, si $r = 0$ en (56)), pues, en este caso, (57) da

$$\|\mathcal{F}_n(x)\|_0 \geq \lfloor n/N \rfloor = n/N.$$

Supongamos ahora que $r \geq 1$, es decir, que las últimas r entradas de $\mathcal{F}_n(x)$ han quedado fuera de un bloque. Si al menos uno de los bloques formados contiene al menos dos entradas no cero, entonces

$$\|\mathcal{F}_n(x)\|_0 \geq \lfloor n/N \rfloor + 1 = \lceil n/N \rceil \geq n/N,$$

y también terminamos. Resta ver qué pasa si todos los bloques tienen una y solo una entrada no cero. Supongamos que las entradas sobrantes (es decir, las encerradas en línea punteada en la Figura 9) son todas cero, y que por lo tanto no se tiene la desigualdad (48). Consideremos una nueva división de las entradas de $\mathcal{F}_n(x)$ en bloques de longitud N , ahora partiendo desde la entrada $\mu - 1$, siguiendo el sentido contrario al de las manecillas del reloj, como se muestra en la Figura 10.

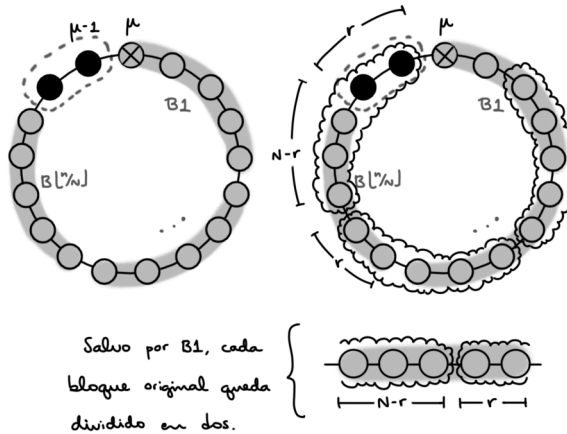


Figura 10: Con negro marcamos las entradas cero que vamos localizando.

Estos nuevos bloques se marcan con nubes en las figuras. Como se muestra en la Figura 11, en el primer bloque nuevo ya se han marcado las r entradas que estamos suponiendo son cero; como el bloque tiene longitud N , no puede estar lleno de ceros, esto implica que en la parte que este comparte con el bloque original $B[n/N]$ debe haber una entrada no cero. Como estamos suponiendo que en $B[n/N]$ hay una y solo una entrada no cero, de esto último se deduce la igualdad a cero de las primeras r entradas del bloque viejo $B[n/N]$.

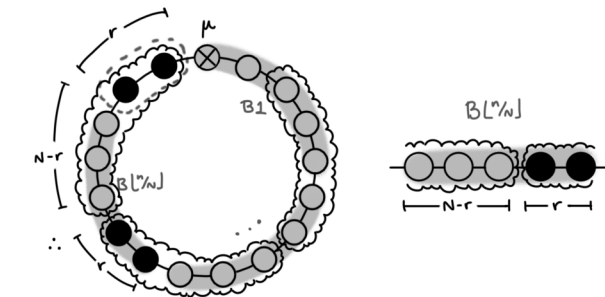


Figura 11: En base a la doble partición y las hipótesis hechas en la primera partición, vamos localizando más entradas iguales a cero.

Repitiendo este argumento un número finito de veces, llegamos a la situación marcada en la Figura 12.

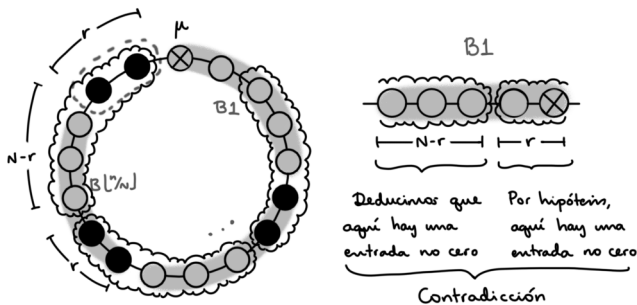


Figura 12: Al final, llegamos a una contradicción.

En la parte en común entre B_1 (el primer bloque original) y el último bloque nuevo, debe haber una entrada no cero. Pero entonces B_1 tiene al menos dos entradas no cero, a saber, la que acabamos de encontrar, y la entrada de posición μ . Hemos llegado así a una contradicción. $\square$

El Principio de Incertidumbre implica que no se puede construir un vector $x \in \mathbb{C}^n$ cuyos soportes en tiempo y frecuencia “sean ambos pequeños”. Por eso, si se discute (como hacemos aquí) este sin hacer referencia a ramas de la física, a veces se le denomina el “teorema producto de tiempo-ancho de banda” (véase [26]).

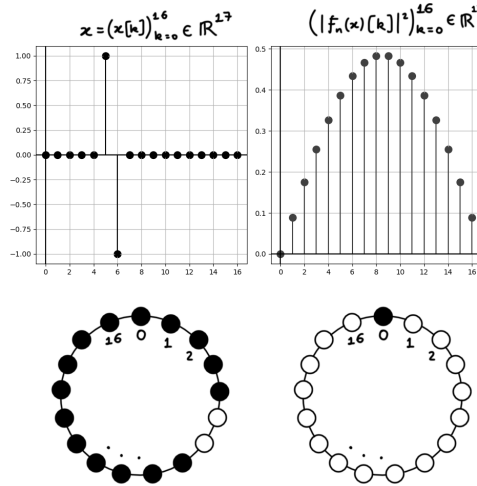


Figura 13: Se muestra la gráfica de un vector $x \in \mathbb{R}^{17}$ concentrado en tiempo - solo dos de sus entradas no son cero. Según (48), la norma cero de su TDF debe ser al menos 9. Como se muestra en la figura, de hecho, $\|\mathcal{F}_n(x)\|_0 = 16$.

4 Fuga Espectral

La Fuga espectral (spectral leakage) es otro fenómeno bien conocido en el análisis oscilatorio de señales. Un fenómeno análogo se da también en las Series de Fourier, en esencia debido al mismo motivo: el conjunto de frecuencias priorizado en el análisis es discreto.

El esquema general es como sigue. Se parte de la idea central del Análisis de Fourier: “toda señal” es la superposición de armónicos puros, es decir, señales sinusoidales de determinada frecuencia. En el contexto de estas teorías (series de Fourier, TDF), se asume tácitamente que la representación de la señal en frecuencia (coeficientes de Fourier, discretos o finitos en cada caso), y subsecuentemente su distribución (es decir, el espectro de la señal) aporta información precisa sobre el comportamiento oscilatorio de la señal. Concretamente, la representación en frecuencia informa de la aportación respectiva de cada oscilación pura, organizado en un rango de frecuencias determinado. Llamémoslo conjunto distinguido de frecuencias. En el caso de las series de Fourier, el conjunto distinguido de frecuencias es los números enteros (o los no negativos, incluyendo la información dada por el desfase), y en el caso de la TDF, se tiene una malla finita (uniformemente distribuida) de frecuencias comprendidas entre cero y la frecuencia de Nyquist. Nótese el contraste con la Transformada de Fourier, en la que el conjunto de frecuencias es la recta real.

En [134] se puede hallar una discusión sobre el concepto de frecuencia en el Análisis armónico, donde varios de los efectos tratados en el capítulo presente se comentan. Ahí se argumenta la conveniencia y/o necesidad de la aparición de frecuencias arbitrarias en

las señales. Sin embargo, debido a la naturaleza discreta de los conjuntos distinguidos de frecuencias, no cualquier frecuencia ω cabe ahí, y ni siquiera se puede aproximar bien por frecuencias distinguidas. Esto genera una discrepancia entre los resultados del análisis oscilatorio y los resultados esperados (quizá ingenua o inocentemente). Veamos esto con detalle.

Si ω es una frecuencia distinguida, el sistema la “representa bien”. Concretamente, su representación es una δ_ω : vale la unidad para $\xi = \omega$, y se anula para el resto de frecuencias distinguidas ξ . En el caso continuo, los coeficientes de Fourier de una exponencial trigonométrica, o de una sinusoidal de frecuencia entera (cada una en el esquema correspondiente), son todos nulos salvo uno, el correspondiente a la frecuencia elegida. En el caso de la TDF ocurre lo mismo: la transformada discreta de una señal f_ω es un vector completo de ceros salvo en la posición correspondiente a ω . Análogamente se tiene para la base real con las señales $c_{n,j}$ y $s_{n,j}$.

Como el lector seguramente ya haya adivinado, matemáticamente esto se expresa de manera muy sucinta y precisa: este hecho es consecuencia de la ortogonalidad. Efectivamente, en cada caso la herramienta utilizada en el análisis constituye un sistema ortonormal en el espacio correspondiente. Para las series de Fourier, el sistema trigonométrico (ya sea el real o el complejo) es un sistema ortonormal en el espacio de Hilbert L^2 de las funciones periódicas, medibles en el sentido de Lebesgue, y de cuadrado sumable. En el caso de la TDF, los sistemas F_n y $F_{n,\mathbb{R}}$ son bases ortonormales del espacio euclídeo $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{R}^n$, como establecen los teoremas 1.4 y 1.8.

Este marco teórico funciona excelentemente para frecuencias distinguidas, pero no así para otras frecuencias. Claramente si ω no es una frecuencia distinguida, su representación no puede ser una delta. Pero entonces, ¿qué es? Como estudiaremos a continuación, su espectro se reparte completamente a lo largo del rango de frecuencias. Si bien está más concentrado alrededor del valor ω , es decir, su magnitud es mayor para las frecuencias distinguidas ξ más cercanas a ω , este desparrame tiene profundas consecuencias sobre la capacidad informativa de estas herramientas, y en particular la TDF, sobre la localización en frecuencia de las señales, es decir, sobre la identificación precisa de los modos intrínsecos de oscilación de las señales. Esto es evidente en el caso de una oscilación pura, pero también aplica a sus superposiciones, y por tanto a una gran cantidad de señales. En este sentido, la fuga espectral también está muy relacionada con el problema de localización simultánea en tiempo y frecuencia.

Nótese que por la identidad de Parseval (8), la representación espectral preserva la energía (norma) de la señal. En consecuencia, si el espectro no alcanza la magnitud suficiente para las frecuencias distinguidas cerca de ω , el resto deben participar también en el reparto, hasta completar el valor requerido para la energía total, igual a la de la señal.

El diseño de métodos de procesamiento para reducir el efecto de este fenómeno es un tema con extensa literatura dedicada a ello en el procesamiento de señales, con aplicaciones en multitud de áreas, y que sigue en desarrollo (véase por ejemplo [15], [105], [106], [153], [24], [21], [46], [97], [8], [31], [151], [157], [122], [6], [3], [112], [158], [25], [114], [89], [4], [66], [152], [62], [79], [115], [34], [20], por citar algunos trabajos recientes entre muchos otros). En particular, en el tratamiento de imágenes podemos citar a [136], [3], [143], [141], [147], entre otras.

Vamos a estudiar en detalle el espectro de una señal sinusoidal pura. Fijemos $n \in \mathbb{N}$, $m = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, $\omega \in [0, m]$ y $\phi \in [0, 1]$. Consideramos la señal $x = \tilde{c}_{n,\omega,\phi} = (\cos(2\pi(\frac{\omega k}{n} - \phi)))_{k=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Por simplicidad, consideraremos el caso n impar. Si $1 \leq j \leq m$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \hat{x}[2j-1] &= \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{\mu=0}^{n-1} \cos\left(2\pi\left(\frac{\omega\mu}{n} - \phi\right)\right) \cos\left(2\pi\frac{j\mu}{n}\right) = \\
 &= \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{e^{2\pi i(\frac{\omega\mu}{n} - \phi)} + e^{-2\pi i(\frac{\omega\mu}{n} - \phi)}}{2} \frac{e^{2\pi i\frac{j\mu}{n}} + e^{-2\pi i\frac{j\mu}{n}}}{2} = \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{n}} \left\{ e^{-2\pi i\phi} \sum_{\mu=0}^{n-1} e^{2\pi i\frac{(\omega+j)\mu}{n}} + e^{2\pi i\phi} \sum_{\mu=0}^{n-1} e^{-2\pi i\frac{(\omega+j)\mu}{n}} + \right. \\
 &\quad \left. + e^{-2\pi i\phi} \sum_{\mu=0}^{n-1} e^{2\pi i\frac{(\omega-j)\mu}{n}} + e^{2\pi i\phi} \sum_{\mu=0}^{n-1} e^{-2\pi i\frac{(\omega-j)\mu}{n}} \right\} = \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{n}} \left\{ \frac{\sin(\pi(\omega+j))}{\sin\left(\pi\frac{\omega+j}{n}\right)} \left[e^{-2\pi i\phi} e^{\pi i\frac{(\omega+j)(n-1)}{n}} + e^{2\pi i\phi} e^{-\pi i\frac{(\omega+j)(n-1)}{n}} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sin(\pi(\omega-j))}{\sin\left(\pi\frac{\omega-j}{n}\right)} \left[e^{-2\pi i\phi} e^{\pi i\frac{(\omega-j)(n-1)}{n}} + e^{2\pi i\phi} e^{-\pi i\frac{(\omega-j)(n-1)}{n}} \right] \right\} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2n}} \left\{ \frac{\sin(\pi(\omega+j))}{\sin\left(\pi\frac{\omega+j}{n}\right)} \cos\left(\pi\left(\frac{(\omega+j)(n-1)}{n} - 2\phi\right)\right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sin(\pi(\omega-j))}{\sin\left(\pi\frac{\omega-j}{n}\right)} \cos\left(\pi\left(\frac{(\omega-j)(n-1)}{n} - 2\phi\right)\right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Los cálculos anteriores no son válidos si $\omega + j = 0$ u $\omega - j = 0$, pero es fácil ver que en este caso las expresiones siguen siendo válidas si se sigue el convenio siguiente:

$$\frac{\sin(a \cdot 0)}{\sin(b \cdot 0)} := \frac{a}{b}. \quad (58)$$

De manera análoga, se llega a

$$\hat{x}[2j] = \frac{1}{\sqrt{2n}} \left\{ \frac{\sin(\pi(\omega+j))}{\sin\left(\pi\frac{\omega+j}{n}\right)} \sin\left(\pi\left(\frac{(\omega+j)(n-1)}{n} - 2\phi\right)\right) - \right.$$

$$- \frac{\sin(\pi(\omega - j))}{\sin\left(\pi\frac{\omega-j}{n}\right)} \sin\left(\pi\left(\frac{(\omega - j)(n-1)}{n} - 2\phi\right)\right) \Bigg\}.$$

Así, se tiene

$$\begin{aligned} \sigma(x)[j] &= |\hat{x}[2j-1]|^2 + |\hat{x}[2j]|^2 = \\ &= \frac{1}{2n} \left\{ \frac{\sin^2(\pi(\omega + j))}{\sin^2\left(\pi\frac{\omega+j}{n}\right)} + \frac{\sin^2(\pi(\omega - j))}{\sin^2\left(\pi\frac{\omega-j}{n}\right)} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\sin(\pi(\omega + j))}{\sin\left(\pi\frac{\omega+j}{n}\right)} \frac{\sin(\pi(\omega - j))}{\sin\left(\pi\frac{\omega-j}{n}\right)} \cos\left(2\pi\left(\omega\frac{n-1}{n} - 2\phi\right)\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2n} \left\{ \left[\frac{\sin(2\pi\frac{j+\omega}{2})}{\sin\left(2\pi\frac{j+\omega}{2n}\right)} + \frac{\sin(2\pi\frac{j-\omega}{2})}{\sin\left(2\pi\frac{j-\omega}{2n}\right)} \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\sin(2\pi\frac{j+\omega}{2})}{\sin\left(2\pi\frac{j+\omega}{2n}\right)} \frac{\sin(2\pi\frac{j-\omega}{2})}{\sin\left(2\pi\frac{j-\omega}{2n}\right)} \left[1 - \cos\left(2\pi\left(\omega\frac{n-1}{n} - 2\phi\right)\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Se aplica el convenio (58) si $\omega + j = 0$ u $\omega - j = 0$.

Es evidente que en el espectro intervienen dos cocientes de senos, que dependen de $j + \omega$ y $j - \omega$. Es conveniente introducir la notación siguiente. Definimos

$$\theta(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\sin\left(\pi\frac{t}{n}\right)} \quad (t \in \mathbb{R} \setminus n\mathbb{Z}),$$

con el convenio $\theta(t) = n$ si $t \in n\mathbb{Z}$. La función θ es par y n -periódica, debido a la simetría del seno (n es impar). En la Figura 14 se ha graficado θ para $n = 31$. Es clara la similitud con los núcleos de Dirichlet discretos.

Así, hemos demostrado el resultado siguiente.

Teorema 4.1. Sean $n \in \mathbb{N}$ impar, $m = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, $\omega \in [0, m]$, $\phi \in [0, 1]$, y $x = \tilde{c}_{n,\omega,\phi} = (\cos(2\pi(\frac{\omega k}{n} - \phi)))_{k=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Entonces si $1 \leq j \leq m$, se tiene

$$\begin{aligned} \sigma(x)[j] &= \frac{1}{2n} \left\{ [\theta(j - \omega) + \theta(j + \omega)]^2 + \right. \\ &\quad \left. - 2\theta(j - \omega)\theta(j + \omega) \left[1 - \cos\left(2\pi\left(\omega\frac{n-1}{n} - 2\phi\right)\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (59)$$

Para hacer un análisis de las implicaciones del resultado anterior, es conveniente extender la expresión de los valores enteros j a cualquier valor ξ en el intervalo $[0, m]$. Definamos

$$\tilde{\sigma}(x, \xi) = \frac{1}{2n} \left\{ [\theta(\xi - \omega) + \theta(\xi + \omega)]^2 + \right. \quad (60)$$

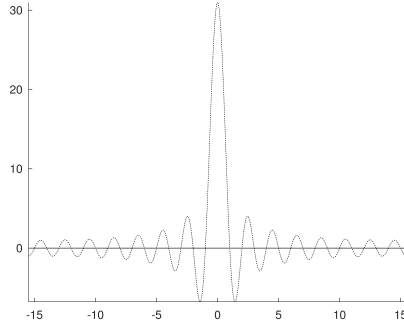


Figura 14: La función θ para $n = 31$ en el intervalo $[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}]$.

$$-2\theta(\xi - \omega)\theta(\xi + \omega) \left[1 - \cos \left(2\pi \left(\omega \frac{n-1}{n} - 2\phi \right) \right) \right] \Bigg\}$$

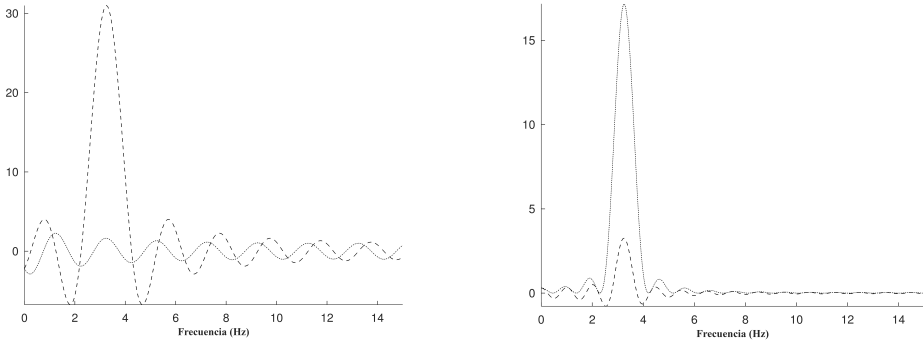
para $\xi \in [0, m]$.

En primer lugar, el término $1 - \cos \left(2\pi \left(\omega \frac{n-1}{n} - 2\phi \right) \right)$ es una constante en el intervalo $[0, 2]$, ya que ω y ϕ están fijos. Exceptuando los casos en los que ω está cerca de 0 o de m , el argumento $\xi + \omega$ no está cerca de 0 o n , ya que $\xi, \omega \in [0, m]$, luego el término $\theta(\xi + \omega)$ despliega oscilaciones de amplitud moderada (véase la Figura 14). Sin embargo, el término $\theta(\xi - \omega)$ contiene siempre al lóbulo principal de θ , cuando ξ está cercano a ω . Esto corresponde a la mayor aportación para la función $\tilde{\sigma}(x, \cdot)$ (véase la Figura 15). En consecuencia, esta función presenta un comportamiento oscilatorio, con oscilaciones moderadas en amplitud, exceptuando el entorno de ω , en el que presenta un lóbulo principal de mayor amplitud.

El comportamiento descrito es razonable e incluso grato. Sin embargo, no es todo lo bueno que uno pudiera desear. Aunque las oscilaciones van moderándose a medida que ξ se aleja de ω , tienen una gran influencia a la hora de “repartir” la masa de la señal a lo largo de todo el espectro de esta, lo que contribuye a deslocalizar el análisis en frecuencia.

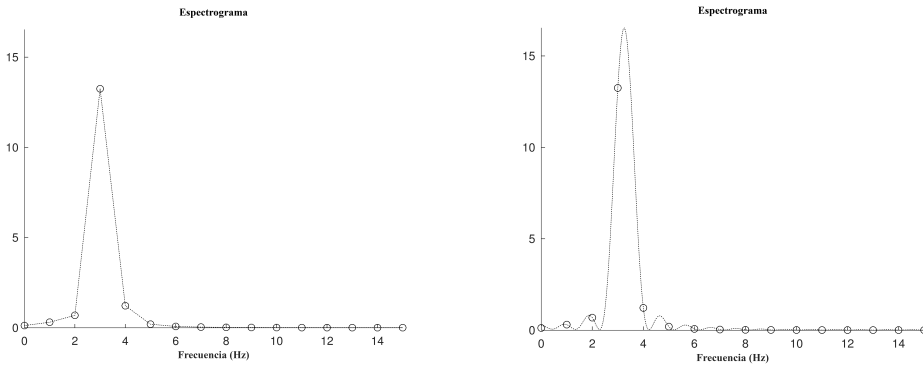
En la Figura 16 se ha graficado el espectrograma, es decir, la gráfica del espectro $\sigma(x)$, y la función $\tilde{\sigma}(x, \cdot)$ para $n = 31$, $\omega = 3.25$ y $\phi = 0$, con el espectro $\sigma(x)$ marcado con círculos. Si uno atiende nada más al espectro (Figura 16 (a)), estaría tentado a concluir que la señal tiene la mayor parte de su comportamiento oscilatorio en la frecuencia distinguida $\xi = 3$, “aderezada” con otras componentes de frecuencias distinguidas cercanas pero con una menor importancia en la representación. Si uno se deja llevar por el optimismo engendrado por las bondades de la TDF (que son muchas), hasta puede argumentar que lo anterior es cierto.

Sin embargo, un vistazo a la respuesta global en frecuencia de la señal, incluyendo las frecuencias que no han sido distinguidas por la TDF (Figura 16 (b)), resulta flagrantemente esclarecedor. Lo que la figura explica es que hay un pico en la respuesta perfectamente localizado, rodeado de unas interferencias de mucha menor amplitud, y que, en este marco, la TDF únicamente muestra una visión muy parcial y sesgada de ello. Es decir, un nodo



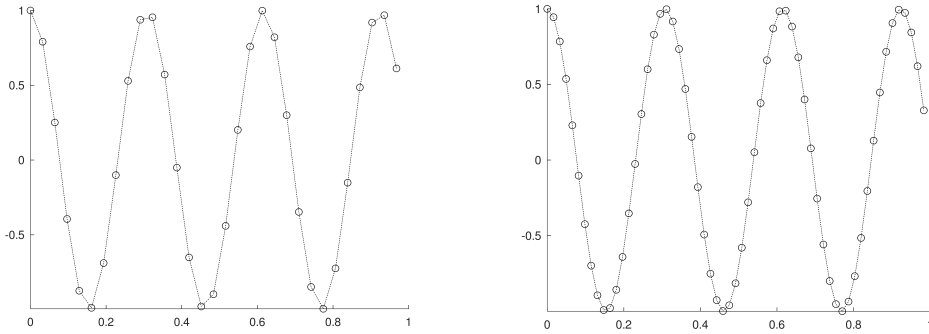
(a) Funciones $\theta(\cdot + \omega)$ (línea punteada) y $\theta(\cdot - \omega)$ (línea discontinua). (b) Funciones $(\theta(\cdot + \omega) + \theta(\cdot - \omega))^2/2n$ (línea punteada) y $2\theta(\cdot + \omega)\theta(\cdot - \omega)/n$ (línea discontinua).

Figura 15: Términos que aparecen en $\tilde{\sigma}(x, \cdot)$, para $n = 31$, $\omega = 3.25$ y $\phi = 0$.



(a) Espectrograma de x . (b) Función $\tilde{\sigma}(x, \cdot)$.

Figura 16: Espectrograma (gráfica de $\sigma(x)$) y $\tilde{\sigma}(x, \cdot)$ para $n = 31$, $\omega = 3.25$ y $\phi = 0$.



(a) Señal sinusoidal x para $n = 31$, $\omega = 3.25$ y $\phi = 0$.

(b) Señal sinusoidal x para $n = 61$, $\omega = 3.25$ y $\phi = 0$.

Figura 17: Comparación de señales sinusoidales x con $\omega = 3.25$ y $\phi = 0$, para diferente número de nodos.

más o menos cercano al pico, y un muestreo de los lóbulos secundarios, todo ejecutado de manera más o menos arbitraria.

Las causas de esto son más profundas de lo que pudiera parecer. De manera paralela a como se argumenta en [134], el problema radica en que el conjunto de frecuencias distinguidas (en este caso los enteros en $[0, m]$) viene dado de antemano por la herramienta usada para el análisis (la TDF), y por supuesto no depende ni se adapta de manera alguna a la señal analizada (una oscilación pura de frecuencia ω). En consecuencia, si ω no es una frecuencia distinguida, ni está cerca de serlo, el análisis oscilatorio está condenado a ser, al menos parcialmente, espurio.

Uno podría pensar que es una cuestión de precisión en el muestreo, y que únicamente es necesario refinar el muestreo para “capturar” con el detalle suficiente la naturaleza oscilatoria de la señal. En la Figura 17 se muestra un tal refinamiento, en el que esencialmente se ha duplicado el número de nodos. Innegablemente esto mejora la resolución temporal; el muestreo capta con mayor precisión las oscilaciones de la señal. Sin embargo, como muestra la Figura 18, el mismo problema diagnosticado anteriormente persiste. Es decir, refinar el muestreo temporal no parece mejorar la resolución en frecuencia de la señal. Si se compara la Figura 16 con la Figura 18, se comprueba que el conjunto de frecuencias consideradas en el análisis (distinguidas) se ha extendido esencialmente al doble (de $m = 15$ a $m = 30$), pero la malla en frecuencia no se ha refinado; mantiene la misma resolución de 1 Hz . En consecuencia, mantiene el mismo nivel de astigmatismo que la primera.

Veamos en detalle qué está ocurriendo. Consideremos $n \in \mathbb{N}$ como la longitud de la señal, y fijemos también $F_s \in \mathbb{N}$, interpretado como la frecuencia de muestreo (es decir, el número de nodos del muestreo por unidad de tiempo), y $T > 0$, interpretado como el ancho de la ventana temporal (es decir, la cantidad de tiempo que cubre la señal). Es evidente

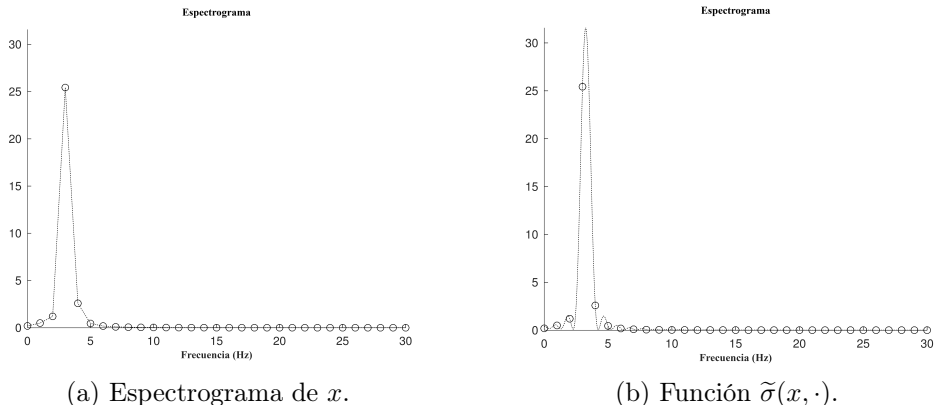


Figura 18: Espectrograma (gráfica de $\sigma(x)$) y $\tilde{\sigma}(x, \cdot)$ para $n = 61$, $\omega = 3.25$ y $\phi = 0$.

que se tiene

$$n = T F_s. \quad (61)$$

Dada una señal $x = (x[k])_{k=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n$, la interpretaremos como el muestreo de una señal de variable continua, es decir, existe una $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x[k] = f(k/F_s)$ para $k = 0, \dots, n-1$. De esta forma, se está fijando una malla temporal $\{t_k = k/F_s : 0 \leq k < n\}$, donde se ha fijado $t_0 = 0$ por convenio, y se tiene $t_{n-1} + 1/F_s = n/F_s = T$. En consecuencia, si $m = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ y $1 \leq j \leq m$, y suponiendo n impar por simplicidad, se tiene

$$\hat{x}[2j-1] = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} x[k] \cos\left(2\pi \frac{jk}{n}\right) = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) \cos(2\pi \omega_j t_k) \quad (62)$$

y

$$\hat{x}[2j] = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} x[k] \sin\left(2\pi \frac{jk}{n}\right) = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) \sin(2\pi \omega_j t_k), \quad (63)$$

donde se ha definido

$$\omega_j = j \frac{F_s}{n} = \frac{j}{T}. \quad (64)$$

Por completitud, definimos $\omega_0 = 0$. Este cambio se hace por coherencia con el convenio para la variable temporal, de manera que los valores ω_j se pueden interpretar como frecuencias, medidas en Hertz (Hz), es decir, revoluciones por unidad de tiempo. Dicho de otra forma, la elección de la unidad temporal determina la escala en frecuencia, y un reescalamiento en la primera induce necesariamente otro acorde con él en la segunda.

De esta manera se obtiene la malla en frecuencia $\{\omega_j = j/T : 0 \leq j \leq m\}$. Nótese que se tiene

$$\omega_m + \frac{1}{2T} = \frac{n}{2T} = \frac{F_s}{2}.$$

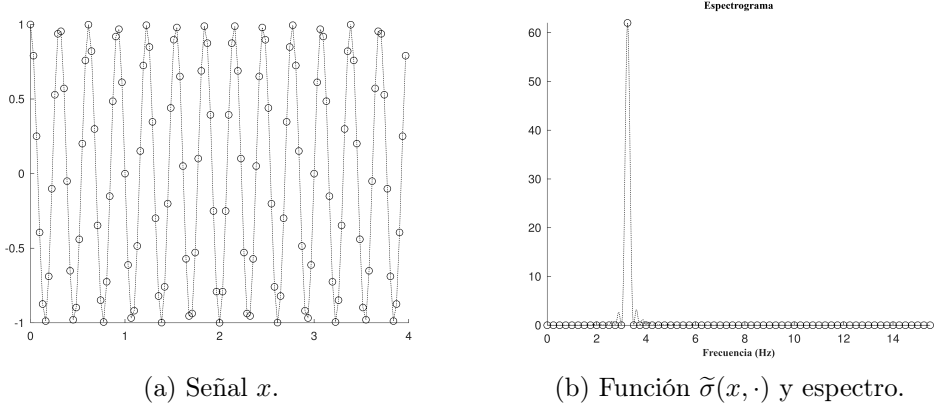


Figura 19: Señal sinusoidal x para $n = 124$, $T = 4$, $F_s = 31$, $\omega = 3.25$ y $\phi = 0$, y la función $\tilde{\sigma}(x, \cdot)$ con el espectro marcado con círculos.

En el caso n par, la interpretación es análoga, pero se tiene

$$\omega_m = \frac{n}{2T} = \frac{F_s}{2}.$$

En resumen, la malla en frecuencia es esencialmente una malla uniforme del intervalo $[0, F_s/2]$. Conviene notar que este valor $F_s/2$ es precisamente la frecuencia de Nyquist.

Como consecuencia de esta interpretación de la señal, suponiendo fijada la unidad de medida temporal, se tiene que para refinar la malla en frecuencia es necesario incrementar el muestreo (aumentar n), pero manteniendo la frecuencia de muestreo F_s . Esto equivale a aumentar el ancho T de la ventana temporal. Nótese que el paso en tiempo es $1/F_s$, y el paso en frecuencia $1/T$. En resumen, aumentar T es la única forma de refinar la malla en frecuencia. Por eso, en ocasiones se habla de “windowing effect”, que hace referencia al problema de “escoger” de manera adecuada la ventana a analizar. Obviamente, cuanto más grande sea T mejor será la resolución en frecuencia. Claro está que esto hace aumentar n , la longitud de la muestra, y por muy bien que funcione la TRF, esto tiene una consecuencia clara, la demanda de recursos computacionales. Por consiguiente, se llega a un problema de optimización interesante.

En la Figura 19 se muestra la señal $x = \left(\cos \left(2\pi \left(\frac{\omega k}{F_s} - \phi \right) \right) \right)_{k=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n$, donde $\omega = 3.25$, $\phi = 0$, $T = 4$, $F_s = 31$ y por tanto $n = 124$, y su espectro. Efectivamente, se trata del mismo armónico puro, con la misma frecuencia que los ejemplos anteriores, pero muestreada en el intervalo temporal $[0, 4]$. En la Figura 19 (a) es patente la interpretación de la frecuencia: en cada intervalo de longitud 1 la señal “completa” 3.25 ciclos. Al refinar la malla de frecuencias, con $T = 4$, se tiene que la frecuencia característica de la señal cumple $\omega = 3.25 = 13/4 = \omega_{13}$, y por tanto ahora sí se encuentra en la malla (ahora sí es distinguida). Esto se aprecia perfectamente en la Figura 19 (b): el espectro

captura nítidamente la información oscilatoria de la señal, con un único modo de vibración, localizado en la frecuencia de oscilación $\omega = 3.25$.

Esto nos recuerda una lección importante sobre la TDF: el conjunto de frecuencias distinguidas, consideradas en el análisis, se corresponde con las sinusoidales que completan un número entero de ciclos en el intervalo de tiempo $[0, T]$ (acotadas por la frecuencia de Nyquist), y solo estas serán adecuadamente localizadas en frecuencia en el análisis. Cualquier otra oscilación pura, correspondiente a una frecuencia no distinguida (dentro del rango dado por la frecuencia de Nyquist) no será representada fielmente en el análisis, expresándose como una superposición de modos relativos a la malla de frecuencias distinguidas, tivamente localizada alrededor de esta. El alcance de este fenómeno no se limita a las señales puramente sinusoidales, pues debido a la linealidad de la transformada esto se extiende a toda señal finita⁶, aunque con énfasis por su interpretación intrínseca en las constituidas por un número pequeño y fácilmente identificable de modos de vibración puros (véase [15], [105], [97], [8], [112]).

Así pues, la elección de la frecuencia de muestreo F_s , que determina la frecuencia de Nyquist $F_s/2$, límite superior de la malla de frecuencias y por tanto cota para las frecuencias altas detectables, y el ancho de la ventana temporal T , que determina la resolución en frecuencia del análisis, son decisivos a la hora de aplicar exitosamente la TDF para el análisis oscilatorio de señales. La validez de la representación de la señal con base en su análisis espectral es irrefutable, pues es el contenido del Teorema 1.4. Su adecuación, según el caso, como explicación de un posible fenómeno oscilatorio, ha sido brevemente discutida aquí, quedando a juicio del lector.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la SECIHTI el soporte financiero de su actividad académica. En particular, ABC a través del Programa de Becas Nacionales para Estudios de Posgrado (Convocatoria 2024 -1) y MSB a través del Programa Investigadoras e Investigadores por México.

Los gráficos han sido realizados usando los lenguajes de programación GNU Octave [166] y Python [167].

Referencias

- [1] L. D. Abreu y M. Speckbacher, *Donoho-Logan large sieve principles for the continuous wavelet transform*, arXiv preprint arXiv:2210.13056 (2022).
- [2] S. Amat, J. Ruíz, S.-W. Shu y J. C. Trillo, *On a class of splines free of Gibbs phenomenon*, ESAIM Math. Model. Numer. Anal. **55** (2021), S29–S64.

⁶Aunque el espectro no es lineal, los coeficientes discretos de Fourier sí.

- [3] I. Amidror, *Mastering the discrete Fourier transform in one, two or several dimensions: pitfalls and artifacts*, Vol. 43, Springer, Berlin (2013).
- [4] F. Antunes y L. B. Felix, *Comparison of signal preprocessing techniques for avoiding spectral leakage in auditory steady-state responses*, Res. Biomed. Eng. **35.3** (2019), 251–256.
- [5] N. Atreas y C. Karanikas, *Gibbs phenomenon on sampling series based on Shannon's and Meyer's wavelet analysis*, J. Fourier Anal. Appl. **5.6** (1999), 575–588.
- [6] E. Bala, J. Li y R. Yang, *Shaping spectral leakage: A novel low-complexity transceiver architecture for cognitive radio*, IEEE Veh. Technol. Mag. **8.3** (2013), 38–46.
- [7] G. Benke, *The Gibbs Phenomenon in Higher Dimensions*, Harmonic Analysis and Applications: In Honor of John J. Benedetto. Birkhäuser Boston, MA (2006), 3–16.
- [8] G. D. Bergland, *A guided tour of the fast Fourier transform*, IEEE Spectrum **6.7** (1969), 41–52.
- [9] E. Berriochoa, A. Cachafeiro y J. Díaz, *Gibbs phenomenon in the Hermite interpolation on the circle*, Appl. Math. Comput. **253** (2015), 274–286.
- [10] E. Berriochoa, A. Cachafeiro y J. M. García-Amor, *Gibbs–Wilbraham phenomenon on Lagrange interpolation based on analytic weights on the unit circle*, J. Comput. Appl. Math. **365** (2020), 112376.
- [11] E. Berriochoa, A. Cachafeiro, J. M. García-Amor y H. García-Rábade, *The Gibbs–Wilbraham phenomenon in the approximation of $|x|$ by using Lagrange interpolation on the Chebyshev–Lobatto nodal systems*, J. Comput. Appl. Math. **414** (2022), 114403.
- [12] E. Berriochoa, A. Cachafeiro, H. García-Rábade y J. M. García-Amor, *A note on Lagrange interpolation of $|x|$ on the Chebyshev and Chebyshev–Lobatto nodal systems: the even cases*, Mathematics **10.15** (2022), 2558.
- [13] D. Bhati, R. B. Pachori y V. M. Gadre, *A novel approach for time–frequency localization of scaling functions and design of three-band biorthogonal linear phase wavelet filter banks*, Digit. Signal Process. **69** (2017), 309–322.
- [14] B. Boashash, *Time-frequency signal analysis and processing: a comprehensive reference*, Academic Press (2015).
- [15] A. Breitenbach, *Against spectral leakage*, Measurement **25.2** (1999), 135–142.
- [16] E. O. Brigham, *The Fast Fourier Transform and Its Applications*, Prentice-Hall, NJ (1988).

- [17] R. Brigola, *Fourier Analysis and Distributions*, Texts in Applied Mathematics **79**, Springer (2025).
- [18] A. Bruckstein y M. Elad, *A generalized uncertainty principle and sparse representation in pairs of $\mathbb{R}^N$ bases*, IEEE Trans. Inf. Theory **48** (2002), 2558–2567.
- [19] N. G. de Bruijn, *Uncertainty principles in Fourier analysis*, Inequalities: proceedings of a symposium held at Wright-Patterson air force base, Ohio. Academic Press Inc. (1967).
- [20] E. A. Budkina et al., *A Method to Reduce the Spectrum Leakage Effect*, 7th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE). IEEE (2025).
- [21] K. F. Chen, J. T. Jiang y S. Crowsen, *Against the long-range spectral leakage of the cosine window family*, Comput. Phys. Commun. **180.6** (2009), 904–911.
- [22] M.-T. Cheng, *The Gibbs phenomenon and Bochner’s summation method (II)*, Duke Math. J. **17** (1950), 477–490.
- [23] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhäuser (2016).
- [24] E. Chu, *Discrete and continuous Fourier transforms: analysis, applications and fast algorithms*, Chapman and Hall/CRC (2008).
- [25] T. Claeys et al., *An iterative interpolated DFT to remove spectral leakage in time-domain near-field scanning*, IEEE Trans. Electromagn. Compat. **60.1** (2017), 202–210.
- [26] L. Cohen, *Time-frequency analysis*, Englewood Cliffs (1995).
- [27] L. Colzani y M. Vignati, *The Gibbs phenomenon for multiple Fourier integrals*, J. Approx. Theory **80.1** (1995), 119–131.
- [28] J. W. Cooley, *The re-discovery of the fast Fourier transform algorithm*, Microchim. Acta **93.1** (1987), 33–45.
- [29] S. Dahlke et al., *The uncertainty principle associated with the continuous shearlet transform*, Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. **6.02** (2008), 157–181.
- [30] P. Dang y S. Wang, *Uncertainty principles for images defined on the square*, Math. Methods Appl. Sci. **40.7** (2017), 2475–2490.
- [31] C. F. Depizzol y C. J. Munaro, *Contributions to the problem of automatic detection of oscillations in control loops*, X Simpósio Bras. Automação Intel. (2011), 1316–1321.

