



Matemáticas y sus aplicaciones 29

FERNANDO MACÍAS ROMERO
DAVID HERRERA CARRASCO
INGRID CAROLINA MARTÍNEZ BARAHONA
(editores)



MANUALES Y TEXTOS
ciencias exactas

Matemáticas y sus aplicaciones *29*

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Ingrid Carolina Martínez Barahona
Editores

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

RECTORA: MARÍA LILIA CEDILLO RAMÍREZ · SECRETARIO GENERAL:
DANIÁN HERNÁNDEZ MÉNDEZ · VICERRECTOR DE EXTENSIÓN Y DI-
FUSIÓN DE LA CULTURA: ROSALINDA MERINO CALDERÓN · DIRECTOR
GENERAL DE PUBLICACIONES: MARY KRISS PARRA GÓRRIZ

PRIMERA EDICIÓN: 2026

ISBN: 978-968-9744-85-6

D.R. © BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
4 SUR 104, CENTRO HISTÓRICO, PUEBLA, PUE. CP. 72000
TELÉFONO: 2222295500

WWW.BUAP.MX

DIRECCIÓN GENERAL DE PUBLICACIONES
2 NORTE 104, CENTRO HISTÓRICO, PUEBLA, PUE., CP.72000
Tels.: 2222295500
LIBROS.DGP@CORREO.BUAP.MX | WWW.PUBLICACIONES.BUAP.MX

DISEÑO DE PORTADA: DANIEL DOMÍNGUEZ MÁLAGA

HECHO EN MÉXICO

MADE IN MEXICO

Matemáticas y sus aplicaciones 29

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de
investigación presentados en la serie
International Conference on Mathematics and its Applications
(CIMA), FCFM, BUAP.

Editores

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Ingrid Carolina Martínez Barahona

Comité científico internacional

Ermínia de Lourdes Campello Fanti (UNESP, BRA), Félix Capulín Pérez (UAEMEX), Florencio Corona Vázquez (UNACH), Antonio Díaz Ramos (UMA, ESP), Sina Greenwood (UA,NZ), Gerardo Hernández Valdez (UANL), Judy Kennedy (LU, USA), Christian Lehn (TUC, DE), Rocío Leonel Gómez (UNAM), Fernando Macías Romero (BUAP), Edgar Martínez Moro (UVA, ESP), Eiichi Matsushashi (SHIMADAI, JP), Daria Michalik (UKSW, PL), Fernando Orozco Zitli (UAEMEX), Ambrosio Ortíz Ramírez (IPN), José Gregorio Rodríguez Nieto (UNC, CO), Javier Sánchez Martínez (UNACH), Jesús Fernando Tenorio Arvide (UTM, Oax-MEX), Nomura Yamato (SHIMADAI, JP).

Contenido

Presentación	1
---------------------	----------

Álgebra

Capítulo 1. Teorema fundamental de los grupos abelianos finitamente generados	5
--	----------

Diana Avella Alaminos, Rocío Leonel Gómez

1	Introducción	5
2	Un poco de historia	6
3	Conceptos básicos	9
4	Teorema para grupos abelianos finitos	12
5	Grupos abelianos finitamente generados	19

Matemática Aplicada y Teoría de Control

Capítulo 2. Método de defusificación centro de gravedad, utilizando integración de Lebesgue	31
--	-----------

Gustavo Mendoza Torres, Yolanda Elinor Bravo García, Edmundo Reynoso Lara, Octavio Mendoza Gómez, José Antonio Dávila Pintle

1	Introducción	32
2	Lógica difusa	33
3	Teoría de los Conjuntos Difusos	34
4	Control difuso (CD)	43
5	Integral de Lebesgue	49
6	Ejemplo del método de defusificación	51

Capítulo 3. Modelando el problema del diseño de las palabras código del ADN a través de grafos y fórmulas booleanas	57
<i>Sonia Navarro Flores, Carlos Guillén Galván, Carlos Alberto López Andrade</i>	

1	Introducción	57
2	Preliminares	59
3	Modelando el problema con grafos	69
4	Modelando el problema del máximo conjunto independiente con Partial MaxSAT	76

Topología

Capítulo 4. Algunos resultados sobre compactaciones del rayo $[0, \infty)$	99
<i>Felipe de Jesús Aguilar Romero, Diana Cuaya Simbro, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero</i>	

1	Introducción	99
2	Preliminares	100
3	Compactaciones	102
4	Compactaciones del rayo $[0, \infty)$	104

Capítulo 5. El arco y la curva cerrada simple tienen hiperespacio cociente C_n/C_1 único	129
<i>Maricela Briones de Gante, David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero</i>	

1	Preliminares	129
2	Hiperespacios	131
3	Hiperespacio de subcontinuos de $[0, 1]$	133
4	Hiperespacio de subcontinuos de S^1	134
5	Espacio Cociente	136
6	Hiperespacio $C_n(X)/C_1(X)$	140

Capítulo 6. Sobre abanicos suaves	149
<i>José Alberto Ortega Becerril, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero</i>	

1	Preliminares	149
2	Suavidad	157

Capítulo 7. Más acerca de funciones sobre continuos	169
<i>Daniel Domínguez Málaga, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero</i>	
1 Introducción	169
2 Preliminares	171
3 Clases de funciones	179
4 Funciones MO, OM	187
5 Agradecimientos	191
Capítulo 8. El lazo solenoidal universal	193
<i>Ingrid Carolina Martínez Barahona, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero</i>	
1 Preliminares	193
2 Lazo cubriente	198
3 Completaciones profinitas	205
4 El lazo solenoidal universal	208
Índice de autores	215

Presentación

La Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) se complace en presentar esta obra, fruto de una estrecha colaboración académica y un compromiso sostenido con la excelencia. Durante más de dos décadas, nuestra comunidad —profesores y estudiantes por igual— ha impulsado el desarrollo de las “International Conferences on Mathematics and its Applications” (CIMA), consolidándolas como un foro anual de referencia internacional en el ámbito de las matemáticas contemporáneas.

La presencia constante de destacados investigadores de diversos países en estas conferencias no solo ha enriquecido nuestro quehacer académico, sino que ha servido de catalizador para la edición de este volumen. Este libro es, en esencia, un testimonio del vigor y el entusiasmo del comité organizador emanado de la Academia de Matemáticas, cuyo motor principal ha sido la pasión por la disciplina y la voluntad de compartir los avances generados en nuestra labor diaria.

El contenido de esta obra se articula a través de capítulos organizados por secciones temáticas, cubriendo diversas áreas de las matemáticas puras y aplicadas. Con el fin de garantizar el rigor científico y la relevancia de los resultados expuestos, cada contribución ha sido sometida a un estricto proceso de arbitraje por pares.