- [32] M. Ding y H. Zhu, *Two-Dimensional gibbs phenomenon for fractional fourier series and its resolution*, Int. Conf. on Artificial Intelligence and Computational Intelligence. Springer Berlin Heidelberg (2012).
- [33] B. Dodson, *Global existence for some radial, low regularity nonlinear Schrödinger equations*, J. Funct. Anal. **258.7** (2010), 2373–2421.
- [34] G.-S. Dong et al., *An improved approach for compressive sensing of vibration signals considering spectral leakage effect*, Struct. Health Monit. (2025), 14759217251323201.
- [35] D. L. Donoho y P. B. Stark, *Uncertainty principles and signal recovery*, SIAM J. Appl. Math. **49** (1989), 906–931.
- [36] D. L. Donoho y B. F. Logan, *Signal recovery and the large sieve*, SIAM J. Appl. Math. **52.2** (1992), 577–591.
- [37] D. L. Donoho y X. Huo, *Uncertainty principles and ideal atomic decomposition*, IEEE Trans. Inf. Theory **47.7** (2001), 2845–2862.
- [38] K. Dubey, *The fourier uncertainty principles*, The University of Chicago (2021).
- [39] P. Duhamel y M. Vetterli, *Fast Fourier transforms: a tutorial review and a state of the art*, Signal Process. **19.4** (1990), 259–299.
- [40] D. C. Duncan, *On Gibbs phenomenon for the double Fourier series*, M.A. Thesis, University of Cincinnati (1925).
- [41] J. Duoandikoetxea, *Lecciones sobre las series y transformadas de Fourier*, UNAN-Managua (2003).
- [42] J. Duoandikoetxea, *200 años de convergencia de las series de Fourier*, La Gaceta de la RSME **10.3** (2007), 651–658.
- [43] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, **29**, American Mathematical Society (2024). Traducción al español: *Análisis de Fourier*, Addison-Wesley Iberoamericana, Madrid (1995).
- [44] T. H. Fay y P. H. Kloppers, *The Gibbs’phenomenon for Fourier-Bessel series*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. **34.2** (2003), 199–217.
- [45] C. L. Fefferman, *The uncertainty principle*, Bull. Amer. Math. Soc. **9.2** (1983), 129–206.
- [46] L. B. Felix, A. M. F. L. Miranda de Sá, E. M. A. Marçal Mendes y M. F. D. Moraes, *Post-processing of auditory steady-state responses to correct spectral leakage*, J. Neurosci. Methods **181.1** (2009), 145–149.

- [47] P. Flandrin, *Time-frequency/time-scale analysis*, **10**, Academic Press (1998).
- [48] G. B. Folland y A. Sitaram, *The uncertainty principle: a mathematical survey*, J. Fourier Anal. Appl. **3.3** (1997), 207–238.
- [49] B. Fornberg y N. Flyer, *The Gibbs phenomenon for radial basis functions*, The Gibbs Phenomenon in Various Representations and Applications (2007), 201–224.
- [50] J. Foster y F. B. Richards, *Gibbs-Wilbraham splines*, Constr. Approx. **11.1** (1995), 37–52.
- [51] S. H. Friedberg, A. J. Insel y L. E. Spence, *Linear algebra*, Prentice Hall (1997).
- [52] M. Frigo y S. G. Johnson, *The design and implementation of FFTW3*, Proc. IEEE **93.2** (2005), 216–231.
- [53] D. Gabor, *Theory of communication*, J. Inst. Electr. Eng. **93** (1946), 429–457.
- [54] W.-B. Gao y B.-Z. Li, *Uncertainty principles for the short-time linear canonical transform of complex signals*, Digit. Signal Process. **111** (2021), 102953.
- [55] S. S. Goh y T. N. T. Goodman, *Uncertainty principles and asymptotic behavior*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **16.1** (2004), 19–43.
- [56] S. S. Goh y T. N. T. Goodman, *Uncertainty principles in Banach spaces and signal recovery*, J. Approx. Theory **143.1** (2006), 26–35.
- [57] J. S. Golan, *Foundations of linear algebra*, Springer Science & Business Media (2013).
- [58] B. I. Golubov, *On the Gibbs phenomenon for Riesz spherical means of multiple Fourier series and Fourier integrals*, Anal. Math. **1.1** (1975), 31–53.
- [59] B. I. Golubov, *On Gibbs'phenomenon for Riesz spherical means of multiple Fourier integrals and Fourier series*, Anal. Math. **4.4** (1978), 269–287.
- [60] B. I. Golubov, *On Abel–Poisson type and Riesz means*, Anal. Math. **7.3** (1981), 161–184.
- [61] B. I. Golubov, *Multiple Fourier series and integrals*, J. Sov. Math. **24.6** (1984), 639–673.
- [62] T. A. Goodman, *Geometric approaches to the pitch estimation of acoustic musical signals*, Diss. University of Birmingham (2022).
- [63] D. Gottlieb y C.-W. Shu, *On the Gibbs phenomenon and its resolution*, SIAM Rev. **39.4** (1997), 644–668.
- [64] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Springer (2014).

- [65] K. Gröchenig, *Foundations of time-frequency analysis*, Springer Science & Business Media (2001).
- [66] K. Hájek, *The Causes of Leakage Deviations from Sinc Function in DFT and Ways to Minimize Them*, Adv. Mil. Technol. **15.2** (2020), 317–328.
- [67] K. Hamm, *On the Gibbs–Wilbraham Phenomenon for Sampling and Interpolatory Series*, Proc. Edinb. Math. Soc. **62.4** (2019), 1163–1171.
- [68] M. T. Heideman, D. H. Johnson y C. S. Burrus, *Gauss and the history of the fast Fourier transform*, Arch. Hist. Exact Sci. (1985), 265–277.
- [69] W. Heisenberg, *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*, Z. Phys. **43** (1927), 172–198.
- [70] G. Helmborg, *The Gibbs phenomenon for Fourier interpolation*, J. Approx. Theory **78.1** (1994), 41–63.
- [71] G. Helmborg, *A limit function for equidistant Fourier interpolation*, J. Approx. Theory **81.3** (1995), 389–396.
- [72] G. Helmborg y P. Wagner, *Manipulating Gibbs’phenomenon for Fourier interpolation*, J. Approx. Theory **89.3** (1997), 308–320.
- [73] G. Helmborg, *A corner point Gibbs phenomenon for Fourier series in two dimensions*, J. Approx. Theory **100.1** (1999), 1–43.
- [74] G. Helmborg, *An edge point Gibbs phenomenon for Fourier series in two dimensions*, Monatsh. Math. **139.3** (2003), 221–225.
- [75] P. Henrici, *Fast Fourier methods in computational complex analysis*, SIAM Rev. **21.4** (1979), 481–527.
- [76] E. Hewitt y R. E. Hewitt, *The Gibbs–Wilbraham phenomenon: an episode in Fourier analysis*, Arch. Hist. Exact Sci. (1979), 129–160.
- [77] H. T. Honório et al., *A machine learning-based stabilized finite element formulation for the mean stress computation in linear elasticity and coupled poroelasticity*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **449** (2026), 118515.
- [78] R. A. Horn y C. R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press (2012).
- [79] X. Huang et al., *Frequency estimation based on progressive spectral leakage shrinking for multi-tone signals*, Mech. Syst. Signal Process. **211** (2024), 111200.
- [80] D. Izquierdo, M. C. López de Silanes y M. C. Parra, *Reduction of Gibbs phenomenon for 1D RBF interpolation*, Monogr. Mat. García Galdeano **37** (2012), 149–159.

- [81] A. Jerri, *Integral and discrete transforms with applications and error analysis*, Marcel Dekker, Inc. **162** (1992).
- [82] A. J. Jerri, *The Gibbs phenomenon in Fourier analysis, splines and wavelet approximations*, Springer Science & Business Media **446** (1998).
- [83] A. J. Jerri, *Advances in The Gibbs Phenomenon*, Sampling Publishing (2007).
- [84] R. Jing et al., *The N -dimensional uncertainty principle for the free metaplectic transformation*, Mathematics **8.10** (2020), 1685.
- [85] J.-H. Jung, *A note on the Gibbs phenomenon with multiquadric radial basis functions*, Appl. Numer. Math. **57.2** (2007), 213–229.
- [86] C. Karanikas, *Gibbs phenomenon in wavelet analysis*, Results Math. **34.3** (1998), 330–341.
- [87] E. H. Kennard, *Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen*, Z. Phys. **44** (1927), 326–352.
- [88] A. Khurram y D. W. Kammler, *Numerical Generation of Images for the Gibbs Phenomenon Near a Corner in the Plane*, Diss. Southern Illinois University Carbondale (2003).
- [89] B. Kim y J. A. Abraham, *Spectral leakage-driven loopback scheme for prediction of mixed-signal circuit specifications*, IEEE Trans. Ind. Electron. **66.1** (2018), 586–594.
- [90] A. Krivoshein, E. Lebedeva y J. Prestin, *A directional uncertainty principle for periodic functions*, Multidimens. Syst. Signal Process. **30.3** (2019), 1489–1515.
- [91] A. V. Krivoshein, E. A. Lebedeva y J. Prestin, *A directional periodic uncertainty principle*, 13th International conference on Sampling Theory and Applications (SampTA). IEEE (2019).
- [92] C. Lanczos, *Discourse on Fourier series*, Society for Industrial and Applied Mathematics (2016).
- [93] H. J. Landau y H. O. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty–II*, Bell Syst. Tech. J. **40.1** (1961), 65–84.
- [94] H. J. Landau y H. O. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, fourier analysis and uncertainty–III: the dimension of the space of essentially time-and band-limited signals*, Bell Syst. Tech. J. **41.4** (1962), 1295–1336.
- [95] N. Li, L. Shang y Z. Zhang, *On Uncertainty Principles for Lowband Graph Signals*, Asia Pacific Signal and Information Processing Association Annual Summit and Conference (APSIPA ASC). IEEE (2023).

- [96] R. Lombardini et al., *Higher-order wavelet reconstruction/differentiation filters and Gibbs phenomena*, J. Comput. Phys. **305** (2016), 244–262.
- [97] D. A. Lyon, *The discrete fourier transform, part 4: spectral leakage*, J. Object Technol. **8.7** (2009).
- [98] V. K. Madisetty y I. T. Young, *The Digital Signal Processing Handbook-3 Volume Set*, CRC press (2018).
- [99] S. Massar y P. Spindel, *Uncertainty relation for the discrete Fourier transform*, Phys. Rev. Lett. **100.19** (2008), 190401.
- [100] A. Mazarguil, L. Oudre y N. Vayatis, *An uncertainty principle for lowband graph signals*, IEEE Signal Process. Lett. **29** (2022), 727–731.
- [101] M. E. Mullings, *Gibbs phenomenon in the double Fourier series*, Ph.D. Thesis, University of Cincinnati (1931).
- [102] S. Nam, *An uncertainty principle for discrete signals*, arXiv preprint arXiv:1307.6321 (2013).
- [103] A. Nersessian y N. Hovhannisyan, *Minimization of errors of the polynomial-trigonometric interpolation with shifted nodes*, Preprint of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Armenia (2007).
- [104] F. Nicola y S. I. Trapasso, *A note on the HRT conjecture and a new uncertainty principle for the short-time Fourier transform*, J. Fourier Anal. Appl. **26.4** (2020), 68.
- [105] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer y J. R. Buck, *Discrete-time signal processing*, Prentice Hall (1999).
- [106] C. Pan, *Gibbs phenomenon removal and digital filtering directly through the fast Fourier transform*, IEEE Trans. Signal Process. **49.2** (2001), 444–448.
- [107] R. Parhizkar, Y. Barbotin y M. Vetterli, *Sequences with minimal time-frequency uncertainty*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **38.3** (2015), 452–468.
- [108] N. Perraudin et al., *Global and local uncertainty principles for signals on graphs*, APSIPA Trans. Signal Inf. Process. **7** (2018), e3, 1–26.
- [109] M. A. Pinsky, *Fourier inversion for multidimensional characteristic functions*, J. Theor. Probab. **6.1** (1993), 187–193.
- [110] M. A. Pinsky, *Pointwise Fourier inversion in several variables*, Notices Amer. Math. Soc. **42.3** (1995), 330–334.

- [111] M. A. Pinsky, N. K. Stanton y P. E. Trapa, *Fourier series of radial functions in several variables*, J. Funct. Anal. **116.1** (1993), 111–132.
- [112] K. M. M. Prabhu, *Window functions and their applications in signal processing*, Taylor & Francis (2014).
- [113] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling y B. P. Flannery, *Numerical recipes: the art of scientific computing*, Cambridge University Press, 3rd edition (2007).
- [114] W. Qian, Y. Xiao y R. Yong, *Spectrum leakage suppression for multi-frequency signal based on DFT*, 13th IEEE International Conference on Electronic Measurement & Instruments (ICEMI). IEEE (2017).
- [115] C.-X. Qu et al., *Structural damping ratio identification with iterative compensation for spectral leakage errors using frequency domain decomposition*, Eng. Struct. **321** (2024), 119027.
- [116] K. Raean, *A study of the Gibbs phenomenon in Fourier series and wavelets*. Tesis, University of New Mexico (2008).
- [117] J. P. G. Ramos y M. Sousa, *Fourier uniqueness pairs of powers of integers*, J. Eur. Math. Soc. **24** (2022), 4327–4351.
- [118] B. Ricaud y B. Torr  sani, *A survey of uncertainty principles and some signal processing applications*, Adv. Comput. Math. **40.3** (2014), 629–650.
- [119] H. P. Robertson, *The uncertainty principle*, Phys. Rev. **34.1** (1929), 163–164.
- [120] J. J. Rotman, *Advanced modern algebra*, American Mathematical Soc. (2010), p. 15.
- [121] W. Rudin, *An  lisis funcional*, Revert   (2012).
- [122] R. Scheffer-Teixeira et al., *On high-frequency field oscillations ($> 100\text{Hz}$) and the spectral leakage of spiking activity*, J. Neurosci. **33.4** (2013), 1535–1539.
- [123] H.-T. Shim y H. O. Kim, *On Gibb’s phenomenon for sampling series in wavelet subspaces*, Appl. Anal. **61.1-2** (1996), 97–109.
- [124] H.-T. Shim, *On the Gibbs phenomenon for the Shannon sampling series in wavelet subspaces and a way to go around*, Commun. Korean Math. Soc. **13.1** (1998), 181–193.
- [125] H.-T. Shim y C.-H. Park, *Jump discontinuity in two dimensions*, J. Appl. Math. Informatics **16.1_2** (2004), 613–620.
- [126] H.-T. Shim, H. Volkmer y G. G. Walter, *Gibbs’phenomenon in higher dimensions*, J. Approx. Theory **145.1** (2007), 20–32.

- [127] K. Shin y J. Hammond, *Fundamentals of signal processing for sound and vibration engineers*, John Wiley & Sons (2008).
- [128] D. Slepian y H. O. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty-I*, Bell Syst. Tech. J. **40.1** (1961), 43–63.
- [129] D. Slepian, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis, and uncertainty-V: The discrete case*, Bell Syst. Tech. J. **57.5** (1978), 1371–1430.
- [130] D. Slepian, *Some comments on Fourier analysis, uncertainty and modeling*, SIAM Rev. **25.3** (1983), 379–393.
- [131] K. T. Smith, *The uncertainty principle on groups*, SIAM J. Appl. Math. **50.3** (1990), 876–882.
- [132] S. Smith, *Digital signal processing: a practical guide for engineers and scientists*, Newnes (2003).
- [133] J. O. Smith, *Mathematics of the discrete Fourier transform (DFT): with audio applications*, W3K Publishing, WA, second edition (2007).
- [134] M. Soto-Bajo, A. Fraguera Collar y J. Herrera-Vega, *On the Concept of Frequency in Signal Processing: A Discussion [Perspectives]*, IEEE Signal Process. Mag. **40.6** (2023), 18–25.
- [135] M. Soto-Bajo y A. Fraguera Collar, *Reflexiones a propósito de la historia de la Transformada Rápida de Fourier*, Spinor, VIEP, BUAP **46** (2023), 7–10.
- [136] J. Spetzler y J. Trampert, *Implementing spectral leakage corrections in global surface wave tomography*, Geophys. J. Int. **155.2** (2003), 532–538.
- [137] L. Tan y J. Jiang, *Digital signal processing: fundamentals and applications*, Academic Press (2018).
- [138] M. Taylor, *Short time behavior of solutions to linear and nonlinear Schrödinger equations*, Can. J. Math. **60.5** (2008), 1168–1200.
- [139] M. Taylor, *Gibbs Phenomena and Pinsky Phenomena for Nonlinear Schrödinger Equations*, Notas.
- [140] M. F. P. ten Eikelder et al., *Constraints for eliminating the Gibbs phenomenon in finite element approximation spaces*, Math. Models Methods Appl. Sci. **34.02** (2024), 345–384.
- [141] N. Tomen y J. C. van Gemert, *Spectral leakage and rethinking the kernel size in cnns*, Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (2021).

- [142] C. Van Loan, *Computational frameworks for the fast Fourier transform*, Society for Industrial and Applied Mathematics (1992).
- [143] P. Walek y J. Jan, *Two-dimensional shape-adaptive windowing functions for image analysis*, IET Image Process. **13.11** (2019), 1853–1861.
- [144] G. G. Walter y H.-T. Shim, *Gibbs’phenomenon for sampling series and what to do about it*, J. Fourier Anal. Appl. **4.3** (1998), 357–375.
- [145] G. G. Walter, *A general approach to Gibbs phenomenon*, Complex Var. **47.8** (2002), 731–743.
- [146] J. G. Wangüemert-Pérez et al., *Removal of the Gibbs phenomenon and its application to fast-Fourier-transform-based mode solvers*, J. Opt. Soc. Am. A **24.12** (2007), 3772–3780.
- [147] S. Weichert, B. K. Smeltzer y S. Å. Ellingsen, *Biases from spectral leakage in remote sensing of near-surface currents*, IEEE Trans. Geosci. Remote Sens. **61** (2023), 1–15.
- [148] H. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, S. Hirzel, Leipzig (1928). Revised English edition: *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Methuen, London (1931); reprinted by Dover, New York (1950).
- [149] A. Wigderson y Y. Wigderson, *The uncertainty principle: variations on a theme*, Bull. Amer. Math. Soc. **58.2** (2021), 225–261.
- [150] R. Wilson y G. H. Granlund, *The uncertainty principle in image processing*, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. **6** (1984), 758–767.
- [151] M. Wu, D. Chen y G. Chen, *New spectral leakage-removing method for spectral testing of approximate sinusoidal signals*, IEEE Trans. Instrum. Meas. **61.5** (2012), 1296–1306.
- [152] Y. Xiong et al., *Dual-frequency quantum phase estimation mitigates the spectral leakage of quantum algorithms*, IEEE Signal Process. Lett. **29** (2022), 1222–1226.
- [153] F. Xu, *Algorithm to remove spectral leakage, close-in noise, and its application to converter test*, IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference Proceedings. IEEE (2006).
- [154] J. Xu, M. Davis y R. de Fréin, *New robust LPC-based method for time-resolved morphology of high-noise multiple frequency signals*, 31st Irish Signals and Systems Conference (ISSC). IEEE (2020).
- [155] B. I. Yun, H. C. Kim y K. S. Rim, *An averaging method for the Fourier approximation to discontinuous functions*, Appl. Math. Comput. **183.1** (2006), 272–284.

- [156] B. I. Yun, *A weighted averaging method for treating discontinuous spectral data*, Appl. Math. Lett. **25.9** (2012), 1234–1239.
- [157] Y. Zhao y D. Gerhard, *Waveform-aligned adaptive windows for spectral component tracking and noise rejection*, International Symposium on Computer Music Multidisciplinary Research. Springer International Publishing, Cham (2013).
- [158] Y. Zhao, *Explorations in periodicity: new techniques in audio and kinematic data*, Thesis, The University of Regina (Canada) (2016).
- [159] H. Zhu, M. Ding y Y. Li, *Gibbs phenomenon for fractional Fourier series*, IET Signal Process. **5.8** (2011), 728–738.
- [160] H. Zhu, M. Ding y D. Gao, *Resolution of the Gibbs phenomenon for fractional fourier series*, IEICE Trans. Fundamentals **97.2** (2014), 572–586.
- [161] 3Blue1Brown, *Pero, ¿qué es la transformada de Fourier? Una introducción visual*, Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY>
- [162] 3Blue1Brown Español, *¿Qué es la Transformada de Fourier? Una introducción visual*, Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=h4PTucW3Rm0>
- [163] 3Blue1Brown, *¿Qué es una Serie de Fourier? Del Flujo de Calor al Arte con Círculos / ED 4*, Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k>
- [164] 3Blue1Brown, *El principio de incertidumbre más general, sobre transformadas de Fourier*, Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=MBnnXb0M5S4>
- [165] Veritasium en español, *El Algoritmo Más Importante De Todos Los Tiempos*, Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=2Xkv-W9t0XU>
- [166] J. W. Eaton, D. Bateman, S. Hauberg y R. Wehbring, *GNU Octave version 10.3.0 manual: a high-level interactive language for numerical computations*, (2025). <https://www.gnu.org/software/octave/doc/v10.3.0/>
- [167] *NumPy Reference: Discrete Fourier Transform*, <https://numpy.org/doc/2.1/reference/routines.fft.html>
- [168] *Wolfram Language & System Documentation Center: Fourier*, <https://reference.wolfram.com/language/ref/Fourier.html>

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
 Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
 Puebla, Pue. C.P. 72570

ammelbernes@gmail.com

moises.soto@fcfm.buap.mx

Capítulo 5

Decisiones racionales óptimas en portafolio de inversión con opciones americanas y subyacente browniano fraccional

María Teresa Verónica Martínez Palacios¹, José Antonio
Climent Hernández²

¹Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Economía, Ciudad
de México

²Universidad Autónoma Metropolitana, Ciudad de México

Resumen

En esta investigación, mediante un modelo de control óptimo en programación dinámica estocástica en tiempo continuo adaptado a variables fraccionarias, se determina la toma de decisiones óptima por consumo e inversión en un portafolio de activos que debe resolver un agente económico racional representativo de una pequeña economía cerrada para maximizar su utilidad en un horizonte temporal finito y estocástico. El portafolio se constituye por un principal en un banco, una acción con dinámica de precios brownianos fraccionales y una opción de tipo americana suscrita sobre su acción. En el proceso de la solución, se deriva, mediante fundamentos de racionalidad económica, el modelo de valuación de opciones plan vanilla tipo americana-fractal equivalente al de Black-Scholes.

Palabras Clave: Movimiento Browniano Fraccional, mercado fractal, opciones americanas.

Clasificación JEL: C22, C61, G13

1 Introducción

El tema de la administración de riesgos financieros es inherente a la toma de decisiones en el portafolio de activos, por lo que se hace indispensable caracterizar y diseñar, desde un enfoque teórico multidisciplinario, tanto los instrumentos de inversión como el marco teórico que dé lugar al análisis y resultados en la administración de riesgos y optimización de

portafolio en el contexto caótico actual generado por los mercados financieros y económicos internacionales. Las herramientas teóricas eficientes en el tema de modelación de problemas dinámicos son las teorías matemáticas de control óptimo estocástico en tiempo continuo y programación dinámica estocástica en tiempo continuo; es de particular mención el enfoque económico de equilibrio general dinámico estocástico para desarrollar finanzas matemáticas en tiempo continuo con fundamentos de racionalidad económica; es importante señalar que estas teorías comparten el marco teórico de ecuaciones diferenciales estocásticas, ordinarias y parciales.

En la administración de riesgos, los contratos contingentes juegan un papel muy importante por su uso en cobertura, especulación y arbitraje. De ellos, se destacan los contratos de opción plan vanilla de tipo americano, ya que son los instrumentos con mayor volumen de operación en los mercados financieros internacionales.

Un producto derivado es un instrumento financiero cuyo valor deriva de uno o más bienes subyacentes, pudiendo ser estos una acción, una divisa, un bono, otro derivado, un índice, una materia prima, productos energéticos, transporte, clima, entre otros. Una clasificación muy general se establece de acuerdo a su nivel de regulación y estandarización, lo que determina el mercado en que se comercializa. Así, los derivados plan vanilla (o estándar) se comercializan en mercados regulados y estandarizados denominados bolsas de derivados. Entre los derivados más comunes están los futuros, las opciones y los swaps; y los derivados exóticos, los cuales se comercializan, por lo general, en mercados extrabursátiles.

El derivado opción vanilla de compra (venta) es un contrato legal entre dos partes, mediante el cual el emisor de dicho contrato se obliga a vender (comprar) un activo subyacente, y el comprador, a cambio del pago de la prima o precio de la opción, adquiere el derecho de comprar (vender) dicho activo a un precio, llamado precio de ejercicio, en una fecha futura, ambos definidos al inicio del contrato. Asimismo, los derivados vanilla se clasifican de acuerdo a su fecha de ejercicio, siendo de tipo europea la que se ejerce solo al final del contrato y de tipo americana, cuya característica distintiva es que se puede ejercer en cualquier momento de la vida del contrato. Es decir, hay una posibilidad infinita de ejercicios de la opción y, por ende, de oportunidades para generar ganancias y cubrirse de los riesgos inherentes a los mercados financieros. Es pertinente mencionar que esta oportunidad tiene aparejado el problema (de frontera libre) de identificar la frontera de ejercicio que optimice el valor de la opción para el poseedor del contrato.

La investigación que se ha realizado en el tema de opciones americanas en muy amplia; véase, por ejemplo, Martínez-Palacios, et al. (2023), Suzuki (2023), (Hansen y Jørgensen, 2000), Martínez-Palacios, et al. (2015), Taylor (1967); Merton (1973); Cox, Ross y Rubinstein (1979); Whaley (1981); Barone-Adesi y Whaley (1987); (Broadie y Detemple, 2004); (Huyen, 1997); (Ju, 1998); Broadie et al. (2000); Fu et al. (2001); (Longstaff y Schwartz, 2001); Clement et al. (2002); (Detemple y Tian, 2002); Rogers (2002); (Villeneuve y Zanette, 2002); Detemple et al. (2003); Kou y Wang (2004); Stentoft (2005); (Ikonen y Toivanen, 2008), y (Kohn, 2011). Entre los métodos de valuación se encuentran: los numéricos de (Villeneuve y Zanette, 2002) e (Ikonen y Toivanen, 2008); el método de diferencias finitas de (Brennan y Schwartz, 1977), el de árbol binomial de Cox, et al. (1979), el de control óptimo estocástico en programación dinámica estocástica en tiempo continuo de Martínez-Palacios, et al. (2015) y para opciones asiáticas de tipo americano Martínez-Palacios, et

al. (2023), el de aproximación cuadrática de Suzuki (2023). De particular mención es la investigación de Suzuki (2023), dado que realiza la valuación de una opción perpetua de tipo americana cuando el rendimiento logarítmico del activo subyacente es modelado por un movimiento browniano fraccional, con el parámetro de Hurst $H \in [0, 1]$.

Una particularidad que guardan las investigaciones anteriores, a excepción de la de Suzuki (2023), es que sustentan la valuación de opciones en el Cálculo de Ito y el Movimiento Geométrico Browniano, lo que conlleva a que los precios de los activos no exhiban memoria larga o dependencia de largo plazo. Sin embargo, la realidad internacional exhibe suficientes evidencias de que las series de activos económicos y financieros bien podrían ser procesos antipersistentes, independientes o persistentes de memoria larga, características que incorpora la estructura analítica del Movimiento Browniano Fraccional.

La literatura especializada en este tema es extensa, léanse, por ejemplo: Mandelbrot (1963), Pérez-Sienes, et al. (2023), Tostado et al. (2022), Cabrera et al. (2012), Caporale, et al. (2019), Gospodinov et al. (2020), (Chen y Yu, 2005), (Los, y Lipka, 2003), Parisi et al. (2017), Tzouras et al. (2015), Gómez-Águila et al. (2022) y Das y Kumar (2021). Así, por ejemplo, Parisi et al. (2017) analizan los índices accionarios Merval, Bovespa, S&P TSX Composite, IPSA, IGPA, S&P 500 Dow Jones Industrials, Nasdaq, IGBVL e IPC, respectivamente, mediante análisis gráfico, análisis de recurrencia, entropía de espacio temporal, coeficiente de Hurst, exponente de Lyapunov y dimensión de correlación, mostrando que los mercados bursátiles americanos se comportan de manera caótica. En particular, los resultados del coeficiente de Hurst revelan un promedio de 0.75. Por su parte, Cabrera llanos et al. (2012) realizan un análisis basado en el estadístico R/S y los estimadores de Geweke y Porter-Hudak, a los rendimientos de cinco acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores y un tracker que son activos subyacentes de opciones que se comercian en el mercado mexicano de opciones, y encuentran que los rendimientos de algunos activos mexicanos podrían caracterizarse como procesos de memoria larga, en tanto que los rendimientos de otros activos podrían caracterizarse como procesos antipersistentes.

Por otra parte, el marco teórico mediante el que se modelan los mercados financieros e instrumentos derivados con procesos persistentes, particularmente el movimiento browniano fraccional, ha sido abordado y desarrollado por Biagini et al. (2010), Nualart (2006), Decreusefond y üstünel (1999), Hu, Oksendal y Sulem (2000), y Necula (2002) y Sierra (2017), entre muchos otros. Es importante observar que desde diferentes enfoques teóricos, Nualart (2006), Decreusefond y üstünel (1999), Hu, Oksendal y Sulem (2000) y Necula (2002) abordan y establecen el correspondiente cálculo de Ito fraccionario que permite desarrollar la teoría de mercados fractales. En esta investigación, es pertinente observar que Hu, Oksendal y Sulem (2000) desarrollan el modelo de Merton para obtener las proporciones de portafolio óptimo mediante cálculo de variaciones, adaptando la teoría martingala al movimiento browniano fraccional y muestran que el mercado no tiene arbitraje y es completo. Necula (2002) y Sierra (2017) obtienen la fórmula fraccional de Black-Scholes para valorar una opción europea de compra, implementando la esperanza cuasi condicional. Además, Necula extiende el modelo para todo $t \in [0, T]$ y Sierra implementa volatilidad estocástica fraccional al modelo de valuación de opciones de tipo europeo.

En el contexto de las investigaciones referidas, esta investigación se distingue por: 1) Se extiende el modelo de control óptimo estocástico en programación dinámica estocástica

en tiempo continuo con cálculo de Ito fraccional para deducir el modelo de valuación de opciones plan vanilla de tipo americano sobre un subyacente financiero (acción), descrito mediante un Movimiento Browniano Fraccional, a la vez que se establece una aplicación teórica de Equilibrio General dinámico Estocástico Fraccional y 2) El modelo de valuación de la opción americana se establece mediante fundamentos de racionalidad económica para series de tiempo con estructuras de Browniano fraccional.

Este trabajo está organizado de la siguiente forma: en la sección 2 se describe el problema objeto de esta investigación y se realiza una formulación analítica de los activos de inversión del portafolio; en la sección 3 se establece la restricción presupuestal intertemporal de la que dispone el agente económico para inversión y consumo a lo largo de su horizonte temporal. En la sección 4 se establece el modelo de control óptimo estocástico en tiempo continuo y el tiempo de paro que delimita el horizonte temporal; en la sección 5, mediante Programación Dinámica Estocástica en tiempo continuo, se realiza el análisis de solución, se obtienen las trayectorias de decisión óptimas que maximizan la utilidad del agente, con lo que se optimiza el modelo de control propuesto; en la sección 6 se deduce el modelo de valuación de opción vanilla de tipo americano con parámetros de riesgo browniano fraccional. Por último, en la sección 7 se presentan las conclusiones de esta investigación.

2 Descripción del problema y supuestos

Se establecerá un modelo de control óptimo estocástico en programación dinámica estocástica con variables estocásticas brownianas fractales del tipo agente representativo, para lo cual se supone una economía pequeña y cerrada en la que se consume y se produce un solo bien de carácter perecedero. En esta economía, existe un sistema bancario en el que se puede prestar y pedir prestado a una tasa de interés libre de riesgo de incumplimiento, y continuamente capitalizable a todos los plazos, a la que se denotará con $r > 0$. De esta economía se analiza el caso de un agente económico racional y representativo, a quien se le asigna en el tiempo inicial cero, nombrado t_0 , una riqueza inicial denotada por $W(t_0) = w_0$. El agente económico enfrenta la toma de decisiones por inversión en consumo y portafolio de activos, y tiene como objetivo maximizar su utilidad “esperada y descontada” por consumo e inversión en un horizonte temporal de planeación finito y de magnitud estocástica, al cual inicialmente se denota por el intervalo de tiempo $[0, T]$. Con el objetivo de hacer tratable analíticamente el modelo y encontrar soluciones analíticas, se supone también que en el sistema bancario las ventas en corto son permitidas e ilimitadas; que todas las transacciones se llevan a cabo de manera continua; que no hay costos por transacción, ni pago a corredores de bolsa, y tampoco hay pago de impuestos a autoridades fiscales.

También, se supone que al agente se le permite invertir en tres activos: uno libre de riesgo y dos con riesgo.

1. El activo libre de riesgo corresponde a un principal que, en el tiempo inicial cero, es invertido como ahorro en el banco, que paga una tasa de interés $r > 0$, continuamente capitalizable, a la que se denomina $M_0 = M(0)$. Así, el monto acumulado en el

tiempo t será $M_t = M_0 e^{rt}$, el cual puede expresarse mediante el siguiente problema de valor inicial:

$$\frac{dM_t}{dt} - rM_t = 0, \quad M_0 = M(0) \quad (1)$$

este activo implica un rendimiento de

$$dR_M \equiv \frac{dM_t}{M_t} = rdt. \quad (2)$$

2. El segundo activo es riesgoso y corresponde a una acción ordinaria (sin pérdida de generalidad, puede ser cualquier otro activo subyacente) cuya dinámica de precios es conducida por la ecuación diferencial del movimiento geométrico browniano fraccional:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_H,$$

cuyos rendimientos están dados por la ecuación,

$$dR_S \equiv \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_H, \quad (3)$$

donde $0 < \mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma \in \mathbb{R}$ representan el rendimiento medio esperado y la volatilidad instantánea de S_t , respectivamente (los cuales se han considerado constantes en este modelo para mantener la estructura analítica tratable), y B_H es un proceso de movimiento geométrico browniano fraccional, definido sobre un espacio fijo de probabilidad.

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^B)_{t \in [0, T]}, P)$.

3. El tercer activo del portafolio es un contrato contingente de opción plan vanilla de tipo americano suscrito sobre la acción del inciso 2). Observe que en la práctica el precio de la opción es función del precio del activo subyacente y del tiempo, dado que los parámetros de volatilidad, tendencia y precio strike quedan definidos desde el inicio del contrato, por lo que se denotará mediante $A(S_t, t)$ al precio de la opción, de lo que inmediatamente se desprende que hereda el componente de riesgo del instrumento acción. Para obtener sus rendimientos se ha aplicado la versión del Lema de Itô para procesos geométrico browniano fraccional a $dA(S_t, t)$:

$$\begin{aligned} dA(S_t, t) = & \left(\frac{\partial A(S_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial A(S_t, t)}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial^2 A(S_t, t)}{\partial^2 S_t} \sigma^2 S_t^2 H t^{2H-1} \right) dt \\ & + \frac{\partial A(S_t, t)}{\partial S_t} \sigma S_t dB_H, \end{aligned} \quad (4)$$

si a partir de (4) se denota a:

$$\begin{aligned} \alpha_A &= \frac{1}{A} \left(\frac{\partial A(S_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial A(S_t, t)}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial^2 A(S_t, t)}{\partial^2 S_t} \sigma^2 S_t^2 H t^{2H-1} \right) \quad y \\ \sigma_A &= \frac{1}{A} \frac{\partial A(S_t, t)}{\partial S_t} \sigma S_t. \end{aligned} \quad (5)$$

con lo que se obtiene que los rendimientos de la opción de tipo Americana suscrita sobre un subyacente browniano fractal están dados por:

$$dR_A \equiv \frac{dA}{A} = \alpha_A dt + \sigma_A dB_H, \quad (6)$$

Las proporciones de riqueza que en portafolio se destinarán para inversión en la acción, en la opción vanilla tipo americana, se denotan mediante θ_{1t} , θ_{2t} , y mediante $\theta_{3t} = 1 - \theta_{1t} - \theta_{2t}$ se denota la proporción de riqueza destinada como principal en un banco. Asimismo, se denota con c_t a la tasa de consumo, la que se restringe a que $c_t \geq 0$, $\forall t \in [0, T]$.

Adicionalmente, para contextualizar la estructura analítica de las ecuaciones diferenciales resultantes, se supone que todas las estrategias del portafolio son autofinanciables, lo cual implica la continuidad en las operaciones de los mercados financieros y de derivados. Así mismo, y con el objetivo de mantener tratable la estructura analítica del modelo, se supone que no hay costos por transacción, no hay comisiones a agentes de casa de bolsa, no hay pagos de impuestos a autoridades fiscales y que las ventas en corto son permitidas e ilimitadas.

3 Dinámica de la restricción presupuestal

En esta sección, a partir de los supuestos descritos en la sección 2, se estructura la restricción presupuestal dinámica del agente económico; para tal efecto, se considera que W_t representa la riqueza real del consumidor-inversionista en el tiempo t . Al disponer las proporciones de riqueza enunciadas y correspondientes a los activos de inversión, así como la tasa de consumo en el tiempo t , se obtiene la trayectoria

$$\begin{aligned} dW_t &= W_t(1 - \theta_{1t} - \theta_{2t})dR_M + W_t\theta_{1t}dR_S + W_t\theta_{2t}dR_A - c_t dt \\ &= W_t \left(r + \theta_{1t}(\mu - r) + \theta_{2t}(\alpha_A - r) - \frac{c_t}{W_t} \right) dt \\ &\quad + W_t(\theta_{1t}\sigma + \theta_{2t}\sigma_A)dB_H, \end{aligned} \quad (7)$$

es decir,

$$\frac{dW_t}{W_t} = \alpha_W dt + \sigma_W dB_H, \quad (8)$$

donde se han definido α_W y σ_W , por

$$\alpha_W = \left(r + \theta_{1t}(\mu - r) + \theta_{2t}(\alpha_A - r) - \frac{c_t}{W_t} \right) \quad \text{y} \quad \sigma_W = (\theta_{1t}\sigma + \theta_{2t}\sigma_A). \quad (9)$$

4 Modelo de control óptimo estocástico en tiempo continuo

Utilidad total esperada y descontada

La utilidad por consumo del agente económico consumidor-inversionista, se representa mediante,

$$\left[\int_0^T F(c_s, s) ds + \Phi(W_T) \right] \quad (10)$$

donde $F(c_s, s)$ es la función de utilidad por el consumo, y Φ puede considerarse como un afore o función de retiro.

Tiempo de paro

Se hace necesario imponer una función tiempo de paro en el modelo; por una parte, se utiliza para delimitar las condiciones de frontera del modelo de valuación de la opción americana, y por otra parte, para que matemáticamente el problema sea congruente con la aplicación de maximización de utilidad, toda vez que los supuestos de ventas en corto y consumo no están restringidos en el modelo. Esto podría derivar analíticamente en la aplicación a grandes pérdidas, produciendo rendimientos negativos para el agente económico, lo cual se contraponen con el objetivo. Se define entonces como dominio a $D = [0, T] \times \{W_t | W_t > 0\}$ y se define la función

$$\psi = \min [\inf\{t > 0 | W_t = 0\}, T], \quad (11)$$

lo que en conjunto determina el horizonte temporal estocástico del problema. Observe que cuando la riqueza se termina, no existe utilidad que maximizar, por lo que se termina el problema.

Modelo de control óptimo estocástico en tiempo continuo para trayectorias browniano fraccional con horizonte temporal estocástico

La descripción analítica de hipótesis, en conjunto con el tiempo de paro y la función de utilidad por consumo propuesta, nos permite establecer el problema formal de maximización de utilidad por consumo e inversión en un portafolio de activos como un problema de control óptimo estocástico en tiempo continuo, adaptado a las trayectorias de movimientos geométrico-brownianos fraccionales en tiempo continuo,

$$\begin{aligned}
& \max_{\theta_{1t}, \theta_{2t}, c_t} \quad \tilde{E} \left[\int_0^\psi F(c_t, t) dt \right] \\
& \text{sujeto a} \quad dW_t = W_t \alpha_W dt + W_t \sigma_W dB_H \\
& \quad W_0 = w_0 \\
& \quad c_t \geq 0, \quad \forall t \geq 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

5 Solución al problema de control mediante programación dinámica estocástica en tiempo continuo, adaptada a procesos browniano-fraccional

Programación dinámica estocástica en tiempo continuo

Resolver el problema de control óptimo estocástico implica determinar las trayectorias óptimas de los controles θ_{1t} , θ_{2t} y c_t , que maximizan el funcional objetivo. Esto se logra mediante programación dinámica estocástica en tiempo continuo, adaptada a trayectorias browniano-fraccionales. El proceso de solución induce a obtener una ecuación diferencial parcial de segundo orden no lineal, a la que se le dará un proceso de solución en variables separables. A partir de la solución obtenida, se logrará optimizar los controles y, con ello, maximizar el funcional objetivo, es decir, la utilidad. Para tal efecto, se define a continuación la funcional de valor del problema como:

$$J(W_t, t) = \max_{\theta_{1t}, \theta_{2t} \in \mathbb{R}, 0 \leq c_s \leq \psi} \tilde{E} \left[\int_t^\psi F(c_s, s) ds \right]. \tag{13}$$

Para establecer la recursividad se considera un incremento diferencial $dt \in \mathbb{R}$ en el tiempo, de tal forma $t < t + dt < \psi$, lo que induce la recursividad en la funcional de valor

$$J(W_t, t) = \max_{\theta_{1t}, \theta_{2t} \in \mathbb{R}, 0 \leq c_s \leq \psi} \tilde{E} \left[\int_t^{t+dt} F(c_s, s) ds + \int_{t+dt}^\psi F(c_s, s) ds \right]. \tag{14}$$

Después de aplicar a (2.2) el Teorema del valor medio, la recursividad, la expansión en serie de Taylor, aplicar el Lema de Ito para trayectorias browniano-fraccional, la esperanza cuasicondicional, dividir entre dt y tomar el límite cuando $dt \rightarrow 0$, se deduce la ecuación diferencial parcial browniano-fraccional:

$$\begin{aligned}
0 = & \max_{\theta_{1t}, \theta_{2t} \in \mathbb{R}, 0 \leq c_s} \left\{ F(c_t, t) + \frac{\partial J(W_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 J(W_t, t)}{\partial W_t^2} W_t^2 \sigma_W^2 \right. \\
& \left. + \frac{\partial J(W_t, t)}{\partial W_t} W_t \alpha_W H t^{2H-1} \right\},
\end{aligned} \tag{15}$$

a la que se imponen las condiciones de frontera consistentes con el tiempo de paro que limita a que el modelo no degenera,

$$\begin{cases} 0 = \max_{\theta_{1t}, \theta_{2t} \in \mathbb{R}, 0 \leq c_t} F(c_t, t) + \frac{\partial J(W_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 J(W_t, t)}{\partial W_t^2} W_t^2 \sigma_W^2 + \\ \quad + \frac{\partial J(W_t, t)}{\partial W_t} W_t \alpha_W H t^{2H-1} \\ J(0, t) = 0, \\ J(W_t, T) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Función de utilidad

Se considera una función de utilidad de la forma $F(c_t, t) = e^{-\rho t} V(c_t)$; donde $V(c_t)$ es una función de utilidad de tipo CARRA (que a su vez pertenece a la familia de funciones tipo HARA), lo que representa un requisito para encontrar soluciones analíticas de la ecuación (15) (Merton, 1990, y Hakansson, 1970). Específicamente, se elige la función de consumo:

$$F(c_t, t) = e^{-\rho t} (c_t^\gamma / \gamma), \quad 0 < \gamma < 1 \quad (17)$$

donde ρ denota la tasa subjetiva de descuento y $0 < \gamma < 1$ asegura que la función sea positiva, creciente y cóncava, lo cual es indispensable para maximizar la utilidad.