Deseamos expresar nuestro profundo agradecimiento a los revisores y dictaminadores, cuya labor desinteresada, profesionalismo y generosidad intelectual han sido fundamentales para mantener los estándares de calidad de esta serie. Asimismo, extendemos un reconocimiento especial a Felipe de Jesús Aguilar Romero y a Leonardo Ramírez Aparicio por su dedicada labor en la coordinación editorial, así como a Kevin Águila Méndez por su indispensable apoyo técnico en la preparación de este libro 29.

Confiamos en que las páginas que siguen brinden al lector no solo conocimiento especializado, sino también la motivación necesaria para continuar avanzando en la exploración científica.

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Academia de Matemáticas, FCFM
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Editores

Álgebra

Capítulo 1

Teorema fundamental de los grupos abelianos finitamente generados

Diana Avella Alaminos, Rocío Leonel Gómez
Facultad de Ciencias, UNAM

Resumen

El estudio de la estructura de los grupos abelianos ha sido una piedra angular en el desarrollo del álgebra moderna. El Teorema fundamental de los grupos abelianos finitamente generados ofrece una poderosa clasificación: afirma que cualquier grupo abeliano finitamente generado es isomorfo a un producto directo de grupos cíclicos, lo que revela una sorprendente regularidad y simplicidad en su estructura interna. En este capítulo, presentamos una demostración detallada de este teorema. Además de explicar los aspectos técnicos, buscamos resaltar la motivación y las ideas clave que hacen de este resultado un punto de encuentro entre la teoría de grupos, la aritmética de los enteros y la descomposición de estructuras algebraicas.

1 Introducción

En este capítulo desarrollamos la prueba del Teorema fundamental de los grupos abelianos finitamente generados. A pesar de que esta demostración puede encontrarse en diversos textos de álgebra, aquí se presenta de manera detallada, enfatizando los argumentos estructurales y las ideas clave que intervienen en ella.

El capítulo se organiza en varias secciones: primero, con el fin de situar el resultado en un contexto más amplio, se presenta un breve panorama histórico basado en [9, Cap. 2] donde se describe el surgimiento de los conceptos fundamentales de la teoría de grupos, tales como grupo, subgrupo normal, grupo cociente, grupo libre, homomorfismo e isomorfismo. Posteriormente, se mencionan los conceptos básicos de grupos necesarios para llegar al objetivo

planteado, para después continuar el análisis de la estructura de los grupos abelianos finitos. Finalmente se presenta la prueba del Teorema fundamental para grupos abelianos finitamente generados. Cabe señalar que parte de la argumentación y del enfoque seguido están inspirados en diversos libros como *Abstract Algebra: Theory and Applications* [7] y *Classical Topology and Combinatorial Group Theory* [14], los cuales están citados en el transcurso del trabajo.

2 Un poco de historia

Diversos autores consideran que la teoría de grupos tiene sus raíces en el estudio de las permutaciones, ya que el análisis de las permutaciones de las raíces de una ecuación fue esencial en la teoría general de las ecuaciones algebraicas desarrollada por Lagrange. De hecho, él sostenía que en éstas se encontraban “los verdaderos principios para la resolución de ecuaciones”. [8, pág. 197]. A pesar de que Lagrange no formuló un cálculo formal de permutaciones, en el sentido moderno de considerar explícitamente la composición o la cerradura, en su obra aparece de manera intuitiva el concepto de grupo, ver [8]. En este contexto, como lo considera Kleiner, podríamos decir que la historia del concepto de grupo comienza con los trabajos de Lagrange a finales del siglo XVIII.

En este proceso del surgimiento de la teoría de grupos, Joseph-Louis Lagrange desempeñó también un papel crucial. Si bien él no logró concluir el problema de la resolubilidad algebraica de la ecuación de quinto grado, su trabajo representó un punto de inflexión. Fue el primero en relacionar las soluciones de una ecuación polinómica con las permutaciones de sus raíces, haciendo de estas transformaciones el eje central de su teoría de las ecuaciones algebraicas. Sin proponérselo explícitamente, inauguró una forma de pensar estructurada sobre las permutaciones que más tarde sería esencial para el desarrollo de ideas más generales en álgebra.

Unos años después, en 1801, Carl Friedrich Gauss publicó las *Disquisitiones Arithmeticae* [5], una obra monumental que unificó buena parte del conocimiento acumulado en la teoría de los números. Aunque su objetivo no era desarrollar la teoría de grupos, Gauss introdujo ideas que anticipaban estructuras algebraicas fundamentales. En su trabajo, los grupos aparecen bajo cuatro formas distintas: el grupo aditivo de los enteros módulo m , el

grupo multiplicativo de los enteros primos relativos con m , el grupo de clases de equivalencia de formas cuadráticas binarias y el grupo de raíces n -ésimas de la unidad. Gauss trató estas estructuras como entidades con propiedades comunes, lo que hoy reconocemos como grupos abelianos finitos, y utilizó demostraciones que constituyen prototipos claros del álgebra moderna, todo ello sin recurrir al lenguaje formal de la teoría de grupos.

En 1854, Arthur Cayley propuso una definición abstracta de grupo basada en símbolos que al operar entre sí no necesariamente conmutan, pero sí cumplen la propiedad asociativa y demostró que todo grupo finito puede representarse como un grupo de permutaciones (Teorema de Cayley). Aunque introdujo nociones como la tabla de multiplicación y clasificó grupos de orden 4 y 6, su enfoque fue ignorado en su tiempo. Fue hasta 1878 que retomó su visión abstracta, ya con más resonancia, [3]. En 1882, Heinrich Weber formuló una definición moderna de grupo finito y en ese mismo año W. von Dyck presentó la primera definición general que incluía grupos finitos e infinitos, utilizando generadores e inversos de manera explícita. También introdujo el concepto de grupo libre y mostró que todo grupo finitamente generado es cociente de uno libre. Estas ideas encontraron mayor recepción en la comunidad matemática entre 1880 y 1890, ver [8, pág. 214], cuando el enfoque abstracto se volvió útil para unificar las teorías de grupos en el álgebra, la geometría, la teoría de los números y el análisis, especialmente con el auge de la lógica y la teoría de los conjuntos.

A finales del siglo XIX, la teoría de grupos dio un giro hacia la abstracción. Frobenius ofreció pruebas abstractas de los teoremas de Sylow, desvinculándolos del contexto de grupos de permutaciones. Hölder introdujo conceptos clave como el grupo cociente y los automorfismos, y estudió por primera vez los grupos simples de forma abstracta. Dedekind, Miller y otros matemáticos avanzaron en la caracterización de grupos como los hamiltonianos, introduciendo las nociones de subgrupo y subgrupo conmutador. La versión moderna fue desarrollada por Heinrich Weber y Walther von Dyck hacia 1882. La teoría de caracteres, desarrollada por Burnside y Frobenius, también fortaleció este enfoque. Aunque el concepto de grupo abstracto se consolidó entonces, su adopción formal en libros y cursos no ocurrió sino hasta inicios del siglo XX, con obras pioneras como las de Séguier en 1904 y Schmidt en 1916.