Condiciones de primer orden

Ahora se considera el máximo interior en la ecuación (16) y se sustituyen α_W y σ_W de la ecuación (9) en la ecuación (15) para poder obtener las condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} 0 = e^{-\rho t} (c_t^\gamma / \gamma) + \frac{\partial^2 J(W_t, t)}{\partial W_t^2} W_t^2 H t^{2H-1} (\theta_{1t}^2 \sigma^2 + 2\theta_{1t} \sigma \theta_{2t} \sigma_A + \theta_{2t}^2 \sigma_A^2) \\ + \frac{\partial J(W_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(W_t, t)}{\partial W_t} W_t (r + \theta_{1t} (\mu - r) + \theta_{2t} (\alpha_A - r) - c_t / W_t). \end{aligned} \quad (18)$$

Enseguida, se aplica el criterio de primera derivada, de donde se obtienen los controles θ_{1t} , θ_{2t} y c_t ,

$$c_t = \left[\frac{\partial J(W_t, t)}{\partial W_t} e^{\rho t} \right]^{1/(\gamma-1)}, \quad (19)$$

$$\theta_{1t} = - \frac{\frac{\partial J(W_t, t)}{\partial W_t} W_t (\mu - r) + \frac{\partial^2 J(W_t, t)}{\partial W_t^2} 2H t^{2H-1} W_t^2 \sigma \theta_{2t} \sigma_A}{\frac{\partial^2 J(W_t, t)}{\partial W_t^2} 2H t^{2H-1} W_t^2 \sigma^2}, \quad (20)$$

$$\theta_{2t} = - \frac{\frac{\partial J(W_t, t)}{\partial W_t} W_t (\alpha_A - r) + \frac{\partial^2 J(W_t, t)}{\partial W_t^2} 2H t^{2H-1} W_t^2 \sigma \theta_{1t} \sigma_A}{\frac{\partial^2 J(W_t, t)}{\partial W_t^2} 2H t^{2H-1} W_t^2 \sigma_A^2}. \quad (21)$$

Análisis de solución de la Ecuación Diferencial Parcial

Para resolver la EDP (18) es necesario elegir una función $J(W_t, t)$ que satisfaga la EDP. Toda vez que la ecuación diferencial no posee derivadas cruzadas, se propone a J como un producto de funciones separadas en variables de la forma,

$$J(W_t, t) = e^{-\rho t} g(t) \frac{w_t^\gamma}{\gamma}, \quad g(T) = 0, \quad (22)$$

a la que se anexa la condición de frontera $g(T) = 0$, correspondiente a las condiciones de frontera de la EDP (16). Una vez propuesta $J(W_t, t)$, en (22), se obtienen las derivadas parciales correspondientes a las ecuaciones (19), (20) y (21) de la EDP de HJB obtenida en (1),

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(W_t, t)}{\partial t} &= \frac{W_t^\gamma}{\gamma} e^{-\rho t} h'(t) - \frac{W_t^\gamma}{\gamma} e^{-\rho t} \rho g(t), \\ \frac{\partial J(W_t, t)}{\partial W_t} &= W_t^{\gamma-1} e^{-\rho t} h(t), \\ \frac{\partial^2 J(W_t, t)}{\partial X_t^2} &= (\gamma - 1) W_t^{\gamma-2} e^{-\rho t} h(t). \end{aligned} \quad (23)$$

Para poder establecer las trayectorias de control óptimas que maximizan el modelo, se deben sustituir ahora las derivadas de (23) en las condiciones de primer orden (19), (20) y (21), de lo que se obtiene:

$$\hat{c}_t = W_t h^{1/(\gamma-1)}(t), \quad (24)$$

$$\hat{\theta}_{1t} = \frac{(\mu - r)}{(1 - \gamma) 2H t^{2H-1} \sigma^2} - \frac{\sigma_A}{\sigma} \hat{\theta}_{2t}, \quad (25)$$

$$\hat{\theta}_{2t} = \frac{(\alpha_A - r)}{(1 - \gamma) 2H t^{2H-1} \sigma_A^2} - \frac{\sigma}{\sigma_A} \hat{\theta}_{1t}. \quad (26)$$

Observe que en la ecuación (24) el consumo óptimo $\hat{c}_t$ es lineal en la riqueza, lo cual concuerda con los resultados de Merton (1991) para estructuras con variables brownianas geométricas diferenciales, pero es estocástico de acuerdo con la estructura de distribución browniana fractal impuesta en este modelo, estructura identificada como la realidad pre-valeciente en los mercados financieros, discutida y sustentada por diversos autores como Pérez-Sienes et al. (2023), Tostado et al. (2022), Cabrera et al. (2012), Caporale et al. (2019), Gospodinov et al. (2020), entre otros. También se observa que las ecuaciones (25) y (26) correspondientes a los controles óptimos $\hat{\theta}_{1t}$ y $\hat{\theta}_{2t}$ forman el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{1t} + \frac{\sigma_A}{\sigma} \hat{\theta}_{2t} = \frac{(\mu-r)}{(1-\gamma) 2H t^{2H-1} \sigma^2} \\ \frac{\sigma}{\sigma_A} \hat{\theta}_{1t} + \hat{\theta}_{2t} = \frac{(\alpha_A-r)}{(1-\gamma) 2H t^{2H-1} \sigma_A^2}. \end{cases} \quad (27)$$

6 Deducción del modelo para valorar una opción americana que incluye parámetros de riesgo browniano-fraccional

En las ecuaciones del sistema (27) se consideran los siguientes cambios de variable, $\psi = (\sigma_A/\sigma)$, $\delta_A = [(\alpha_A - r)/(1 - \gamma)(2Ht^{2H-1}\sigma_A^2)]$ y $\delta = [(\mu - r)/(1 - \gamma)(2Ht^{2H-1}\sigma^2)]$, donde δ_A y δ representan los premios al riesgo de mercado de la opción y de la acción. Observe que el sistema resultante tiene la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & \psi \\ \psi^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\theta}_{1t} \\ \hat{\theta}_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda_A \end{pmatrix}, \quad (28)$$

a partir de la expresión analítica de (28), se resalta que la matriz de coeficientes asociada al sistema tiene determinante cero, lo que implica que hay dependencia lineal entre las ecuaciones de premio al riesgo de mercado de la acción y de la opción americana, lo cual es lógico porque el contrato de opción hereda las características de riesgo del subyacente, es decir $\psi\delta_A = \delta$. De manera equivalente,

$$\frac{\mu - r}{(1 - \gamma)(2Ht^{2H-1}\sigma^2)} = \frac{\sigma_A}{\sigma} \frac{\alpha_A - r}{(1 - \gamma)(2Ht^{2H-1}\sigma_A^2)},$$

lo cual implica que,

$$(\mu - r) \frac{\sigma}{\sigma_A} = (\alpha_A - r), \quad (29)$$

al sustituir en la ecuación (29) los valores para α_A y σ_A correspondientes a la ecuación (5), se obtiene:

$$\frac{\partial A(S_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 A(S_t, t)}{\partial S_t^2} Ht^{2H-1} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial A(S_t, t)}{\partial S_t} S_t r - rA(S_t, t) = 0. \quad (30)$$

La ecuación (30) es el modelo de valuación de la opción vanilla cuando el activo subyacente tiene la estructura browniano fraccional y es equivalente a la ecuación de Black-Scholes-Merton, solo que con subyacente que tiene trayectoria browniano fraccional. A la ecuación (30) se deben imponer las condiciones de frontera del valor intrínseco del instrumento derivado opción vanilla de tipo americana y la función que genere una solución única, con lo que se establece el modelo para valorar la opción vanilla de tipo americana con subyacente browniano fractal, mediante

$$\begin{cases} \frac{\partial A(S_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 A(S_t, t)}{\partial S_t^2} Ht^{2H-1} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial A(S_t, t)}{\partial S_t} S_t r - rA(S_t, t) = 0, \\ A(S_t, t) \geq \max\{(K - S_t), 0\}, \\ \Psi = \min\{\psi, \hat{\Psi}\}, \end{cases} \quad (31)$$

donde $\hat{\Psi}$, es un tiempo de paro en que se alcanza el valor máximo de $\max\{(S_t - K), 0\}$.

7 Conclusiones

En esta investigación se desarrolló un modelo de control óptimo estocástico en optimización dinámica estocástica en tiempo continuo, en el marco de los modelos de agente representativo o tipo Ramsey de la teoría económica y de la teoría de portafolio en un mercado Black-Scholes manejado por movimiento browniano fraccional, estudiado por Hu et al (2003), Oksendal (2004) y completado por Necula (2002), en el que se supuso un agente económico de una economía pequeña y cerrada. Se representó la toma de decisiones que enfrenta el agente económico racional adverso al riesgo cuando dispone de una riqueza inicial y le es permitido invertir en un portafolio de tres activos: uno sin riesgo y dos con riesgo, una acción y una opción plan vanilla de tipo americana, con estructura de precios conducida por el movimiento browniano fraccional, teniendo por objetivo maximizar su utilidad por consumo e inversión en un horizonte temporal finito y estocástico. Se siguió la estructura teórica de control óptimo en programación dinámica en tiempo continuo y se encontraron resultados válidos análogos, pero con estructura fraccional, como se detallan a continuación.

1. A partir de una aplicación teórica de control óptimo estocástico y programación dinámica estocástica en tiempo continuo con variables de movimiento browniano fraccional y tiempos de paro, se establece el modelo teórico genérico para la valuación de derivados financieros de tipo americano con estructura del movimiento browniano Fraccional (MBF) en su subyacente.

Se hace importante mencionar que esta aplicación permitió generar teoría en Finanzas Matemáticas en tiempo continuo.

2. Así mismo, la aplicación de la teoría de control óptimo en programación dinámica en tiempo continuo, en conjunto con las variables de tiempo de paro y brownianos fraccionales, da lugar a un enfoque de racionalidad económica fractal, con lo que se genera teoría económica.
3. Otro resultado teórico importante es que el modelo de valuación de opciones plan vanilla de tipo americano se obtuvo desde un enfoque de microfundamentos fractales; es decir, se desarrolla teoría de Finanzas Matemáticas con fundamentos Económicos fractales.
4. Se plantea en una agenda futura de investigación incorporar formas funcionales de procesos fractales a derivados exóticos y a variables fundamentales en los modelos de optimización mediante control óptimo estocástico, con el objetivo de recrear ambientes económicos más apegados a la realidad contingente prevaleciente en los mercados internacionales.

Agradecimientos

El presente trabajo ha sido apoyado por los proyectos de investigación:

1. , con clave SIP-20254182 de la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas del Instituto Politécnico Nacional.
2. “Decisiones óptimas en portafolio de inversión que incluye un contrato contingente suscrito sobre un proceso browniano fraccional”, con clave SIP-20242725, de la Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional.

Asimismo, los autores agradecen a los árbitros por sus valiosas observaciones a este trabajo.

Bibliografía

- [1] Biagini, F. and Hu, Y. and Øksendal, B. and Zhang, T. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*, Probability and Its Applications, Springer London, 2009, url:<https://books.google.com.mx/books?id=QaeyNAEACAAJ>,
- [2] Tomas Björk, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Third Edition, Oxford Finance Series, 2009, doi: 10.1093/oso/9780198851615.001.0001.
- [3] Fischer Black and Myron Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, *Journal of Political Economy*, vol. 81, no. 3, pp. 637–654, 1973, doi: 10.1086/260062, url: <http://www.jstor.org/stable/1831029>.
- [4] Bruno Bouchard and Xavier Warin, *Monte-Carlo Valuation of American Options: Facts and New Algorithms to Improve Existing Methods*, in *Numerical Methods in Finance*, eds. René Carmona, Pierre Del Moral, Peng Hu, and Nadia Oudjane, Springer, Springer Proceedings in Mathematics, vol. 12, 2012, doi: 10.1007/978-3-642-25746-9_7, url: https://doi.org/10.1007/978-3-642-25746-9_7.
- [5] Guglielmo Maria Caporale and Luis Gil-Alana and Alex Plastun, *Long memory and data frequency in financial markets*, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, vol. 89, no.10, pp 1763–1779, 2019, Taylor & Francis, doi: 10.1080/00949655.2019.1599377, url: <https://doi.org/10.1080/00949655.2019.1599377>.
- [6] Agustín Llanos, Samantha Gil and Francisco López-Herrera, *Dependencia de largo plazo en los rendimientos de acciones mexicanas selectas PANORAMA ECONÓMICO* vol. 7, pp. 59–79, doi: 10.29201/pe-ipn.v7i14.65.
- [7] Cathy W.S. Chen and Tiffany H.K. Yu, *Long-term dependence with asymmetric conditional heteroscedasticity in stock returns*, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 353, pp. 413–424, 2005, doi: 10.1016/j.physa.2005.02.009.

- [8] Ricardo Camargo and Heliodoro Daniel Cruz Suárez, *Un Problema de Paro en Finanzas*, *Journal of Basic Sciences*, vol. 2, no. 5, 2016, doi: 10.19136/jobs.a2n5.1494.
- [9] John C. Cox and Stephen A. Ross, *The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes*, *Journal of Financial Economics*, vol. 3, pp. 145–166, 1976, doi: 10.1016/0304-405X(76)90023-4.
- [10] John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, and Stephen A. Ross, *An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices*, *Econometrica*, vol. 53, no. 2, pp. 363–384, 1985, doi: 10.2307/1911241.
- [11] Santanu Das and Ashish Kumar, *Long-term dependency between sovereign bonds and sectoral indices of India: evidence using Hurst exponent and wavelet analysis*, *Managerial Finance* vol. 47, no. 10, pp. 1448–1464, 2021, 05, issn:0307-4358, doi: 10.1108/MF-12-2020-0596, url:<https://doi.org/10.1108/MF-12-2020-0596>,
- [12] L. Decreusefond and A. üstünel, *Stochastic Analysis of the Fractional Brownian Motion Potential Analysis 10*, *Springer Nature* pp. 177–214 1999. url: <https://doi.org/10.1023/A:1008634027843>
- [13] A. Gómez-Águila, J. E. Trinidad-Segovia and M. A. Sánchez-Granero, *Improvement in Hurst exponent estimation and its application to financial markets* *Financial Innovation*, vol. 8, no. 1, 2022. url: <https://doi.org/10.1186/s40854-022-00394-x>
- [14] Mi Gospodinov, Evgeniya Gospodinova and Ekaterina Popovska, *Comparative analysis of statistical methods for estimating Hurst exponent*, *Proceedings of the 21st International Conference on Computer Systems and Technologies*, 2020, url: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=6081.
- [15] Nils H. Hakansson, *Optimal Investment and Consumption Strategies under Risk for a Class of Utility Functions*, *Econometrica*, vol. 38, no. 5, pp. 587–607, 1970.
- [16] Asbjørn T. Hansen and Peter Løchte Jørgensen, *Analytical Valuation of American-Style Asian Options*, *Management Science*, vol. 46 pp. 1116–1136, 2000, url: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:154980837>
- [17] Onésimo Hernández-Lerma, *Lectures on Continuous-Time Markov Control Processes*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 3, 1994.
- [18] YAOZHONG HU, BERNT ØKSENDAL and AGN SULEM, *OPTIMAL CONSUMPTION AND PORTFOLIO IN A BLACK-SCHOLES MARKET DRIVEN BY FRACTIONAL BROWNIAN MOTION*, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum* Vol. 6 no. 04 , pp. 519–536, 2000 doi: 10.1142/S0219025703001432, url: <https://doi.org/10.1142/S0219025703001432>.
- [19] Pham Huyên, *Continuous-Time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*, Springer-Verlag, 2009, doi: 10.1007/978-3-540-89500-8.

- [20] Alfredo Ibáñez and Fernando Zapatero, *Monte Carlo Valuation of American Options through Computation of the Optimal Exercise Frontier*, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 39, no. 2, pp. 253–275, 2004, doi: 10.1017/s0022109000003069.
- [21] Steven Kou, *Jump-Diffusion Models for Asset Pricing in Financial Engineering*, in *Handbooks in Operations Research and Management Science*, 2007, pp. 73–116, doi: 10.1016/s0927-0507(07)15002-7.
- [22] John Lehoczky, Suresh Sethi, and Steven Shreve, *Optimal Consumption and Investment Policies Allowing Consumption Constraints and Bankruptcy*, *Mathematics of Operations Research*, vol. 8, no. 4, pp. 613–636, 1983.
- [23] María Teresa V. Martínez-Palacios, Adrian Hernández-Del-Valle, and Ambrosio, *On the Pricing of Asian Options with Geometric Average of American Type with Stochastic Interest Rate: A Stochastic Optimal Control Approach*, *Journal of Dynamics & Games*, vol. 6, no. 1, pp. 53–64, 2019, doi: 10.3934/jdg.2019004.
- [24] Teresa Martínez-Palacios, Francisco Venegas-Martínez, and José F. Martínez-Sánchez, *Consumption and portfolio decisions of a rational agent that has access to an American put option on an underlying asset with stochastic volatility*, *International Journal on Pure and Applied Mathematics*, vol. 102, no. 4, pp. 711–732, 2015, doi: 10.12732/ijpam.v102i4.10, url: <http://dx.doi.org/10.12732/ijpam.v102i4.10>.
- [25] Teresa Martínez-Palacios, Ambrosio Ortiz-Ramírez, and Salvador Cruz Aké *Asian options as a rational response to post-covid market volatility*. *Revista Panorama económico*, vol. XIX, no. 39, 2023, pp. 91-109. url: <https://doi.org/10.29201/PE-IPN.V19I39.174>
- [26] Robert C. Merton, *Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model*, *Journal of Economic Theory*, vol. 3, no. 4, pp. 373–413, 1971, doi: 10.1016/0022-0531(71)90038-9.
- [27] Robert C. Merton, *Theory of Rational Option Pricing*, *The Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4, no. 1, pp. 141–183, 1973, doi: 10.2307/3003143.
- [28] Robert C. Merton and Paul A. Samuelson, *Continuous-Time finance*, *The Journal Finance*, vol. 46, no. 4, p. 1567, 1991, doi: 10.2307/2328875.
- [29] L. C. G. Rogers, *Monte Carlo valuation of American options*, *Mathematical Finance*, vol. 12, no. 3, pp. 271–286, 2002, doi: 10.1111/1467-9965.02010.
- [30] Teresa Martínez-Palacios and Francisco Venegas-Martínez, *Un modelo macroeconómico con agentes de vida finita y estocástica: cobertura de riesgo de mercado con derivados americanos*, *Economía: Teoría y Práctica*, vol. 41, 2014, pp. 71–106, url: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=281136882004>.

- [31] Ciprian Necula, *Option pricing in a fractional Brownian motion environment*, *SSRN Electron. J.*, 2002,
- [32] David Nualart *Stochastic calculus with respect to the fractional Brownian motion*, *European Congress of Mathematics Kraków, 2 – 7 July, 2012*, *European Mathematical Society Publishing House*, pp. 475–488, 2013.
- [33] Leticia Pérez-Sienes, Mar Grande, Juan Carlos and Javier Borondo, *The Hurst Exponent as an Indicator to Anticipate Agricultural Commodity Prices*, *Entropy*, vol. 25, no. 4, 2023, url: <https://www.mdpi.com/1099-4300/25/4/579>, doi: 10.3390/e25040579.
- [34] Suresh Sethi and Gerald L. Thompson, *Optimal Control Theory*, Springer, 2000.
- [35] Guillermo Sierra Juárez *VALUACIÓN DE OPCIONES EUROPEAS Y MODELO DE ESTRUCTURA DE PLAZOS VASICEK SOBRE SUBYACENTES CON CARACTERÍSTICAS DE MEMORIA LARGA: EL CASO DE MÉXICO*, *PANORAMA ECONOMICO*, vol. 3, no. 6, 2017.
- [36] Atsuo Suzuki *Perpetual American call option under fractional Brownian motion model*, *Math. Fin.*, vol. 13, no. 02, pp. 213–220, 2023.
- [37] Paul Wilmott, Jeff Dewynne, and Sam Howison, *Option pricing: Mathematical models and computation*, 1994, Available at Amazon.com, url: <https://www.amazon.com/Option-pricing-Mathematical-models-computation/dp/0952208202>.
- [38] Jinsha Zhao, *American Option Valuation Methods*, *International Journal of Economics and Finance*, vol. 10, no. 5, p. 1, 2018, doi: 10.5539/ijef.v10n5p1.
- [39] Xin-Jiang He y Sha Lin, *A fractional Black-Scholes model with stochastic volatility and European option pricing*, *Expert Systems with Applications*, vol. 178, p. 114983, 2021, Elsevier.
- [40] A. Torres-Hernandez, F. Brambila-Paz, and C. Torres-Martínez, *Numerical solution using radial basis functions for multidimensional fractional partial differential equations of type Black-Scholes*, *Computational and Applied Mathematics*, vol. 40, pp. 1–25, Springer, 2021, doi: 10.1007/s40314-021-01634-z.
- [41] A. Torres-Hernandez, F. Brambila-Paz, and R. Montufar-Chaveznavia, *Acceleration of the order of convergence of a family of fractional fixed-point methods and its implementation in the solution of a nonlinear algebraic system related to hybrid solar receivers*, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 429, p. 127231, Elsevier, 2022, doi: 10.1016/j.amc.2022.127231.

¹Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Economía, Ciudad de México

²Instituto Politécnico Nacional, Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas, Ciudad de México

³Universidad Autónoma Metropolitana, Ciudad de México

mmartinezpa@ipn.mx, jach@azc.uam.mx

Topología

Capítulo 6

Una introducción a modelos comunes en teoría de continuos

José Alberto Ortega Becerril, David Herrera Carrasco,
Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP

Resumen

El concepto de modelo común surge históricamente en el marco de la escuela polaca de topología, a partir de la pregunta formulada por Hans Hahn en 1930: ¿existe un continuo del cual todo continuo sea una imagen continua? [5]. El estudio sistemático de este problema se consolidó a mediados del siglo XX, tras el trabajo de Waraszkiewicz [11], quien dio una respuesta negativa a la pregunta de Hahn al construir una familia de continuos planos que no admiten un modelo común (*sans modèle commun*). Dicha familia está formada por continuos que pueden obtenerse como compactaciones del rayo, con residuo una curva cerrada simple. El propósito de este capítulo es presentar un ejemplo representativo de una familia de continuos que admite un modelo común, así como exponer un ejemplo de una familia que no lo admite.

1 Introducción

Se dice que un continuo Y es imagen continua de un continuo X si existe una función continua y suprayectiva $f : X \rightarrow Y$, es decir, $f(X) = Y$. A raíz de esto se establece la siguiente definición.

Definición 1.1. *Un continuo M es un **modelo común** para una clase $\mathcal{C}$ de continuos si para todo $X \in \mathcal{C}$, X es imagen continua de M .*

Nuestro primer ejemplo será el teorema de Hahn–Mazurkiewicz, el cual establece que el intervalo cerrado $[0, 1]$ es un modelo común para la clase de todos los continuos de Peano. Para poder presentar este resultado, primero definiremos las nociones básicas relacionadas con los continuos de Peano.

Definición 1.2. Sea X un continuo. Si $p \in X$, entonces X se dice que es conexo en pequeño en p , escrito cik en p , si cada vecindad de p contiene una vecindad conexa de p .

Definición 1.3. Un continuo X es **localmente conexo** en p , denotándolo LC en p siempre que cada vecindad de p contenga una vecindad conexa de p la cual es un abierto de X . Un continuo es localmente conexo si es LC en todos sus puntos.

Observemos que: LC en p implica cik en p .

Lema 1.4. Los siguientes incisos se satisfacen.

- (1) Un continuo es LC en todos los puntos si y solo si cada componente de cada conjunto abierto es abierta.
- (2) Un continuo es cik en todo punto si y solo si es LC en todo punto.

Demostración. (1) Supongamos que X es LC en todo punto y sea U un conjunto abierto de X y K una componente de U . Sea $x \in K \subset U$, entonces existe $V \subset U$ una vecindad conexa y abierta de x , pero K es la componente de x entonces $x \in V \subset K$, es decir $x \in \text{Int}(K)$. Por lo tanto, K es abierta.

Ahora supongamos que cada componente de cada conjunto abierto es abierta. Sea $x \in X$ y U una vecindad de x , sea K la componente de x en U , por hipótesis K es abierto y conexo pues es componente y además $x \in K \subset U$ es decir, X es LC en x .

(2) Si X es LC en todo punto, entonces es cik en todo punto, por el otro lado supongamos que X es cik en todo punto y sea U un conjunto abierto y K una componente de U . Sea $x \in K \subset U$ entonces existe G una vecindad conexa de x tal que $x \in G \subset U$, dado que K es una componente de x , se tiene que $G \subset K$, entonces K es abierto. $\square$

Definición 1.5. Un continuo X es un continuo de Peano si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Proposición 1.6. Dado un continuo X las siguientes condiciones son equivalentes.

- (1) X es localmente conexo en cada punto.
- (2) Cada componente de cada subconjunto abierto de X es abierto en X .
- (3) X es conexo en pequeño a cada punto.

Demostración. Se sigue del lema 1.4. $\square$

La propiedad S y la noción de continuidad local son herramientas fundamentales para describir la conexidad local de un continuo. Mostraremos que la propiedad S desempeña un papel clave en la caracterización de la estructura de los continuos de Peano.

Definición 1.7. Sea X un espacio métrico. Un subconjunto Y no vacío de X tiene la **propiedad S** si para cada $\varepsilon > 0$ hay un número finito de subconjuntos conexos $A_1, A_2, \dots, A_n$ de Y tales que:

$$Y = \bigcup_{i=1}^n A_i, \text{ diám}(A_i) < \varepsilon \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Teorema 1.8 ([4, Teorema 3.6, pág. 253]). Un espacio métrico que tiene la propiedad S es un espacio localmente conexo.

Teorema 1.9 ([4, Teorema 3.7, pág. 254]). Un espacio métrico compacto no vacío X es un espacio localmente conexo si y solo si tiene la propiedad S .

Teorema 1.10 ([4, Teorema 3.8, p. 254]). Sea X un espacio métrico. Si Y es un subconjunto de X que tiene la propiedad S y Z es un subconjunto de X tal que $Y \subset Z \subset \text{cl}_X(Y)$, entonces Z tiene la propiedad S y además, Z es un espacio localmente conexo.

Definición 1.11. Sean X un espacio métrico y $\varepsilon > 0$. Una **$S(\varepsilon)$ -cadena** es una colección no vacía, finita e indexada $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ de subconjuntos de X que satisface las siguientes condiciones:

- (I) $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i = 1, \dots, n-1$;
- (II) L_i es conexo para cada $i = 1, \dots, n$;
- (III) $\text{diam}(L_i) < 2^{-i}\varepsilon$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Si $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ es una $S(\varepsilon)$ -cadena entonces cada L_i es llamado un **eslabón** de $\mathcal{L}$; si $x \in L_1$ y $y \in L_n$ decimos que $\mathcal{L}$ es una **$S(\varepsilon)$ -cadena de x a y** . Si $A \subset X$, entonces se define el conjunto $S(A, \varepsilon)$ como sigue:

$$S(A, \varepsilon) = \{y \in X : \text{existe una } S(\varepsilon)\text{-cadena de algún punto de } A \text{ a } y\}$$

Proposición 1.12 ([9, 8.7, pág. 122]). Sean X un espacio métrico, $\emptyset \neq A \subset X$ y $\varepsilon > 0$. Si X tiene la propiedad S entonces $S(A, \varepsilon)$ tiene la propiedad S .

Lema 1.13. Sean X un espacio métrico, A un subconjunto no vacío de X y $\varepsilon > 0$. Las siguientes condiciones se satisfacen:

- (1) $\text{diám}[S(A, \varepsilon)] \leq \text{diám}(A) + 2\varepsilon$;
- (2) Si A es conexo entonces $S(A, \varepsilon)$ es conexo;
- (3) Si X tiene la propiedad S entonces $S(A, \varepsilon)$ es un subconjunto abierto de X .

Demostración. (1) Sean $x, y \in S(A, \varepsilon)$, por lo que existen $S(\varepsilon)$ -cadenas $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ desde a_x hasta x con $a_x \in A$ y $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ desde a_y hasta y con $a_y \in A$. Luego, $d(x, a_x) \leq \text{diám}(\bigcup_{i=1}^n L_i) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon$, es decir, $d(x, a_x) < \varepsilon$. De manera análoga, se prueba que $d(y, a_y) < \varepsilon$. Por consiguiente

$$d(x, y) \leq d(x, a_x) + d(a_x, a_y) + d(a_y, y) < 2\varepsilon + \text{diám}(A).$$

Por lo tanto, $\text{diám}(S(A, \varepsilon)) \leq \text{diám}(A) + 2\varepsilon$.

(2) Por la definición 1.11, tenemos que cada $S(\varepsilon)$ -cadena es conexa. Si A es conexo, y dado que toda $S(\varepsilon)$ -cadena intersecta a A , concluimos que $S(A, \varepsilon)$ es conexo.

(3) Supongamos que X tiene la propiedad S , veamos que $S(A, \varepsilon)$ es abierto de X . Sea $y \in S(A, \varepsilon)$, por la definición 1.11 existe una $S(\varepsilon)$ -cadena $L_1, \dots, L_n$ de algún punto $p \in A$ a y . Como X tiene la propiedad S , por el teorema 1.8, existe un subconjunto abierto y conexo U de X tal que $y \in U$ y $\text{diám}(U) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Observemos que $U \subset S(A, \varepsilon)$ ya que si $t \in U$, entonces $\{L_1, \dots, L_n, L_{n+1} = U\}$ es una $S(\varepsilon)$ -cadena de $p \in A$ a t , de ahí que $t \in S(A, \varepsilon)$. Por lo tanto, $S(A, \varepsilon)$ es abierto de X . $\square$

Teorema 1.14 ([9, 8.9, pág. 124]). *Sean X un espacio métrico y $\varepsilon > 0$. Si X tiene la propiedad S , entonces X es la unión de una cantidad finita de conjuntos conexos cada uno de los cuales tiene la propiedad S y diámetro menor que ε ; además, estos conjuntos pueden elegirse como abiertos o cerrados de X .*

Teorema 1.15 ([9, 8.10, pág. 124–125]). *Si X es un continuo localmente conexo entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, X es la unión de una cantidad finita de continuos localmente conexos, cada uno de los cuales es de diámetro menor que ε .*

2 El teorema de Hahn-Mazurkiewicz

Como se mencionó anteriormente, nuestro propósito es presentar un ejemplo de una familia de continuos que admiten un modelo común. Para alcanzar esta meta, hemos introducido los conceptos necesarios sobre los continuos de Peano. A continuación, presentamos el teorema de Hahn–Mazurkiewicz, el cual establece que el intervalo $[0, 1]$ es un modelo común para todos los continuos de Peano.

Definición 2.1. Una **cadena débil** es una colección no vacía, finita e indexada $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ de conjuntos tales que $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i = 1, \dots, n-1$. Sea $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ una cadena débil, decimos que $\mathcal{L}$ es una **cadena débil de L_1 a L_n** . Además, si $x \in L_1$, $y \in L_n$, decimos que $\mathcal{L}$ es una **cadena débil de x a y** . Cada L_i es llamado un **eslabón** de $\mathcal{L}$.

Lema 2.2 ([9, 8.12, pág. 125]). *Si $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$, $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ son cadenas débiles con $C_1 = L_1$, entonces existe una cadena débil $\mathcal{P}$ de C_1 a L_n tal que $\mathcal{P} = \mathcal{C} \cup \mathcal{L}$.*

Lema 2.3. [9, 8.13, pág. 125–126] Sea S un espacio topológico conexo y sean $p, q \in S$. Si $\mathcal{C}$ es una colección finita de subconjuntos cerrados no vacíos de S tales que cubren a S , entonces toda la colección $\mathcal{C}$ se puede indexar para formar una cadena débil de p a q .

Introduciremos ahora una clase de funciones que nos permitirá establecer el teorema de Hahn–Mazurkiewicz.

Definición 2.4. Sean $(X, T_1), (Y, T_2)$ espacios topológicos. Una función $F : X \rightarrow 2^Y$ es **semicontinua superior en un punto p en X** siempre que; si $U \in T_2$ tal que $F(p) \subset U$, entonces existe $V \in T_1$ tal que $p \in V$ y $F(x) \subset U$ para cada $x \in V$. Se denota usc en p . Una función $F : X \rightarrow 2^Y$ es **semicontinua superior** y se denota por usc siempre que F sea semicontinua superior en cada punto de X .

Lema 2.5 ([2, 1.21, pág. 120]). Sean $(X, T_1), (Y, T_2)$ espacios topológicos y $F : X \rightarrow 2^Y$ una función usc . Si $F(x)$ es un conjunto singular $\{y_x\}$ para cada $x \in X$, entonces la función $f : X \rightarrow Y$ definida como sigue $f(x) = y_x$ para cada $x \in X$ es continua.

Lema 2.6 ([2, 1.22, pág. 120]). Sean X, Y espacios métricos compactos no vacíos y para cada $n = 1, 2, \dots$, consideremos $F_n : X \rightarrow 2^Y$ una función usc tal que $F_{n+1}(x) \subset F_n(x)$ para cada $x \in X$, cada $n = 1, 2, \dots$. Para cada $x \in X$, sea $G(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$. Entonces los siguientes incisos se satisfacen.

- (1) $G : X \rightarrow 2^Y$ y G es usc .
- (2) Si $Y = \bigcup_{x \in X} F_n(x)$ para cada $n = 1, 2, \dots$, entonces, $Y = \bigcup_{x \in X} G(x)$.

Teorema 2.7 (de la función general, [2, 1.23, pág. 121]). Sean X, Y espacios métricos compactos no vacíos, supongamos que se cumplen:

- (1) $F_n : X \rightarrow 2^Y$ es usc para cada $n = 1, 2, \dots$,
- (2) $F_{n+1}(x) \subset F_n(x)$ para cada $n = 1, 2, \dots$,
- (3) $Y = \bigcup_{x \in X} F_n(x)$ para cada $n = 1, 2, \dots$,
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diám}[F_n(x)] = 0$ para cada $x \in X$.

Entonces, existe una función continua f tal que $f(X) = Y$. De hecho podemos considerar a f como sigue;

$$f(x) = \text{el único punto en } \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x) \text{ para cada } x \in X.$$

Teorema 2.8 (de Hahn–Mazurkiewicz). Si X es un continuo localmente conexo entonces existe una función $f : [0, 1] \rightarrow X$ continua y suprayectiva.

Demostración. Sean (X, d) un continuo localmente conexo y $\varepsilon_1 = 1$, por el teorema 1.15, se tiene que $X = \bigcup \mathcal{A}$ donde $\mathcal{A}$ es una colección finita de continuos localmente conexos tales que para cada $A \in \mathcal{A}$ se cumple que $\text{diám}(A) < 1$. Dado que cada $A \in \mathcal{A}$ es un continuo, en particular, cada $A \in \mathcal{A}$ es compacto, por consiguiente cada $A \in \mathcal{A}$ es cerrado de X , por lo tanto $\mathcal{A}$ es una colección finita de subconjuntos cerrados en X que cubre a X . Sean $p, q \in X$ distintos, aplicando el lema 2.3 a estos puntos y a la colección $\mathcal{A}$, tenemos que $\mathcal{A}$ se puede indexar para formar una cadena débil $\{A_1, \dots, A_n\}$ de p a q . A continuación, escribiremos al intervalo cerrado $[0, 1]$ como la unión de n intervalos cerrados no degenerados $I_1, \dots, I_n$ de la forma

$$I_i = [t_{i-1}, t_i], \quad 1 \leq i \leq n, \quad \text{donde } t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1.$$

Definimos $F_1 : [0, 1] \rightarrow C(X)$ por

$$F_1(t) = \begin{cases} A_i & \text{si } t \in I_i \setminus \{t_0, \dots, t_n\} \\ A_i \cup A_{i+1} & \text{si } t = t_i \text{ y } 1 \leq i \leq n-1 \\ A_1 & \text{si } t = 0 \\ A_n & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Afirmación 1. La función F_1 satisface las siguientes propiedades:

- (1) F_1 es usc.
- (2) $X = \bigcup_{t \in [0, 1]} F_1(t)$

Demostración de la afirmación 1. (1) Sea $l \in [0, 1]$, veamos que si $F_1(l) \subset U$ donde U es un abierto de X entonces existe V abierto de $[0, 1]$ tal que $l \in V$ y $F_1(x) \subset U$ para todo $x \in V$. Sea U un abierto de X tal que $F_1(l) \subset U$, como $l \in [0, 1]$ entonces $l \in [t_{i-1}, t_i]$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$.

1.1 Si $l \in I_i \setminus \{t_0, \dots, t_n\}$ entonces $F_1(l) = A_i$. Sea $V = (t_{i-1}, t_i)$, notemos que es un conjunto abierto de $[0, 1]$, veamos que V cumple las propiedades deseadas. Como $t_i \neq l \neq t_{i-1}$ y $l \in I_i$ entonces $l \in (t_{i-1}, t_i)$ además, para $x \in V$, $F_1(x) = A_i = F_1(l) \subset U$, por lo tanto $F_1(x) \subset U$ para todo $x \in V$.

1.2 Si $l = t_i$ con $1 \leq i \leq n-1$ entonces $F_1(l) = A_i \cup A_{i+1}$. Sean $z_1, z_2 \in [0, 1]$ tales que $t_{i-1} < z_1 < t_i$ y $t_i < z_2 < t_{i+1}$. Sea $V = (z_1, z_2)$, notemos que $z_1 < t_i < z_2$ por consiguiente $l = t_i \in V$. Por otro lado, para $x \in V$.

1.2.1 Si $z_1 < x < t_i$ entonces $F_1(x) = A_i \subset F_1(l) \subset U$,

1.2.2 Si $x = t_i$ entonces $F_1(x) = F_1(l) \subset U$,

1.2.3 Si $t_i < x < z_2$ entonces $F_1(x) = A_{i+1} \subset F_1(l) \subset U$.

Por lo tanto $F_1(x) \subset U$ para todo $x \in V$.

1.3 Si $l = 0$, entonces $F_1(l) = A_1$. Sea $V = [0, t_1)$, el cual es un conjunto abierto de $[0, 1]$ y evidentemente $l \in V$. Para $x \in V$.

1.3.1 Si $x = 0$, entonces $F_1(x) = F_1(l) \subset U$

1.3.2 Si $0 < x < t_1$, entonces $F_1(x) = A_i = F_1(l) \subset U$

de manera que $F_1(x) \subset U$ para todo $x \in V$.

1.4 Si $l = 1$ entonces $F_1(l) = A_n$. Definimos al conjunto abierto $V = (t_{n-1}, 1]$ donde claramente $l \in V$. Para $x \in V$.

1.4.1 Si $x = 1$ entonces $F_1(x) = F_1(l) \subset U$

1.4.2 Si $t_{n-1} < x < 1$ entonces $F_1(x) = A_n = F_1(l) \subset U$

por lo tanto $F_1(x) \subset U$ para todo $x \in V$.

Por los casos anteriores, se concluye que para todo $l \in [0, 1]$ y U abierto de $C(X)$ tal que $F_2(l) \subset U$, existe V abierto de $[0, 1]$ tal que $l \in V$ y $F_2(x) \subset U$ para todo $x \in V$. Por lo tanto, de acuerdo a la definición 2.4, se tiene que F_1 es usc.

(2) Es claro que $\bigcup_{t \in [0, 1]} F_1(t) \subset X$, resta demostrar que $X \subset \bigcup_{t \in [0, 1]} F_1(t)$. Sea $x \in X$, por lo tanto existe $A_i \in \{A_1, \dots, A_n\}$ tal que $x \in A_i$. Consideremos a $s = \frac{t_i - t_{i-1}}{2}$, como $s \in [0, 1]$ por consiguiente $F_1(s) \subset \bigcup_{t \in [0, 1]} F_1(t)$ pero $F_1(s) = A_i$, por lo tanto $x \in \bigcup_{t \in [0, 1]} F_1(t)$. En conclusión $X = \bigcup_{t \in [0, 1]} F_1(t)$.

Sean $p_1 \in A_1$, $p_i \in A_i \cap A_{i-1}$ para $2 \leq i \leq n$ y $p_{n+1} \in A_n$ y sea $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$. Sabemos que cada A_i es un continuo localmente conexo, luego aplicando el teorema 1.15 y el lema 2.3 a cada A_i con un procedimiento análogo al que realizamos al inicio para X , obtenemos que existe, para cada A_i , $1 \leq i \leq n$, una cadena débil $\{A_1^i, \dots, A_{m(i)}^i\}$ de p_i a p_{i+1} que cubre a A_i y además todo elemento de la cadena es un subcontinuo localmente conexo de A_i con diámetro menor que ε_2 , es decir, $\text{diám}(A_j^i) < \varepsilon_2$ para cada $1 \leq j \leq m(i)$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, escribiremos a I_i como la unión de $m(i)$ subintervalos cerrados no degenerados $I_1^i, \dots, I_{m(i)}^i$ de la forma

$$I_j^i = [t_{j-1}^i, t_j^i], \quad 1 \leq j \leq m(i), \quad \text{donde } t_0^i = t_{i-1} < t_1^i < t_2^i < \dots < t_{m(i)}^i = t_i.$$

Definimos $F_2 : [0, 1] \rightarrow C(X)$ por

$$F_2(t) = \begin{cases} A_j^i & \text{si } t \in I_j^i \setminus \{t_0^i, \dots, t_{m(i)}^i\} \\ A_j^i \cup A_{j+1}^i & \text{si } t = t_j^i \text{ y } 0 < j < m(i) \\ A_{m(i-1)}^{i-1} \cup A_1^i & \text{si } t = t_0^i \text{ y } 2 \leq i \leq n \\ A_1^1 & \text{si } t = 0 \\ A_{m(n)}^n & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Afirmación 2. La función F_2 satisface las siguientes propiedades:

- (1) F_2 es usc.
- (2) $X = \bigcup_{t \in [0,1]} F_2(t)$

Demostración de la afirmación 2. (1) Sean $l \in [0, 1]$ y U abierto de $C(X)$ tales que $F_2(l) \subset U$. Veamos que existe V abierto de $[0, 1]$ tal que $l \in V$ y $F_2(x) \subset U$ para todo $x \in V$. Como $l \in [0, 1]$ entonces $l \in I_k$ para algún $k \in \{1, \dots, n\}$, luego $l \in [t_{j-1}^k, t_j^k] = I_j^k$ para algún $j \in \{1, \dots, m(k)\}$.

- 1.1 Si $l \in I_j^k \setminus \{t_0^k, \dots, t_{m(k)}^k\}$ entonces $F_2(l) = A_j^k$. Veamos que el conjunto abierto $V = (t_{j-1}^k, t_j^k)$ cumple las condiciones deseadas. Evidentemente $l \in V$; por otro lado, sea $x \in V$, luego $F_2(x) = A_j^k = F_2(l) \subset U$, por lo tanto $F_2(x) \subset U$ para todo $x \in V$.
- 1.2 Si $l = t_j^k$ y $0 < j < m(k)$ entonces $F_2(l) = A_j^k \cup A_{j+1}^k$. Sean $z_1, z_2 \in [0, 1]$ tales que $t_{j-1}^k < z_1 < t_j^k$ y $t_j^k < z_2 < t_{j+1}^k$. Si $V = (z_1, z_2)$, entonces V cumple las condiciones deseadas. En efecto, como $z_1 < l < z_2$ entonces $l \in V$, sea $x \in V$.

1.2.1 Si $z_1 < x < t_j^k$ entonces $F_2(x) = A_j^k \subset U$.

1.2.2 Si $x = t_j^k$ entonces $F_2(x) = F_2(l) \subset U$.

1.2.3 Si $t_j^k < x < z_2$ entonces $F_2(x) = A_{j+1}^k \subset U$.

Por lo tanto $F_2(x) \subset U$ para todo $x \in V$.

- 1.3 Si $l = t_0^k$ y $2 \leq k \leq n$ entonces $F_2(l) = A_{m(k-1)}^{k-1} \cup A_1^k$. Sean $z_1, z_2 \in [0, 1]$ tales que $t_{m(n)}^{k-1} < z_1 < t_0^k$ y $t_0^k < z_2 < t_1^k$, definimos a $V = (z_1, z_2)$, veamos que cumple las condiciones deseadas. Como $z_1 < l < z_2$ entonces $l \in V$, sea $x \in V$.

1.3.1 Si $z_1 < x < t_0^k$ entonces $F_2(x) = A_{m(k-1)}^{k-1} \subset U$.

1.3.2 Si $x = t_0^k$ entonces $F_2(x) = F_2(l) \subset U$.

1.3.3 Si $t_0^k < x < z_2$ entonces $F_2(x) = A_1^k \subset U$.

Por lo tanto $F_2(x) \subset U$ para todo $x \in V$.

- 1.4 Sea $l = 0$, entonces $F_2(l) = A_1^1$. Sea $V = [0, t_1^1)$. Evidentemente $l \in V$ y si $x \in V$, tenemos que

1.4.1 Si $x = 0$ entonces $F_2(x) = F_2(l) \subset U$.

1.4.2 Si $0 < x < t_1^1$ entonces $F_2(x) = A_1^1 = F_2(l) \subset U$.

Por lo tanto $F_2(x) \subset U$ para todo $x \in V$.

- 1.5 Sea $l = 1$, entonces $F_2(l) = A_{m(n)}^n$. Sea $V = (t_{m(n)-1}^n, 1]$, de aquí $l \in V$ y si además $x \in V$.

1.5.1 Si $t_{m(n)-1}^n < x < 1$ entonces $F_2(x) = A_{m(n)}^n = F_2(l) \subset U$.

1.5.2 Si $x = 1$ entonces $F_2(x) = F_2(l) \subset U$.

Por lo tanto $F_2(x) \subset U$ para todo $x \in V$.

Por los casos anteriores, se concluye que para todo $l \in [0, 1]$ y U abierto de $C(X)$ tal que $F_2(l) \subset U$, existe V abierto de $[0, 1]$ tal que $l \in V$ y $F_2(x) \subset U$ para todo $x \in V$. Por lo tanto, de acuerdo a la definición 2.4, se tiene que F_2 es usc. (2) Es claro que $\bigcup_{t \in [0, 1]} F_2(t) \subset X$, resta mostrar que $X \subset \bigcup_{t \in [0, 1]} F_2(t)$. Sea $x \in X$, entonces existe $A_i \in \{A_1, \dots, A_n\}$ tal que $x \in A_i$. Consideremos $s = \frac{t_j^i - t_{j-1}^i}{2}$. Como $s \in [0, 1]$, $F_1(s) \subset \bigcup_{t \in [0, 1]} F_1(t)$ y dado que $F_1(s) = A_i$, se tiene que $X \subset \bigcup_{t \in [0, 1]} F_1(t)$. En conclusión, $X = \bigcup_{t \in [0, 1]} F_1(t)$.

Afirmación 3. Para cada $s \in [0, 1]$ se cumple que $F_2(s) \subset F_1(s)$

Demostración de la afirmación 3. (i) Si $s \in I_j^k \setminus \{t_0^k, \dots, t_{m(k)}^k\}$ entonces $F_2(s) = A_j^k$ y $F_1(s) = A_k$. Notemos que $A_j^k \subset A_k$ por consiguiente $F_2(s) \subset F_1(s)$.

(ii) Si $s = t_j^k$ y $0 < j < m(k)$ entonces $F_2(s) = A_j^k \cup A_{j+1}^k$ y $F_1(s) = A_k$. De manera que $F_2(s) = A_j^k \cup A_{j+1}^k \subset A_k = F_1(s)$, es decir, $F_2(s) \subset F_1(s)$.

(iii) Si $s = t_0^k$ y $2 \leq k \leq n$ entonces $F_2(s) = A_{m(k)-1}^{k-1} \cup A_1^k$ y $F_1(s) = A_{k-1} \cup A_k$. Notemos que $A_{m(k)-1}^{k-1} \subset A_{k-1}$ y $A_1^k \subset A_k$ por lo tanto $A_{m(k)-1}^{k-1} \cup A_1^k \subset A_{k-1} \cup A_k$, así $F_2(s) \subset F_1(s)$.

(iv) Sea $s = 0$ entonces $F_2(s) = A_1^1$ y $F_1(s) = A_1$, por lo tanto $F_2(s) \subset F_1(s)$. (v) Sea $s = 1$ entonces $F_2(s) = A_{m(n)}^n$ y $F_1(s) = A_n$ por consiguiente $F_2(s) \subset F_1(s)$. Por los casos anteriores, se concluye que para cada $s \in [0, 1]$, $F_2(s) \subset F_1(s)$.

De las afirmaciones 1 y 2 se construyen funciones F_1 y F_2 que satisfacen las condiciones (1) y (3) del teorema 2.7 y de la afirmación (3) obtenemos que F_1 y F_2 satisfacen la condición (2) del teorema 2.7. De manera inductiva podemos definir una sucesión de funciones $\{F_n\}$ que cumplen las condiciones (1) a (3) del teorema 2.7. Por otra parte, si $x \in X$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diám}(F_n(x)) < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$

De esta manera la sucesión $\{F_n\}$ satisface las condiciones del teorema 2.7, por lo que existe una función continua y suprayectiva de $[0, 1]$ a X . $\square$

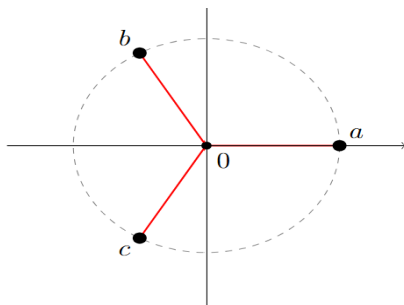
3 Familia de continuos sin un modelo común

Es interesante observar cuánto avanzó el estudio de los modelos comunes en teoría de continuos. Una vez que Waraszkiewicz [11] dio una respuesta negativa a la pregunta

de Hahn al construir una familia de continuos planos que no admiten un modelo común, Bellamy [1] amplió esta idea demostrando que tampoco existe un modelo común para la clase de los continuos indescomponibles.

En 1979, Russo [10] extendió aún más estos resultados, mostrando que no existen modelos comunes para diversas clases de continuos planos, tales como los continuos tipo árbol, los arco-conexos y los indescomponibles. Sus demostraciones se apoyan en el trabajo original de Waraszkiewicz [11], cuya prueba fue posteriormente simplificada por Bellamy (en un trabajo no publicado). Tymchatyn [7] retomó esta línea de ideas y obtuvo varios de los resultados de Russo mediante una versión modificada del argumento de Bellamy. A continuación, exponemos algunos de los resultados y métodos desarrollados por Tymchatyn en este contexto (véase [7, pág. 49]).

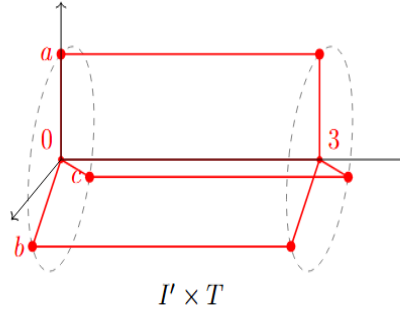
Ejemplo 3.1. *Vamos a construir un subconjunto no numerable discreto de un espacio de funciones. Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$ números complejos los cuales son las raíces cúbicas del 1. Sean $T = \{rz : z \in \{a, b, c\} \text{ y } r \in [0, 1]\}$*



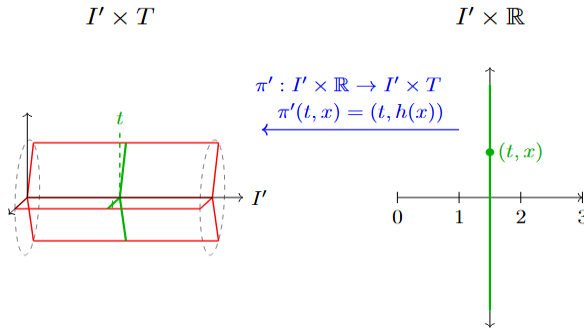
y $h : \mathbb{R} \rightarrow T$ como sigue: $h(6k+1) = 0$, $h(6k) = a$, $h(6k+2) = b$, $h(6k+4) = c$ y h es lineal en el intervalo $[k, k+1]$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. Notemos que si $x \in [k, k+1]$, entonces existe $r \in [0, 1]$ tal que $x = k+r$. Entonces podemos definir explícitamente a h como sigue:

$$h(x) = \begin{cases} (1-r)a & \text{si } x \in [6k, 6k+1], \\ rb & \text{si } x \in [6k+1, 6k+2], \\ (1-r)b & \text{si } x \in [6k+2, 6k+3], \\ rc & \text{si } x \in [6k+3, 6k+4], \\ (1-r)c & \text{si } x \in [6k+4, 6k+5], \\ ra & \text{si } x \in [6k+5, 6k+6]. \end{cases}$$

Más aún, la función h es suprayectiva. Para ver esto, sea $y \in T$, entonces $y = r'z$ con $r' \in [0, 1]$ y $z \in \{a, b, c\}$, si $z = a$, podemos considerar $x = 6k + 1 - r'$ con $k \in \mathbb{Z}$, entonces $h(x) = (1 - (1 - r'))a = r'a = y$, los otros casos son análogos. Sea $I' = [0, 3]$ y consideremos $I' \times T$.



Sea $\pi' : I' \times \mathbb{R} \rightarrow I' \times T$ dada por $\pi'(t, x) = (t, h(x))$. Denotamos por $\alpha : I' \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a la proyección en $\mathbb{R}$, por $\beta : I' \times T \rightarrow T$ a la proyección en T y por $\delta : I' \times \mathbb{R} \rightarrow I'$ a la proyección en I'



Observemos que si $x, y \in I' \times \mathbb{R}$ y $|\alpha(x) - \alpha(y)| = 3$, entonces

$$(1) \quad \rho(\beta \circ \pi'(x), \beta \circ \pi'(y)) = 1.$$

Donde ρ es la métrica longitud de arco en T . Para ver esto, sean $x, y \in I' \times \mathbb{R}$, entonces, $\beta(\pi'(x)) = h(\alpha(x))$ y $\beta(\pi'(y)) = h(\alpha(y))$. Si $|\alpha(x) - \alpha(y)| = 3$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\alpha(x) = \alpha(y) + 3$. Así, si $\alpha(y) \in [6k, 6k+1]$, $\alpha(x) \in [6k+3, 6k+4]$, entonces $h(\alpha(x)) = (1 - r)a$ y $h(\alpha(y)) = rc$ con $r \in [0, 1]$ y eso implica que $\rho(\beta\pi'(x), \beta\pi'(y)) = |(1 - r)a| + |rc| = 1$. Los demás se demuestran de manera análoga. Definamos ahora en $I' \times T$ una métrica σ como sigue:

$$\sigma(x, y) = \max\{\rho(\beta(x), \beta(y)), |\delta(x) - \delta(y)|\} \quad \text{para } x, y \in I' \times T.$$

Sea d la métrica del supremo en $(I' \times T)^X$ inducida por σ donde X es cualquier espacio topológico compacto y Hausdorff. Consideremos la siguiente familia

$$\mathcal{P} = \left\{ \{k_i\}_{i=0}^{\infty} : k_i \text{ es un entero que se puede dividir por } 6 \text{ y } 6^i < k_i \leq 6^{i+1} \right\}.$$

Una primera observación es

$$(2) \quad \text{si } \{k_i\}_{i=0}^{\infty} \in \mathcal{P}, \text{ entonces } k_0 = 6.$$

Ahora, fijemos dos sucesiones $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ y $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ en I' tales que $a_0 < 1$, $a_{n+1} < b_n < a_n$ para cada $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ y $\lim a_n = \lim b_n = 0$. Para cada $K = \{k_i\}_{i=0}^{\infty} \in \mathcal{P}$, sea $F_K : (0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

1. Para $t \in [1, 3]$, $F_K(t) = 0$.

2. En los puntos dados:

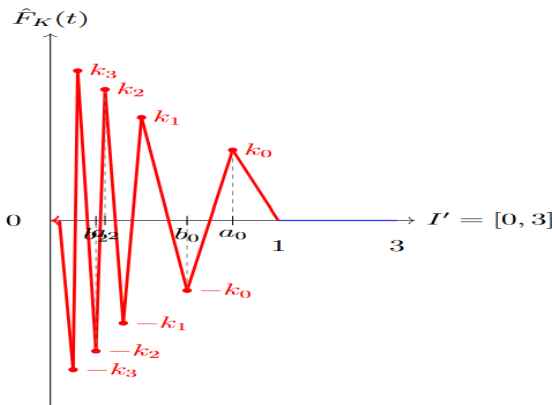
$$F_K(a_i) = k_i, \quad F_K(b_i) = -k_i.$$

3. En cada intervalo $[a_{i+1}, b_i]$ y $[b_i, a_i]$ (para $i \geq 0$), así como en $[a_0, 1]$, F_K es continua y se define de forma lineal a trozos, conectando los valores en los extremos:

- En $[b_i, a_i]$: la recta que une $(b_i, -k_i)$ con (a_i, k_i) .
- En $[a_{i+1}, b_i]$: la recta que une (a_{i+1}, k_{i+1}) con $(b_i, -k_i)$.

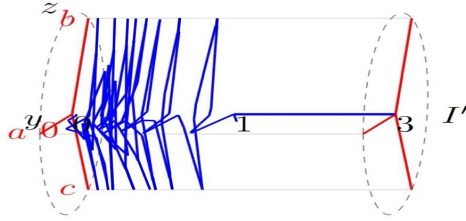
4. Para $t \in (0, a_N)$ con N suficientemente grande, tomamos $m = \max\{i : a_i \geq t\}$ y usamos la definición por trozos anterior.

Luego, sea $\hat{F}_K : (0, 3] \rightarrow I' \times \mathbb{R}$ por $\hat{F}_K(t) = (t, F_K(t))$, cuya imagen es la gráfica de F_K .



Ahora, sea W_K la espiral tipo Waraszkiewicz para cada $K \in \mathcal{P}$ como sigue;

$$W_K = (\{0\} \times T) \cup (\pi' \circ \hat{F}_K(0, 3])$$



Ahora, supongamos que, $K = \{k_i\}_{i=0}^\infty$, $L = \{l_i\}_{i=0}^\infty \in \mathcal{P}$ y $K \neq L$, sean $h_K : X \rightarrow W_K \subset I' \times T$ y $h_L : X \rightarrow W_L \subset I' \times T$ funciones continuas y suprayectivas donde X es un continuo Hausdorff fijo. Notemos que,

$$(3) \quad d(h_K, h_L) \geq 1.$$

Supongamos lo contrario $d(h_K, h_L) < 1$. Sea $n \in \mathbb{Z}$ el menor entero tal que $k_n \neq l_n$ y supongamos que $l_n < k_n$, ($k_n = 6s, l_n = 6r$), entonces, $k_n - l_n \geq 6$. Si Q es un subcontinuo de X tal que alguno de los conjuntos $h_K(Q)$ y $h_L(Q)$ interseca $\pi' \circ \hat{F}_K[2, 3] = \pi' \circ \hat{F}_L[2, 3]$ y ambos son arcos, sean $H_M^Q = (\pi')^{-1}|_{h_M(Q)}$ y γ_M^Q como sigue $\gamma_M^Q(x) = \alpha \circ H_M^Q \circ h_M(x)$ para cada $x \in Q$ y $M \in \{K, L\}$, se sigue directamente que la función H_M^Q es un homeomorfismo, más aún.

$$(3.1) \quad |\gamma_K^Q(x) - \gamma_L^Q(x)| < 3 \text{ para } x \in Q.$$

De lo contrario si $|\gamma_K^Q(x_0) - \gamma_L^Q(x_0)| \geq 3$ para algún $x_0 \in Q$. Como $h_M(Q)$ interseca $\pi' \circ \hat{F}_K[2, 3] = \pi' \circ \hat{F}_L[2, 3] = A$, entonces existe $p \in Q$ tal que $h_M(p) \in \pi' \circ \hat{F}_K[2, 3] = A$, notemos que como $d(h_K(p), h_L(p)) < 1$, si $h_K(x) \in A$, entonces $h_L(x) \in A'$ donde $A' = \pi' \circ \hat{F}_K[1, 2]$, entonces $|\gamma_K^Q(p) - \gamma_L^Q(p)| = 0$.

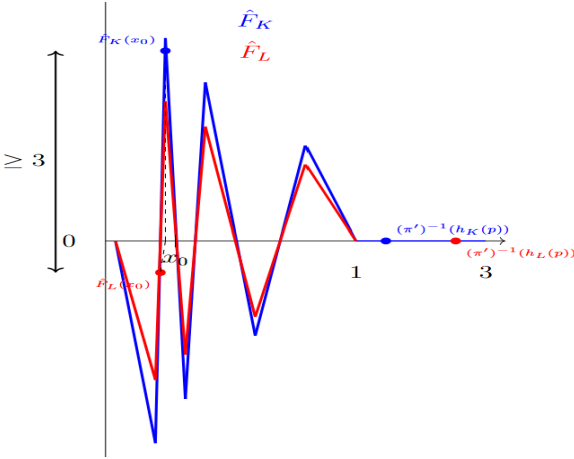
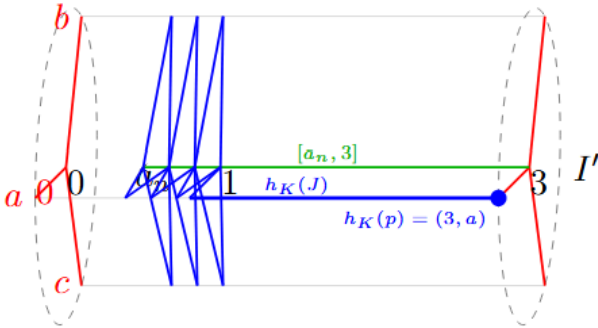
Sea $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = |\alpha((\pi')^{-1}(h_K(x))) - \alpha((\pi')^{-1}(h_L(x)))|$$

es continua y además $f(p) = 0 < 3 \leq f(x_0)$, como Q es conexo por el Teorema del valor intermedio (véase el Teorema 24.3, de [13]) existe $x_1 \in Q$ tal que $f(x_1) = |\alpha((\pi')^{-1}(h_K(x_1))) - \alpha((\pi')^{-1}(h_L(x_1)))| = 3$ es decir, $|\gamma_K^Q(x_1) - \gamma_L^Q(x_1)| = 3$. Entonces por (1), $\rho(\beta(h_K(x_1)), \beta(h_L(x_1))) = 1$, por lo tanto, $\sigma(h_K(x_1), h_L(x_1)) \geq 1$, implica que, $d(h_K, h_L) \geq 1$, lo que es una contradicción.

Sea $p \in X$ tal que $h_K(x) = (3, a)$ y denotemos por J a la componente de $h_K^{-1}([a_n, 3] \times T)$ que contiene a p . Entonces $h_K(J) = \pi' \circ \hat{F}_K([a_n, 3])$ el cual es un arco.

Más aún $h_L(J)$ también es un arco pues de lo contrario. Si $\pi' \circ \hat{F}_L(2), \pi' \circ \hat{F}_L(a_{n+2}) \in h_L(J)$, entonces existe un subcontinuo J' contenido en J el cual se manda suprayectivamente por h_L en $\pi' \circ \hat{F}_L([a_{n+2}, 2])$, (notemos que $A = \pi' \circ \hat{F}_L([a_{n+2}, 2])$ es un arco pues π' y $\hat{F}_L$ son continuas, además $[a_{n+2}, 2]$ es un intervalo), también sabemos que



$h_K(J') \subset \pi' \circ \hat{F}_K([a_n, 3])$. Entonces por (3.1),

$$|\gamma_K^{J'}(x) - \gamma_L^{J'}(x)| < 3 \text{ para } x \in J'.$$

Observemos que el máximo valor de $F_K(t)$ para $t \in [a_n, 3]$ es k_n , por lo tanto, $\gamma_K^{L'}(x) \leq k_n$ para $x \in J'$. Sea $w \in J'$ tal que $h_L(w) = \pi \circ \hat{F}_L(a_{n+2})$, ($h_L(J') = \pi \circ \hat{F}_L[a_{n+2}, 2]$), entonces $\gamma_L^{J'}(w) = l_{n+2}$, esto es, $\gamma_L^{J'}(w) > 6^{n+2}$, además, $\gamma_K^{J'}(w) \leq k_n \leq 6^{n+1}$. Por lo tanto, $|\gamma_K^{J'}(w) - \gamma_L^{J'}(w)| \geq 6^{n+2} - 6^{n+1} > 3$, lo cual es una contradicción, es decir $h_L(J)$ es un arco, por lo tanto, por (3.1) tenemos

$$|\gamma_K^J(x) - \gamma_L^J(x)| < 3 \text{ para } x \in J.$$

Ahora por el Teorema de golpes en la Frontera [9, 5.4, pág. 73], existe $q \in J$ tal que $h_K(q) = \pi' \circ \hat{F}_K(a_n)$, por lo tanto $H_K^J(q) = (a_n, k_n)$. El mínimo valor de $\gamma_K^J(x)$ para $x \in J$ es $F_K(b_{n-1}) = -k_{n-1}$, por lo tanto el mínimo valor de $\gamma_L^J(x)$ no es menor que $-k_{n-1} - 3$ por lo tanto, como $k_{n-1} \leq 6^n$ se tiene que, $\gamma_L^J(x) \geq -6^n - 3$. Como $-l_n < -6^n$, se tiene que la proyección de $\gamma_L^J(J)$ sobre el intervalo I' no contiene el valor de b_n . Como $\delta\gamma_L^J(p) \geq 1 > b_n$ y J es conexo, se sigue que $H_L^J h_L(J) \subset [b_n, 3]$. Finalmente observemos que el valor máximo de $F_L(t)$ para $t \in [b_n, 3]$ es l_n y $l_n \leq k_n - 6$ sin embargo, $\gamma_K^J(q) = k_n$ y $\gamma_L^J(q) \leq l_n$, de ahí $\gamma_K^J(q) - \gamma_L^J(q) \leq k_n - l_n \leq -6$, entonces $|\gamma_K^J(q) - \gamma_L^J(q)| \geq 6$, lo que es una contradicción, por lo que (3.1) se satisface. Por lo que cualquier conjunto de funciones $\{h_K\}_{K \in \mathcal{P}}$ suprayectivas de X en W_K sería un subconjunto discreto no numerable de $(I' \times T)^X$.

Theorem 3.1. La colección $\{W_K : K \in \mathcal{P}\}$ descrita en el Ejemplo 3.1 no tiene modelo común.

Demostración. Supongamos que existe un modelo común. De esta manera existen un continuo X y una función $f : X \rightarrow W_K$ suprayectiva para cada $K \in \mathcal{P}$. Como $\{h_K\}_{K \in \mathcal{P}}$ es una familia de funciones suprayectivas de X en el subespacio discreto no numerable W_K de $(I' \times T)^X$, se tiene que W_K no es separable, contradiciendo el Teorema (1) de [6, pág. 244]. $\square$

Agradecimientos

Los autores agradecen al Dr. Eiichi Matsushashi por la motivación para estudiar este tema. Asimismo, agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, así como por sus valiosas sugerencias y correcciones, las cuales contribuyeron significativamente a mejorar el capítulo.

Referencias

- [1] D. P. Bellamy, *Mappings of indecomposable continua*, Proc. Amer. Math. Soc. **30** (1971), 179–180.

- [2] J. A. Ortega Becerril, E. Matsubishi, D. Herrera Carrasco, F. Macías Romero, *Caracterización del Conjunto de Cantor y funciones de Whitney*, Capítulo del libro *Matemáticas y sus aplicaciones*, versión 25 (por aparecer), FCFM–BUAP, Shimane University.
- [3] R. Engelking, *General Topology*. PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977.
- [4] L. Flores De Jesús, D. Herrera Carrasco, F. Macías Romero, *Caracterización de los hiperespacios de un continuo localmente conexo*, en *Matemáticas y sus Aplicaciones 7*, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2016.
- [5] H. Hahn, *Problème 53*, Fund. Math. **15** (1930), 357.
- [6] K. Kuratowski, *Topology, Vol. I*, Academic Press, New York, 1966.
- [7] T. Maćkowiak y E. D. Tymchatyn, *Continuous mappings on continua. II*, Dissertationes Math. **225** (1984), 1–57.
- [8] J. R. Munkres, *Topología*, 2nd ed., Prentice Hall, Madrid, 2002.
- [9] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.
- [10] R. L. Russo, *Universal continua*, Fund. Math. **105** (1979), 41–60.
- [11] Z. Waraszkiewicz, *Sur un problem de M.H. Hahn*, Fund. Math. **22** (1934), 180–205.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

jose.ortegabec@alumno.buap.mx
dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx

Capítulo 7

Resultados adicionales sobre los hiperespacios cocientes $C_n(X)/C_1(X)$

Leonardo Ramírez Aparicio, David Herrera Carrasco,
Fernando Macías Romero

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Resumen

Continuamos el estudio de los hiperespacios cocientes $C_n(X)/C_1(X)$. En particular, obtenemos condiciones suficientes para que los n -ésimos hiperespacios cocientes $C_n(X)/C_1(X)$ sean contráctiles, satisfagan la propiedad del punto fijo y sean imágenes continuas del abanico de Cantor. Además, probamos que estos hiperespacios cocientes son uniformemente conexos por caminos, débilmente encadenables y que satisfacen diversas propiedades topológicas adicionales de interés en la teoría de continuos y sus hiperespacios.

1 Introducción

El estudio de los hiperespacios apareció muy temprano en la topología, alrededor del año 1900 con los trabajos de Hausdorff y Vietoris. Su estructura topológica fue estudiada por Vietoris en 1922 cuando probó que 2^X es compacto. Mientras que en 1931 Borsuk y Mazurkiewicz demostraron que 2^X y $C(X)$ son conexos por trayectorias.

Nueve años más tarde, el concepto del n -ésimo hiperespacio, $C_n(X)$, cobró vida cuando Wojdysławski, en su artículo [19], titulado *Rétractes absolus et hyperespaces des continus*, demostró que un continuo X es localmente conexo si y sólo si $C_n(X)$ es un retracto absoluto.

Uno de los aspectos más importantes en el estudio de los hiperespacios es:

¿Qué propiedades topológicas de los hiperespacios pueden ser determinadas por propiedades topológicas apropiadas de un continuo X ?

Por ejemplo, en 1939, Wojdysławski demostró que la conexidad local del continuo X es una condición suficiente para garantizar que los hiperespacios 2^X y $C(X)$ sean contráctiles.

Desde que la escuela polaca de topología sentara las bases del estudio de los hiperespacios hace más de un siglo, esta área ha experimentado un notable desarrollo. En la actualidad, un activo grupo de investigadores mexicanos ha centrado su atención en la siguiente pregunta:

¿Qué propiedades topológicas de los hiperespacios cocientes pueden ser determinadas por propiedades topológicas apropiadas de un continuo X ?

En 2016, Sergio Macías junto a Javier Camargo publican el artículo *Quotients of n -fold hyperspaces* e introducen el n -ésimo hiperespacio cociente, al identificar a $C_1(X)$ como un conjunto de un solo punto en $C_n(X)$ y considerarlo con la topología cociente (véase [3]). En este artículo se demuestran diversas propiedades topológicas de estos hiperespacios cocientes como son: unicoherencia, contractibilidad, conexidad local, aposíndesis, homogeneidad, ser variedad de Cantor, retracto absoluto. Caracterizan también a la clase de las gráficas finitas en términos de la dimensión de sus n -ésimos hiperespacios cocientes.

Recientemente, en 2024, estos mismos autores en el artículo *More on quotients of n -fold hyperspaces* continúan con el estudio de estos hiperespacios cocientes aportando algunas cotas superiores para la dimensión de los n -ésimos hiperespacios cocientes en ciertas clases de continuos, algunas condiciones bajo las cuales los n -ésimos hiperespacios cocientes resultan ser retracts absolutos y caracterizando a el arco y la curva cerrada simple como las únicas gráficas finitas para las cuales sus n -ésimos hiperespacios cocientes son variedades de Cantor (véase [4]).

De hecho, dados $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$ y X un continuo, los autores preguntan lo siguiente:

¿Existe una propiedad topológica $\mathcal{P}$ que se cumple en el n -ésimo hiperespacio cociente, $C_n(X)/C_1(X)$?

En este capítulo haremos un estudio detallado de algunos resultados de los artículos: *Quotients of n -fold hyperspaces* y *More on quotients of n -fold hyperspaces* que Javier Camargo y Sergio Macías demostraron.

Se demostrará lo siguiente:

- (a) Sean X un continuo y $n \geq 2$, entonces $C_n(X)/C_1(X) - \{C_X\}$ es conexo (ver Lema 4.9);
- (b) Sean X un continuo y $n \geq 2$. Si $C_n(X)$ es contráctil, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es contráctil (ver Teorema 4.10);
- (c) Sean X un continuo y $n \geq 2$. Si X es contráctil, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es contráctil (ver Corolario 4.11);
- (d) Sean X un continuo y $n \geq 2$. Si X tiene la propiedad de Kelley, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es contráctil (ver Corolario 4.12);

- (e) Sean X un continuo y $n \geq 2$. Si X es un retracto absoluto, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es retracto absoluto (ver Teorema 4.16);
- (f) Sean X un continuo y $n \geq 2$. Si X es un retracto absoluto, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ tiene la propiedad del punto fijo (ver Corolario 4.17).

Algunas propiedades adicionales de interés en la teoría de continuos y sus hiperespacios que no se encuentran en los artículos *Quotients of n -fold hyperspaces* y *More on quotients of n -fold hyperspaces* pero que demostramos en este capítulo son:

- (g) Sean X un continuo y $n \geq 2$, entonces $C_n(\mathcal{Q})/C_m(\mathcal{Q})$ es un retracto absoluto (ver Corolario 5.1).
- (h) Sean X un continuo y $n \geq 2$, entonces $C_n(\mathcal{Q})/C_m(\mathcal{Q})$ tiene la propiedad del punto fijo (ver Corolario 5.2).
- (i) Sean X un continuo y $n \geq 2$. Si X es hereditariamente indescomponible, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es contráctil (ver Corolario 5.3);
- (j) Sean X un continuo y $n \geq 2$. Si X es localmente conexo, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es contráctil (ver Corolario 5.4);
- (k) Sean X un continuo y $n \geq 2$. Si X es homogéneo, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es contráctil (ver Corolario 5.5);
- (l) Sean X un continuo y $n \geq 2$, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es una imagen continua del abanico de Cantor (ver Teorema 5.6);
- (m) Sean X un continuo y $n \geq 2$, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es uniformemente arco conexo (ver Corolario 5.7);
- (n) Sean X un continuo y $n \geq 2$, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es arco descomponible (ver Corolario 5.8);
- (ñ) Sean X un continuo y $n \geq 2$, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es débilmente encadenable (ver Teorema 5.9);
- (o) Sean X un continuo y $n \geq 2$, entonces existe una función continua y sobreyectiva de 2^X sobre $C_n(X)/C_1(X)$ (ver Teorema 5.10);
- (p) Sean $n \geq 2$, y X, Y continuos tales que existe una función continua y sobreyectiva de $C_n(X)/C_1(X)$ sobre Y , entonces Y es débilmente encadenable y arco descomponible (ver Teorema 5.11).

Cabe mencionar que dichos resultados forman parte de los resultados más generales que aparecen en el preprint [1], actualmente en preparación.

2 Definiciones y preliminares

A lo largo de este capítulo, si X es un espacio topológico y A es un subconjunto de X , los símbolos $\text{cl}_X(A)$, $\text{int}_X(A)$ y $\text{Bd}_X(A)$ denotan la cerradura de A , el interior de A y la frontera de A en el espacio X , respectivamente. Como es usual, los símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ y ω representan el conjunto de los números naturales (enteros positivos), el conjunto de los números reales y el primer ordinal no numerable. El símbolo $|A|$ denota la cardinalidad del conjunto A y $\text{Cono}(Z)$ denota el espacio cociente $Z \times [0, 1]/Z \times \{1\}$. También denotamos como $\mathbb{R}^n$ al espacio euclideo n -dimensional y para cada punto $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ su norma como:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Un **continuo** X es un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto. Un subconjunto Y de X es un subcontinuo de X si Y es un continuo o Y es un conjunto de un punto.

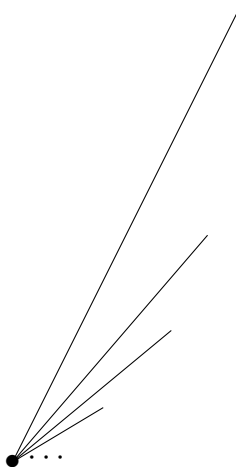


Figura 1: Un continuo

Los **hiperespacios** de un continuo X son espacios cuyos elementos son subconjuntos de X que además cumplen ciertas condiciones específicas. Si tenemos un continuo X , la familia de los subconjuntos no vacíos y cerrados de X la denotamos como 2^X .

Otro de los hiperespacios que mencionaremos en este capítulo y que son subespacios de 2^X cuando X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$ son los siguientes:

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a los más } n \text{ puntos} \} \text{ y}$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}.$$

Estos hiperespacios denotan el n -ésimo producto simétrico de X y el n -ésimo hiperespacio de X , respectivamente. Se acostumbra escribir a $C_1(X)$ como $C(X)$, conocido como el hiperespacio de los subcontinuos del continuo X .

Para poder dotar a estos hiperespacios de una métrica, introducimos los siguientes conceptos. Sean un continuo X y $A, B \subset X$. La distancia entre A y B que denotamos como $d(A, B)$, está dada de la siguiente manera:

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Si X es un continuo con métrica d , $p \in X$ y $\epsilon > 0$, denotamos por $B_d(\epsilon, p)$ la bola abierta con centro en p y radio ϵ . Además, si $A \in 2^X$, la ϵ -**nube** de A (o la **nube con centro en A y radio $\epsilon > 0$**) es:

$$N_d(\epsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(x, a) < \epsilon\}.$$

Consideremos ahora la función $H_d: 2^X \times 2^X \rightarrow [0, \infty)$, que está dada para cada $A, B \in 2^X$ por

$$H_d(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N_d(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\epsilon, A)\}.$$

Respecto a esta función, sabemos lo siguiente.

Teorema 2.1. [11, Teorema 2.2] *Si X es un espacio métrico con métrica acotada d , entonces la función H_d es una métrica para 2^X .*

Dados $n, m \in \mathbb{N}$ y una colección finita $U_1, \dots, U_m$ de subconjuntos de X , $\langle U_1, \dots, U_m \rangle$, denota el siguiente subconjunto de 2^X :

$$\left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Teorema 2.2. [17, Teorema 0.13] *Si X es un espacio métrico acotado, una base de abiertos para la topología inducida por la métrica de Hausdorff de 2^X está dada por:*

$$\{\langle U_1, \dots, U_n \rangle : U_i \text{ es un abierto de } X, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}.$$

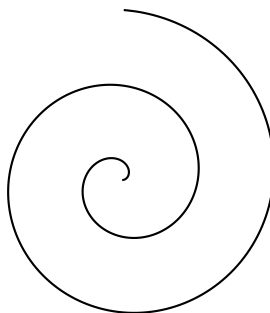
Dados $n, m \in \mathbb{N}$ y una colección finita $U_1, \dots, U_m$ de subconjuntos de X , $\langle U_1, \dots, U_m \rangle_n$, denota el siguiente subconjunto de $F_n(X)$:

$$\left\{ A \in F_n(X) : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Note que $\langle U_1, \dots, U_m \rangle_n = \langle U_1, \dots, U_m \rangle \cap F_n(X)$. Además, cuando cada U_i es un subconjunto abierto de X , la familia de todos los subconjuntos de $\langle U_1, \dots, U_n \rangle_n$ es una base para la topología de $F_n(X)$ (véase [17, Teorema 0.11, p. 9]). La métrica H_d se le conoce como la **métrica de Hausdorff inducida por d** o simplemente **métrica de Hausdorff**. De

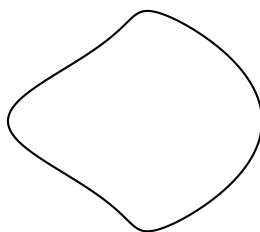
ahora en adelante, siempre que consideraremos a 2^X , lo haremos con esta métrica. Por lo tanto, como los demás hiperespacios, $F_n(X)$, $C(X)$ y $C_n(X)$ son subconjuntos de 2^X , se les considera dotados con la restricción correspondiente de la métrica de Hausdorff H_d . En la actualidad se sabe que, para cualquier continuo X , los hiperespacios 2^X , $F_n(X)$ y $C_n(X)$ son continuos con la métrica de Hausdorff.

Definición 2.3. Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$ con la topología euclideana. Sea $h: [0, 1] \rightarrow \alpha$ un homeomorfismo, decimos que $h(0)$ y $h(1)$ son los puntos extremos del arco α .



un arco

Definición 2.4. Una **curva cerrada simple** es un espacio homeomorfo a la circunferencia unitaria en el plano, la denotamos como S^1 .



Curva cerrada simple

Definición 2.5. Un continuo X es **indescomponible** si para cada par de subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$, se cumple que $A \subset B$ o $B \subset A$.

Definición 2.6. Un continuo X es **hereditariamente indescomponible** si todos sus subcontinuos son indescomponibles.

Definición 2.7. Un continuo X es **homogéneo** si para cada par de puntos $x, y \in X$, existe un homeomorfismo $h: X \rightarrow Y$ tal que $h(x) = y$.

Definición 2.8. Un continuo X es **arco conexo**, si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, existe un arco α en X con extremos x y y .

Definición 2.9. Un continuo X es **localmente conexo en un punto** $x \in X$ si para cada subconjunto abierto U de x en X , existe un subconjunto abierto y conexo V de x en X , tal que $x \in V \subset U$. El continuo X es **localmente conexo** si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos;

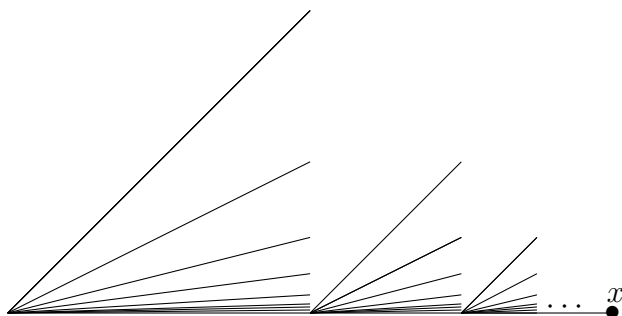


Figura 2: Un continuo que no es localmente conexo en x .

Definición 2.10. Un continuo X es **unicoherente** si para cualquier par de subcontinuos H y K tales que $X = H \cup K$, se tiene que $H \cap K$ es un continuo.

Definición 2.11. El cono sobre el conjunto de Cantor es el **abanico de Cantor**.

Definición 2.12. Un continuo X es **uniformemente conexo por trayectorias** si es imagen continua del abanico de Cantor. La definición original de este concepto, dada en [12, p. 316], es más complicada, pero coincide con la anterior por el Teorema 3.5 de [12, p. 322].

Definición 2.13. Un continuo X es **arco descomponible** siempre que existan dos subcontinuos propios y arco conexos A y B de X tales que $X = A \cup B$.

Definición 2.14. Un continuo X tiene la **propiedad de Kelley en un punto** p de X si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon, p) > 0$ tal que si p y q son dos puntos de X que satisfacen $d(p, q) < \delta(\epsilon, p)$, y A es un subcontinuo de X que contiene a p , entonces existe un subcontinuo B de X tal que $q \in B$ y $H_d(A, B) < \epsilon$. Se dice que X tiene la propiedad de Kelley si posee dicha propiedad en cada uno de sus puntos.