No obstante, fue con la publicación del libro, escrito en alemán, *Moderne Algebra* de B. L. van der Waerden entre 1930 y 1931, ver [16], que el concepto de grupo, junto con otras estructuras como anillos y cuerpos, se consolidó

como parte del marco teórico del álgebra abstracta.

Desde entonces, se han desarrollado métodos y herramientas para clasificar grupos y explorar su estructura interna. Esto ha dado lugar a una rica teoría que permite responder preguntas específicas, tales como: ¿cuántos grupos (no isomorfos) existen de un orden dado?, ¿qué características tienen los grupos no abelianos en los que todo subgrupo propio es normal? o ¿cómo se comportan los subgrupos solubles dentro de un grupo más general?

La clasificación de grupos, así como la respuesta a algunas preguntas, se apoya en propiedades clave como el orden, la ciclicidad, la normalidad, la solubilidad o la nilpotencia. Por ejemplo, se sabe que todo grupo de orden primo es necesariamente cíclico, y por lo tanto isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Z}_p$ para algún primo p . Este tipo de resultados resalta cómo ciertas propiedades permiten entender y describir las estructuras algebraicas con gran precisión.

En este contexto, uno de los resultados más significativos es el Teorema fundamental de los grupos abelianos finitamente generados, el cual establece que cualquier grupo abeliano finitamente generado es isomorfo a un producto directo de la forma:

$\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_s^{n_s}} \times \mathbb{Z}^m$ donde $p_1, \dots, p_s$ son números primos, no necesariamente distintos, $n_1, n_2, \dots, n_s$ naturales positivos y $m \in \mathbb{N}$.

La importancia de este teorema radica en que proporciona una caracterización única de los grupos abelianos finitamente generados, mostrando cómo pueden describirse en términos de componentes más simples (grupos cíclicos finitos e infinitos). Esta descomposición no sólo facilita su clasificación y estudio, sino que también revela conexiones profundas con otras áreas de las matemáticas, como la teoría de los números, la criptografía, la teoría de gráficas y la geometría algebraica.

Aunque existen múltiples fuentes que documentan este teorema y su demostración, en este artículo se presenta un desarrollo detallado y accesible, enfatizando los conceptos fundamentales de la teoría de grupos que se requieren para la demostración y destacando el papel crucial de esta descomposición en el análisis de la estructura de los grupos abelianos.

En la siguiente sección, se presentan las definiciones necesarias para comprender el desarrollo de este trabajo. Para detalles adicionales sobre los conceptos, lemas, proposiciones y teoremas utilizados, se sugiere consultar [2], [4], [6], [11], [12], [13] y [17].

3 Conceptos básicos

En este trabajo $\mathbb{N}$ denotará al conjunto de los números naturales $\{0, 1, \dots\}$ y $\mathbb{Z}$ denotará al conjunto de los números enteros. Dado un par de números enteros a y b denotaremos al máximo común divisor de a y b por $\text{mcd}(a, b)$.

Una *operación binaria* en un conjunto no vacío G es una función de $G \times G$ en G . Dado un conjunto no vacío G y una operación binaria $\star$ definida sobre G , diremos que la pareja $(G, \star)$ es un *grupo* si se cumplen tres condiciones: la primera es que la operación binaria sea asociativa, la segunda que exista un elemento en el conjunto G , que denotaremos por e , tal que para cualquier elemento $g \in G$ se cumple que $e \star g = g \star e = g$. A este elemento e se le llama el *elemento neutro* de G respecto a la operación $\star$. La tercera condición es que para cada elemento g en G , existe otro elemento en G , que denotaremos por g^{-1} , tal que $g \star g^{-1} = g^{-1} \star g = e$. A este elemento g^{-1} se le llama el *inverso de g* respecto a la operación $\star$. Se puede demostrar que en cualquier grupo el neutro es único y que cada elemento tiene un único inverso.

Conviene observar que el neutro y los inversos en un grupo G dependen de la operación $\star$, pues existen conjuntos con más de una operación binaria. Si es claro cuál es la operación del grupo $(G, \star)$, escribiremos simplemente que G es un grupo en lugar de $(G, \star)$.

A lo largo de este artículo estaremos trabajando con *grupos abelianos* o *grupos conmutativos*, que son grupos donde la operación $\star$ es conmutativa, es decir, para cualesquiera dos elementos a, b en un grupo G , se tiene que $a \star b = b \star a$. Si no hay confusión con la operación del grupo, escribiremos ab en lugar de $a \star b$.

Dado un grupo G y g cualquier elemento de G , denotaremos por $\langle g \rangle$ al conjunto $\{g^n : n \in \mathbb{Z}\}$, donde $g^0 = e$, para todo $n \in \mathbb{N}^+$, $g^{n+1} = gg^n$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $g^{-n} = (g^{-1})^n$. Un grupo G es *cíclico* si existe un elemento $g \in G$ tal que $G = \langle g \rangle$, es decir, los elementos de G son las potencias de g . En este caso a g se le llama un *generador* de G y decimos que g genera a G . Notemos que pueden existir varios generadores de un mismo grupo cíclico.

Para la demostración del Teorema fundamental de los grupos abelianos finitamente generados consideraremos dos casos: cuando el grupo es finito y cuando es infinito. En el caso de grupos finitos, utilizaremos subgrupos cíclicos generados por elementos del grupo con ciertas características para entender su descomposición. Por otro lado, en el caso infinito, combinaremos la parte

libre de torsión del grupo abeliano con su subgrupo de torsión, aprovechando las propiedades de los elementos de orden infinito y finito para obtener la descomposición correspondiente.

En este contexto, necesitamos introducir la noción de orden tanto de un grupo como de un elemento. Dado un grupo G , se define el *orden del grupo* G , denotado por $|G|$ como la cantidad de elementos de G . Se dice que G es *finito* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|G| = n$, en caso contrario diremos que el grupo G es *infinito*. Dado un grupo G y g cualquier elemento de G , se dice que g es de *orden finito* si existe $n \in \mathbb{N}$ distinto de cero tal que $g^n = e$. Al menor número natural n positivo que satisface que $g^n = e$ se le llama el *orden de g* y lo denotaremos por $O(g)$. Diremos que el elemento g tiene *orden infinito* si no existe tal n . Una observación inmediata es que para cualquier grupo G , el elemento neutro tiene orden 1, ya que se cumple trivialmente que $e^n = e$ para todo $n \in \mathbb{N}$, siendo entonces 1 el menor número natural n positivo que satisface que $e^n = e$. Además, el neutro es el único elemento de orden 1, ya que si $g \in G$ es un elemento de orden 1 se tiene que $g = g^1 = e$.