Definición 2.15. Sean X y Y dos espacios topológicos, $A \subset Y$ y $f: A \rightarrow X$ una función continua. Una función $F: Y \rightarrow X$ es una **extensión continua** de f a Y si F es continua y $F \upharpoonright_A = f$. Un espacio normal X es un **extensor absoluto (AE)** si, para cada espacio normal Y , cada subconjunto cerrado A de Y y cada función continua $f: A \rightarrow X$, se cumple que f tiene una extensión continua a Y .

Definición 2.16. Un subconjunto cerrado A de X es un **retracto** de X si existe una función continua $r: X \rightarrow A$ tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$. La función r es una **retracción** de X sobre A . El conjunto A es un **retracto por deformación** de X si existe una función continua $G: X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $G(x, 0) = x$ y $G(x, 1) = r(x) \in A$ para todo $x \in X$, donde r es una retracción de X sobre A . Si G es una retracción por deformación de X sobre A y además para todo $a \in A$ y todo $t \in [0, 1]$ se cumple que $G(a, t) = a$, entonces la aplicación G es una **retracción fuerte por deformación** de X sobre A . El conjunto A es un **retracto fuerte por deformación** de X . Un espacio métrico compacto X es un **retracto absoluto (AR)** si, siempre que B sea un subconjunto cerrado de un espacio métrico Y y B sea homeomorfo a X , entonces B es un retracto de Y .

3 Construcción de espacios cocientes

Presentaremos la manera de construir un espacio Y a partir de identificar topológicamente conjuntos de puntos de un espacio X .

Definición 3.1. Una **partición** de un conjunto X es una colección de conjuntos no vacíos, ajenos entre sí, cuya unión es X .

Definición 3.2. Sea $\mathcal{P}$ una partición de un espacio métrico X . El **conjunto cociente**, denotado como $X/\mathcal{P}$, es el conjunto cuyos puntos son los elementos de la partición $\mathcal{P}$.

Definición 3.3. La función $q: X \rightarrow X/\mathcal{P}$ que envía a cada punto x de X al único elemento de la partición $\mathcal{P}$ que lo contiene, es la **función cociente**.

Teorema 3.4. [6, 3.1] Si X es un espacio topológico y $\mathcal{P}$ es una partición de X , entonces

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}) = \{U \subset X/\mathcal{P}: q^{-1}(U) \text{ es un conjunto abierto de } X\}$$

es una topología para $X/\mathcal{P}$.

La topología $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ es la **topología cociente** para $X/\mathcal{P}$ y la pareja ordenada $(X/\mathcal{P}, \mathcal{T}(\mathcal{P}))$ es llamado el espacio cociente o espacio de descomposición o espacio de identificación

Es conocido que un espacio cociente no necesariamente es métrico (ver [9, pág. 37]). Sin embargo, existen condiciones adicionales sobre la descomposición para que el espacio cociente resulte ser un espacio métrico. La siguiente definición me permite determinar cuando un espacio cociente es métrico

Definición 3.5. Sea un espacio topológico X . Una partición $\mathcal{P}$ de X es **semicontinua superiormente** si para cada $P \in \mathcal{P}$ y para cada abierto U de X con $P \subset U$, existe un abierto V de X con $P \subset V$, tal que si $A \in \mathcal{P}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subset U$.

Teorema 3.6. [15, Teorema 1.2.22] *Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{P}$ una descomposición de X . Si $\mathcal{P}$ es semicontinua superiormente, entonces el espacio cociente $(X/\mathcal{P}, \mathcal{T}(\mathcal{P}))$ es un espacio métrico.*

Teorema 3.7. [18, 3.14] *Si X es un espacio topológico, A un subconjunto cerrado no vacío de X y $\mathcal{P} = \{\{x\} : x \in X \setminus A\} \cup \{A\}$, entonces $\mathcal{P}$ es una descomposición semicontinua superiormente de X .*

Al espacio cociente anterior se le denota por X/A . Comunmente se dice que el espacio X/A resulta de identificar el conjunto A con un punto.

Teorema 3.8. [15, Teorema 1.7.3] *Si X es un continuo y $\mathcal{P}$ es una descomposición semicontinua superiormente de X , entonces el espacio cociente $(X/\mathcal{P}, \mathcal{T}(\mathcal{P}))$ es un continuo.*

Definición 3.9. *Sean un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. El n -ésimo hiperespacio cociente del continuo X , es el espacio cociente $C_n(X)/C_1(X)$, con la topología cociente.*

Como $C_1(X)$ es un subconjunto cerrado no vacío de $C_n(X)$, por el Teorema 3.7 y el Teorema 3.8, tenemos que $C_n(X)/C_1(X)$ es un continuo.

La función cociente de $C_n(X)/C_1(X)$ la denotamos por $q_X : C_n(X) \rightarrow C_n(X)/C_1(X)$. Al elemento $C_1(X)$, lo denotamos por C_X^n . Así, $q_X(C_1(X)) = \{C_X^n\}$.

Observación 3.10. *La restricción de la función cociente en $C_n(X) \setminus C_1(X)$ es biyectiva, continua y abierta en su imagen; es decir, hay un homeomorfismo entre $C_n(X) \setminus C_1(X)$ y $(C_n(X)/C_1(X)) \setminus \{C_X^n\}$.*

4 Contractibilidad, retracts absolutos y la propiedad del punto fijo en $C_n(X)/C_1(X)$

Comencemos esta sección probando el siguiente resultado, el cual es importante para nuestro trabajo.

Teorema 4.1. *Todo continuo se puede encajar en un cubo de Hilbert. Es decir, todo continuo es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert.*

Demostración. Sea X un continuo con métrica d . Como X es un espacio separable, existe

$$D = \{p_1, p_2, \dots\}$$

un subconjunto denso y numerable de X . Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$h_n : X \rightarrow [0, 1] \quad \text{por} \quad h_n(x) = \frac{1}{1 + d(x, p_n)}.$$

Observemos que h_n está bien definida y es continua, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora consideremos la función

$$h : X \rightarrow I^\infty \quad \text{por} \quad h(x) = (h_1(x), h_2(x), \dots).$$

Mostraremos que h es continua e inyectiva. Dado que $h_n : X \rightarrow [0, 1]$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $h : X \rightarrow I^\infty$ es continua. Para la inyectividad, sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Veamos que $h(x) \neq h(y)$, para esto, será suficiente probar que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$h_j(x) \neq h_j(y).$$

Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y) > 0$. Como D es denso en X , entonces

$$B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset.$$

Sea $p_j \in B(x, \varepsilon) \cap D$. Por la elección de ε , se tiene que

$$B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset,$$

con lo cual

$$d(y, p_j) \geq \varepsilon > d(x, p_j).$$

Esto implica que

$$h_j(y) = \frac{1}{1 + d(y, p_j)} < \frac{1}{1 + d(x, p_j)} = h_j(x).$$

Es decir, $h_j(x) \neq h_j(y)$. Luego h es inyectiva.

Por lo tanto, h es una función continua, inyectiva, con dominio compacto y codominio de Hausdorff, luego X es homeomorfo a $h(X)$, es decir, h es un encaje de X en I^∞ . $\square$

Proposición 4.2. [13, Teorema 3.7] *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (a) 2^X es contráctil;
- (b) $C(X)$ es contráctil;
- (c) $C_n(X)$ es contráctil.

Proposición 4.3. *Si X es un continuo con la propiedad de Kelley, entonces $C_n(X)$ es contráctil, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Si X es un continuo con la propiedad de Kelley, entonces 2^X y $C(X)$ son contráctiles ([11, Teorema 20.12]). Por lo tanto, el resultado se sigue de la Proposición 4.2. $\square$

Teorema 4.4. [10, Corolario 16.4] *Sea $n \in \mathbb{N}$. El cubo de Hilbert y cualquier n -celda son AE .*

Teorema 4.5. [10, Teorema 16.5] *Sea X un continuo. Entonces X es un AR si y sólo si X es AE.*

Corolario 4.6. *Sea $n \in \mathbb{N}$. El cubo de Hilbert y cualquier n -celda son AR.*

Demostración. Es una consecuencia del Teorema 4.4 y el Teorema 4.5. $\square$

Lema 4.7. [2, Lema 3.4] *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Entonces $F_n(X) - F_1(X)$ es conexo.*

Lema 4.8. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Entonces $C_n(X) - C_1(X)$ es conexo.*

Demostración. Por el Lema 4.7, es suficiente con demostrar que cada elemento de $C_n(X) - (F_n(X) \cup C_1(X))$ puede ser unido mediante un arco contenido $C_n(X) - C_1(X)$ a un punto en $F_n(X) - F_1(X)$. Sea $A \in C_n(X) - (F_n(X) \cup C_1(X))$. Entonces A tiene por lo menos 2 componentes. Supongamos que $A_1, \dots, A_m$ son las componentes de A . Note que $2 \leq m \leq n$. Dado $j \in \{1, \dots, m\}$, sea $a_j \in A_j$. Por [11, Teorema 14.6], existe un arco ordenado $\alpha: [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ tal que $\alpha(0) = \{a_1, \dots, a_m\}$ y $\alpha(1) = A$. Luego, $\alpha(0) \in F_n(X) - F_1(X)$. De hecho, por [7, Lema 2.3], $\alpha([0, 1]) \subset C_n(X) - C_1(X)$. Por lo tanto, $C_n(X) - C_1(X)$ es conexo. $\square$

Lema 4.9. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Entonces $C_n(X)/C_1(X) - \{C_X^{(n,1)}\}$ es conexo.*

Demostración. Por el Lema 4.8, $C_n(X) - C_1(X)$ es conexo. Por lo tanto, por la Observación 3.10, $C_n(X)/C_1(X) - \{C_X^{(n,1)}\}$ es conexo. $\square$

Teorema 4.10. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Si $C_n(X)$ es contráctil, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es contráctil.*

Demostración. Como $C_n(X)$ es a contráctil y arco conexo [13, Teorema 3.1], existe una homotopía $H': C_n(X) \times [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ tal que $H'(A, 0) = A$ y $H'(A, 1) = X$, para cada $A \in C_n(X)$. Consideremos la función $H: C_n(X) \times [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ que está dada por:

$$H(A, t) = \bigcup \{H'((A, s)) : 0 \leq s \leq t\}.$$

Entonces, por [17, (16.3)], H una función continua. Además, por construcción, $H(A, 0) = A$ y $H(A, 1) = X$, para cada $A \in C_n(X)$. Más aún, por [17, Lema 16.5 (16.5.1)], $H(A, s) \subset H(A, t)$ para cada $A \in C_n(X)$ y $0 \leq s \leq t$. Así, como $H(\{A\} \times [0, 1])$ es un subcontinuo con más de un punto de 2^X , entonces resulta ser un arco ordenado [11, Lema 14.7]. De modo que si $H((A, t)) \in C_n(X)$ para algún $t \in [0, 1]$, entonces $H(\{A\} \times [t, 1]) \subset C_n(X)$ [7, Lema 2.3].

Consideremos ahora la función $K: C_n(X)/C_1(X) \times [0, 1] \rightarrow C_n(X)/C_1(X)$ está dada por:

$$K(\mathcal{A}, t) = \begin{cases} q_X^n(H((q_X^n)^{-1}(\mathcal{A}), t)), & \mathcal{A} \neq C_X^{(n,1)} \\ C_X^{(n,1)}, & \mathcal{A} = C_X^{(n,1)} \end{cases}$$

Note que $K(\mathcal{A}, 0) = \mathcal{A}$ y $K(\mathcal{A}, 1) = C_X^{(n,1)}$, para cada $\mathcal{A} \in C_n(X)/C_1(X)$. Además, K es continua por [9, 4.3, p.126]. Por lo tanto, $C_n(X)/C_1(X)$ es contráctil. $\square$

Corolario 4.11. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Si X es contráctil, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es contráctil.

Demostración. Por [17, Corolario (16.8)], 2^X y $C(X)$ son contráctiles. Luego, por la Proposición 4.2, $C_n(X)$ es contráctil. Por lo tanto, por el Teorema 4.10, $C_n(X)/C_1(X)$ es contráctil. $\square$

Corolario 4.12. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Si X tiene la propiedad de Kelley, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es contráctil.

Demostración. Por [17, Teorema (16.15)], 2^X y $C(X)$ son contráctiles. Luego, por la Proposición 4.2, $C_n(X)$ también es contráctil. Por lo tanto, por el Teorema 4.10, $C_n(X)/C_1(X)$ es contráctil. $\square$

Teorema 4.13. Sean X un continuo y $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq 2$ tales que $m < n$. Entonces lo siguiente se cumple:

- (a) si $C_m(X)$ es un retracts de $C_n(X)$, $C_m(X)/C_1(X)$ es un retracts de $C_n(X)/C_1(X)$;
- (b) si $C_m(X)$ es un retracts por deformación de $C_n(X)$, $C_m(X)/C_1(X)$ es un retracts por deformación de $C_n(X)/C_1(X)$;
- (c) si $C_m(X)$ es un retracts por deformación fuerte de $C_n(X)$, $C_m(X)/C_1(X)$ es un retracts por deformación fuerte de $C_n(X)/C_1(X)$.

Demostración. Solo demostraremos (c); las pruebas de (a) y (b) son similares. Como $C_m(X)$ es un retracts por deformación fuerte de $C_n(X)$, entonces existe una función continua $H : C_n(X) \times [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ tal que $H((A, 0)) = A$, $H((A, 1)) = r(A)$ y $H((B, t)) = B$ para cada $A \in C_n(X)$, cada $B \in C_m(X)$ y cada $t \in [0, 1]$, donde $r : C_n(X) \rightarrow C_m(X)$ es una retracción.

Consideremos la función $G : C_n(X)/C_1(X) \times [0, 1] \rightarrow C_n(X)/C_1(X)$ está dada por

$$G(\mathcal{A}, t) = \begin{cases} q_X^n(H((q_X^n)^{-1}(\mathcal{A}), t)), & \mathcal{A} \neq C_X^{(n,1)} \\ C_X^{(n,1)}, & \mathcal{A} = C_X^{(n,1)} \end{cases}$$

Por [9, 4.3, p. 126], G es una función continua. Más aún, dado $\mathcal{A} \in C_n(X)/C_1(X) - \{C_X^{(n,1)}\}$, entonces

$$G(\mathcal{A}, 0) = q_X^n(H((q_X^n)^{-1}(\mathcal{A}), 0)) = q_X^n((q_X^n)^{-1}(\mathcal{A})) = \mathcal{A},$$

y como

$$G(\mathcal{A}, 1) = q_X^n(H((q_X^n)^{-1}(\mathcal{A}), 1))$$

y $H((q_X^n)^{-1}(\mathcal{A}), 1) = r((q_X^n)^{-1}(\mathcal{A}))$, entonces $G(\mathcal{A}, 1) = R(\mathcal{A})$, donde $R : C_n(X)/C_1(X) \rightarrow C_m(X)/C_1(X)$ es una retracción.

Por otro lado, para $\mathcal{A} \in C_m(X)/C_1(X) - \{C_X^{(m,1)}\}$ y $t \in [0, 1]$, tenemos que

$$G(\mathcal{A}, t) = q_X^n(H((q_X^n)^{-1}(\mathcal{A}), t)) = q_X^n((q_X^n)^{-1}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}.$$

Note que

$$G(C_X^{(n,1)}, t) = q_X^n(H((q_X^n)^{-1}(C_X^{(n,1)}), t)) = q_X^n(C_1(X)) = C_X^{(n,1)} = C_X^{(m,1)}.$$

Por lo tanto, $C_m(X)/C_1(X)$ es un retractor por deformación fuerte de $C_n(X)/C_1(X)$. $\square$

Lema 4.14. [14, Teorema 4.15] *Sean X un continuo localmente conexo y $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m \leq n$. Entonces lo siguiente se cumple:*

- (a) $C_m(X)$ es un retractor de $C_n(X)$;
- (b) $C_m(X)$ es un retractor por deformación de $C_n(X)$;
- (c) $C_m(X)$ es un retractor por deformación fuerte de $C_n(X)$.

Como una consecuencia directa del Teorema 4.13 y el Lema 4.14, obtenemos lo siguiente.

Lema 4.15. *Sean X un continuo localmente conexo y $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq 2$ tales que $m < n$. Entonces lo siguiente se cumple:*

- (a) si $C_m(X)$ es un retractor de $C_n(X)$, $C_m(X)/C_1(X)$ es un retractor de $C_n(X)/C_1(X)$;
- (b) si $C_m(X)$ es un retractor por deformación de $C_n(X)$, $C_m(X)/C_1(X)$ es un retractor por deformación de $C_n(X)/C_1(X)$;
- (c) si $C_m(X)$ es un retractor por deformación fuerte de $C_n(X)$, $C_m(X)/C_1(X)$ es un retractor por deformación fuerte de $C_n(X)/C_1(X)$.

Teorema 4.16. *Si X es un retractor absoluto y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es un retractor absoluto.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que X es un subespacio del cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$ (Teorema 4.1). Como X es un retractor absoluto, existe una retracción $r : \mathcal{Q} \rightarrow X$. Consideremos la función $C_n/C_1(r) : C_n(\mathcal{Q})/C_1(\mathcal{Q}) \rightarrow C_n(X)/C_1(X)$, dada por

$$C_n/C_1(r)(\mathcal{A}) = \begin{cases} q_X^n(C_n(r)((q_X^n)^{-1}(\mathcal{A}))), & \text{if } \mathcal{A} \neq C_{\mathcal{Q}}^{(n,1)}, \\ C_X^{(n,1)}, & \text{if } \mathcal{A} = C_{\mathcal{Q}}^{(n,1)}. \end{cases}$$

Note que $C_n/C_1(r)$ es una retracción. Además, por [3, Teorema 5.6], se tiene que $C_n(\mathcal{Q})/C_1(\mathcal{Q})$ es el cubo de Hilbert. Por lo tanto, por el Corolario 4.6, $C_n(X)/C_1(X)$ es un retractor absoluto. $\square$

Como todos los retractos absolutos tienen la propiedad del punto fijo, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.17. *Si X es un retractor absoluto y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Es una consecuencia de [16, 3.5.4]. $\square$

5 Otras propiedades en $C_n(X)/C_1(X)$

En esta sección se estudian otras propiedades que enriquecen el panorama desarrollado hasta ahora. Sin embargo, dichos resultados no se encuentran en los artículos *Quotients of n -fold hyperspaces* y *More on quotients of n -fold hyperspaces* (a excepción del Corolario 5.7), pero forman parte de algunos resultados más generales que aparecen en la referencia [1], actualmente en preparación.

Corolario 5.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, entonces $C_n(\mathcal{Q})/C_1(\mathcal{Q})$ es un retracto absoluto.*

Demostración. Por el Corolario 4.6, $\mathcal{Q}$ es un retracto absoluto. Así, por el Teorema 4.16, $C_n(\mathcal{Q})/C_1(\mathcal{Q})$ es un retracto absoluto. $\square$

Corolario 5.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, entonces $C_n(\mathcal{Q})/C_1(\mathcal{Q})$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Por el Corolario 5.1, $C_n(\mathcal{Q})/C_1(\mathcal{Q})$ es un retracto absoluto. Por lo tanto, por el Corolario 4.17, $C_n(\mathcal{Q})/C_1(\mathcal{Q})$ tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

Corolario 5.3. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Si X es hereditariamente indescomponible, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es contráctil.*

Demostración. Por [11, Ejemplo 20.6]), X tiene la propiedad de Kelley. Luego, por el Corolario 4.12, $C_n(X)/C_1(X)$ es contráctil. $\square$

Corolario 5.4. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Si X es localmente conexo, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es contráctil.*

Demostración. Por [11, Corolario 20.14]), X tiene la propiedad de Kelley. Luego, por el Corolario 4.12, $C_n(X)/C_1(X)$ es contráctil. $\square$

Corolario 5.5. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Si X es homogéneo, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es contráctil.*

Demostración. Por [11, Teorema 20.17]), X tiene la propiedad de Kelley. Luego, por el Corolario 4.12, $C_n(X)/C_1(X)$ es contráctil. $\square$

Teorema 5.6. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, then $C_n(X)/C_1(X)$ es una imagen continua del abanico de Cantor.*

Demostración. Por [8, Teorema 3.2], $C_n(X)$ es imagen continua del abanico de Cantor. Luego, como q_X^n es una función continua y sobreyectiva, se sigue que $C_n(X)/C_1(X)$ es imagen continua del abanico de Cantor. $\square$

Como una consecuencia del Teorema 5.6, tenemos lo siguiente.

Corolario 5.7. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es uniformemente conexo por caminos.*

Corolario 5.8. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es arco descomponible.*

Demostración. Por el Teorema 5.6, $C_n(X)/C_1(X)$ es una imagen continua del abanico de Cantor. Entonces, por [14, Teorema 3.1], $C_n(X)/C_1(X)$ es arco descomponible. $\square$

Teorema 5.9. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es débilmente encadenable.*

Demostración. By [8, Corolario 3.3], $C_n(X)$ es débilmente encadenable. Luego, como q_X^n es una función continua y sobreyectiva, y la encadenabilidad débil de continuos es invariante bajo funciones continuas, entonces $C_n(X)/C_1(X)$ es débilmente encadenable. $\square$

Teorema 5.10. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, entonces existe una función continua y sobreyectiva de 2^X sobre $C_n(X)/C_1(X)$.*

Demostración. Por [8, Teorema 3.1], existe una función continua y sobreyectiva de 2^X sobre $C_n(X)$. Entonces, como q_X^n es una función continua y sobreyectiva de $C_n(X)$ sobre $C_n(X)/C_1(X)$, se sigue que existe una función continua y sobreyectiva de 2^X sobre $C_n(X)/C_1(X)$. $\square$

Teorema 5.11. *Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Si X y Y son continuos tales que existe una función continua y sobreyectiva de $C_n(X)/C_1(X)$ sobre Y , entonces Y es débilmente encadenable y arco descomponible.*

Demostración. Por el Teorema 5.9, Y es débilmente encadenable. Por el Teorema 5.6, existe una función continua y sobreyectiva del abanico de Cantor sobre Y . Por lo tanto, por [14, Teorema 3.1], Y es arco descomponible. $\square$

Agradecimientos

Agradecemos a los árbitros por su tiempo y dedicación en la revisión de este trabajo.

Bibliografía

- [1] F. de J. Aguilar-Romero, David Herrera-Carrasco, Fernando Macías-Romero, Leonardo Ramírez-Aparicio, *Topological properties on $C_n(X)/C_m(X)$ of a continuum*, manuscrito.
- [2] F. Barragán, *Aposyndetic properties of the n -fold symmetric product suspension of a continuum*, Glas. Mat. 49 (69) (2014), 179–193.
- [3] J. Camargo, Sergio Macías, *Quotient of n -fold hyperspaces*, Topology Appl. 197 (2016) 154–166.

-
- [4] J. Camargo, Sergio Macías, *More on quotients of n -fold hyperspaces*, Houston J. Math. 50 (2) (2024), 443–475.
 - [5] T. A. Chapman, *Lectures on Hilbert Cube Manifolds*, CBMS Regional Conf. Ser. Math., vol. 28, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1976.
 - [6] Fidel Casarrubias-Segura y Ángel Tamariz-Mascarúa, *Elementos de topología general*, 2015.
 - [7] J. J. Charatonik, A. Illanes, *Local connectedness in hyperspaces*, Rocky Mt. J. Math. 36 (2006), 811–856.
 - [8] J. J. Charatonik and S. Macías, Mappings of some hyperspaces, J. P. Jour. Geometry and Topology, 4 (2004), 53–80.
 - [9] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, London, Sydney, Toronto, 1966.
 - [10] A. Illanes, *Continuum Theory*, Springer Cham, 2025. ISBN: 978-3-031-91010-4.
 - [11] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
 - [12] W. Kuperberg, Uniformly pathwise connected continua, in Studies in Topology, Proc. Conf. Univ. North Carolina, Charlotte, NC, 1974, (N. M. Stavrakas and K. R. Allen, eds.) Academic Press, New York, 1975, 315–324
 - [13] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X* , *Topology Appl.* 109 (2001), 237–256.
 - [14] S. Macías, retractions and hyperspaces, Glas. Mat. 46 (66) (2011) 471–481.
 - [15] S. Macías, *Topics on Continua*, 2nd edition, Springer, 2018.
 - [16] J. van Mill, *Infinite-Dimensional Topology*, North Holland, Amsterdam, 1989.
 - [17] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.
 - [18] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum theory, an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158, Marcel Dekker, New York, 1992.
 - [19] M. Wojdysławski, *Rétractes absolus et hyperespaces des continus*, Fundamenta Mathematicae, 32 (1939), 184–192.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

`dherrera@fcfm.buap.mx`

`fmacias@fcfm.buap.mx`

`leonardo.ramirezap@alumno.buap.mx`

Capítulo 8

Universalidad en los continuos y una dendrita universal

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero,
Juan Carlos López Diez, David Rodríguez Hernández
FCFM, BUAP

Resumen

En este capítulo se estudia el concepto de universalidad en espacios topológicos, se introduce el concepto de continuo universal y se analizan ejemplos como la curva de Sierpiński, la esponja de Menger y el cubo de Hilbert. El objetivo principal del capítulo es construir la dendrita universal de Ważewski, mediante el uso de límites inversos y funciones monótonas, y demostrar sus propiedades fundamentales. También se estudian variantes de dendritas universales de orden finito, proporcionando construcciones y ejemplos representativos. Este desarrollo permite comprender cómo estructuras complejas pueden contener copias de todas las dendritas dentro de una misma clase.

1 Introducción

La teoría de continuos es una rama de la topología que se ocupa del estudio de espacios métricos compactos y conexos. Estos objetos, llamados continuos, aparecen de manera natural en diversas áreas de las matemáticas. Uno de los conceptos más relevantes dentro de esta teoría es el de universalidad. De manera informal, se entiende un continuo universal como aquel que contiene, como subespacios homeomorfos, a todos los continuos de una determinada clase.

En este capítulo nos enfocamos en el estudio de la universalidad en el contexto de las dendritas, que son continuos localmente conexos que no contienen curvas cerradas simples. El objetivo principal es presentar la construcción de una dendrita universal, conocida como la dendrita universal de Ważewski, y demostrar que toda dendrita puede ser encajada en ella. Para tal propósito, se desarrollarán previamente las herramientas necesarias, tales como homeomorfismos, encajes, propiedades topológicas y límites inversos, los cuales juegan un papel fundamental en la construcción.

Finalmente, se considerará un caso particular de dendrita universal para la familia de dendritas cuyo orden de sus puntos de ramificación es menor o igual a 3, la llamada dendrita de Gehman.

2 Preliminares

En esta sección, presentamos la notación que hemos convenido usar para algunos términos matemáticos de este trabajo. También se presentan algunas definiciones que se consideran necesarias conocer, así como algunos resultados básicos.

- (i) Por $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$ denotamos al conjunto de números reales y al conjunto de números enteros positivos, respectivamente.
- (ii) Dados X un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $r > 0$ denotamos por $B_X(x_0, r)$ a la bola abierta de X con centro en x_0 y de radio r .
- (iii) Por S^n denotamos la esfera unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$; es decir, $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$. Particularmente, S^1 es llamada **circunferencia unitaria**.
- (iv) Si X y Y son espacios topológicos, $A \subset X$ y $f: X \rightarrow Y$ una función. La función $f|_A$ denotará la función restringida al subespacio A .
- (v) Si A es un subconjunto de un espacio topológico X , denotamos $\text{int}_X(A)$, $\text{cl}_X(A)$ y $\text{fr}_X(A)$ como el interior, la cerradura y la frontera de A en X respectivamente.

Definición 2.1. Decimos que un conjunto es **numerable** si es finito o si su cardinalidad es igual a la del conjunto $\mathbb{N}$. Decimos que un subconjunto D de un espacio métrico X es **denso** en X , si cada subconjunto abierto y no vacío en X intersecta a D (equivalentemente si $\text{cl}_X(D) = X$). También decimos que un espacio topológico X es **separable** si este contiene un subconjunto denso y numerable.

Ejemplo 2.2. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$, ya que dado cualquier intervalo abierto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ siempre existe un número racional entre a y b . Más aún $\mathbb{R}$ es separable ya que $\mathbb{Q}$ es numerable. En general también se cumple que $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.3. Sean X un espacio topológico y A un subespacio de X . Diremos que A es una **componente** de X si se cumplen:

- (i) A es conexo.
- (ii) Si B es un subespacio conexo de X que contiene a A , entonces $B = A$.

Los puntos anteriores nos dicen que en realidad una componente es un subespacio conexo maximal.

3 Homeomorfismos y encajes

Definición 3.1. Sean X, Y espacios métricos. Un **homeomorfismo** entre X y Y es una función $\phi : X \rightarrow Y$ la cual es biyectiva, continua y ϕ^{-1} es continua. Se dice que X es **homeomorfo** a Y si existe un homeomorfismo entre X y Y . Este hecho será denotado como $X \simeq Y$.

Ejemplo 3.2. Los espacios $[0, 1]$ y $[a, b]$ con la métrica euclidiana son homeomorfos mediante $\phi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ definida para cada $x \in [0, 1]$ como $\phi(x) = a(1 - x) + bx$.

Ejemplo 3.3. La circunferencia unitaria es homeomorfa a la frontera del cuadrado unitario mediante $f : S^1 \rightarrow \text{fr}_{\mathbb{R}^2}([0, 1]^2)$ definida como

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{\max\{|x|, |y|\}}, \frac{y}{\max\{|x|, |y|\}} \right).$$

Lemma 3.1. En $\mathbb{R}^n$ toda bola abierta es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Sea $\bar{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ y consideremos $\phi : B_{\mathbb{R}^n}(\bar{0}, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como $\phi(x) = \frac{x}{1-d(x, \bar{0})}$ y la función $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow B_{\mathbb{R}^n}(\bar{0}, 1)$ definida como $\psi(y) = \frac{y}{1+d(\bar{0}, y)}$. Note que ϕ y ψ son funciones continuas tales que $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$, es decir, son biyectivas y ψ es función inversa de ϕ . Por lo tanto, $B_{\mathbb{R}^n}(\bar{0}, 1) \simeq \mathbb{R}^n$. $\square$

Un encaje es, en esencia, una “copia fiel” de X dentro de Y . No sólo es una función inyectiva, sino que preserva la estructura de los conjuntos abiertos.

Definición 3.4. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Una función $\varphi : X \rightarrow Y$ se denomina **encaje** (o *embedding*) si φ es un homeomorfismo sobre su imagen $\varphi(X) \subseteq Y$ (considerando en $\varphi(X)$ la métrica inducida por Y). En tal caso, decimos que X se puede encajar en Y mediante φ .

Ejemplo 3.5. 1. El anillo bidimensional $A = \{z \in \mathbb{R}^2 : r < \|z\| < R\}$ se puede encajar en $\mathbb{R}^2$.

2. El intervalo abierto $(0, 1)$ de $\mathbb{R}$ se encaja de forma natural en $[0, 1]$ mediante la inclusión $i(x) = x$.

3. El intervalo cerrado $[0, 1]$ puede ser encajado en $(0, 1)$ mediante una función afín φ , por ejemplo: $\varphi(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

Diferencia con la inyección continua: Es crucial notar que una función inyectiva y continua no es necesariamente un encaje. Para que lo sea, la inversa $\varphi^{-1} : \varphi(X) \rightarrow X$ también debe ser continua. Un ejemplo clásico es “enrollar” un intervalo semiabierto para formar una circunferencia en $\mathbb{R}^2$: la función es inyectiva y continua, pero no es un homeomorfismo sobre su imagen porque rompe la estructura cerca del punto de unión.

Definición 3.6. Se dice que una propiedad P de un espacio métrico X es una **propiedad topológica** si, para cualquier espacio métrico Y tal que X homeomorfo a Y , Y también posee la propiedad P .

Las propiedades topológicas son los “objetos de estudio” de la topología. Intuitivamente si una propiedad no se conserva al “deformar” el espacio (sin romperlo ni pegarlo) entonces no es topológica.

Ejemplo 3.7. Son propiedades topológicas: La separabilidad, la compacidad y la conexidad. No son propiedades topológicas: El acotamiento y la completitud.

Por ejemplo, $(0, 1)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$, pero $(0, 1)$ está acotado y $\mathbb{R}$ no; $\mathbb{R}$ es completo y $(0, 1)$ no lo es con la métrica usual.

Para ilustrar el poder de este concepto, note que, si X puede ser encajado en Y y Y encajado en X , no necesariamente $X \simeq Y$. basta con recordar que $[0, 1]$ es compacto y, por ser una propiedad topológica, $[0, 1]$ no es homeomorfo a $(0, 1)$.

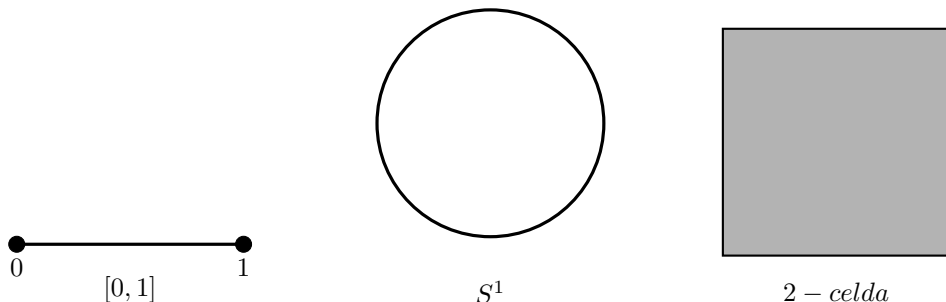
Teorema 3.8. Sean X y Y espacios métricos con X compacto. Si $f : X \rightarrow Y$ es continua e inyectiva, entonces $X \simeq f(X)$.

Demostración. Consideremos $h : X \rightarrow f(X)$ con $h = f$. Como f es inyectiva, h es sobreyectiva y continua. Veamos que $h^{-1} : f(X) \rightarrow X$ es continua. Sea U un abierto de X , entonces $X \setminus U$ es cerrado de X . Luego $X \setminus U$ es compacto. Como f es continua, $f(X \setminus U)$ es compacto y, por consiguiente, cerrado de $f(X)$. De modo que $f(X) \setminus f(X \setminus U) = f(U)$ es abierto de $f(X)$. Así, h^{-1} es continua. Por lo tanto, $X \simeq f(X)$. $\square$

4 Continuos

Definición 4.1. Un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto. Un **subcontinuo** de un continuo X es un subconjunto cerrado, conexo y no vacío de X .

Ejemplo 4.2. El continuo más simple es el intervalo $[0, 1]$ de la recta real, también la circunferencia unitaria y la 2-celda que definimos como el producto cartesiano $[0, 1] \times [0, 1]$ son ejemplos clásicos de continuos.



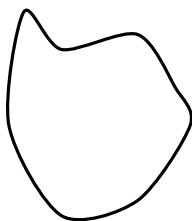
Definición 4.3. Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo $[0, 1]$. Si A es un arco y $h : [0, 1] \rightarrow A$ es un homeomorfismo, los puntos extremos de A son $h(0)$ y $h(1)$ y decimos que A une a $h(0)$ con $h(1)$.

Definición 4.4. Una **curva cerrada simple** es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria.

Definición 4.5. Un continuo X es **arco-conexo** si cada par de puntos distintos de X son los puntos extremos de un arco en X .

Definición 4.6. Un espacio métrico X es **localmente conexo en** $p \in X$, si para cada vecindad V de p existe un subconjunto abierto y conexo U de X tal que $p \in U \subset V$. Se dice que X es **localmente conexo** si es localmente conexo en cada uno de sus puntos. Los continuos que son localmente conexos se les conoce como **continuos de Peano**.

Ejemplo 4.7. Un arco, una curva cerrada simple y una 2-celda son ejemplos de continuos localmente conexos.



Curva cerrada simple



Arco

El siguiente teorema nos proporciona una manera sencilla de construir nuevos continuos a partir de continuos más simples.

Teorema 4.8. La unión de dos continuos es un continuo si su intersección es distinta del vacío.

Demostración. Sean X_1 y X_2 dos continuos en un espacio métrico X , tales que $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$. Queremos probar que $Y = X_1 \cup X_2$ es un continuo. Para esto, obsérvese que $Y \neq \emptyset$ ya que $X_1 \neq \emptyset$ y $X_2 \neq \emptyset$, también Y es compacto pues la unión finita de compactos es compacto. Para probar la conexidad, supongamos por el contrario que Y no es conexo, entonces existen abiertos U y V de Y , tales que $U \cap V \neq \emptyset$, $V \cap Y \neq \emptyset$, $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$ y $Y \subset U \cup V$. Dado que X_1 es conexo y $X_1 \subset Y \subset U \cup V$, se tiene que $X_1 \subset U$ o $X_1 \subset V$, análogamente $X_2 \subset U$ o $X_2 \subset V$. Sea $p \in X_1 \cap X_2$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $p \in U$, de lo anterior $X_1 \subset U$ y $X_2 \subset U$, de donde $Y = X_1 \cup X_2 \subset U$, entonces $V \cap Y = \emptyset$ lo cual es una contradicción y, por tanto Y es conexo. Finalmente al ser $Y \subset X$, restringiendo la métrica de X a Y se tiene que Y es un espacio métrico. Así Y es un continuo. □

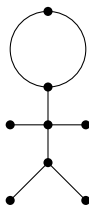


Figura 1: Gráfica finita conexa.

Definición 4.9. Un espacio métrico conexo X es una **gráfica finita conexa** si puede escribirse como la unión de una cantidad finita de arcos tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o se intersectan en uno o ambos puntos extremos.

Teorema 4.10. Toda gráfica finita conexa es un continuo.

Demostración. Se sigue del teorema 4.8 y de la definición de gráfica finita conexa. $\square$

5 Continuos universales

Dentro de la Teoría de Continuos, el concepto de elemento universal es esencial, ya que funciona como un “contenedor” o “estructura principal” que alberga a todos los miembros de una clase determinada.

Definición 5.1. Sea $\mathcal{C}$ una familia (o clase) de continuos. Decimos que un continuo U es **universal** para la familia $\mathcal{C}$ si se cumplen las siguientes condiciones:

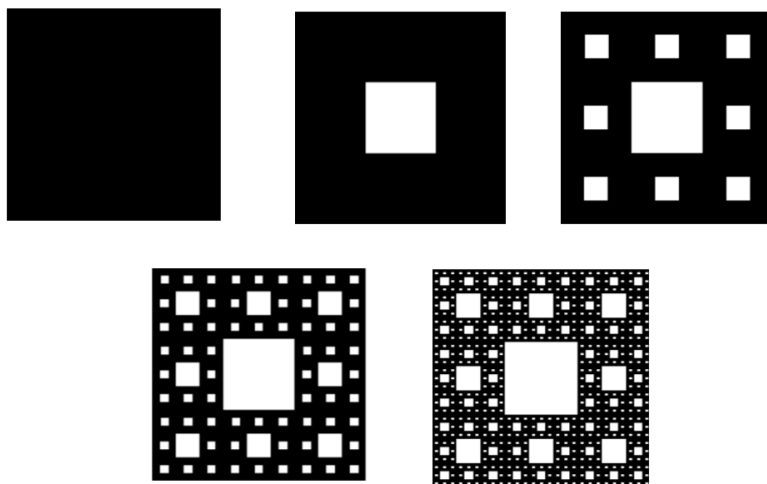
1. El continuo U pertenece a la clase $\mathcal{C}$ (o a una clase que la contiene).
2. Para cualquier continuo $X \in \mathcal{C}$, existe un subconjunto $K \subseteq U$ tal que $X \simeq K$.

En términos sencillos, un continuo es universal para cierta familia (o clase) de continuos si contiene una copia de cada uno de los elementos de su familia.

A continuación, presentamos algunos ejemplos conocidos de continuos universales.

Ejemplo 5.2. Sea $\mathcal{L}$ la familia de todas las curvas planas (espacios de dimensión uno). Bajo la siguiente construcción obtenemos un continuo universal para la familia $\mathcal{L}$, llamado la *Carpeta de Sierpinski*. Consideremos el cuadrado sólido $X_0 = [0, 1] \times [0, 1]$. Sea $X_1 = X_0 - (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, es decir, X_1 es el resultado de dividir X_0 en 9 cuadrados congruentes y extraer el central. A continuación, para construir X_2 nos fijamos en los 8 cuadrados congruentes que conforman X_1 y dividimos cada uno en 9 nuevos cuadrados congruentes para extraer el central a cada uno. De manera inductiva construimos para cada $i \in \mathbb{N}$ un espacio X_i bajo el procedimiento anterior. El espacio $X = \bigcap X_i$ es el espacio buscado. En

la siguiente figura esquematzamos dicha curva.



Curva Universal de Sierpiński.

Sea $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$. Este continuo es llamado la **curva de Sierpiński** y es universal para la familia $\mathcal{L}$.

El siguiente continuo universal contiene a todos los continuos en $\mathbb{R}^3$ de dimensión 1

Ejemplo 5.3. La **esponja de Menger** tiene una construcción similar a la curva de Sierpiński pero comenzando con $[0, 1]^3$ en lugar de $[0, 1]^2$. La construcción es como sigue. Sea $E_1 = [0, 1]^3$. Dividamos E_1 con planos paralelo a sus caras en 27 cubos iguales. Quitamos el cubo central D y todos los cubos de la subdivisión que comparten una cara bidimensional con D . De esta manera obtenemos E_2 , el cual consiste de 20 cubos pequeños y cerrados. Repitiendo exactamente el mismo procedimiento para cada uno de los 20 cubos obtenemos el subcontinuo E_3 de E_2 el cual es unión de 400 cubos pequeños. Continuando de forma recursiva, obtenemos una sucesión de continuos $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $E_1 \supset E_2 \supset \dots$. Definimos la **esponja de Menger** como $M_1^3 = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. La esponja de Menger es universal para la clase de los espacios métricos compactos de dimensión no mayor a 1 [7, Teorema 1.11.7]

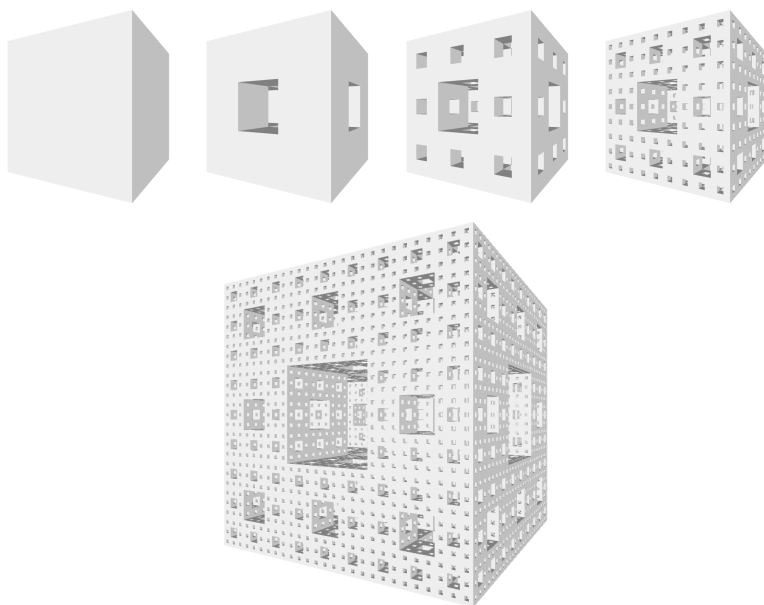


Figura 2: Esponja de Menger M_1^3 .

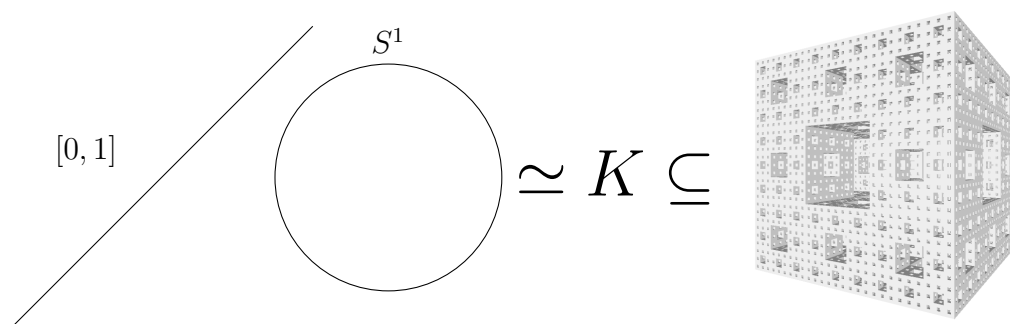


Figura 3: Ilustración de universalidad de la esponja de Menger.

Ejemplo 5.4. Sean $\mathcal{F}$ la familia de todos los continuos y para $i \in \mathbb{N}$, $I_1 = [0, 1] = I_i$. Sea $X = \prod_{i=1}^{\infty} I_i$. El continuo X es llamado el **cubo de Hilbert** y es universal para la familia $\mathcal{F}$. De hecho es universal para la familia de espacios métricos compactos.

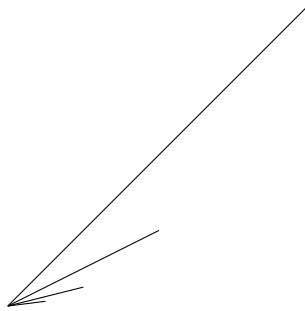
Poniendo especial atención en los continuos localmente conexos que no tienen curvas cerradas simples, llamados dendritas. En lo consiguiente, hablaremos de la existencia de una dendrita universal para la clase de todas las dendritas, así como en algunas variantes de orden finito.

Definición 5.5. Una **dendrita** es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.

Ejemplo 5.6. Como sabemos un arco y la curva cerrada simple son ejemplos de continuos localmente conexos. Entre estos 2 un arco no contiene curvas cerradas simples por tanto es una dendrita.

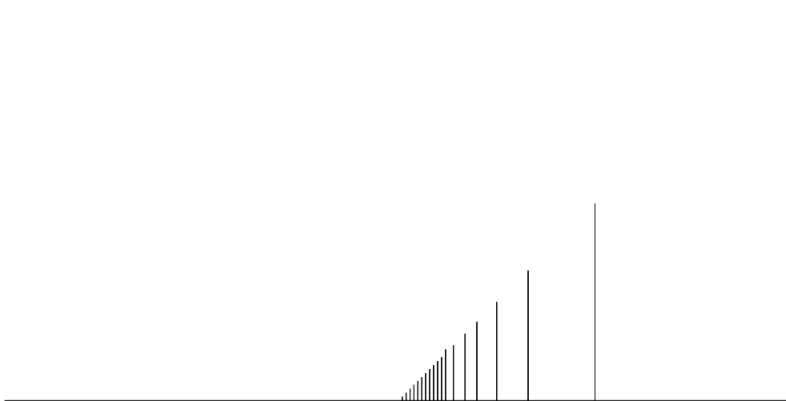
Ejemplo 5.7. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\left[(0, 0), \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)\right]$ el segmento de recta en $\mathbb{R}^2$ que une $(0, 0)$ con $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$. Sea

$$F_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[(0, 0), \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)\right].$$



Este continuo es una dendrita y la denotaremos precisamente como F_ω .

Ejemplo 5.8. Sea $W = \bigcup \{ \{1/n\} \times [0, 1/n] : n \in \mathbb{N} \} \cup ([-1, 1] \times \{0\})$. Este continuo es llamado Peine Nulo y es un ejemplo de dendrita.



Peine Nulo.

Ejemplo 5.9. Consideremos

$$H_0 = (\{0, 1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0\})$$

y

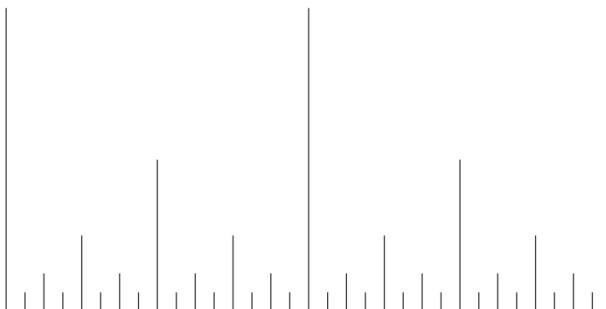
$$H_i = \left\{ \left(\frac{k}{2^{i+1}}, r \right) : 0 \leq k \leq 2^{i+1}, k \text{ natural impar}, r \in \left[0, \frac{1}{i} \right] \right\}$$

para cada $i \in \mathbb{N}$.

Luego el conjunto

$$\mathcal{H} = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i \right) \cup H_0$$

es una dendrita.



$\mathcal{H}$.

Definición 5.10. Un continuo X es **unicoherente** si para cualesquiera A y B subcontinuos de X tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexo. Además, si todo subcontinuo de X es unicoherente, entonces diremos que X es **hereditariamente unicoherente**.

Observación: Una curva cerrada simple no es unicoherente.

El siguiente teorema proporciona una caracterización útil de las dendritas.

Teorema 5.11. Sea X un continuo localmente conexo. Entonces X es una dendrita si y solo si X es hereditariamente unicoherente.

Demostración. Supongamos que X es una dendrita. Sea R un subcontinuo de X ; se sabe que todo subcontinuo de una dendrita es también una dendrita; luego, R es también una dendrita. Sean M y N subcontinuos de R tales que $R = M \cup N$. En las dendritas, la intersección de cualesquiera dos subconjuntos conexos es conexa; entonces, $M \cap N$ es conexo. Luego, R es unicoherente. Como R era arbitrario, X es hereditariamente unicoherente.

Recíprocamente, si X es hereditariamente unicoherente, no puede contener curvas cerradas simples por la observación anterior. $\square$

El propósito de esta sección es probar que existe una dendrita que es universal en la familia de todas las dendritas. Para esto, primero veamos la noción de límite inverso y algunos resultados que nos serán de utilidad.

Definición 5.12. Sea $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de espacios métricos. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $f_n^{n+1} : X_{n+1} \rightarrow X_n$ continua. La sucesión $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ de espacios y funciones es llamada **sucesión inversa**.

A los espacios X_n se les conoce como **espacios coordinados** y las funciones f_n^{n+1} son llamadas **funciones de ligadura**.

Este concepto lo podemos esquematizar como sigue:

$$X_1 \xleftarrow{f_1^2} X_2 \xleftarrow{f_2^3} X_3 \xleftarrow{f_3^4} \dots \xleftarrow{f_{n-1}^n} X_n \xleftarrow{f_n^{n+1}} X_{n+1} \xleftarrow{f_{n+1}^{n+2}} \dots$$

Además, si $n > m$ usaremos la siguiente notación: $f_m^n = f_m^{m+1} \circ \dots \circ f_{n-1}^n$ y $f_n^n = \text{Id}_{X_n}$ (función identidad en X_n).

Definición 5.13. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa. El **límite inverso** de $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ es el subespacio del producto cartesiano $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ con la topología producto, definido como

$$\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\} = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \mid f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n, \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

También es usual denotar el límite inverso por X_{∞} .

Es importante notar que, para garantizar que el límite inverso sea no vacío, debemos pedir que las funciones de ligadura sean suprayectivas.

Teorema 5.14. [12, Teorema 2.4] El límite inverso de espacios métricos, compactos y no vacíos es un espacio métrico, compacto y no vacío. También el límite inverso de continuos es un continuo.

Definición 5.15. Para cada $m \in \mathbb{N}$ las funciones $f_{(m)} : \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\} \rightarrow X_m$ definidas como $f_{(m)} = \pi_m \mid_{\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}}$ las llamaremos **funciones proyección del límite inverso**.

Note que $f_n^{n+1} \circ f_{(n+1)} = f_{(n)}$.

Observación 5.16. Las proyecciones $f_{(n)}$ son suprayectivas.

En efecto. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $y \in X_k$. Dado que las f_n^{n+1} son suprayectivas, para cada $m > k$ existe $w_m \in X_m$ tal que $f_k^m(w_m) = y$. De modo que, para cada $i > k$ definimos $x_i = w_i$. Consideremos a $x \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ definido como

$$x = (x_n)_{n=1}^{\infty} = \begin{cases} f_n^k(y) & , \text{ si } n \leq k \\ w_n & , \text{ si } k < n \end{cases}$$

Nótese que $x \in \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$ y $f_{(k)}(x) = \pi_k(x) = y$, es decir, que $f_{(k)}$ es suprayectiva, como k fue tomado de manera arbitraria, se tiene que las $f_{(n)}$ son suprayectivas.

Lema 5.17. [12, Teorema 2.6] Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa de espacios métricos con límite inverso X_∞ . Sea A un subconjunto compacto de X_∞ . Entonces, $\{f_{(n)}(A), f_n^{n+1} \mid f_{(n+1)}(A)\}$ es una sucesión inversa con funciones de ligadura suprayectivas y

$$\varprojlim \{f_{(n)}(A), f_n^{n+1} \mid f_{(n+1)}(A)\} = A = \left[\prod_{i=1}^{\infty} f_{(i)}(A) \right] \cap X_\infty.$$

Teorema 5.18. [12, Teorema 2.10] Sean (X, d) un espacio métrico y $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que X_n es un subconjunto compacto no vacío de X y cada f_n^{n+1} es suprayectiva. Si se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $p \in X_k$ sucede que

$$\text{diám} \left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} (f_k^i)^{-1}(p) \right) < \varepsilon.$$

2. Para cualesquiera $j \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ existe δ' tal que si $i > j$ y $p, q \in X_i$ son tales que $d(f_j^i(p), f_j^i(q)) > \delta$ entonces $d(p, q) > \delta'$.

Entonces $\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\} \simeq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\text{cl}_X \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} X_i \right) \right]$. En particular, si para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $X_n \subseteq X_{n+1}$ entonces $\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\} \simeq \text{cl}_X \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \right)$.

Proposición 5.19. [2, pág. 235, 2.9] Sean $X_\infty = \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$, A y B subconjuntos compactos de X_∞ y $C = A \cap B$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $C_n = f_{(n)}(A) \cap f_{(n)}(B)$. Entonces

$$C = \varprojlim \{C_n, f_n^{n+1} \mid C_{n+1}\}.$$

Definición 5.20. Sean X y Y espacios métricos. Una función $f : X \rightarrow Y$ continua es **monótona** si para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es conexo.

Proposición 5.21. [14, pág. 57, 2.1.14] Sea $X_\infty = \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}_{i=1}^{\infty}$ donde cada X_n es un continuo localmente conexo y cada f_n^{n+1} es una función monótona, entonces X_∞ es un continuo localmente conexo.

Proposición 5.22. [14, pág. 57, 2.1.13] Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ un sistema inverso de continuos con funciones de ligadura suprayectivas. Entonces f_n^{n+1} es monótona para todo $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si cada función proyección $f_{(n)}$ es monótona.

Proposición 5.23. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa de continuos con funciones de ligadura suprayectivas, si X_n es hereditariamente unicoherente, entonces X_∞ es hereditariamente unicoherente.

Demostración. Sean A y B subcontinuos de X_∞ . Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \cap B$ es conexo, entonces supongamos que $A \cap B \neq \emptyset$. Luego para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_{(n)}(A)$ y $f_{(n)}(B)$ son subcontinuos de X_n tales que $f_{(n)}(A) \cap f_{(n)}(B) \neq \emptyset$. Dado que X_n es hereditariamente unicoherente se sigue que $f_{(n)}(A) \cap f_{(n)}(B)$ es conexo y por las proposiciones 5.17 y 5.19 $\{f_{(n)}(A) \cap f_{(n)}(B), f_{(n)}^{n+1}|_{f_{(n)}(A) \cap f_{(n)}(B)}\}$ es una sucesión inversa de continuos cuyo limite es un continuo, como $A \cap B = \varprojlim \{f_{(n)}(A) \cap f_{(n)}(B), f_{(n)}^{n+1}|_{f_{(n)}(A) \cap f_{(n)}(B)}\}$, se tiene que $A \cap B$ es conexo y de ahí que X_∞ es hereditariamente unicoherente. $\square$

Corolario 5.24. *Todo límite inverso de dendritas con funciones de ligadura monótonas es una dendrita.*

Demostración. De la proposición 5.23 X_∞ es hereditariamente único y, dado que cada X_i es un continuo localmente conexo, se sigue de la proposición 5.21 que X_∞ es localmente conexo; así, por el teorema 5.11, se tiene que X_∞ es una dendrita. $\square$

Veamos la siguiente noción que nos será de utilidad para construir una dendrita, que llamamos D_∞ , y que más adelante veremos que es universal en la clase de las dendritas.

Definición 5.25. Sean $c \in \mathbb{R}^2$ y $\{B_i\}$ una sucesión de arcos convexos en $\mathbb{R}^2$ tales que c es uno de sus extremos con $\text{diam} B_i \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$ y $B_i \cap B_j = \{c\}$ si $i \neq j$. La estrella con centro en c y rayos B_i es el conjunto $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$

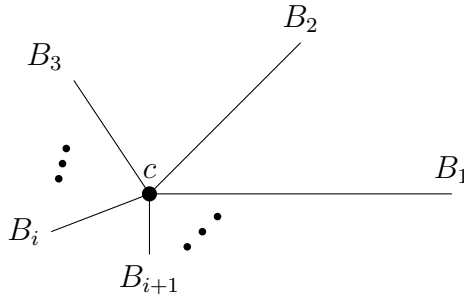


Figura 4: Estrella con centro en c y rayos B_i .

Dendrita Universal de ważewski. Construyamos el espacio D_∞ de la siguiente forma. Primero consideremos $c \in \mathbb{R}^2$ y D_1 , que es una estrella con centro c y rayos B_i .

Para cada $i \in \mathbb{N}$, sean m_i el punto medio de cada arco B_i de D_1 y S_i una estrella con centro en m_i , tal que $S_i \cap B_i = S_i \cap D_1 = \{m_i\}$, $\text{diám}(S_i) \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$ y $S_i \cap S_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Así, construimos $D_2 = D_1 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right)$.

De manera similar, para cada $i \in \mathbb{N}$ añadimos una estrella con centro en cada punto medio del subarco B_i que va de c a m_i y otra estrella con centro en cada punto medio del

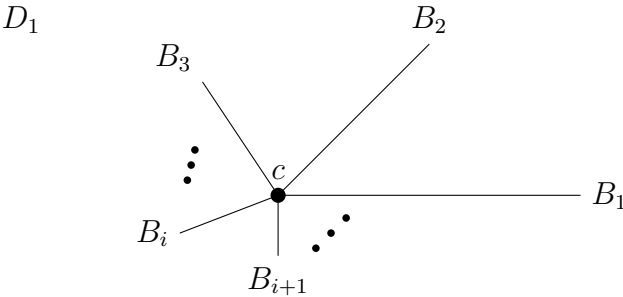


Figura 5: Representación de D_1 .

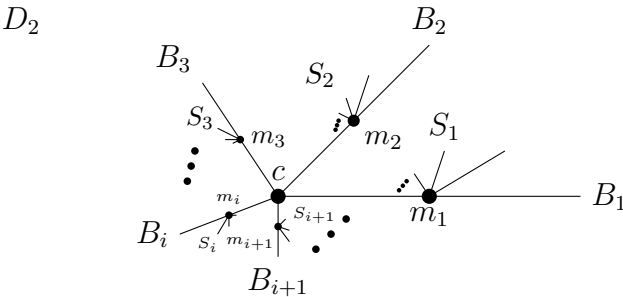


Figura 6: Representación de D_2 .

subarco B_i que va de m_i al extremo de B_i que no es c . También para cada $j \in \mathbb{N}$ ponemos una estrella en el punto medio de las estrellas S_j , cuidando que las nuevas estrellas sean ajenas dos a dos, que intersecten a D_2 sólo en sus respectivos centros y que sus diámetros tiendan a cero cuando $j \rightarrow \infty$. Siguiendo la misma idea, recursivamente construimos los D_n para cada $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que D_n es una dendrita y $D_n \subseteq D_{n+1}$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n^{n+1} : D_{n+1} \rightarrow D_n$ será una función definida para cada $x \in D_{n+1}$ por:

$$f_n^{n+1}(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in D_n \\ m_j, & \text{si } x \in S_j \text{ donde para cada } j \in \mathbb{N} \text{ tenemos que} \\ & S_j^n \text{ es una estrella agregada a } D_n. \end{cases}$$

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que f_n^{n+1} es una función monótona. Es más, para cualesquiera $n, k \in \mathbb{N}$ tales que $n > k$ tenemos que f_k^n es monótona.

Definimos a

$$D_\infty = \varprojlim \{D_n, f_n^{n+1}\}.$$

Proposición 5.26. D_∞ satisface lo siguiente:

- (i) Es una dendrita,
- (ii) Se puede encajar en $\mathbb{R}^2$.

Demostración. Para probar (i), veamos que D_∞ satisface las condiciones a) y b) del teorema 5.18. Para (a). Sean $k \in \mathbb{N}$ y $p \in D_k$. Para cualquier $i > k$, tenemos que $p \in D_i$; entonces notemos que: $(f_k^i)^{-1}(p) = S_j^i$. Si p pertenece a alguna de las estrellas S_j^i agregadas a los D_i (con $i > k$); de otro modo, $(f_k^i)^{-1}(p) = \{p\}$. Además, $(f_k^m)^{-1}(p) \subseteq (f_k^i)^{-1}(p)$ si $k < m < i$. Esto último implica que $\text{diám}\left(\bigcup_{j=k+1}^i (f_k^j)^{-1}(p)\right) = \text{diám}\left((f_k^i)^{-1}(p)\right)$ y, por construcción de los D_n , el diámetro de las estrellas S_j^n a los D_n es cada vez más cercano a cero. Así, existirá $q \in \mathbb{N}$ tal que si $p \in D_q$, entonces $\text{diám}\left(\bigcup_{j=k+1}^\infty (f_k^j)^{-1}(p)\right) < \varepsilon$.

Para (b). Sean $i \in \mathbb{N}$ y $x, y \in D_i$ tales que $d(x, y) > \delta$ para algún $\delta > 0$, es decir, $x \neq y$. Note que $(f_i^{i+1})^{-1}(x) \cap (f_i^{i+1})^{-1}(y) = \emptyset$, pues si existiera un elemento w en dicha intersección, tendríamos que $w = x$ o w pertenece a alguna estrella S_k^i añadida a D_i (por estar en $(f_i^{i+1})^{-1}(x)$). De igual manera, tendríamos que $w = y$ o w pertenece a alguna estrella S_l^i añadida a D_i . Pero si $w \in S_k^i \cap S_l^i$, entonces $k = l$, lo cual implica que $x = y$; esto sería una contradicción. Continuando de forma similar para $j > i$, tenemos que $(f_i^{j+1})^{-1}(x) \cap (f_i^{j+1})^{-1}(y) = \emptyset$, donde $(f_i^{j+1})^{-1}(x)$ y $(f_i^{j+1})^{-1}(y)$ son cerrados de $\mathbb{R}^2$, así que podemos separarlos con abiertos de $\mathbb{R}^2$ ajenos. Por lo tanto, para cualesquiera $j \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$, existe δ' tal que si $i > j$ y $p, q \in D_i$ son tales que $d(f_j^i(p), f_j^i(q)) > \delta$, entonces $d(p, q) > \delta'$.

Como cada $D_n \subset \mathbb{R}^2$ se sigue del teorema 5.18 que $D_\infty \simeq \text{cl}_{\mathbb{R}^2}\left(\bigcup_{n=1}^\infty D_n\right) \subseteq \mathbb{R}^2$. Dicho de otra manera, D_∞ puede encajarse en $\mathbb{R}^2$. □

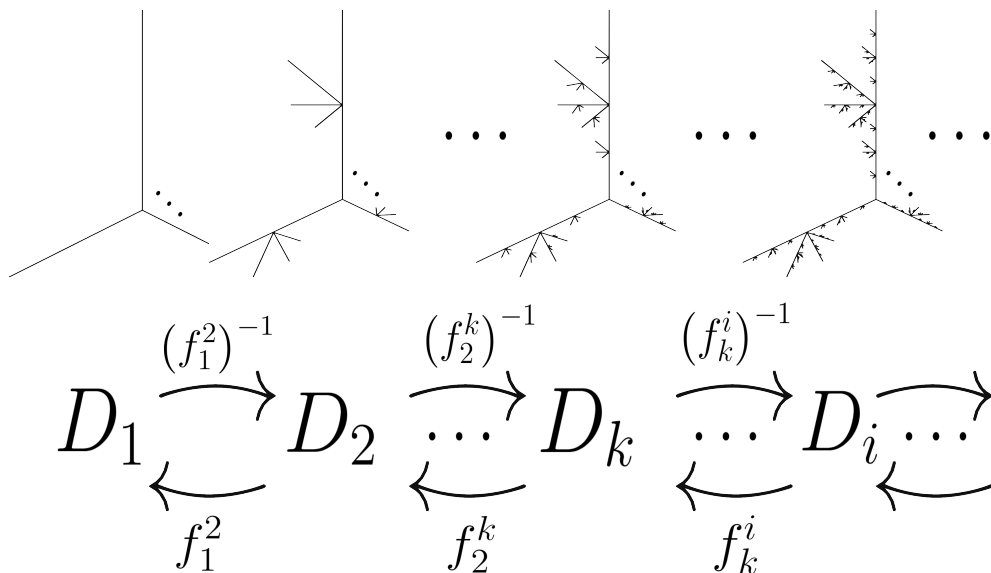


Figura 7: Diagrama de la construcción de D_∞ .

Teorema 5.27. [12, 10.37, Paso 4] Toda dendrita puede ser encajada en D_∞ .

Así, toda dendrita puede verse como un subespacio de D_∞ .

6 Dendritas universales de orden finito

A las dendritas se les puede clasificar de acuerdo a ciertas características; por ejemplo, podemos clasificarlas en subfamilias de acuerdo al orden máximo de sus puntos de ramificación. Recordemos que el orden de un punto x en una dendrita es el número de componentes conexas de $D \setminus \{x\}$. En esta sección, construimos dendritas universales para las familias de dendritas cuyos puntos de ramificación tienen orden menor o igual a un entero n .

Dendrita universal de orden 3

Considérese un triodo (unión de tres arcos que comparten un punto extremo común) cuyos arcos R_i ($i = 1, 2, 3$) tienen la misma longitud. Sea $D_1 = R_1 \cup R_2 \cup R_3$.

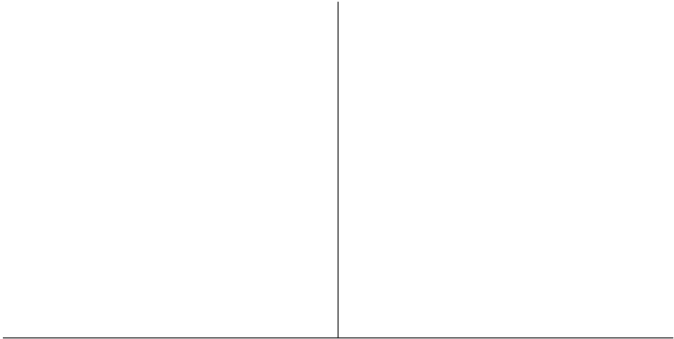


Figura 8: Paso 1: D_1 es un triodo.

En cada paso se añaden nuevos triodos (o arcos) en los puntos medios de los arcos existentes, de manera que solo intersecten en dichos puntos medios y con diámetros tendiendo a cero. Por ejemplo:

- Paso 2: En el punto medio x_i de cada arco R_i se añade un arco S_i (o un triodo) de modo que $S_i \cap R_i = \{x_i\}$ y los S_i son disjuntos. Definimos $D_2 = D_1 \cup (\bigcup_i S_i)$.
- Paso 3: Se consideran los puntos medios de cada subarco de R_i y de cada S_i , y se añaden nuevos arcos T_i con la misma propiedad.

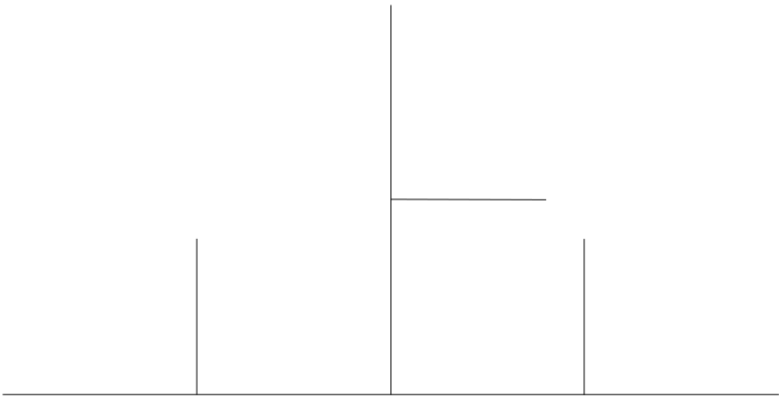


Figura 9: Paso 2.

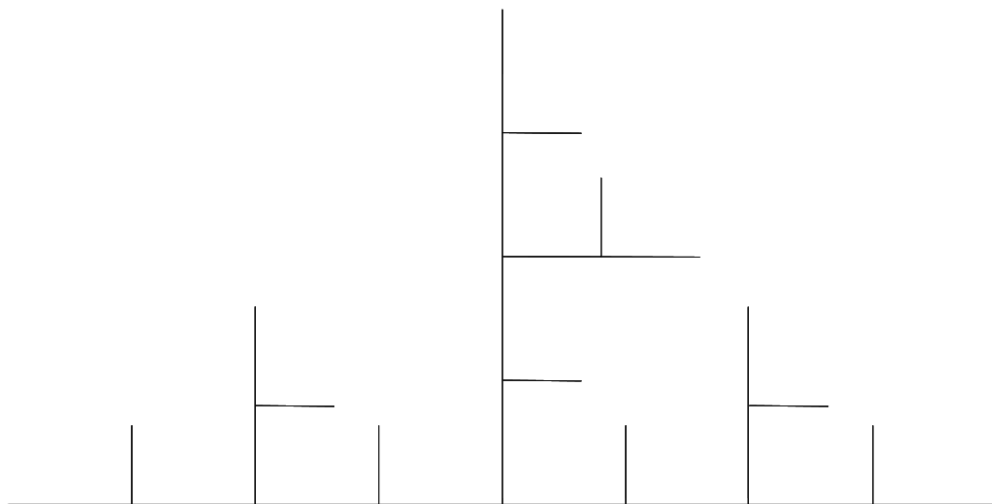


Figura 10: Paso 3.

Continuando recursivamente, se obtiene una sucesión creciente D_n de dendritas cuyos puntos de ramificación tienen orden a lo sumo 3. Sea $D_\infty^{(3)} = cl(\bigcup_{n=1}^\infty D_n)$. Entonces $D_\infty^{(3)}$ es una dendrita universal para la familia de dendritas con puntos de ramificación de orden ≤ 3 . La demostración de universalidad es análoga a la del caso general, utilizando ahora que cada arco contiene una copia densa de los puntos medios donde se pueden injertar las ramificaciones necesarias.

De manera similar, para cualquier entero $n \geq 2$ se puede construir una dendrita universal de orden n (usando un n -odo en lugar de un triodo). La denotaremos $D_\infty^{(n)}$.

Finalmente, presentamos un ejemplo concreto de una dendrita cuyos puntos extremos forman un conjunto de Cantor y todos sus puntos de ramificación tienen orden 3. Esta dendrita, llamada *dendrita de Gehman* y denotada G_3 , es un subcontinuo de $D_\infty^{(3)}$.

Construcción:

- **Paso 1:** Sea D_1 la unión de los segmentos de recta que unen el punto $(1/2, 1)$ con los puntos extremos $(0, 0)$ y $(1, 0)$ del conjunto de Cantor (consideramos el conjunto de Cantor en la base $[0, 1]$).

- **Paso 2:** Sean x e y los puntos medios de los dos segmentos de D_1 . Trazamos los segmentos de $(1/3, 0)$ a x y de $(2/3, 0)$ a y .

- **Paso 3:** Para construir D_3 , nos fijamos en los puntos medios x_1, y_1 de los segmentos formados en el paso anterior, y también en los puntos medios x_2, y_2 de los segmentos $(0, 0)-(1/3, 0)$ y $(2/3, 0)-(1, 0)$ respectivamente. Unimos D_2 con los segmentos rectilíneos que van de x_1 a $(1/9, 0)$, de y_1 a $(2/9, 0)$, de x_2 a $(7/9, 0)$ y de y_2 a $(8/9, 0)$ para obtener D_3 .

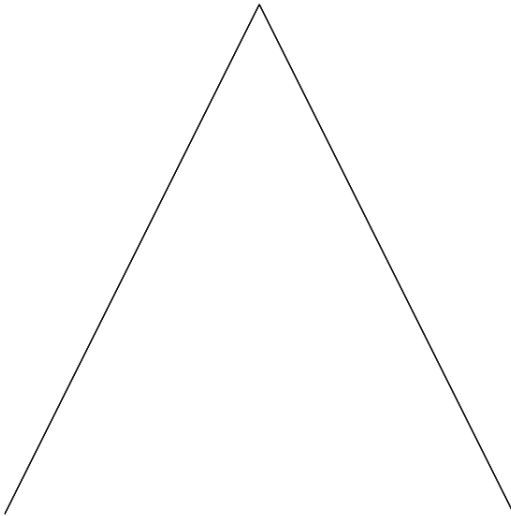


Figura 11: Paso 1.

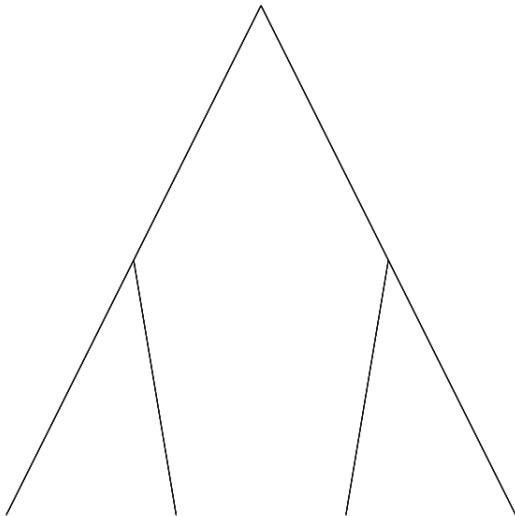


Figura 12: Paso 2.

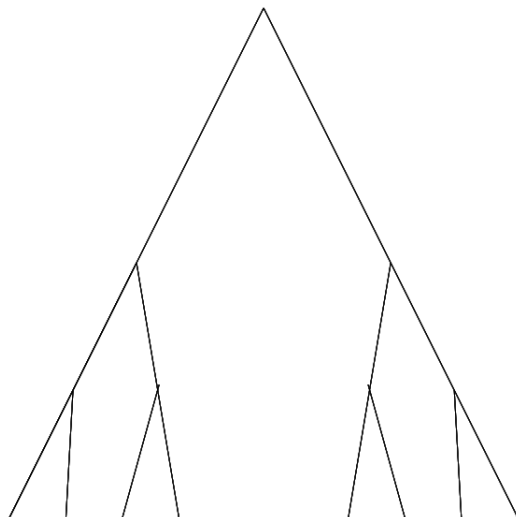


Figura 13: Paso 3.

En el paso n , D_n se construye a partir de D_{n-1} de forma similar, tomando siempre como puntos extremos los elementos del conjunto de Cantor. Finalmente, definimos

$$G_3 = cl\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n\right).$$

G_3 es una dendrita, todos sus puntos de ramificación tienen orden 3 y el conjunto de sus puntos extremos es homeomorfo al conjunto de Cantor. Por construcción, G_3 se puede encajar en la dendrita universal de orden 3 $D_\infty^{(3)}$.

Análogamente, se pueden construir dendritas G_n para $n > 3$, con puntos de ramificación de orden n y conjunto de extremos de Cantor.

Agradecimientos

Los autores expresan su más sincero agradecimiento a los árbitros por el tiempo y la dedicación invertidos en la revisión de este trabajo.

Referencias

- [1] A. Illanes, S. Macías y W. Lewis, *Continuum Theory*, Springer, 2025.
- [2] C. E. Capel, *Inverse Limit Spaces*, Duke Math. J., 21(1954), 233-245.

- [3] D. Herrera Carrasco, F. Macías Romero, L. A. Guerrero Méndez, *La magia de los espacios métricos*, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2025.
- [4] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre (Fundamentos de la Teoría de Conjuntos)*, Veit & Comp., 1914.
- [5] F. Hernández Hernández, *Teoría de conjuntos (Una introducción)*, Aportaciones Matemáticas, Serie de Textos No. 13, Sociedad Matemática Mexicana, México, segunda edición, 1998.
- [6] F. Casarrubias Segura, A. Tamariz Mascarúa, *Elementos de Topología General*, Aportaciones Matemáticas, Serie de Textos No. 37, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2012.
- [7] R. Engelking, *Dimension Theory*, Warsaw, 1978.
- [8] R. Engelking, *General Topology*, Helderman, 1989.
- [9] J. Munkres, *Topología, 2da Edición*, Prentice Hall, 2002.
- [10] J. Tarrés Freixenet, *Cien años de los “Grundzüge der Mengenlehre” de Hausdorff*, https://www.researchgate.net/publication/284181979_Los_Grundzuge_der_Mengenlehre_de_Hausdorff.
- [11] K. Kuratowski, *Topology (Vol. II)*. Academic Press, 1968.
- [12] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: An introduction, Monographs and textbooks in pure and applied math.* Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.
- [13] S. B. Nadler, Jr., *Dimension Theory: An introduction with exercises*. Aportaciones Matemáticas, Serie de textos, no. 18, Sociedad Matemática Mexicana, 2002.
- [14] S. Macías, *Topics on Continua*, Springer, 2018.
- [15] S. Mazurkiewicz, *Sur les lignes de Jordan*, Fundamenta Mathematicae, 1920.
- [16] W. Sierpiński, *Sur une courbe dont tout point est un point de ramification*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 1916.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx

fmacias@fcfm.buap.mx

juan.lopezdie@alumno.buap.mx

rh225570716@alm.buap.mx

Capítulo 9

Sobre las componentes relativas en espacios topológicos

Florencio Corona Vázquez, Jesús Díaz Reyes, Russell
Aarón Quiñones Estrella y Javier Sánchez Martínez
Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas,
Benemérita Universidad Autónoma de Chiapas

Resumen

En este trabajo se presentan los conceptos de componentes relativas; estas se definen para cada una de las versiones relativas de conexidad. Se presenta una prueba novedosa del conocido resultado de que una cuasi-componente en un producto topológico es el producto de cuasi-componentes. Además, se obtiene un nuevo tipo de espacios, a saber, la familia de espacios totalmente desconexos₅; estos se encuentran entre los espacios 0—dimensionales y los espacios totalmente desconexos. Finalmente, se estudia la relación entre las componentes relativas de un espacio topológico y las componentes relativas de su hiperespacio de conjuntos cerrados y no vacíos.

1 Introducción

Para un subespacio Y de un espacio X , el concepto de propiedad relativa en espacios topológicos se construye a partir de la siguiente idea fundamental: dada una propiedad topológica $\mathcal{P}$ definida sobre un espacio X , puede asociarse una versión relativa $\mathcal{P}_R$, frecuentemente de diversas maneras, formulada en función de la posición del subespacio Y dentro del espacio X . Esta formulación suele ser lo suficientemente natural como para que, cuando Y es X , se recupere la propiedad original, es decir, $\mathcal{P}$ coincide con $\mathcal{P}_R$.

Por ejemplo, sea X un espacio topológico y $Y \subset X$ un subespacio.

$\mathcal{P} : X$ es un espacio normal.

$\mathcal{P}_R$: para cada par de conjuntos ajenos y cerrados A y B en X ,
existen conjuntos ajenos y abiertos U y V en X tales que
 $A \cap Y \subset U$ y $B \cap Y \subset V$.

Se dice que Y es *normal en X* si los espacios Y y X cumplen $\mathcal{P}_R$. Si en $\mathcal{P}_R$, se pide que U y V sean abiertos en Y , se obtiene otra propiedad relativa $\mathcal{P}'_R$, a saber, Y es *cercanamente normal en X* . En cualquier caso, si Y es igual a X , entonces $\mathcal{P}_R, \mathcal{P}'_R$ y $\mathcal{P}$ coinciden.

Como se muestra en el ejemplo anterior, de una propiedad topológica se podrían desprender varias propiedades relativas, de modo que resulta de interés encontrar todas las propiedades relativas que se desprenden de una propiedad topológica, así como investigar las relaciones que hay entre ellas. Se espera que la mayoría de los resultados en topología puedan ser reformulados en términos de propiedades relativas. Por ejemplo, se sabe que todo espacio Hausdorff compacto es normal; una versión relativa de este resultado es como sigue: Si X es Hausdorff y Y es compacto en X , entonces Y es normal en X . Aquí, Y es *compacto en X* significa que toda cubierta abierta de X tiene una subfamilia finita que cubre a Y .

El estudio sistemático de las propiedades topológicas relativas fue iniciado por A. V. Arhangel'skii y H. M. M. Genedi en un artículo publicado en ruso en 1989 [1]. En [2], se puede encontrar una recopilación del estudio de algunas propiedades relativas que se desprenden de los axiomas de separación y de la compacidad. Para un tratamiento más detallado sobre las propiedades relativas en espacios topológicos, se remite al lector a las referencias [3], [5], [7] y [9], que abordan la *propiedad cubriente estrella*, *conexidad*, *para-compacidad* y *principios de selección*, respectivamente. Por lo tanto, el tema de propiedades relativas continúa siendo relevante.

2 Preliminares

Para nuestros fines, X denotará siempre un espacio topológico y Y un subespacio no vacío de X , salvo que se especifique lo contrario. Los conceptos de espacio *Hausdorff*, *regular* y *normal* se consideran en el sentido clásico (vea [8, 1.5, p. 36]).

Dado $A \subset X$, se denota, como de costumbre, por $\text{int}(A)$, $\text{Fr}(A)$ y $\bar{A}$, al *interior*, *frontera* y *cerradura* de A en X , respectivamente. Dada una función $f : X \rightarrow Z$, el símbolo $f|_A$ denota la *restricción* de f al conjunto A .

Como es usual, por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y ω , se denotan los conjuntos de *números naturales*, *enteros*, *racionales* y *enteros no negativos*. El *plano Euclidiano* se denota por $\mathbb{R}^2$.

Una *separación* de X es una pareja de conjuntos no vacíos, abiertos y ajenos U y V en X tales que $X = U \cup V$. El espacio X se dice *conexo* si no existe una separación de X . Además, un subconjunto Y de X es *conexo*, si Y es conexo con la topología de subespacio.

Observe que en la definición de espacio conexo, los conjuntos U y V que definen una separación son cerrados y abiertos, es decir, un espacio topológico X es conexo si y solo si X

no se puede expresar como la unión de dos de sus subespacios cerrados, ajenos y no vacíos. De esto se sigue que un espacio X es conexo si y solo si los únicos subconjuntos simultáneamente abiertos y cerrados son $\emptyset$ y X mismo. El concepto de conexidad puede caracterizarse en términos de conceptos topológicos diferentes al de conjuntos abiertos o cerrados. Dentro de las caracterizaciones más usuales están las que se enuncian a continuación, mismas que se pueden consultar en [4, Cap. 8].

Teorema 2.1. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- X es conexo.
- No existen dos subconjuntos no vacíos A y B de X tales que $X = A \cup B$ y $A \cap \overline{B} = \emptyset = \overline{A} \cap B$.
- No existe una función continua y suprayectiva $f : X \rightarrow \{0, 1\}$, donde $\{0, 1\}$ se considera como subespacio de $\mathbb{R}$.
- Para cada subconjunto A de X tal que $\emptyset \neq A \neq X$, se cumple que $\text{Fr}(A) \neq \emptyset$ (equivalentemente, A no es abierto y cerrado en X).
- Para cada $x, y \in X$ existe un subespacio conexo $A_{x,y}$ de X tal que $x, y \in A_{x,y}$.

Lo establecido en el teorema 2.1, motiva de manera natural las siguientes versiones relativas del concepto de conexidad.

Definición 2.2. *Se dice que:*

- (1) Y es conexo₁ en X si para todo $A \subset Y$ tal que $\emptyset \neq A \neq Y$ se cumple que $\text{Fr}(A) \neq \emptyset$.
- (2) Y es conexo₂ en X si no existe una función continua $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $f|_Y$ es suprayectiva.
- (3) Y es conexo₃ en X si para cualesquiera $x, y \in Y$ existe un subespacio conexo $A_{x,y}$ de X con $x, y \in A_{x,y}$.
- (4) Y es conexo₄ en X si no existen conjuntos cerrados A y B en X tales que $Y \subset A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ y $A \cap Y \neq \emptyset \neq B \cap Y$.
- (5) Y es conexo₅ en X si no existen conjuntos abiertos U y V en X tales que $Y \subset U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ y $U \cap Y \neq \emptyset \neq V \cap Y$.
- (6) Y es conexo_S en X si no existen subconjuntos A y B de X tales que $Y \subset A \cup B$, $A \cap \overline{B} = \emptyset = \overline{A} \cap B$ y $A \cap Y \neq \emptyset \neq B \cap Y$.
- (7) Y es conexo_X en X si para todo $y \in Y$ y para todo $x \in X$ existe un subespacio conexo $A_{x,y}$ de X con $x, y \in A_{x,y}$.