Sea G un grupo y $H \subseteq G$. Diremos que H es un *subgrupo de G* si H es un grupo con la misma operación de G restringida a H . Si H es un subgrupo de G y $g \in G$, se definen las *clases laterales izquierdas y derechas de H en G con representante g* , denotadas por gH y Hg respectivamente, como los siguientes conjuntos: $gH = \{gh : h \in H\}$ y $Hg = \{hg : h \in H\}$. Es un resultado conocido que, si H es un subgrupo de G , entonces las clases laterales izquierdas, al igual que las clases laterales derechas, forman una partición de G . Esto significa que cada clase lateral es no vacía, cada elemento de G pertenece a una clase lateral y la intersección de cualesquiera dos clases laterales distintas es vacía, es decir, son disjuntas entre sí. En general, las clases laterales izquierdas y derechas no coinciden. Sin embargo, si para todo $g \in G$ se cumple que $gH = Hg$, entonces diremos que H es un *subgrupo normal de G* . En este caso, el conjunto de las clases laterales izquierdas y el conjunto de las clases laterales derechas coinciden y podemos referirnos a él simplemente como el *conjunto de clases laterales*.

Uno de los aspectos interesantes de los subgrupos normales es que permiten construir un nuevo grupo, llamado el *grupo cociente*, denotado por G/H . El conjunto G/H está formado por las clases laterales de H en G y la operación entre estas clases está dada por $(aH)(bH) = abH$, donde $aH, bH \in G/H$. Es posible probar que si H es un subgrupo normal esta operación está bien definida, es decir, no depende de los representantes elegidos. Por otro lado,

cuando estudiamos grupos es importante tener herramientas para distinguir si los grupos se comportan de la misma forma o no, es decir, si tienen la misma estructura algebraica o, dicho de otro modo, si son esencialmente iguales como grupos. Diremos que dos grupos $(G, *)$ y $(G', *')$ son *isomorfos* si existe una función $f : G \rightarrow G'$ biyectiva tal que para todos $a, b \in G$ se cumple que $f(a * b) = f(a) *' f(b)$. En este caso diremos que f es un *isomorfismo* entre G y G' , lo cual denotaremos por $G \cong G'$. Los isomorfismos permiten clasificar grupos en términos de su estructura algebraica, independientemente de cómo se representen.

Dado un grupo G y $N_1, \dots, N_s$ subgrupos normales de G , definimos el conjunto $N_1 N_2 \cdots N_s = \{n_1 n_2 \cdots n_s \mid \forall i \in \{1, \dots, s\}, n_i \in N_i\}$ y se puede verificar que $N_1 N_2 \cdots N_s$ es un subgrupo de G . Diremos que G es el *producto directo interno* de $N_1, \dots, N_s$, si $N_1 N_2 \cdots N_s = G$ y para cada i con $1 \leq i < s$ se tiene que $(N_1 N_2 \cdots N_i) \cap N_{i+1} = \{e\}$.

Dados grupos $G_1, \dots, G_s$ se define el *producto directo externo* de $G_1, \dots, G_s$ como el producto cartesiano de $G_1 \times \cdots \times G_s$ con la siguiente operación binaria; $(g_1, \dots, g_s)(h_1, \dots, h_s) = (g_1 h_1, \dots, g_s h_s)$ para cualesquiera $(g_1, \dots, g_s), (h_1, \dots, h_s) \in G_1 \times \cdots \times G_s$. Se puede ver que con esta operación $G_1 \times \cdots \times G_s$ es un grupo.

El producto directo interno y el producto directo externo están relacionados, como se puede observar en el teorema 3.4 que se enuncia más adelante.

Dados un grupo G y un primo p decimos que G es un *p -grupo* si todo elemento de G tiene orden alguna potencia de p . Cuando G es un grupo finito es posible probar que G es un p -grupo si y sólo si $|G|$ es una potencia de p .

A continuación enunciaremos algunos resultados conocidos que serán esenciales para desarrollar a detalle la prueba del Teorema fundamental para grupos abelianos finitamente generados. Aunque no incluimos las demostraciones, se indican las referencias correspondientes para su consulta.

Proposición 3.1. [11, Corolario 3.2, pág. 47] Sea G un grupo y g cualquier elemento de G de orden n . Entonces para cualquier $i \in \mathbb{N}$, $O(g^i) = \frac{n}{\text{mcd}(i, n)}$.

El siguiente resultado se conoce como el Segundo teorema de isomorfía.

Teorema 3.2. [13, Teorema 2.119, pág. 180] Sea G un grupo y H y K subgrupos de G con H normal en G . Entonces HK es un subgrupo de G , H es un subgrupo normal de HK , $H \cap K$ es un subgrupo normal de K y $HK/H \cong K/(H \cap K)$.

Por otro lado, el resultado a continuación se conoce como el Teorema de la correspondencia.

Teorema 3.3. [12, Teorema 2.28, pág. 38] *Sea K un subgrupo normal de un grupo G . Existe una correspondencia biunívoca Φ entre todos los subgrupos de G que contienen a K y la familia de todos los subgrupos de G/K dada por $\Phi(H) = H/K$ para todo H subgrupo de G que contenga a K .*

A continuación se enuncia un resultado que relaciona los productos directos internos con los externos.

Teorema 3.4. [11, Teorema 5.2, pág. 87] *Sea G un grupo tal que G es el producto directo interno de sus subgrupos normales $N_1, \dots, N_s$. Entonces G es isomorfo al producto directo externo $N_1 \times \dots \times N_s$.*

Finalmente, mencionemos cómo un grupo abeliano finito se puede expresar como un producto directo externo de p -grupos.

Lema 3.5. [11, Lema 5.5, pág. 89] *Sea G un grupo abeliano finito con $G \neq \{e\}$ y sean $p_1, \dots, p_k$ todos los distintos números primos que dividen al orden de G . Entonces $G = H_1 \times \dots \times H_k$, donde H_i es el subgrupo de G que contiene a todos los elementos de G de orden alguna potencia de p_i .*

4 Teorema para grupos abelianos finitos

En esta sección, probaremos un resultado estrechamente relacionado con el Teorema fundamental para grupos abelianos finitamente generados, pero aplicado exclusivamente a grupos abelianos finitos. Este resultado establece que todo grupo abeliano finito es isomorfo a un producto directo de la forma: $\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_s^{n_s}}$ con $p_1, p_2, \dots, p_s$ primos, no necesariamente distintos, y $n_1, n_2, \dots, n_s$ enteros positivos, caracterizando así la estructura de cualquier grupo abeliano finito como un producto directo de subgrupos cíclicos de órdenes que son potencias de primos. Su importancia radica en que esencialmente nos dice que basta entonces entender a los grupos del tipo $\mathbb{Z}_{p_i^{n_i}}$ para comprender a todos los grupos abelianos finitos. Dado que, gracias al lema 3.5 sabemos que todo grupo abeliano finito se puede descomponer como un producto directo de p -grupos, bastará demostrar que el teorema es cierto para los p -grupos abelianos finitos. La demostración que presentamos está basada en

la desarrollada por Judson en [7, Sección 13.1]. Así, utilizaremos el siguiente lema: en un p -grupo abeliano finito, siempre podemos descomponer el grupo como un producto directo de un subgrupo cíclico generado por un elemento de orden máximo y otro subgrupo. Esta propiedad es fundamental para iterar el proceso de descomposición en subgrupos más pequeños.

Lema 4.1. *Sea G un p -grupo abeliano finito y sea a un elemento en G de orden máximo. Si $\langle a \rangle$ es un subgrupo propio de G y b es un elemento de orden mínimo en $G \setminus \langle a \rangle$, entonces*

1. $O(b) = p$,
2. $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$ y
3. $O(a\langle b \rangle) = O(a)$ y $a\langle b \rangle$ es un elemento de orden máximo en $G/\langle b \rangle$.

Demostración. Sea G un p -grupo abeliano finito de orden p^n y sea a un elemento en G de orden máximo. Supongamos que $\langle a \rangle$ es un subgrupo propio de G y consideremos b un elemento de orden mínimo en $G \setminus \langle a \rangle$.

1. Dado que G es un p -grupo, sabemos que el orden tanto de a como de b son una potencia de p . Sea p^m el orden de a con $0 < m < n$. Notemos que debido a que G es un p -grupo y a es de orden máximo, entonces para todo $x \in G$ se tiene que $O(x) = p^t$ con $0 < t \leq m$ y en consecuencia $x^{p^m} = (x^{p^t})^{p^{m-t}} = (e)^{p^{m-t}} = e$. Así, para todo $x \in G$ se tiene que

$$x^{p^m} = e. \quad (1)$$

En particular, $b^{p^m} = e$.

Veamos que $O(b) = p$. Por la proposición 3.1, considerando que p es un primo, se tiene que

$$O(b^p) = \frac{O(b)}{\gcd(p, O(b))} = \frac{O(b)}{p},$$

esto implica que $O(b^p) < O(b)$. Ahora, dado que b es de orden mínimo en $G \setminus \langle a \rangle$, se deduce que $b^p \notin G \setminus \langle a \rangle$, es decir, que $b^p \in \langle a \rangle$. Así, $b^p = a^i$ para algún entero i .

Aplicando de nuevo la proposición 3.1 tenemos que

$$O(a^i) = \frac{O(a)}{\gcd(i, O(a))} = \frac{p^m}{\gcd(i, p^m)}$$

y dado que $(a^i)^{p^{m-1}} = (b^p)^{p^{m-1}} = b^{p^m} = e$ se tiene que $O(a^i) < p^m$, y en consecuencia $i = pj$ para algún $j \in \mathbb{Z}$.

Consideremos el elemento $c = a^{-j}b$. Dado que $c^p = (a^{-j}b)^p = (a^{-j})^p b^p = a^{-jp}a^i = a^{-i}a^i = e$, se tiene que c es de orden 1 o p . Además, observemos que si $c \in \langle a \rangle$, por estar a^{-j} en $\langle a \rangle$, se tendría que $ca^j = b \in \langle a \rangle$, contradiciendo la elección de b . En consecuencia, $c \notin \langle a \rangle$, en particular $c \neq e$ y por lo tanto $O(c) = p$. Hemos encontrado entonces un elemento $c \in G \setminus \langle a \rangle$ con $O(c) = p$, como b es de orden mínimo en $G \setminus \langle a \rangle$ podemos concluir que $O(b) = p$.

2. Probemos ahora que $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$. Como $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ es un subgrupo de $\langle b \rangle$ y éste es de orden p con p primo, por el Teorema de Lagrange $O(\langle a \rangle \cap \langle b \rangle)$ es 1 o p y en consecuencia se tiene que $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$ o $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle b \rangle$. Pero si $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle b \rangle$, entonces $\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$ contradiciendo que $b \notin \langle a \rangle$. Por lo tanto, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$.
3. Probemos ahora que $O(a\langle b \rangle) = O(a)$, es decir que $O(a\langle b \rangle) = p^m$. Supongamos por reducción al absurdo que $O(a\langle b \rangle) < p^m$, entonces tendríamos que $a^{p^{m-1}}\langle b \rangle = (a\langle b \rangle)^{p^{m-1}} = e_{G/\langle b \rangle} = \langle b \rangle$ de donde se deduce que $a^{p^{m-1}} \in \langle b \rangle$. Así, $a^{p^{m-1}} \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$. Pero por el lema 4.1 sabemos que $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$, por lo tanto $a^{p^{m-1}} = e$ lo que contradice que $O(a) = p^m$. En consecuencia tenemos que $O(a\langle b \rangle) = p^m$.

Finalmente, por la igualdad 1 sabemos que para todo $x \in G$ se tiene que $x^{p^m} = e$, por lo que para todo $x \in G$ se tiene que $(x\langle b \rangle)^{p^m} = x^{p^m}\langle b \rangle = e\langle b \rangle = \langle b \rangle$, lo que nos permite concluir que para todo $x \in G$ se cumple que $O(x\langle b \rangle) \leq p^m$. Así, $a\langle b \rangle$ es un elemento de orden máximo en $G/\langle b \rangle$.

□

Teorema 4.2. *Sea G un p -grupo abeliano finito y sea a un elemento en G de orden máximo. Entonces G es el producto directo interno $\langle a \rangle K$ para algún subgrupo K de G .*

Demostración. Sea G un p -grupo abeliano finito con $|G| = p^n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ y sea a un elemento en G de orden máximo. Esta prueba se hará por inducción sobre n .

El caso cuando $n = 0$ es trivial, pues $G = \{e\}$ es igual al producto directo interno $\langle e \rangle \{e\}$, con el neutro e un elemento en G de orden máximo.

Sea $n > 0$. Supongamos que para todo G' p -grupo abeliano finito de orden $|G'| < p^n$ y g un elemento en G' de orden máximo se tiene que G' es el producto directo interno $\langle g \rangle K'$ para algún subgrupo K' de G' . Ahora, de todos los elementos de G , tomemos uno de orden máximo, digamos a con $O(a) = p^m$ para alguna $m \leq n$. Si $G = \langle a \rangle$, hemos terminado, pues $G = \langle a \rangle \{e\}$ con a de orden máximo. Supongamos entonces que $\langle a \rangle$ es un subgrupo propio de G .