Observe que si $Y = X$ y Y es conexo $_i$ en X , con $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, S, X\}$, por el teorema 2.1, se recupera el concepto de conexidad en X ; lo cual muestra que los conceptos antes definidos son versiones relativas de la conexidad.

Los conceptos en la definición anterior son los que los autores estudiaron en [5], donde aparecen los resultados que se enuncian en el resto de esta sección (también puede ver [6]). Aquí se presentan las pruebas de estos resultados para beneficio y clarificación del respetable lector.

En el siguiente resultado se caracteriza la conexidad $_i$, para $i \in \{3, 4\}$.

Teorema 2.3. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (1) Y es conexo $_3$ en X si y solo si existe un subespacio conexo $C \subset X$ tal que $Y \subset C$.
- (2) Y es conexo $_4$ en X si y solo si $\bar{Y}$ es un espacio conexo.

Demostración. (1) Suponga que Y es conexo $_3$ en X y fije un punto $p \in Y$. Para todo $y \in Y$ existe un subespacio conexo $A_{p,y}$ de X que contiene a los puntos p y y . Se define $C = \bigcup_{y \in Y} A_{p,y}$. Note que C es un espacio conexo y claramente $Y \subset C \subset X$. El recíproco es inmediato.

(2) Si $\bar{Y}$ no es conexo entonces existen subconjuntos cerrados A y B en $\bar{Y}$, no vacíos y ajenos tales que $\bar{Y} = A \cup B$, como A y B resultan también conjuntos cerrados en X , estos conjuntos garantizan que Y no es conexo $_4$ en X .

Ahora, si Y no es conexo $_4$ en X entonces existen conjuntos cerrados A y B en X , no vacíos y ajenos tales que $Y \subset A \cup B$ y $A \cap Y \neq \emptyset \neq B \cap Y$, de estas condiciones se obtiene que $\bar{Y} \subset A \cup B$ y, si $A' = A \cap \bar{Y}$ y $B' = B \cap \bar{Y}$ entonces A' y B' son conjuntos cerrados en $\bar{Y}$, ajenos, no vacíos y tales que $\bar{Y} = A' \cup B'$, es decir, $\bar{Y}$ no es un espacio conexo. $\square$

De lo establecido en el teorema 2.3, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 2.4. *Si Y es conexo $_4$ en X entonces Y es conexo $_3$ en X .*

El corolario 2.4, muestra que algunos de los conceptos en la definición 2.2 están relacionados. En el siguiente resultado se presentan relaciones del estilo: si Y es conexo $_i$ en X entonces Y es conexo $_j$ en X , que abreviadamente se denota por $C_i \rightarrow C_j$.

Teorema 2.5. *Las implicaciones en la figura 1 se satisfacen.*

Demostración. $C_2 \rightarrow C_1$: Si Y no es conexo $_1$ en X entonces existe $A \subset Y$ tal que $\emptyset \neq A \neq Y$ y $\text{Fr}(A) = \emptyset$. Se define la función $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(X \setminus A) = \{1\}$. Como A es un conjunto cerrado y abierto en X , se tiene que f es una función continua. Note que existen $a, b \in X$ tales que $a \in A \subset Y$ y $b \in Y \setminus A$, de donde $f(Y) = \{0, 1\}$, es decir, $f|_Y$ es suprayectiva, esto implica que Y no es conexo $_2$ en X .

$C_3 \rightarrow C_2$: Se procede por contradicción, suponga que Y no es conexo $_2$ en X , es decir, que existe una función continua $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $f|_Y$ es suprayectiva. Sin pérdida de generalidad suponga que $f(y_0) = 0$ para algún $y_0 \in Y$. Por hipótesis, para cualquier $y \in Y$, existe un subespacio conexo A_{y,y_0} de X que tiene a los puntos y y y_0 . Dado que f es una función continua, $f(A_{y,y_0})$ es un espacio conexo, se sigue que $f(A_{y,y_0}) = \{0\}$

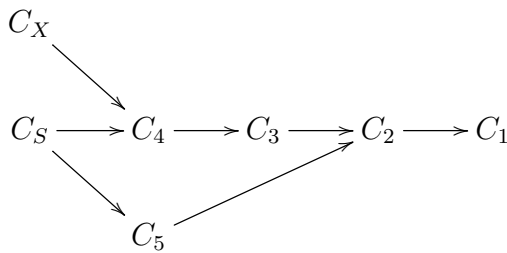


Figura 1

ya que $0 \in f(A_{x,y_0})$. Como y fue elegido arbitrariamente, se concluye que $f(Y) = \{0\}$, contradiciendo que $f|_Y$ es suprayectiva.

$C_4 \rightarrow C_3$: Es el corolario 2.4.

$C_X \rightarrow C_3$: Se sigue de las definiciones.

$C_S \rightarrow C_4$ y $C_S \rightarrow C_5$: Suponga que Y es conexo_S en X . Del hecho que para cualesquiera conjuntos cerrados (o abiertos) A y B en X tales que $A \cap B = \emptyset$, se tiene que $\overline{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cap \overline{B} = \emptyset$; se sigue que Y es conexo₄ en X y que Y es conexo₅ en X .

$C_5 \rightarrow C_2$: Si Y no es conexo₂ en X entonces existe una función continua $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $f|_Y$ es suprayectiva. Considere los conjuntos siguientes: $U = f^{-1}(\{0\})$ y $V = f^{-1}(\{1\})$. Claramente, U y V son ajenos y abiertos en X . Por otra parte, como $f|_Y$ es suprayectiva, se tiene que $Y \subset U \cup V$ y que $U \cap Y \neq \emptyset \neq U \cap Y$, es decir, Y no es conexo₅ en X . $\square$

Una parte fundamental es garantizar que los conceptos en la definición 2.2 son independientes unos de otros, en otras palabras, se muestra que no existen otras implicaciones además de las establecidas en el teorema anterior. Con este propósito, se proporcionan los siguientes ejemplos; al inicio de cada ejemplo, $C_i \setminus C_j$ significa que se exhiben espacios topológicos Y y X tales que Y es conexo_i en X y Y no es conexo_j en X .

Ejemplo 2.6 ($C_X, C_3, C_2 \setminus C_S, C_4, C_5$). Considere $X = [0, 1]$ con la topología usual de $\mathbb{R}$ y $Y = \{0, 1\}$. Como X es conexo, Y es conexo_X en X , del teorema 2.5, Y es conexo₃ en X y Y es conexo₂ en X .

Por otra parte, los conjuntos $A = [0, \frac{1}{3}]$ y $B = [\frac{2}{3}, 1]$ garantizan que Y no es conexo₄ en X y, por lo tanto, Y no es conexo_S en X . Los conjuntos $U = [0, \frac{1}{3}]$ y $V = [\frac{2}{3}, 1]$ garantizan que Y no es conexo₅ en X .

Ejemplo 2.7 ($C_5 \setminus C_3, C_4, C_S, C_X$). Denote por p y q los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$ en $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $L_n = [0, 1] \times \{\frac{1}{n}\}$. Considere los conjuntos

$$X = \{L_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{p, q\} \quad \text{y} \quad Y = \{p, q\}$$

con la siguiente topología: las vecindades de los puntos en $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$ son las usuales que se heredan de $\mathbb{R}^2$; y las vecindades para los puntos $y \in Y$, son de la forma $\{y\} \cup \bigcup_{i \geq n} L_i$ para algún $n \in \mathbb{N}$ (vea figura 2).



Figura 2

Se tiene que Y es conexo₅ en X puesto que cualesquiera vecindades de p y q en X tienen intersección no vacía.

Se afirma que Y no es conexo₃ en X . Si se supone lo contrario entonces existe un subespacio conexo $A_{p,q}$ de X que tiene a los puntos p y q . Dado que L_i es un conjunto cerrado y abierto en X , si para algún $i \in \mathbb{N}$ se cumple que $A_{p,q} \cap L_i \neq \emptyset$, entonces $A_{p,q} \subset L_i$, lo cual no es posible. Por lo tanto, para todo $i \in \mathbb{N}$ se tienen que $A_{p,q} \cap L_i = \emptyset$, es decir, $A_{p,q} = \{p, q\}$. Sin embargo, p y q son puntos aislados en $A_{p,q}$, lo que contradice que $A_{p,q}$ es conexo.

En vista del teorema 2.5, se obtiene también que Y no es conexo _{i} en X para $i \in \{4, S, X\}$

Ejemplo 2.8 ($C_2 \setminus C_3, C_4, C_S, C_X$). Considere los conjuntos X y Y como en el ejemplo 2.7 con la topología usual heredada de $\mathbb{R}^2$ (vea la figura 2).

Se afirma que Y es conexo₂ en X . Por contradicción. Suponga que existe una función continua $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $f|_Y$ es suprayectiva. Sin pérdida de generalidad suponga que $f(p) = 0$ y $f(q) = 1$. Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$, L_n es un espacio conexo, por lo que el espacio $f(L_n)$ también lo es, de donde se obtiene que $f(L_n) = \{0\}$ o $f(L_n) = \{1\}$ sin cumplirse ambas condiciones a la vez. Como el conjunto $f^{-1}(0)$ es abierto en X y no vacío ($p \in f^{-1}(0)$), existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L_n \cap f^{-1}(0) \neq \emptyset$ para cada $n \geq N_0$. De manera análoga, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N_1$, $L_n \cap f^{-1}(1) \neq \emptyset$. Ahora, si $m > \max\{N_0, N_1\}$ entonces $f(L_m) = \{0, 1\}$, lo cual es una contradicción.

Por otra parte, como no existe algún espacio conexo que tenga a los puntos p y q , se concluye que Y no es conexo₃ en X .

En vista de lo establecido en el teorema 2.5, también se tiene que Y no es conexo _{i} en X para $i \in \{4, S, X\}$.

Ejemplo 2.9 ($C_1 \setminus C_2, C_3, C_4, C_5, C_S, C_X$). Considere $X = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ y $Y = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ con la topología heredada de $\mathbb{R}$ (vea figura 3).

Note que para todo conjunto $A \subset Y$ tal que $\emptyset \neq A \neq Y$, se tiene que $A = \{\frac{1}{3}\}$ o $A = \{\frac{2}{3}\}$, en cualquier caso $\text{Fr}(A) \neq \emptyset$. Por lo tanto, Y es conexo₁ en X .

Por otra parte, se define la función $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $f([0, \frac{1}{3}]) = \{0\}$ y $f([\frac{2}{3}, 1]) = \{1\}$. Se cumple que f es una función continua y $f|_Y$ es suprayectiva, es decir, Y no es conexo₂ en X .



Figura 3

En vista de lo establecido en el teorema 2.5, también se tiene que Y no es conexo $_i$ en X para $i \in \{3, 4, 5, S, X\}$.

Ejemplo 2.10 ($C_S, C_3, C_4 \setminus C_X$). Sea $X = [0, 1] \cup \{2\}$ con la topología heredada de $\mathbb{R}$ y $Y = [0, 1]$ (vea la figura 4).

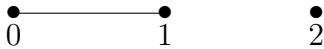


Figura 4

Como Y es un espacio conexo, Y es conexo $_S$ en X , Y es conexo $_3$ en X y Y es conexo $_4$ en X . Sin embargo, Y no es conexo $_X$ en X puesto que X no es conexo.

Ejemplo 2.11 ($C_4 \setminus C_5, C_S$). Considere $X = \{a, b, c\}$ con la topología $\tau = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X, \emptyset\}$ y el subespacio $Y = \{a, b\}$ (vea la figura 5).

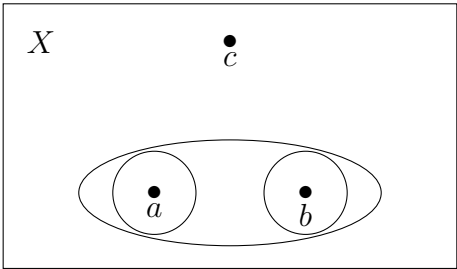


Figura 5

Note que Y es conexo $_4$ en X , ya que los únicos conjuntos cerrados diferentes de X , que tienen a los puntos a o b son los conjuntos $\{a, c\}$ y $\{b, c\}$, cuya intersección es no vacía. Por otra parte, los conjuntos abiertos $\{a\}$ y $\{b\}$ atestiguan que Y no es conexo $_5$ en X . Por lo tanto, también se tiene que Y no es conexo $_S$ en X .

Es fácil notar que Y es conexo _{S} en X si y solo si Y es conexo como subespacio; y Y es conexo _{X} en X si y solo si X es conexo; así, las propiedades de ser conexo _{S} o conexo _{X} no son en realidad versiones relativas, puesto que no dependen de la estructura del espacio. Por lo tanto, se trabaja principalmente en las propiedades relativas conexo _{i} , con $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Una pregunta natural que surge es que si $C_i \rightarrow C_j$ no se cumple: ¿Qué condiciones adicionales debe tener el espacio X para que la implicación anterior se satisfaga?

Se enuncia un teorema auxiliar, que se utiliza a continuación, conocido como el “teorema del cable cortado”, cuya demostración puede consultarse en [15, 9,3, p. 15].

Teorema 2.12. *Sea X un espacio Hausdorff y compacto. Si A y B son conjuntos cerrados en X con la propiedad de que ningún subespacio conexo de X interseca a A y a B , existen dos conjuntos cerrados y ajenos X_1 y X_2 de X , tales que $X = X_1 \cup X_2$, $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$.*

Recuerde que X se dice *hereditariamente normal* si es T_1 y cada subespacio de X es normal.

Teorema 2.13. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (1) *Sea X un espacio hereditariamente normal. Se tiene que, Y es conexo₅ en X si y solo si Y es un subespacio conexo.*
- (2) *Sea Y un subespacio cerrado en X . Luego, Y es conexo₄ en X si y solo si Y es un subespacio conexo.*
- (3) *Sea X un espacio Hausdorff y compacto. Se sigue que, Y es conexo₃ en X si y solo si Y es conexo₂ en X .*

Demostración. Lo establecido en el punto (1) se sigue de la caracterización siguiente: X es completamente normal si y solo si para cada par de conjuntos A y B de X tales que $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$, existen conjuntos abiertos U y V , ajenos y tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

La parte (2) es consecuencia inmediata de (2) del teorema 2.3.

Para ver (3) solo es necesario demostrar que si Y es conexo₂ en X entonces Y es conexo₃ en X . Suponga que Y no es conexo₃ en X , es decir, que existen $x, y \in Y$ tal que ningún espacio conexo los contiene. Del teorema 2.12, existen X_1 y X_2 conjuntos ajenos y cerrados en X tales que $X = X_1 \cup X_2$, $\{x\} \subset X_1$ y $\{y\} \subset X_2$. Puesto que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, se tiene que la función $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ dada por $f(X_1) = \{0\}$ y $f(X_2) = \{1\}$, está bien definida. Como X_1 y X_2 son conjuntos cerrados en X , se tiene que f es continua. Por otra parte, $f|_Y$ es suprayectiva ya que $f(\{x, y\}) = \{0, 1\}$. Por lo tanto, la función f garantiza que Y no es conexo₂ en X . $\square$

Los siguientes resultados son aquellos clásicos obtenidos para conexidad relativa, acerca de si se conserva bajo cerradura, funciones continuas, uniones, productos y la preimagen de funciones monótonas.

Teorema 2.14. *Sean X un espacio topológico, $Y, Z \subset X$, con $Y \subset Z \subset \overline{Y}$. Si Y es conexo _{i} en X , con $i \in \{2, 3, 4, 5\}$, entonces Z es conexo _{i} en X .*

Demostración. $i = 5$: Si Z no es conexo₅ en X entonces existen U y V conjuntos abiertos en X tales que $Z \subset U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ y $U \cap Z \neq \emptyset \neq V \cap Z$.

Si $Y \subset U$ entonces $\overline{Y} \subset \overline{U}$, de donde $\overline{Y} \cap V = \emptyset$, pero $\emptyset \neq Z \cap V \subset \overline{Y} \cap V$, lo cual es una contradicción. Análogamente, se llega a una contradicción si se supone que $Y \subset V$. Dado que $Y \subset Z$, se tiene que $Y \cap U \neq \emptyset$ y $Y \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, los conjuntos U y V garantizan que Y no es conexo₅ en X .

$i = 4$: La demostración es análoga a la de $i = 5$.

$i = 3$: Fija $p \in Y$. De la hipótesis, para cada $y \in Y$ existe un conjunto conexo $A_{p,y}$ que tiene a los puntos p y y . Se tiene que $Y \subset \bigcup_{y \in Y} A_{p,y}$. Denote $W = \bigcup_{y \in Y} A_{p,y}$. Claramente $\overline{Y} \subset \overline{W}$ y $\overline{W}$ es un espacio conexo, ya que W lo es. Como $Z \subset \overline{W}$, del teorema 2.3 (1), se concluye que Z es conexo₃ en X .

$i = 2$: Sea $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ una función continua. Se afirma que $f|_Z$ no es suprayectiva. Puesto que $Y \subset Z$ y Y es conexo₂ en X , se tiene que $Y \subset f^{-1}(0)$ o $Y \subset f^{-1}(1)$. Si $Y \subset f^{-1}(0)$, de la continuidad de f , se sigue que $\overline{Y} \subset f^{-1}(0)$ y como $Z \subset \overline{Y}$, se concluye que $f|_Z$ no es suprayectiva. De manera análoga se demuestra que si $Y \subset f^{-1}(1)$ entonces $f|_Z$ no es suprayectiva. Por lo tanto, Z es conexo₂ en X . $\square$

Corolario 2.15. Si $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ y Y es conexo _{i} en X entonces $\overline{Y}$ es conexo _{i} en X .

Es bien sabido que la imagen continua de un espacio conexo, es también un espacio conexo. El siguiente resultado nos da a versión relativa a este hecho.

Teorema 2.16. Sean X y Z espacios topológicos, $f : X \rightarrow Z$ una función continua, $Y \subset X$ y $i \in \{2, 3, 4, 5\}$. Si Y es conexo _{i} en X entonces $f(Y)$ es conexo _{i} en Z .

Demostración. $i = 5$: Suponga que $f(Y)$ no es conexo₅ en Z . Entonces, existen U y V subconjuntos abiertos en Z tales que $U \cap V = \emptyset$, $U \cap f(Y) \neq \emptyset \neq V \cap f(Y)$ y $f(Y) \subset U \cup V$. Como f es una función continua, se obtiene que los conjuntos $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos en X . Se verifica, sin dificultad, que $Y \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ y $f^{-1}(U) \cap Y \neq \emptyset \neq f^{-1}(V) \cap Y$. Por lo tanto, los subconjuntos $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ de X atestiguan que Y no es conexo₅ en X .

$i = 4$: La demostración es análoga a la de $i = 5$.

$i = 3$: Suponga que Y es conexo₃ en X . Se verificará que $f(Y)$ es conexo₃ en Z . Sean $f(x), f(y) \in f(Y)$ con $x, y \in Y$. Por hipótesis, existe un subespacio conexo $A_{x,y}$ que tiene a los puntos x y y . Es claro que $f(A_{x,y})$ es un subespacio conexo de Z que contiene a los puntos $f(x)$ y $f(y)$, es decir, $f(Y)$ es conexo₃ en Z .

$i = 2$: Suponga que $f(Y)$ no es conexo₂ en Z . Entonces, existe una función continua $g : Z \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $g|_{f(Y)}$ es suprayectiva. Claramente, la función $g \circ f : X \rightarrow \{0, 1\}$ es continua. Se probará que $(g \circ f)|_Y$ es suprayectiva. En efecto, como $g|_{f(Y)}$ es suprayectiva, existen $f(a), f(b) \in f(Y)$ (con $a, b \in Y$) tales que $g(f(a)) = 0$ y $g(f(b)) = 1$, es decir, existen $a, b \in Y$ tales que $(g \circ f)(a) = 0$ y $(g \circ f)(b) = 1$. Por lo tanto, la función $g \circ f$ garantiza que Y no es conexo₂ en X . $\square$

Como es sabido, dada una familia de espacios conexos con intersección no vacía, resulta que la unión de esta familia es nuevamente un espacio conexo. El siguiente teorema presenta la versión relativa de dicho resultado.

Teorema 2.17. Sean $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ y $\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una familia de subespacios conexos de X . Si la familia tiene intersección no vacía entonces $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ es conexo $_i$ en X .

Demostración. Denote $Y = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$.

$i = 5$: Por contradicción, suponga que Y no es conexo $_5$ en X . Entonces, existen U y V conjuntos abiertos en X tales que $Y \subset U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ y $U \cap Y \neq \emptyset \neq V \cap Y$. Observe que para todo $\alpha \in \Lambda$, $Y_\alpha \cap U = \emptyset$ o $Y_\alpha \cap V = \emptyset$, de lo contrario, Y_α no sería conexo $_5$ en X . Se obtiene que para cada $\alpha \in \Lambda$, $Y_\alpha \subset V$ o $Y_\alpha \subset U$. Define los conjuntos siguientes:

$$I = \{\alpha \in \Lambda : Y_\alpha \subset U\} \quad \text{y} \quad J = \{\alpha \in \Lambda : Y_\alpha \subset V\}.$$

Si $I = \emptyset$ o $J = \emptyset$ entonces $Y \cap U = \emptyset$ o $Y \cap V = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Se concluye que $I \neq \emptyset$ y $J \neq \emptyset$. Sean $\alpha_i \in I$ y $\alpha_j \in J$, se tiene que

$$\emptyset \neq \bigcap_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha \subset Y_{\alpha_i} \cap Y_{\alpha_j} \subset U \cap V;$$

lo cual es una contradicción ya que $U \cap V = \emptyset$.

$i = 4$: La prueba es totalmente análoga a la de $i = 5$.

$i = 3$: Se prueba que Y es conexo $_3$ en X . Para cualesquiera $x, y \in Y$, existen $\alpha, \beta \in \Lambda$ tales que $x \in Y_\alpha$ y $y \in Y_\beta$. Fija $p \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$. Como Y_α es conexo $_3$ en X y Y_β es conexo $_3$ en X , existen espacios conexos $A_{x,p}$ y $A_{y,p}$ que tienen a los puntos x, p y y, p , respectivamente. Se sigue que $A_{x,p} \cup A_{y,p}$ es un subespacio conexo de X , y claramente tiene a los puntos x y y .

$i = 2$: Para probar que Y es conexo $_2$ en X , sea $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ una función continua. Se afirma que $f|_Y$ no es suprayectiva. En efecto, elija $p \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $f(p) = 0$. Dado $y \in Y$, existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $y \in Y_\alpha$. Como Y_α es conexo $_2$ en X , $f|_{Y_\alpha}$ no es suprayectiva, por lo que $f(y) = 0$. Se concluye que $f(Y) = 0$, es decir, $f|_Y$ no es suprayectiva. $\square$

Se sabe que el producto arbitrario de espacios conexos es conexo, en el teorema 2.21 se da la versión relativa de este resultado.

Considere el conjunto $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ con la *topología producto o topología de Tychonoff* y para cada $\alpha \in \Lambda$, $P_\alpha : \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \rightarrow X_\alpha$, denota la α -ésima proyección de $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ sobre el α -ésimo factor. Es bien sabido que esta topología hace que todas las proyecciones sean continuas.

El siguiente resultado es consecuencia inmediata del teorema 2.16, considerando la función inclusión, por ello se omite su demostración.

Lema 2.18. Sea $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Si Y es conexo $_i$ en X y $X \subset X^*$ entonces Y es conexo $_i$ en X^* .

Teorema 2.19. Sea $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Si Y_1 es conexo $_i$ en X_1 y Y_2 es conexo $_i$ en X_2 entonces $Y_1 \times Y_2$ es conexo $_i$ en $X_1 \times X_2$.

Demostración. Sea $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y suponga que se tienen espacios tales que Y_1 es conexo_i en X_1 y Y_2 es conexo_i en X_2 .

Caso 1: $i \in \{2, 3, 4, 5\}$. Fije un punto $(a, b) \in Y_1 \times Y_2$. Para cada $y \in Y_1$, se define

$$C_y = (\{y\} \times Y_2) \cup (Y_1 \times \{b\})$$

Observe que $Y_1 \times \{b\}$ es conexo_i en $X_1 \times \{b\}$, $\{y\} \times Y_2$ es conexo_i en $\{y\} \times X_2$ y tienen en común al punto (y, b) , del lema 2.18 y del teorema 2.17, se tiene que C_y es conexo_i en $X_1 \times X_2$, para todo $y \in Y$. Dado que $(a, b) \in \bigcap_{y \in Y} C_y$, la familia $\{C_y\}_{y \in Y}$ cumple las condiciones del teorema 2.17, y como $\bigcup_{y \in Y} C_y = Y_1 \times Y_2$, se obtiene que $Y_1 \times Y_2$ es conexo_i en $X_1 \times X_2$.

Caso 2: $i = 1$. Por contradicción, suponga que existe un subconjunto no vacío y propio A de $Y_1 \times Y_2$ con $\text{Fr}_{X_1 \times X_2}(A) = \emptyset$, de donde A es un conjunto abierto y cerrado en $X_1 \times X_2$. Para cada $y \in Y_1$, sea $E_y = \{y\} \times Y_2$. Dado que

$$Y_1 \times Y_2 = \bigcup_{y \in Y_1} E_y,$$

y $A \neq Y_1 \times Y_2$, existe $(y_1, y_2) \in E_{y_1} \setminus A$. Nota que $A \cap E_{y_1} = A \cap (\{y_1\} \times X_2)$. Sea $G = A \cap E_{y_1}$. Se afirma que $G = \emptyset$. En caso contrario, G es homeomorfo a un subconjunto propio de Y_2 y dado que $\{y_1\} \times Y_2$ es conexo₁ en $\{y_1\} \times X_2$, $\text{Fr}_{\{y_1\} \times X_2}(G) \neq \emptyset$, lo cual es imposible ya que G es un conjunto abierto y cerrado en $\{y_1\} \times X_2$. Se concluye que, $A \cap (\{y_1\} \times Y_2) = \emptyset$.

Por otra parte, para cada $y \in Y_2$, sea $F_y = Y_1 \times \{y\}$. Nótese que

$$Y_1 \times Y_2 = \bigcup_{y \in Y_2} F_y.$$

Como $A \neq \emptyset$, existe $a_2 \in Y_2$ tal que $A \cap F_{a_2} \neq \emptyset$. Nótese que $A \cap F_{a_2} = A \cap (X_1 \times \{a_2\})$. Define, $H = A \cap F_{a_2}$. Dado que $(y_1, a_2) \in F_{y_2}$ y $(y_1, a_2) \notin A$, H es homeomorfo a un subconjunto no vacío y propio de Y_1 , esto implica que $\text{Fr}_{X_1 \times \{a_2\}}(H) \neq \emptyset$ ya que $Y_1 \times \{a_2\}$ es conexo₁ en $X_1 \times \{a_2\}$, lo cual contradice que H es abierto y cerrado en $X_1 \times \{a_2\}$. $\square$

Mediante inducción matemática se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 2.20. Sean $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y J un conjunto finito. Si Y_j es conexo_i en X_j para cada $j \in J$, entonces $\prod_{j \in J} Y_j$ es conexo_i en $\prod_{j \in J} X_j$.

Teorema 2.21. Sea $i \in \{2, 3, 4, 5\}$. Para cada $\alpha \in \Lambda$, Y_α es conexo_i en X_α si y solo si el producto $\prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ es conexo_i en $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$.

Demostración. Sea $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ y denota $Y = \prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ y $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$.

Si Y es conexo_i en X , como cada función proyección $P_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ es continua y $P_\alpha(Y) = Y_\alpha$, se tiene que Y_α es conexo_i en X_α para todo $\alpha \in \Lambda$.

Para la otra implicación, fije $y \in Y$. Denote por $\mathcal{F}$ la familia de todos los subconjuntos finitos de Λ . Para cada $F \in \mathcal{F}$, defina $C_F = \prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$, donde

$$A_\alpha = \begin{cases} Y_\alpha & \text{si } \alpha \in F; \\ y_\alpha & \text{si } \alpha \notin F. \end{cases}$$

Del corolario anterior y del lema 2.18, se sigue que C_F es conexo _{i} en X para cada $F \in \mathcal{F}$; además, $y \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} C_F$ y $Y = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} C_F$, del teorema 2.17, se concluye que Y es conexo _{i} en X . $\square$

El siguiente resultado se refiere a una propiedad que poseen las funciones cocientes, su demostración se puede encontrar en [13, Teorema 22.2].

Teorema 2.22. *Sean $q : X \rightarrow Z$ una función cociente, Y un espacio topológico y $f : X \rightarrow Y$ una función que es constante en el conjunto $q^{-1}(z)$, para todo $z \in Z$. Existe una función $g : Z \rightarrow Y$ con $g \circ q = f$ y tal que g es continua si y solo si f es continua.*

Recuerde que una función continua $f : X \rightarrow Z$ es monótona si todas las fibras $f^{-1}(z)$ son subespacios conexos de X .

Teorema 2.23. *Sea $i \in \{1, 2, 3\}$. Si $q : X \rightarrow Z$ es una función cociente y monótona y W es conexo _{i} en Z entonces $q^{-1}(W)$ es conexo _{i} en X .*

Demostración. $i = 3$: Sean $x, y \in q^{-1}(W)$. Como $q(x), q(y) \in W$, existe un subconjunto conexo $A_{x,y}$ de Z que contiene a $q(x)$ y $q(y)$. Se obtiene que el conjunto $q^{-1}(\overline{A_{x,y}})$ es conexo y contiene a los puntos x y y . Por lo tanto, $q^{-1}(W)$ es conexo₃ en X .

$i = 2$: Suponga que $q^{-1}(W)$ no es conexo₂ en X y se demostrará que W no es conexo₂ en Z . Denote $Y = q^{-1}(W)$. Existe una función $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ continua tal que $f|_Y$ es suprayectiva. Para cada $z \in Z$, $q^{-1}(z)$ es un conjunto conexo y como f es continua, f es constante en cada conjunto $q^{-1}(z)$. Del teorema 2.22, existe una función continua $g : Z \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $g \circ q = f$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & Z \\ f \downarrow & \swarrow g & \\ \{0, 1\} & & \end{array}$$

Se afirma que $g|_W$ es suprayectiva. Se procede por contradicción. Sin pérdida de generalidad, suponga que $g(W) = \{0\}$. Puesto que $f|_Y = \{0, 1\}$, existe $y \in Y$ tal que $f(y) = 1$. Luego, $q(y) \in W$ de donde $g(q(y)) = 0$, que contradice la igualdad $g \circ q = f$. Por lo tanto, $g : Z \rightarrow \{0, 1\}$ es continua y $g|_W$ es suprayectiva, es decir, W no es conexo₂ en Z .

$i = 1$: Suponga que $q^{-1}(W)$ no es conexo₁ en X , es decir que existe un conjunto $A \subset q^{-1}(W)$ tal que $\emptyset \neq A \neq q^{-1}(W)$ y con $\text{Fr}(A) = \emptyset$. Se demuestra que W no es conexo₁ en Z .

Primero se afirma que: $q^{-1}(q(A)) = A$. En efecto; si $x \in q^{-1}(q(A))$ entonces existe $a \in A$ tal que $q(x) = q(a)$, como q es monótona, $q^{-1}(q(x))$ es un subespacio conexo de X y contiene

al punto a , es decir, $q^{-1}(q(x)) \cap A \neq \emptyset$ y puesto que $\text{Fr}(A) = \emptyset$, A es conjunto abierto y cerrado en X , esto implica que $q^{-1}(q(x)) \subset A$, de lo contrario se tendría una separación para $q^{-1}(q(x))$; de modo que $x \in A$ ya que $x \in q^{-1}(q(x))$. Por lo tanto $q^{-1}(q(A)) \subset A$. Puesto que la otra contención siempre es cierta, se concluye que $q^{-1}(q(A)) = A$.

Ahora, claramente $q(A) \subset W$. Si $q(A) = W$, de la afirmación anterior se obtiene que $A = q^{-1}(W)$, lo cual contradice que $A \neq q^{-1}(W)$. Así, $\emptyset \neq q(A) \neq W$. Finalmente, como q es cociente, $q(A)$ es un conjunto abierto y cerrado en Z , de donde $\text{Fr}(q(A)) = \emptyset$. Por lo tanto, el conjunto $q(A)$ garantiza que W no es conexo₁ en Z . $\square$

Una equivalencia adicional al concepto de conexidad, distinta de las establecidas anteriormente, se da en la siguiente proposición (véase [8, Exercise 6.3.1., p. 372]); se incluye la demostración por completitud.

Proposición 2.24. *Un espacio X es conexo si y solo si para cada recubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de X y todo par de puntos x, y de X , existe una sucesión finita $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de elementos de I tal que $x \in U_{\alpha_1}$, $y \in U_{\alpha_k}$ y $U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_j} \neq \emptyset$ si y solo si $|i - j| \leq 1$.*

A tal familia $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k}$ se le llama una *cadena simple* de x a y .

Demostración. Suponga que X es conexo. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un recubrimiento abierto de X y fije un punto $x_0 \in X$. Considere V el conjunto de todos los puntos $y \in X$ tales que existe una sucesión finita $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de elementos de I con $x_0 \in U_{\alpha_1}$, $y \in U_{\alpha_k}$ y $U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_j} \neq \emptyset$ si y solo si $|i - j| \leq 1$. Observe que si $y \in V$ y U_{α_k} es como arriba entonces $U_{\alpha_k} \subset V$, lo cual muestra que V es abierto en X . Si $z \notin V$, para cada α tal que $z \in U_\alpha$ se cumple que $U_\alpha \subset X \setminus V$; por lo tanto V es cerrado en X . Como X es conexo y $x_0 \in V$, se sigue que $V = X$.

Suponga ahora que X no es conexo. Sean U, V subconjuntos abiertos no vacíos y ajenos de X tales que $\{U, V\}$ es un recubrimiento abierto de X . Observe que no existe una cadena simple de $x \in U$ a $y \in V$, correspondiente a $\{U, V\}$. $\square$

Usando la caracterización dada en la proposición 2.24, se obtiene la siguiente equivalencia a la conexidad₂.

Teorema 2.25. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *Para cada recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de X , $y \in Y$ y $x \in X$, existe una sucesión finita $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de elementos de I tal que $x \in U_{\alpha_1}$, $y \in U_{\alpha_k}$ y $U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_j} \neq \emptyset$ si y solo si $|i - j| \leq 1$.*

(2) *Y es conexo₂ en X .*

Demostración. Suponga que Y no es conexo₂ en X y sea $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ una función continua tal que $f|_Y$ es suprayectiva. Sean $x \in Y \cap f^{-1}(0)$ y $y \in Y \cap f^{-1}(1)$. Observe que $\{f^{-1}(0), f^{-1}(1)\}$ es un recubrimiento abierto de X que no satisface la condición en (1).

Ahora, suponga que no se satisface la condición en (1). Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un recubrimiento

abierto de X y $x, y \in Y$ tales que no existe una cadena simple de x a y con elementos de U . Observe que

$$U = \{z \in X : \text{existe una cadena simple de } x \text{ a } z \text{ con elementos en } \mathcal{U}\}$$

y $X \setminus U$ son abiertos y ajenos con $x \in U$ y $y \in X \setminus U$. Definiendo $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ de tal forma que $f(U) = 0$ y $f(X \setminus U) = 1$, se obtiene que $f|_Y$ es suprayectiva, por lo tanto Y no es conexo₂ en X . $\square$

Observación 2.26. Sea $i \in \{2, 3, 4, 5\}$. Si Y es conexo_i en X y $X = U \cup V$, donde U y V son abiertos ajenos de X , entonces $Y \cap U = \emptyset$ o $Y \cap V = \emptyset$. En efecto, si $Y \cap U \neq \emptyset$ y $Y \cap V \neq \emptyset$ entonces la aplicación $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ dada por $f(U) = 0$ y $f(V) = 1$ es tal que $f|_Y$ es suprayectiva, con lo cual Y no es conexo₂ en X , y por el teorema 1.6, Y no es conexo_i para cada $i \in \{3, 4, 5\}$.

Observación 2.27. Sean $i \in \{1, 3\}$. La propiedad de ser conexo_i es hereditaria, es decir, si Y es conexo_i en X entonces para cada $A \subset Y$ no vacío, A es conexo_i en X y viceversa.

3 Componentes conexas relativas

Recordemos que para un punto $x \in X$, la *componente conexa de x en X* , denotada por $[x]$, es la unión de todos los subespacios conexos de X que contienen a x . Es bien sabido que para cada $x \in X$, la componente conexa $[x]$ es un conjunto cerrado en X . Además, de la definición se sigue que X es conexo si y solo si para cada $x \in X$, $[x] = X$.

Con el concepto de componente conexa en mente y las versiones relativas de conexidad dadas en la definición 2.2, introducimos los conceptos de componentes conexas relativas.

Definición 3.1. Para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, se dice que Y es *componente conexa_i de X* (abreviadamente Y es *cc_i de X*) si:

- Y es conexo_i en X .
- Si Z es conexo_i en X y $Y \subset Z$ entonces $Z \subset Y$.

Ahora, se define la siguiente relación en X :

$$x \sim_i y \text{ si existe } Z \subset X \text{ tal que } Z \text{ es conexo}_i \text{ en } X \text{ y } x, y \in Z.$$

Proposición 3.2. Sean $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Se tiene que $\sim_i$ es una relación de equivalencia en X .

Demostración. Claramente se cumple que $\sim_i$ es reflexiva y simétrica. Para la transitividad considérese primero el caso cuando $i \in \{2, 3, 4, 5\}$. Sean $x, y, z \in X$ tales que $x \sim_i y$ y $y \sim_i z$, entonces existen Y_1 y Y_2 conexos_i en X , tales que $x, y \in Y_1$ y $y, z \in Y_2$. Del teorema 2.17, la unión $Y_1 \cup Y_2$ es conexo_i en X y contiene a los puntos x, z , es decir, $x \sim_i z$.

Ahora para el caso cuando $i = 1$, si $x \sim_1 y$ y $y \sim_1 z$ entonces de la observación 2.27, $\{x, y\}$ y $\{y, z\}$ son conexo₁ en X y así, $\{x, z\}$ es conexo₁ en X , concluyendo que $x \sim_1 z$. $\square$

En la prueba anterior, se ha separado el caso $i = 1$ del resto, pues la primera parte no funciona para este caso, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3. Considere $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ con la topología usual de $\mathbb{R}$. Tomando los puntos $x = 0$, $y = 1/2$ y $z = 1$, observe que $Y_1 = [0, 1/2] \cup \{2\}$, $Y_2 = [1/2, 1] \cup \{2\}$ son dos subconjuntos, cada uno conexo₁ en X tales que $x, y \in Y_1$ y $y, z \in Y_2$, sin embargo $Y_1 \cup Y_2$ no es conexo₁ en X .

Sean $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $x \in X$. Como es usual, se denota y define una clase de equivalencia por

$$[x]_i = \{y \in X : y \sim_i x\}.$$

Es claro que $x \in [x]_i$, para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Proposición 3.4. Para $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ y $x \in X$, se cumple que

- (1) $[x]_i = \bigcup \{Y : Y \text{ es conexo}_i \text{ en } X \text{ y } x \in Y\}$.
- (2) $[x]_i$ es cc_i de X .
- (3) $[x]_i$ es un conjunto cerrado en X .
- (4) si Y es cc_i de X entonces $Y = [y]_i$, para todo $y \in Y$.

Demostración. Fije $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ y $x \in X$.

Lo establecido en (1) se verifica claramente.

Para demostrar el enunciado en (2), considere el teorema 2.17 y (1), de donde $[x]_i$ es conexo_i en X . Ahora, si Z es conexo_i en X tal que $[x]_i \subset Z$, se sigue que $x \in Z$, de (1) se obtiene que $Z \subset [x]_i$. Por lo tanto, $[x]_i$ es cc_i de X .

Para ver (3), note que del inciso en (2), $[x]_i$ es conexo_i en X , luego, por el corolario 2.15, $\overline{[x]_i}$ es conexo_i en X ; como $x \in \overline{[x]_i}$, usando nuevamente (1) se tiene que $\overline{[x]_i} \subset [x]_i$, lo cual prueba que $[x]_i$ es un conjunto cerrado.

Para demostrar (4), sea $y \in Y$. Si $p \in Y$, como Y es conexo_i en X y $p, y \in Y$, se sigue que $p \in [y]_i$; por lo tanto $Y \subset [y]_i$, además como $[y]_i$ es conexo_i y Y es cc_i de X , se concluye que $[y]_i \subset Y$. Así, $Y = [y]_i$, para todo $y \in Y$. $\square$

Para cada $i \in \{2, 3, 4, 5\}$, de acuerdo con la proposición anterior, $[x]_i$ es la cc_i de X que tiene al punto x y coincide con la unión de todos los subespacios conexos_i en X que contienen a x ; la colección de todas las componentes conexas_i forma una partición de X por conjuntos cerrados en X .

Lo anterior no es cierto en general para el caso $i = 1$, como se muestra a continuación.

Ejemplo 3.5. Sea X el mismo espacio del ejemplo 3.3. Es fácil observar que $[x]_1 = X$ para todo $x \in X$, pero $[x]_1$ no es conexo₁ en X ya que $[0, 1]$ es un conjunto propio y no vacío de X con frontera vacía en X .

Como una consecuencia inmediata del teorema 2.5 se tiene lo siguiente.

Observación 3.6. Para cada $x \in X$,

$$[x] \subset [x]_4 \subset [x]_3 \subset [x]_2 \text{ y } [x] \subset [x]_5 \subset [x]_2.$$

Dos de las componentes conexas relativas definidas anteriormente, coinciden con la definición de componente conexa usual como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 3.7. Para $i \in \{3, 4\}$ y $x \in X$, se cumple que $[x]_i = [x]$.

Demostración. Para $i = 3$. Observe que $y \in [x]_i$ si y solo si existe $Y \subset X$ tal que Y es conexo₃ en X y $x, y \in Y$, del teorema 2.3 (1), existe un subespacio conexo C tal que $x, y \in C$, es decir, $x \sim y$. Por lo tanto, $[x]_3 = [x]$.