Sea b un elemento de orden mínimo en $G \setminus \langle a \rangle$. Por ser G abeliano, $\langle b \rangle$ es un subgrupo normal de G . En consecuencia, podemos considerar el cociente $G/\langle b \rangle$ que es un grupo de orden menor que el orden de G .

Sea $B = \langle b \rangle$. Por el tercer inciso del lema 4.1, sabemos que aB es un elemento de orden máximo en el p -grupo abeliano finito G/B y $|G/B| < p^n$, entonces podemos aplicar la hipótesis de inducción a G/B , por lo que G/B es el producto directo interno $\langle aB \rangle K'$ para algún subgrupo K' de G/B .

Por el teorema 3.3, $K' = K/B$ para algún subgrupo K de G tal que $B \subseteq K$. Así, G/B es el producto directo interno $\langle aB \rangle K/B$.

Finalmente, veamos que G es el producto directo interno $\langle a \rangle K$. Para justificar la afirmación anterior debemos ver que todo elemento g de G se escribe de la forma $a^s k$ para algún $s \in \mathbb{Z}$ y para alguna $k \in K$ y que $\langle a \rangle \cap K = \{e\}$.

Veamos primero que todo elemento g de G se escribe de la forma $a^s k$ para algún $s \in \mathbb{Z}$ y para alguna $k \in K$. Sea $g \in G$. Sabemos que G/B es el producto directo interno $\langle aB \rangle K/B$, por lo que para $gB \in G/B = \langle aB \rangle K/B$, se tiene que $gB = a^s B \hat{k} B$ para algunos $s \in \mathbb{Z}$ y $\hat{k} \in K$. Notemos que como $B \subseteq K$, entonces $a^s B \hat{k} B \subseteq a^s K \hat{k} K = a^s K$. Así, $g \in a^s K$, es decir, $g = a^s k$ para algún $s \in \mathbb{Z}$ y para alguna $k \in K$.

Veamos ahora que $\langle a \rangle \cap K = \{e\}$. Sea $z \in \langle a \rangle \cap K$, entonces $zB \in \langle aB \rangle$ y $zB \in K/B$, es decir $zB \in \langle aB \rangle \cap K/B$. Pero como G/B es el producto directo interno $\langle aB \rangle K/B$, sabemos que $\langle aB \rangle \cap K/B = \{e_{G/B}\}$, entonces $zB = e_{G/B} = B$, lo que implica que $z \in B = \langle b \rangle$. Así, $z \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$. Del segundo inciso del lema 4.1 se tiene que $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$ y por lo tanto $z = e$. Hemos probado entonces que $\langle a \rangle \cap K = \{e\}$.

Así, G es el producto directo interno $\langle a \rangle K$, con a un elemento en G de

orden máximo. □

Corolario 4.3. *Todo p -grupo abeliano finito es isomorfo a un producto directo externo de la forma $\langle a \rangle \times K$ para algún $a \in G$ y algún subgrupo K de G .*

Demostración. La demostración se sigue de los teoremas 4.2 y 3.4. □

Teorema 4.4. *Todo grupo abeliano finito no trivial es isomorfo a un producto directo de la forma: $\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_s^{n_s}}$ con $p_1, p_2, \dots, p_s$ primos (no necesariamente distintos) y $n_1, n_2, \dots, n_s$ enteros positivos.*

Demostración. El lema 3.5, nos dice que todo grupo abeliano finito no trivial se puede descomponer como un producto directo externo de p -grupos, por lo que basta demostrar que el teorema es cierto para los p -grupos abelianos finitos.

Sean p un número primo y G un p -grupo abeliano finito no trivial, es decir, $|G| = p^m$ para algún entero positivo m .

La demostración la haremos por inducción sobre m .

Si $m = 1$, entonces, al ser G de orden primo p , G es cíclico e isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Z}_p$, y hemos terminado.

Sea $m > 1$. Supongamos que cualquier grupo abeliano finito no trivial de orden p^k con $k < m$ es isomorfo a un producto directo externo de grupos cíclicos del tipo $\mathbb{Z}_t$, con t una potencia de p .

Por el corolario 4.3, G es isomorfo a un producto directo externo de la forma $\langle a \rangle \times K$ para algún $a \in G$ y algún subgrupo K de G . Por ser G un p -grupo, se tiene que $\langle a \rangle$ y K también son p -grupos y además el orden de K es menor que p^m . Recordemos que un grupo cíclico de orden finito es isomorfo a $\mathbb{Z}_t$ para algún $t \in \mathbb{N}$, [11, Teorema 4.14, pág. 74], por lo que un p -grupo cíclico de orden finito es isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Así, $\langle a \rangle$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^{n_1}}$ para algún n_1 natural positivo. Por lo tanto, si $K = \{e\}$, entonces G es isomorfo a $\langle a \rangle$, que a su vez es isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^{n_1}}$ con n_1 un natural positivo. Por otro lado, si $K \neq \{e\}$, aplicando la hipótesis de inducción a K tenemos que K es isomorfo a un producto directo externo de la forma $\mathbb{Z}_{p^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{n_s}}$ con $n_2, \dots, n_s$ naturales positivos. Por lo tanto, G es isomorfo a $\langle a \rangle \times K$ que a su vez es isomorfo a un producto directo externo de la forma $\mathbb{Z}_{p^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{n_s}}$ con $n_1, n_2, \dots, n_s$ naturales positivos. □

Como podemos observar este resultado describe la estructura de los grupos abelianos finitos como productos directos de grupos cíclicos cuyos órdenes

son potencias de primos. Sin embargo, además de la existencia de dicha descomposición, es posible demostrar que la descomposición es única salvo el orden de los factores. Es decir, si un grupo abeliano finito se expresa como producto directo de grupos cíclicos de orden potencias de primos, entonces los primos que aparecen y los exponentes correspondientes quedan completamente determinados por el grupo, excepto por el orden en que se escriben los factores en el producto directo, ver [4, lema 4, pág. 233].

El teorema que acabamos de probar es un caso particular del teorema que deseamos demostrar y básicamente describe la estructura de todos los grupos abelianos finitos de manera estándar y muy sistemática, estableciendo que cada grupo abeliano finito es isomorfo a un producto directo de grupos cíclicos, cuyos órdenes son potencias de números primos. En otras palabras, podríamos decir que el “*esqueleto*” de los grupos abelianos finitos está compuesto exclusivamente por grupos cíclicos.

Esta descomposición puede ser vista como una analogía con el Teorema fundamental de la aritmética, donde cualquier número natural se puede expresar como un producto único de potencias de números primos. De manera similar, en el contexto de los grupos abelianos finitos, descomponemos estas estructuras algebraicas como un producto directo de grupos cíclicos.

Además, este teorema es un resultado útil y poderoso ya que nos da la idea de cómo construir grupos abelianos finitos de cualquier orden, utilizando propiedades aritméticas simples sobre la descomposición en números primos y las particiones de números naturales positivos.

Por ejemplo, para cualquier número primo p y cualquier número natural n , construyamos un grupo abeliano finito de orden p^n .

De acuerdo con el Teorema 4.4, el grupo que buscamos es isomorfo a un producto directo de la forma $\mathbb{Z}_{p^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{n_s}}$, donde $n_1, n_2, \dots, n_s$ son enteros positivos.

Además, se cumple que

$$p^n = |\mathbb{Z}_{p^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{n_s}}| = |\mathbb{Z}_{p^{n_1}}| |\mathbb{Z}_{p^{n_2}}| \cdots |\mathbb{Z}_{p^{n_s}}| = p^{n_1} p^{n_2} \cdots p^{n_s}.$$

Por lo que, $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$.

Consideremos, por ejemplo, la descomposición

$$n = 1 + 1 + \cdots + 1 \quad (n \text{ veces}),$$

que da lugar al grupo abeliano finito

$$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p,$$

es decir, el producto directo de n copias de $\mathbb{Z}_p$.

De este modo podemos construir grupos abelianos finitos de todos los órdenes posibles, más aún, podemos dar, salvo isomorfismo, la lista completa de grupos abelianos finitos no isomorfos de determinado orden.

Veamos por ejemplo cómo construir todos los grupos abelianos de orden 6125. Descomponiendo en factores primos tenemos que $6125 = 5^3 7^2$.

La estrategia consiste en analizar y describir primero las diferentes formas en que el exponente 3 puede escribirse como una suma de números naturales, reflejando cómo se distribuyen las potencias de 5 en los factores cíclicos. En este caso tenemos las siguientes posibilidades: la primera y la más básica es $1+1+1$, la segunda, $2+1$ y la tercera y última 3.

Cada una de estas descomposiciones corresponde a un grupo abeliano no isomorfo de orden 5^3 , descrito como un producto directo de grupos cíclicos. En total, existen tres grupos no abelianos no isomorfos de orden 5^3 que son: $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_{5^2} \times \mathbb{Z}_5$ y $\mathbb{Z}_{5^3}$.

De modo análogo, analizando las diferentes formas que el exponente 2 puede escribirse como una suma de números naturales, tenemos las siguientes posibilidades: $1+1$ y 2, que corresponden a los dos grupos no abelianos no isomorfos de orden 7^2 que son: $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$ y $\mathbb{Z}_{7^2}$.

Así, la lista de todos los grupos de orden $6125 = 5^3 7^2$ salvo isomorfía es:

$$\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7,$$

$$\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{7^2},$$

$$\mathbb{Z}_{5^2} \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7,$$

$$\mathbb{Z}_{5^2} \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{7^2},$$

$$\mathbb{Z}_{5^3} \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7 \text{ y}$$

$$\mathbb{Z}_{5^3} \times \mathbb{Z}_{7^2}.$$

Este procedimiento puede generalizarse para cualquier número natural positivo m , permitiéndonos clasificar a todos los grupos abelianos finitos de orden m .

Cabe señalar que esta descomposición no es únicamente teórica sino que tiene aplicaciones en Teoría de grafos y Criptografía, ver [10, 15].

5 Grupos abelianos finitamente generados

Para establecer la prueba del Teorema fundamental de los grupos abelianos finitamente generados, necesitamos introducir dos definiciones adicionales que jugarán un papel crucial en la demostración.

Sea G un grupo. Dado X un subconjunto de G , el menor subgrupo de G que contiene a X es el *subgrupo generado por X* . Si este subgrupo es todo G , entonces decimos que X *genera a G* o que los elementos de X son *generadores de G* . Si existe un subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_m\}$ que genere a G , entonces G se llama *finitamente generado* y denotaremos al generado por $\{x_1, \dots, x_m\}$ como $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$.

Es posible probar que si un grupo G es finitamente generado por el conjunto X , entonces cada elemento g de G puede escribirse de la siguiente forma: $g = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ para algunos $x_1, \dots, x_k \in X$ y $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$. Ver [4, Prop. 9, pág. 63].

Un grupo cíclico G es el caso más sencillo de un grupo finitamente generado, ya que puede ser generado por un solo elemento. El grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5$ es otro ejemplo de un grupo finitamente generado; un conjunto generador para este grupo es, por ejemplo,

$$\{(1, 0), (0, 1)\}.$$

Veamos el siguiente resultado, que nos dice que la propiedad de ser finitamente generado se conserva al tomar subgrupos y cocientes de un grupo abeliano.

Proposición 5.1. *Sea G un grupo abeliano finitamente generado.*

1. *Si K es un subgrupo de G , entonces K es un grupo abeliano finitamente generado.*
2. *Si K es un subgrupo de G , entonces G/K es un grupo abeliano finitamente generado.*

Demostración. 1. Sabemos que todo subgrupo de un grupo abeliano es abeliano, por lo que basta probar que todo subgrupo de un grupo abeliano finitamente generado es finitamente generado. Consideremos un grupo G abeliano finitamente generado, generado por n elementos. Realicemos la prueba por inducción sobre n .

Si $n = 1$, entonces G es cíclico, por lo que todo subgrupo de G es cíclico, ver [13, Proposición 2.71, pág. 148]. Así, todo subgrupo de G es cíclico y, en consecuencia, finitamente generado.

Sea $n \geq 1$. Supongamos que para cualquier grupo abeliano finitamente generado tal que haya un conjunto de n elementos que lo genera, todo subgrupo suyo es finitamente generado. Sea G un grupo abeliano finitamente generado y $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ un conjunto generador de G con $n + 1$ elementos. Consideremos H el subgrupo de G generado por $\{x_1, \dots, x_n\}$ y K cualquier subgrupo de G . Entonces $H \cap K$ es un subgrupo de H y, por la hipótesis de inducción, es finitamente generado; digamos que el conjunto finito $\{y_1, \dots, y_r\}$ genera a $H \cap K$. Por el teorema 3.2, sabemos que

$$K/(H \cap K) \cong HK/H$$

con HK/H un subgrupo de G/H . Notemos que G/H es cíclico, ya que dado $gH \in G/H$ con $g \in G$, como $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ genera a G , sabemos que $g = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_{n+1}^{m_{n+1}}$ para algunos $m_1, \dots, m_{n+1} \in \mathbb{Z}$; entonces $gH = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_{n+1}^{m_{n+1}} H$ y, como H es el grupo generado por $\{x_1, \dots, x_n\}$, en particular $x_1, \dots, x_n \in H$, por lo cual

$$gH = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_{n+1}^{m_{n+1}} H = x_{n+1}^{m_{n+1}} H = (x_{n+1} H)^{m_{n+1}}.$$

Así, G/H es cíclico y está generado por $x_{n+1} H$. Entonces, HK/H , y en consecuencia $K/(H \cap K)$, son cíclicos. Digamos que $yH \cap K$ genera al cociente $K/(H \cap K)$.