Para $i = 4$. De acuerdo con el teorema 2.5, se tiene que $[x] \subset [x]_4$. Para ver la otra contención, por (2) y (3) de la proposición 3.4, $[x]_4$ es un conjunto cerrado y conexo₄ en X , por lo que dado $y \in [x]_4$, $[x]_4$ es un conexo₄ en X que contiene a $\{x, y\}$. Por (2) del teorema 2.13, se obtiene que $[x]_4$ es un espacio conexo tal que $x, y \in [x]_4$, con lo cual $y \in [x]$; así que $[x]_4 \subset [x]$. Por lo tanto $[x]_4 = [x]$. $\square$

En general, ninguna de las contenciones restantes que aparecen en la observación 3.6 puede ser reemplazada por una igualdad. Con este fin, se presentan los siguientes dos ejemplos, el primero presenta un espacio en el que $[x] \subsetneq [x]_5$ y el segundo muestra un espacio donde $[x]_5 \subsetneq [x]_2$, de esto último, consecuentemente, se tiene que $[x] \subsetneq [x]_2$.

Ejemplo 3.8. Considere los espacios como en el ejemplo 2.7 (vea la figura 2).

Se afirma que Y es cc₅ de X , en efecto, ya que cualesquiera vecindades de p y q en X tienen intersección no vacía, se sigue que Y es conexo₅ en X . Ahora, suponga que existe $Z \subset X$ tal que Z es conexo₅ en X y $Y \subsetneq Z$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Z \cap L_n \neq \emptyset$, luego $Z \subset L_n \cup (X \setminus L_n)$, lo cual contradice que Z es conexo₅ en X . Por lo tanto, Y es cc₅ de X y de hecho $Y = [p]_5$.

Sin embargo, es claro que $[p] = \{p\}$. De modo que $[p] \subsetneq [p]_5$.

Ejemplo 3.9. Considere los conjuntos X y Y como en el ejemplo 2.7 ahora con la topología usual heredada de $\mathbb{R}^2$ (vea la figura 2).

Se afirma que Y sea cc₂ de X . Suponga primero que existe una función continua $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $f|_Y$ es suprayectiva. Sin pérdida de generalidad suponga que $f(p) = 0$ y $f(q) = 1$. Como el conjunto $f^{-1}(0)$ es abierto en X y contiene a p , existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L_n \cap f^{-1}(0) \neq \emptyset$ para cada $n \geq N_0$. De manera análoga, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N_1$, $L_n \cap f^{-1}(1) \neq \emptyset$. Ahora, si $m > \max\{N_0, N_1\}$ entonces $f(L_m) = \{0, 1\}$, lo cual es una contradicción ya que $f(L_m)$ es conexo.

Ahora, suponga que existe $Z \subset X$ tal que Z es conexo₂ en X y $Y \subsetneq Z$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Z \cap L_n \neq \emptyset$. Si se define $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $f(L_n) = \{0\}$ y $f(X \setminus L_n) = \{1\}$, se tiene que f es una función continua y $f|_Z$ es suprayectiva, lo cual es una contradicción. Lo anterior concluye que Y es cc₂ de X y de hecho $Y = [p]_2$. Sin embargo, es claro que Y no es conexo₅ en X y por tanto $[p]_5 \subsetneq [p]_2$.

El siguiente resultado da condiciones suficientes sobre el espacio X para garantizar la coincidencia de las componentes conexas relativas con la componente conexa usual.

Teorema 3.10. *Si X es un espacio Hausdorff y compacto entonces para cada $x \in X$ y cada $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ se tiene que $[x]_i = [x]$.*

Demostración. Por las contenciones que aparecen en la observación 3.6, basta mostrar que $[x]_2 \subset [x]$. Sea $y \in [x]_2$, luego existe $Y \subset X$ tal que Y conexo₂ en X y $x, y \in Y$, por (3) del teorema 2.13, se tiene que Y es conexo₃ en X y $y, x \in Y$, es decir, $y \in [x]_3$, y de la proposición 3.7, $y \in [x]$. Por lo tanto, $[x]_2 \subset [x]$. $\square$

Veamos ahora que pasa para la productividad de algunos conexos;

Teorema 3.11. *Para $i \in \{2, 5\}$, son equivalentes:*

(1) *Para cada $\alpha \in \Lambda$, Y_α es cc_i de X_α .*

(2) *$\prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ es cc_i de $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$.*

Demostración. Sea $i \in \{2, 5\}$ y denota $Y = \prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ y $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$.

(1) implica (2). Como para cada $\alpha \in \Lambda$, Y_α es cc_i de X_α , se tiene que Y_α es conexo _{i} en X_α y por el teorema 2.21, se tiene que Y es conexo _{i} en X . Ahora, sea Z tal que Z es conexo _{i} en X y $Y \subset Z$. Del teorema 2.16, para cada $\alpha \in \Lambda$, se sigue que $P_\alpha(Z)$ es conexo _{i} en X_α ; como $Y_\alpha = P_\alpha(Y) \subset P_\alpha(Z)$ y Y_α es cc_i de X_α , se cumple que $P_\alpha(Z) \subset Y_\alpha$, así se obtiene que $Z \subset Y$. Por lo tanto, Y es cc_i de X .

(2) implica (1). Como Y es conexo _{i} en X , del teorema 2.16, se tiene para todo $\alpha \in \Lambda$, $P_\alpha(Y) = Y_\alpha$ es conexo _{i} en X_α . Ahora, para cada $\alpha \in \Lambda$: elija C_α conexo _{i} en X_α tal que $Y_\alpha \subset C_\alpha$. Por el teorema 2.21, el producto $\prod_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$ es conexo _{i} en X y puesto que $Y \subset \prod_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$ y Y es cc_i de X , se sigue que $\prod_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha \subset Y$, por lo tanto, aplicando nuevamente el teorema 2.16, para cada $\alpha \in \Lambda$, $C_\alpha \subset Y_\alpha$, es decir, para cada $\alpha \in \Lambda$, Y_α es cc_i de X_α . $\square$

Un concepto relacionado con el de componente en espacios topológicos, es el de cuasi-componente, recuerde que una *cuasi-componente*, Q_x de un punto $x \in X$, es la intersección de todos los conjuntos que tienen a x y que son simultáneamente cerrados y abiertos. Note que la familia de todas las distintas cuasi-componentes forma una partición del espacio X por subconjuntos cerrados.

En [8, Theorem 6.1.22, p. 356] se prueba que $[x] \subset Q_x$; aún más, en [8, Theorem 6.1.23, p. 357] aparece que si X es Hausdorff y compacto entonces $[x] = Q_x$ para todo $x \in X$. En este sentido se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.12. *Para cada $x \in X$, se cumple que $[x]_2 = Q_x$.*

Demostración. Primero se prueba que $[x]_2 \subset Q_x$. Sea F un conjunto cerrado y abierto en X que contenga a x . Note que F y $X \setminus F$ son conjuntos abiertos y ajenos de tal forma que $[x]_2 \subset F \cup (X \setminus F)$. Como $[x]_2$ es conexo₂ en X y $x \in [x]_2 \cap F$, de la observación 2.26, se tiene que $[x]_2 \cap (X \setminus F) = \emptyset$, así que $[x]_2 \subset F$, puesto que F fue arbitrario, se concluye que $[x]_2 \subset Q_x$.

Para ver la otra contención, es suficiente probar que Q_x es conexo₂ en X . Suponga que existe una función continua $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $f|_{Q_x}$ es suprayectiva. Sin pérdida de

generalidad, suponga que $f(x) = 0$. Como $f^{-1}(0)$ es cerrado y abierto simultáneamente en X , se tiene que $Q_x \subset f^{-1}(0)$, esto es una contradicción ya que $Q_x \cap f^{-1}(1) \neq \emptyset$ y $f^{-1}(0) \cap f^{-1}(1) = \emptyset$. Se concluye que $[x]_2 = Q_x$. $\square$

El siguiente resultado es consecuencia inmediata del teorema 3.11, lo cual es una generalización del conocido resultado que afirma que un producto finito de cuasi-componentes es una cuasi-componente en el correspondiente espacio producto, vea [12, Theorem 2.3, p. 6308], una demostración alternativa se encuentra en [10, Theorem 5, p. 150].

Corolario 3.13. Sean $i \in \{2, 5\}$ y $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un punto del producto cartesiano $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$. Se tiene que $[x]_i = \prod_{\alpha \in \Lambda} [x_\alpha]_i$.

Un resultado bien conocido establece que si $q : X \rightarrow Z$ es una función cociente con fibras conexas entonces existe una biyección (inducida por q) entre las componentes de X y las componentes de Z (vea [10, Theorem 9, p. 131] y [10, Theorem 9, p. 142]). A continuación se muestra un resultado análogo para la familia de las cuasi-componentes, usando que estas son las componentes conexas₂.

Teorema 3.14. Sea $q : X \rightarrow Z$ una aplicación cociente con fibras conexas. Entonces C es una cuasi-componente de Z si y solo si $q^{-1}(C)$ es una cuasi-componente de X .

Demostración. Sea C una cuasi-componente de Z . Por el teorema 3.12, C es cc_2 de Z , y como q es cociente con fibras conexas, del teorema 2.23 se sigue que $q^{-1}(C)$ es conexo₂ en X . Para ver que $q^{-1}(C)$ es una cc_2 de X , y así una cuasi-componente de X , suponga que existe $K \subset X$ conexo₂ con $q^{-1}(C) \subsetneq K$. Por el teorema 2.16 se tiene que $q(K)$ es conexo₂ en Z y contiene propiamente a C , esto contradice la maximalidad de C como cc_2 de Z . Recíprocamente, si $q^{-1}(C)$ es una cuasi-componente de X , por el teorema 3.12 se sigue que $q^{-1}(C)$ es una cc_2 de X . Se afirma que C es una cc_2 de Z , y por tanto una cuasi-componente de Z , en efecto, sea $D \subset Z$ conexo₂ con $C \subset D$. Por el teorema 2.23 se tiene que $q^{-1}(D)$ es conexo₂ en X y contiene a $q^{-1}(C)$; por la maximalidad de $q^{-1}(C)$, se sigue que $q^{-1}(D) = q^{-1}(C)$, y como q es cociente, se deduce que $D = C$, así que C es una cc_2 de Z . Por lo tanto, C es una cuasi-componente de Z . $\square$

Relacionado con el resultado anterior se tiene el siguiente cuestionamiento.

Problema 3.15. ¿Es cierto que C es una cc_5 de Z si y solo si $q^{-1}(C)$ es una cc_5 de X ?

Recuerde que un espacio topológico X es *localmente conexo* si para cada $x \in X$ y para cada vecindad U del punto x , existe un conjunto C abierto y conexo tal que $x \in C \subset U$; equivalentemente, las componentes de cada subespacio abierto de X son abiertas (vea [13, Theorem 25.3, p. 161]). Es bien conocido que en un espacio localmente conexo las componentes coinciden con las cuasi-componentes (vea, por ejemplo, [8, 6.3.3. (b), p. 374]), se sigue, de la observación 3.6 y el teorema 3.12, que si X es un espacio localmente conexo y $j \in \{2, 3, 4, 5\}$ entonces para cada $x \in X$ se tiene que $[x] = [x]_j$.

En un sentido similar, se define el concepto de conexidad local relativa, localmente conexo _{i} , como sigue.

Definición 3.16. Para $i \in \{2, 3, 4, 5\}$, se dice que X es localmente conexo $_i$ si para cada $x \in X$ y para cada vecindad U del punto x , existe un conjunto C abierto y conexo $_i$ tal que $x \in C \subset U$.

Imitando la prueba que aparece en [13, Theorem 25.3, p. 161], se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 3.17. Para cada $i \in \{2, 3, 4, 5\}$, X es localmente conexo $_i$ si y solo si las componentes conexas $_i$ de cada subespacio abierto de X son abiertas.

Denote por $[x]_i^U$ a la cc_i del subespacio U de X que contiene a x . El siguiente resultado es consecuencia inmediata de la proposición previa.

Lema 3.18. Sea X un espacio topológico tal que $[x]_i^U \subset [x]_j^U$ para cada $x \in X$ y cualquier subconjunto abierto U de X que contiene a x . Si X es localmente conexo $_i$ entonces X es localmente conexo $_j$.

El siguiente resultado aunque es un hecho conocido, no se ha podido encontrar una referencia adecuada por lo que se ha decidido incluir una prueba usando las técnicas aquí presentadas.

Lema 3.19. Sea Q una cuasi-componente de X . Si Q es abierto en X entonces Q es conexo y por tanto una componente de X .

Demostración. Suponga, por el contrario, que Q no es conexo. Por el teorema 2.1, existe una función continua y suprayectiva $f : Q \rightarrow \{0, 1\}$. Como Q es abierto y cerrado simultáneamente, no es difícil convencerse que la función $F : X \rightarrow \{0, 1\}$, definida por $F|_Q = f$ y $F(X - Q) = \{0\}$, es continua y suprayectiva. Se sigue que Q no es conexo $_2$ en X , esto contradice el teorema 3.12. $\square$

Proposición 3.20. Para cada $i \in \{2, 3, 4, 5\}$, X es localmente conexo $_i$ si y solo si X es localmente conexo.

Demostración. Usando el lema 3.18, la observación 3.6 y el teorema 3.12, solo resta probar que localmente conexo $_2$ implica localmente conexo. Sean X un espacio localmente conexo $_2$, un punto $x \in X$ y U un subconjunto abierto de X que contiene a x . Se afirma que la componente $[x]^U$ de U que tiene a x es abierto en X . En efecto, como X es localmente conexo $_2$ y $[x]_2^U$ es un subconjunto abierto de X , por el teorema 3.12 se sigue que $[x]_2^U$ es la cuasi-componente de U que contiene a x , así, por el lema 3.19 se concluye que $[x]_2^U = [x]^U$. $\square$

4 Disconexidad relativa

En esta sección se presentan versiones relativas de los resultados clásicos sobre disconexidad. Recuerde que un espacio topológico X se dice:

- *cero-dimensional* si es T_0 y tiene una base formada por conjuntos que son abiertos y cerrados.
- *totalmente separado* si para cualesquiera dos puntos a y b en X existen conjuntos separados, A y B , en X tales que $a \in A$, $b \in B$.
- *totalmente desconexo* si todas sus componentes son conjuntos unipuntuales.
- *extremadamente desconexo* si es Hausdorff y la cerradura de todo conjunto abierto es un abierto.

Se introducen, de manera natural, el siguiente concepto.

Definición 4.1. Para $i \in \{2, 5\}$, se dice que X es *totalmente desconexo_i* si cada cc_i de X es un conjunto unipuntual.

Las siguientes afirmación se siguen de la definición anterior.

Observación 4.2. Para $i \in \{2, 5\}$, la condición de que X sea *totalmente desconexo_i* es equivalente a que para todo $Y \subset X$ con $|Y| \geq 2$ se cumple que Y no es *conexo_i* en X .

Proposición 4.3. Para $i \in \{2, 5\}$, si X es *totalmente desconexo_i* entonces X es Hausdorff.

Demostración. Suponga que X no es Hausdorff. Existen $x, y \in X$ con $x \neq y$ tal que para cada par de conjuntos abiertos U y V en X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V \neq \emptyset$, esto nos dice que el conjunto $\{x, y\}$ es *conexo₅* en X y así *conexo₂* en X , por lo tanto X no es *totalmente desconexo_i*. □

Es bien conocido que todo espacio 0-dimensional es *totalmente separado*, también que todo espacio *extremadamente desconexo* es *totalmente separado*, vea [14, Figure 9, p. 32]. Las clases de espacios introducidos en la definición 4.1, quedan ubicados como en la figura 6.

Teorema 4.4. Se satisfacen las implicaciones que se muestran en la figura 6.

Demostración. Por los comentarios previos al enunciado de este teorema, resta demostrar: la equivalencia entre *totalmente desconexo₂* y *totalmente separado*, que *totalmente desconexo₂* implica *totalmente desconexo₅*, y que *totalmente desconexo₅* implica *totalmente desconexo*.

Para ver que *totalmente separado* implica *totalmente desconexo₂* ocupe la equivalencia en la observación 4.2. Suponga que X es *totalmente separado* y sea $Y \subset X$ tal que $|Y| \geq 2$. Fije $x, y \in Y$ con $x \neq y$. Por la hipótesis, elija conjuntos separados A y B en X tales que $x \in A$, $y \in B$ y $X = A \cup B$. Es claro que la función $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ dada por $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$ es continua y $f|_Y$ es suprayectiva, esto dice que Y no es *conexo₂* en X , por tanto X es *totalmente desconexo₂*.

Ahora se afirma que *totalmente desconexo₂* implica *totalmente separado*. En efecto, sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Como X es *totalmente desconexo₂* el conjunto $\{x, y\}$ no es *conexo₂* en X , luego existe una función continua $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $f|_{\{x, y\}}$ es suprayectiva.

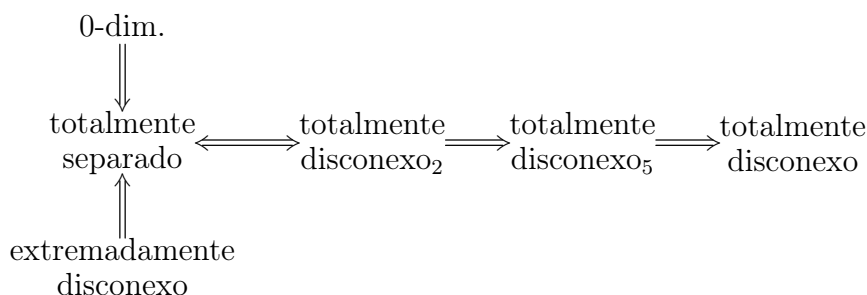


Figura 6

Sin pérdida de generalidad, suponga que $f(x) = 0$ y que $f(y) = 1$, ponga $A = f^{-1}(0)$ y $B = f^{-1}(1)$: claramente $x \in A$, $y \in B$, $\overline{A} \cap B = \emptyset$ y $\overline{B} \cap A = \emptyset$; esto implica que X es totalmente separado.

Totalmente desconexo₂ implica totalmente desconexo₅: Como para cada $x \in X$, $[x]_2 = \{x\}$, por el hecho de que $[x]_5 \subset [x]_2$ en la observación 3.6, se sigue que para cada $x \in X$, $[x]_5 = \{x\}$.

Totalmente desconexo₅ implica totalmente desconexo: Por hipótesis, para cada $x \in X$ se tiene que $[x]_5 = \{x\}$, por la observación 3.6, $[x] \subset [x]_5$, de donde para cada $x \in X$, $[x] = \{x\}$, esto dice que X es totalmente desconexo. $\square$

En lo que resta de la sección se muestra que no existen más equivalencias en la figura 6. Los ejemplos 79, 23 y 113 en [14] muestran: un espacio que es totalmente separado pero no es 0-dimensional ni extremadamente desconexo; un espacio 0-dimensional que no es extremadamente desconexo y un espacio extremadamente desconexo que no es 0-dimensional, respectivamente.

El siguiente ejemplo muestra un espacio que es totalmente desconexo₅ pero que no es totalmente desconexo₂, tal ejemplo se obtiene de una modificación a aquel que aparece en [14, Example 100, p. 119].

Ejemplo 4.5. Sean $X = (\omega \times \mathbb{Z}) \cup \{p, q\}$, donde p y q son puntos diferentes que no están en $\omega \times \mathbb{Z}$, y $Z_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Considere la siguiente topología en X (vea la figura 7):

- los puntos en $\omega \times Z_0$ son aislados en X ;
- cada punto $(i, 0) \in \omega \times \{0\}$ tiene como base local conjuntos de la forma $U(i, F) = \{(i, k) : k \in Z_0 \setminus F\}$ donde F es un subconjunto finito de Z_0 ;
- los conjuntos $V_n(p) = \{p\} \cup \{(i, k) \in X : i > n \text{ y } k > 0\}$ con $n \in \omega$, forman una base local para p ;

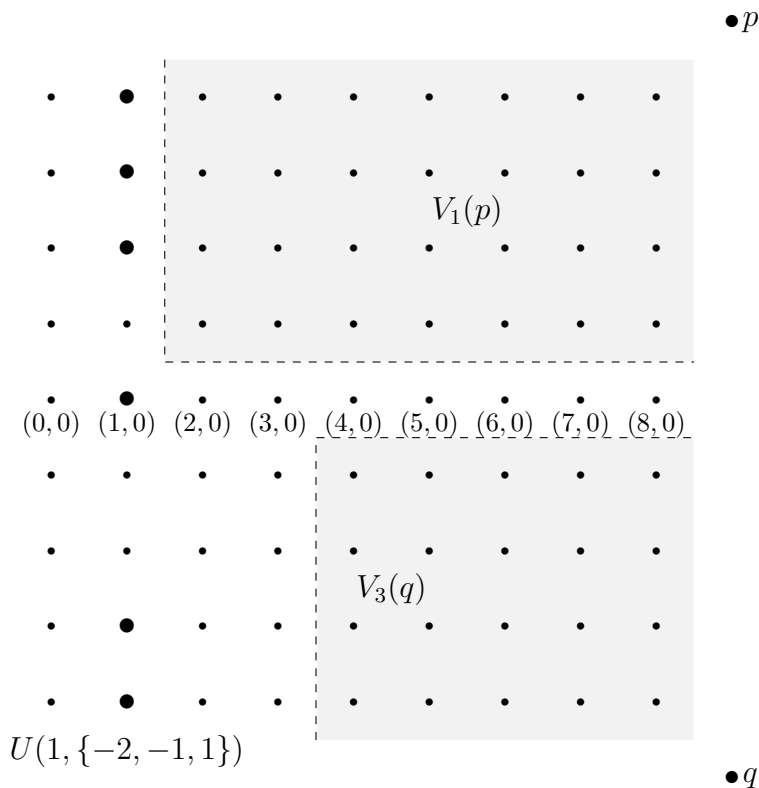


Figura 7: Espacio totalmente $disconexo_5$ que no es totalmente $disconexo_2$

- los conjuntos $V_n(q) = \{q\} \cup \{(i, k) \in X : i > n \text{ y } k < 0\}$ con $n \in \omega$, forman una base local para q .

Se afirma que X es totalmente $disconexo_5$. En efecto, sea $Y \subset X$ con $|Y| \geq 2$. Se prueba que Y no es $conexo_5$ en X . Cuando Y contiene un punto (i, k) con $k \neq 0$, el resultado es inmediato. Si Y contiene un punto de la forma $(i, 0)$ con $i \in \omega$, los conjuntos $U(i, \emptyset)$ y $X \setminus U(i, \emptyset)$ muestran que Y no es $conexo_5$ en X ya que $U(i, \emptyset)$ es un conjunto abierto y cerrado. Y cuando $p, q \in Y$, los conjuntos $V_0(p)$ y $V_0(q)$ aseguran que Y no es $conexo_5$ en X . Se sigue de la observación 4.2 que X es totalmente $disconexo_5$.

Se afirma que X no es totalmente $disconexo_2$. En efecto, sea $Y = \{p, q\}$. Suponga que existe una función continua $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $f|_Y$ es suprayectiva. Sin pérdida de generalidad, suponga que $p \in f^{-1}(0)$ y $q \in f^{-1}(1)$, luego existen $n, m \in \omega$ tales que $\overline{V_n(p)} \subset f^{-1}(0)$ y $\overline{V_m(q)} \subset f^{-1}(1)$, lo cual es imposible ya que para $N > \max\{n, m\}$, $(N, 0) \in \overline{V_n(p)} \cap \overline{V_m(q)}$. Entonces Y es $conexo_2$ en X , nuevamente de la observación 4.2

se tiene que X no es totalmente desconexo₂.

Ejemplo 4.6. Un espacio que es totalmente desconexo que no es totalmente desconexo₅. Sean X como en el ejemplo 2.7 y $X^* := X \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ considerado como subespacio de X . Se afirma que X^* es totalmente desconexo. Sea $x \in X^*$. Si $x \notin \{p, q\}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in L_n \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ y como $L_n \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ es totalmente desconexo, se concluye que $[x] = \{x\}$. Finalmente, como $\{p, q\}$ no es un subespacio conexo, al ser la unión de los cerrados $\{p\}$ y $\{q\}$, se tiene que $[p] = \{p\}$ y $[q] = \{q\}$.

Ahora para ver que X^* no es totalmente desconexo₅, note que $\{p, q\}$ es conexo₅ en X ya que para cada par de abiertos U y V tales que $p \in U$ y $q \in V$ se cumple que $U \cap V \neq \emptyset$.

5 Componentes relativas en hiperespacios

Se denota por $\text{CL}(X)$ y por $\text{F}(X)$ a la familia de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de X y la familia de todos los subconjuntos finitos no vacíos de X , respectivamente. Dado $n \in \mathbb{N}$, $\text{F}_n(X)$ es la familia de todos los conjuntos A contenidos en X con $1 \leq |A| \leq n$. Si A es un subconjunto de X , se definen:

$$A^- = \{C \in \text{CL}(X) : C \cap A \neq \emptyset\}, \quad A^+ = \{C \in \text{CL}(X) : C \subset A\}.$$

La topología de Vietoris en $\text{CL}(X)$ es aquella cuya subbase es la familia:

$$\{U^+ : U \text{ es abierto en } X\} \cup \{U^- : U \text{ es abierto en } X\}.$$

Una base para la topología de Vietoris consiste en todos los conjuntos de la forma:

$$\langle U_j \rangle_{j \in J} := \left\{ F \in \text{CL}(X) : F \subset \bigcup_{j \in J} U_j \text{ y } F \cap U_j \neq \emptyset \text{ para todo } j \in J \right\},$$

donde J es un conjunto finito y cada U_j es un abierto en X .

Note que para cada espacio X y cada punto x en X , se tiene que $\{x\}$ es conexo _{i} en X para cualquier $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Para garantizar que $\text{F}_1(X)$ está contenido en $\text{CL}(X)$, suponga que todos los espacios son T_1 .

La prueba de los siguientes teoremas se puede consultar en [5, Theorem 5.1 and Theorem 5.5, p.11 and p.12], estos resultados dan una versión relativa de [11, Theorem 4.10 and Theorem 4.11]. Se presentan las pruebas para auxiliar la lectura.

Teorema 5.1. Sea $i \in \{2, 3, 4, 5\}$. Se tiene que Y es conexo _{i} en X si y solo si Y^+ es conexo _{i} en $\text{CL}(X)$.

Demostración. Sean $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ y $n \in \mathbb{N}$. Si Y es conexo _{i} en X , por el corolario 2.20, se tiene que Y^n es conexo _{i} en X^n . La función $\psi : X^n \rightarrow \text{F}_n(X)$ dada por $\psi((x_1, \dots, x_n)) = \{x_1, \dots, x_n\}$ claramente es continua; del teorema 2.16 se tiene que $\psi(Y^n) = \text{F}_n(Y)$ es conexo _{i} en $\text{F}_n(X)$. Por el lema 2.18 se sigue que $\text{F}_n(Y)$ es conexo _{i} en $\text{CL}(X)$. Luego,

por el teorema 2.17 se tiene que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(Y) = F(Y)$ es conexo_{*i*} en $\text{CL}(X)$. Puesto que $F(Y) \subset Y^+ \subset \overline{F(Y)} = \text{CL}(X)$, por el teorema 2.14 se concluye que Y^+ es conexo_{*i*} en $\text{CL}(X)$.

Ahora se prueba que si Y^+ es conexo_{*i*} en $\text{CL}(X)$ entonces Y es conexo_{*i*} en X . Se procede por casos respecto a i .

$i = 2$: Si Y no es conexo₂ en X existe una función continua $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $f|_Y$ es suprayectiva. La función $F : \text{CL}(X) \rightarrow \{0, 1\}$ definida como

$$F(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \cap f^{-1}(0) = \emptyset, \\ 1 & \text{si } A \cap f^{-1}(0) \neq \emptyset, \end{cases}$$

para cada $A \in \text{CL}(X)$, es continua ya que $F^{-1}(0) = (f^{-1}(1))^+$ y $F^{-1}(1) = (f^{-1}(0))^-$. Como $F|_{Y^+} = \{0, 1\}$, se sigue que Y^+ no es conexo₂ en $\text{CL}(X)$.

$i = 3$: Si Y^+ es conexo₃ en $\text{CL}(X)$, por (1) del teorema 2.3 existe un subespacio conexo $\mathcal{C}$ de $\text{CL}(X)$ tal que $Y^+ \subset \mathcal{C}$; por [11, Proposition 2.8] se tiene que $\bigcup \mathcal{C}$ es un subespacio conexo de X que contiene a Y . Se sigue de (1) del teorema 2.3 que Y es conexo₃ en X .

$i \in \{4, 5\}$: Si Y no es conexo_{*i*} en X existen subconjuntos abiertos (cerrados) y ajenos A y B en X tales que $Y \subset A \cup B$, $Y \cap A \neq \emptyset \neq Y \cap B$. Se sabe que los conjuntos A^+ y B^+ son abiertos (cerrados) en $\text{CL}(X)$ y es rutinario mostrar que estos conjuntos garantizan que Y^+ no es conexo_{*i*} en $\text{CL}(X)$. □

La prueba del siguiente teorema es similar a aquella que aparece en [11, Proposition 4.11].

Teorema 5.2. Sean $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ y J un conjunto finito. Si $\{Y_j : j \in J\}$ es una familia de subespacios conexo_{*i*} en X entonces $\langle Y_j \rangle_{j \in J}$ es conexo_{*i*} en $\text{CL}(X)$.

Demostración. Sea $i \in \{2, 3, 4, 5\}$. Como para cada $j \in J$, Y_j es conexo_{*i*}, en la prueba del teorema 5.1 se deduce que $F(Y_j)$ es conexo_{*i*} en $F(X)$. Luego, por el teorema 2.20 se tiene que $[F(Y_j)]^J$ es conexo_{*i*} en $[F(X)]^J$ y así, por el lema 2.18, conexo_{*i*} en $[\text{CL}(X)]^J$. La función $\phi : [\text{CL}(X)]^J \rightarrow \text{CL}(X)$ definida como $\phi((F_j)_{j \in J}) = \bigcup_{j \in J} F_j$ es claramente continua y $\phi([F(Y_j)]^J) = \langle Y_j \rangle_{j \in J} \cap F(X)$, así que, por el teorema 2.16, $\langle Y_j \rangle_{j \in J} \cap F(X)$ es conexo_{*i*} en $\text{CL}(X)$. Puesto que

$$\langle Y_j \rangle_{j \in J} \cap F(X) \subset \langle Y_j \rangle_{j \in J} \subset \overline{\langle Y_j \rangle_{j \in J} \cap F(X)},$$

del teorema 2.14 se sigue que $\langle Y_j \rangle_{j \in J}$ es conexo_{*i*} en $\text{CL}(X)$. □

Los siguientes resultados relacionan las componentes relativas de un espacio con las componentes relativas en el respectivo hiperespacio.

Proposición 5.3. Sea $i \in \{4, 5\}$. Si Y es cc_{*i*} de X entonces Y^+ es cc_{*i*} de $\text{CL}(X)$.

Demostración. Solo se demuestra el caso cuando $i = 5$, ya que el caso $i = 4$ es análogo (intercambiando abiertos por cerrados). Siendo Y cc_5 de X , Y es conexo₅ en X , luego por el teorema 5.1 se tiene que Y^+ es conexo₅ en $CL(X)$. Ahora, sea $Z \subset CL(X)$ tal que $Y^+ \subsetneq Z$. Resta demostrar que Z no es conexo₅ en $CL(X)$. Para demostrar esto, considere $Z := \bigcup Z$; note que $Y \subset Z$ ya que para cada $y \in Y$, se tiene que $\{y\} \in Z$, de donde $y \in Z$. También, dado que existe $F \in Z \setminus Y^+$, es posible elegir $p \in F \cap (X \setminus Y)$ tal que $p \in Z \setminus Y$. Se concluye que $Y \subsetneq Z$. Como Y es cc_5 de X , se tiene que Z no es conexo₅ en X , es decir, existen U y V conjuntos abiertos y ajenos en X que tienen intersección no vacía con Z y $Z \subset U \cup V$. Como Y es conexo₅ en X , suponga sin pérdida de generalidad que $Y \subset U$ y por tanto $Y^+ \subset U^+$. Note que para cada $F \in Z \setminus U^+$, ya que $F \subset Z$ y $F \not\subset U$, se sigue que $F \in V^-$, así $Z \subset U^+ \cup V^-$ y claramente $Z \cap U^+ \neq \emptyset \neq Z \cap V^-$ además de que $U^+ \cap V^- = \emptyset$. Por lo tanto Z no es conexo₅ en $CL(X)$. $\square$

Proposición 5.4. Si Y es cc_2 de X entonces Y^+ es cc_2 de $CL(X)$.

Demostración. Sea Y una cc_2 de X , como Y es conexo₂, por el teorema 5.1 se tiene que Y^+ es conexo₂ en $CL(X)$. Ahora, sea $Z \subset CL(X)$ tal que $Y^+ \subsetneq Z$. Resta demostrar que Z no es conexo₂ en $CL(X)$. Tome $Z \in Z \setminus Y^+$, como Y es cc_2 de X y $Y \subsetneq Y \cup Z$, existe una función continua $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $f|_{Y \cup Z}$ es suprayectiva. Como Y es conexo₂ en X , suponga sin pérdida de generalidad que $f(Y) = \{0\}$. Defina la función $F : CL(X) \rightarrow \{0, 1\}$ tal que para cada $K \in CL(X)$,

$$F(K) = \begin{cases} 0 & \text{si } K \in (f^{-1}(0))^+, \\ 1 & \text{si } K \in (f^{-1}(1))^- . \end{cases}$$

Claramente, F es continua y $F|_Z$ es suprayectiva, por lo tanto Z no es conexo₂ en $CL(X)$. $\square$

Observación 5.5. Por el teorema 3.12, el resultado anterior se puede interpretar como sigue: Si Y es una cuasi-componente de X entonces Y^+ es una cuasi-componente de $CL(X)$.

Teorema 5.6. Sea $i \in \{2, 4, 5\}$. Son equivalentes los siguientes enunciados.

- (1) Y es cc_i de X .
- (2) Y^+ es cc_i de $CL(X)$.

Demostración. Que (1) implica (2), se sigue de las proposiciones 5.3 y 5.4. Para ver que (2) implica (1), suponga que Y^+ es cc_i de $CL(X)$, así que Y^+ es conexo_i en $CL(X)$, del teorema 5.1, se tiene que Y es conexo_i de X . Ahora, sea $Z \subset X$ tal que Z es conexo_i en X y $Y \subsetneq Z$. Nuevamente, por el teorema 5.1 se sigue que Z^+ es conexo_i en $CL(X)$, lo cual contradice que Y^+ es cc_i de $CL(X)$, ya que $Y^+ \subsetneq Z^+$; esto muestra que Y es cc_i de X . $\square$

Como consecuencia del teorema anterior y del teorema 3.12, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 5.7. *Un subconjunto Q de X es una cuasi-componente de X si y solo si Q^+ es una cuasi-componente de $\text{CL}(X)$.*

El siguiente ejemplo muestra que, en general, no toda cc_i de $\text{CL}(X)$ tiene la forma $[z]_i^+$ para cualquier punto z de X ; sin embargo, la conexidad de X es una condición suficiente para garantizar esto. (ver teorema 5.9).

Ejemplo 5.8. *Sea $X = \{0, 1\}$, dotado con la topología discreta. Observe que la componente $[\{0, 1\}]$ en $\text{CL}(X)$ es $\{0, 1\}$, la cual no está contenida en $[0]^+$ ni en $[1]^+$.*

Teorema 5.9. *Sea $i \in \{2, 4, 5\}$. Lo siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *Cada cc_i de $\text{CL}(X)$ es de la forma $[z]_i^+$, para algún punto z en X ;*
2. *X es conexo;*
3. *$\text{CL}(X)$ es conexo.*

Demostración. (2) es equivalente a (3) se sigue del teorema 5.1.

(1) es equivalente a (2). Para probar que (1) implica (2), suponga que cada cc_i de $\text{CL}(X)$ es de la forma $[z]_i^+$, para algún punto z en X . Para garantizar que X es conexo es suficiente demostrar que para todo $x, y \in X$, $[x]_i = [y]_i$. Por el contrario, si existen $x, y \in X$ tales que $[x]_i \neq [y]_i$, del teorema 5.2 se tiene que $\langle [x]_i, [y]_i \rangle$ es conexo_i en $\text{CL}(X)$. Por hipótesis, existe $z \in X$ tal que $\langle [x]_i, [y]_i \rangle \subset [z]_i^+$. Sea A un elemento en $\langle [x]_i, [y]_i \rangle$. Luego, existen puntos a y b en X tales que $a \in A \cap [x]_i$ y $b \in A \cap [y]_i$, así $[a]_i = [x]_i$ y $[b]_i = [y]_i$; pero como $A \subset [z]_i$, se tiene que $[a]_i = [z]_i$ y $[b]_i = [z]_i$, de modo que $[a]_i = [b]_i$, lo cual es un absurdo.

Para ver que (2) implica (1), ya que X es conexo, es claro que X es conexo_i en X luego, por el teorema 5.1, X^+ es conexo_i en $\text{CL}(X)$. Así que, X^+ es la única cc_i de $\text{CL}(X)$. Finalmente, note que $X = [z]_i$ para cada punto z en X , y así $X^+ = [z]_i^+$; esto finaliza la prueba. $\square$

Agradecimientos

Los autores agradecen a la persona que arbitró por haber dedicado su valioso tiempo y empeño para la revisión de este trabajo.

El segundo autor agradece al Programa de Estancias Posdoctorales de CONACyT (2021) por la beca otorgada para realizar el proyecto *Conexidad Relativa en Hiperespacios* del cual se deriva este trabajo.

Referencias

- [1] A. V. Arhangel'skii and H. M. M. Genedi, *Beginnings of the Theory of Relative Topological Properties*, General Topology, Spaces and Mappings, MGU, Moscow (1989), 3-48 (en ruso).
- [2] A. V. Arhangel'skii, *Relative topological properties and relative topological spaces*, Topology and its Applications vol. 70, 2-3 (1996), 87-99.
- [3] M. Bonanzinga and F. Maesano, *Some properties defined by relative versions of Star-covering Properties*, Topology and its Applications, vol. 306 (2022), Art. No. 107923.
- [4] F. Casarrubias Segura y A. Tamariz Mascarúa, *Elementos de Topología General*, SMM, vol. 37, de la serie TEXTOS, México, 2012.
- [5] F. Corona-Vázquez, J. Díaz-Reyes, R.A. Quiñones-Estrella, and J. Sánchez-Martínez, *An Introduction to Relative Connectedness of Topological Spaces*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 50:46 (2024), 1-13.
- [6] F. Corona Vázquez, J. Díaz Reyes, R.A. Quiñones Estrella, y J. Sánchez Martínez, *Introducción a la conexidad relativa en espacios topológicos*, Capítulo 5 en Topología y sus aplicaciones 10. Dirección General de Publicaciones, BUAP, Manuales y Textos, 2024.
- [7] J. Díaz-Reyes, I. Martínez-Ruiz, and A. Ramírez-Páramo, *Relative topological properties of hyperspaces*, Mathematica Slovaca, vol. 69-3 (2019) 675-684.
- [8] R. Engelking, *General topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [9] L.D.R. Kočinac, S. Konca, and S. Singh, *Variations of some star selection properties*, AIP Conference Proceedings, vol. 2334 (1), (2021), 020006.
- [10] K. Kuratowski, *Topology Volume II*, Academic Press Inc., 1968.
- [11] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Am. Math. Soc., 71, (1951), 152-182.
- [12] G. Markoski and A. Buklla, *On product of spaces of quasicomponents*, Filomat vol. 31 (2017), 6307-6311.
- [13] J. Munkres, *Topología*, 2a. Edición, Pearson Educación, 2002.
- [14] L. Steen and J. Seebach Jr, *Counterexamples in Topology*, Dover Publications, New York, 1978.
- [15] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, AMS, Colloq. Publ., vol. 28, 1942.

Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas,
Benemérita Universidad Autónoma de Chiapas
Carretera Emiliano Zapata Km. 8, Rancho San Francisco, Terán,
Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. C.P. 29050

`florencio.corona@unach.mx`

`jesus.reyes@unach.mx`

`rusell.quinones@unach.mx`

`jsanchezm@unach.mx`

Índice de autores

Bernès Carmona, Denisse Amélie Sophie, 79

Cejudo Castilla, César, 5

Climent Hernández, José Antonio, 127

Cordero Medel, Andrea, 5

Corona Vázquez, Florencio, 202

Cuevas Otahola, Bolivia, 47

Díaz Reyes, Jesús, 202

Herrera Carrasco, David, 147, 163, 180

López Diez, Juan Carlos, 180

Macías Romero, Fernando, 147, 163, 180

Martínez Laguna, Ygnacio, 47

Martínez Palacios, María Teresa Verónica, 127

Mendoza Torres, Francisco Javier, 27

Morín Castillo María Monserrat, 47

Ortega Becerril, José Alberto, 147

Quiñones Estrella, Russell Aarón, 202

Ramírez Aparicio, Leonardo, 163

Rodríguez Hernández, David, 180

Soto Bajo, Moisés, 79

Sánchez Martínez, Javier, 202

Sánchez Márquez, Gerardo Alfonso, 27

Villa Hernández, David , 5

Matemáticas y sus aplicaciones 30
Fernando Macías Romero, David Herrera Carrasco
25 de septiembre de 2026
pdf
6 MB

Matemáticas y sus aplicaciones 30

FERNANDO MACIAS ROMERO

DAVID HERRERA CARRASCO

editores

La obra Matemáticas y sus aplicaciones 30 es una compilación académica de artículos arbitrados.

El libro presenta avances teóricos y aplicaciones prácticas en cinco áreas fundamentales: en Álgebra, analiza estructuras de anillos y módulos; en Análisis, examina generalizaciones de la derivada clásica; en Física, propone modelos de dinámica de espín-difusión; en Matemática Aplicada y Probabilidad, aborda técnicas de procesamiento de señales y modelos estocásticos de inversión; y en Topología, desarrolla teoría de continuos e hiperespacios.

Su propósito es consolidar y difundir resultados originales de investigación, funcionando como material de consulta y referencia especializada para la comunidad científica y estudiantil.



BUAP



**Dirección
General de
Publicaciones**