Veamos que el conjunto finito $\{y, y_1, \dots, y_r\}$ genera a K . Sea $k \in K$. Como $kH \cap K \in K/(H \cap K) = \langle yH \cap K \rangle$, entonces $kH \cap K = y^t H \cap K$ para algún $t \in \mathbb{Z}$. Así, $y^{-t} k \in H \cap K = \langle y_1, \dots, y_r \rangle$, por lo que $y^{-t} k = y_1^{l_1} \cdots y_r^{l_r}$ para algunos $l_1, \dots, l_r \in \mathbb{Z}$, de donde concluimos que $k = y^t y_1^{l_1} \cdots y_r^{l_r}$. Por lo tanto, $\{y, y_1, \dots, y_r\}$ genera a K , probando así que K es un grupo finitamente generado.

2. Sea G un grupo abeliano finitamente generado y K un subgrupo de G . El grupo cociente G/K es nuevamente un grupo abeliano; probemos que también es finitamente generado. Como G es finitamente generado, consideremos $\{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto generador de G de n elementos; verifiquemos que

$$\{x_1 K, \dots, x_n K\}$$

genera a G/K .

Sea $g \in G$; como $\{x_1, \dots, x_n\}$ genera a G , se tiene que

$$g = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

para algunos $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} gK &= x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} K = x_1^{k_1} K \cdots x_n^{k_n} K \\ &= (x_1 K)^{k_1} \cdots (x_n K)^{k_n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\{x_1 K, \dots, x_n K\}$$

genera a G/K y, en consecuencia, G/K es finitamente generado. $\square$

A continuación, distinguiremos entre la parte del grupo formada por sus elementos de orden finito y el resto.

Dado un grupo G se define el *conjunto torsión* de G , denotado por $T(G)$ como la colección: $T(G) = \{x \in G \mid x \text{ es de orden finito}\}$. Notemos que el elemento neutro de G siempre es un elemento de $T(G)$, ya que su orden es 1. Diremos que G es un *grupo libre de torsión* si $T(G) = \{e\}$.

En la siguiente proposición veremos algunas propiedades que cumple este conjunto en grupos abelianos finitamente generados.

Proposición 5.2. *Sea G un grupo abeliano finitamente generado, entonces se cumple:*

1. $T(G)$ es un subgrupo abeliano finito de G .
2. $G/T(G)$ es un grupo abeliano finitamente generado.
3. $T(G/T(G)) = \{e_{G/T(G)}\}$, es decir $G/T(G)$ es un grupo libre de torsión.

Demostración. 1. Mencionamos que $e \in T(G)$ por lo que $e \in T(G)$ es no vacío. Además, dados $a, b \in T(G)$ existen $m, n \in \mathbb{N}^+$ tales que $a^m = e = b^n$ y, por ser G abeliano, $(ab)^{mn} = (a^m)^n (b^n)^m = e^n e^m = e$, por lo que $ab \in T(G)$. Finalmente, si $a \in T(G)$, existe $m \in \mathbb{N}^+$ tal que $a^m = e$, entonces $a^{-m} = (a^m)^{-1} = e^{-1} = e$ y así, $a^{-1} \in T(G)$.

En consecuencia, $T(G)$ es un subgrupo de G . Como G es un grupo finitamente generado, por el primer inciso de la proposición 5.1 sabemos que $T(G)$ es un grupo finitamente generado, veamos que de hecho es finito. Sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un conjunto generador finito de $T(G)$, entonces tenemos que

$$T(G) = \{x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \mid \forall i \, m_i \in \mathbb{Z}\}$$

pero gracias a que $x_1, x_2, \dots, x_n \in T(G)$, su orden es finito y podemos reescribir al subgrupo de torsión como

$$T(G) = \{x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \mid \forall i \, (m_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq m_i < O(x_i))\},$$

lo cual nos permite concluir que sólo hay un número finito de elementos en $T(G)$.

2. Es consecuencia directa del segundo inciso de la proposición 5.1.
3. Sea $gT(G) \in T(G/T(G))$, entonces existe $r \in \mathbb{N}^+$ tal que

$$(gT(G))^r = e_{G/T(G)}.$$

Como

$$g^r T(G) = (gT(G))^r = e_{G/T(G)} = T(G),$$

se tiene que $g^r T(G) = T(G)$, es decir, $g^r \in T(G)$. Esto implica que existe $k \in \mathbb{N}^+$ tal que

$$(g^r)^k = e_G.$$

Por lo tanto $g^{rk} = e_G$ con $rk \in \mathbb{N}^+$ y así, $g \in T(G)$, lo que implica que

$$gT(G) = T(G) = e_{G/T(G)}.$$

Concluimos que $T(G/T(G)) = \{e_{G/T(G)}\}$.

□

De acuerdo al resultado anterior, dado G un grupo abeliano finitamente generado, su subgrupo de torsión es un grupo abeliano finito y por el teorema 4.4 conocemos su estructura. Por otro lado, sabemos que $G/T(G)$ es un grupo abeliano finitamente generado libre de torsión. Tratemos de entender mejor cómo es este grupo cociente para posteriormente describir a G mediante su subgrupo de torsión y su cociente respecto a él.

Teorema 5.3. *Sea G un grupo abeliano finitamente generado libre de torsión.*

1. *Sean $x_1, \dots, x_m$ elementos distintos de G tales que $\{x_1, \dots, x_m\}$ es un conjunto generador de G de cardinalidad mínima. Si $x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m} = e$ con $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$, entonces $n_1 = n_2 = \cdots = n_m = 0$.*
2. *G es isomorfo a $\mathbb{Z}^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea G un grupo abeliano finitamente generado libre de torsión.

1. Sean $x_1, \dots, x_m$ elementos distintos de G tales que $\{x_1, \dots, x_m\}$ es un conjunto generador de G de cardinalidad mínima. Sean $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$ tales que $x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m} = e$. Supongamos por reducción al absurdo que algún n_i es no nulo y sin pérdida de generalidad digamos que $n_1 \neq 0$. Consideremos d el máximo común divisor de $n_1, \dots, n_m$. Entonces, para toda $i \in \{1, \dots, m\}$ sabemos que $n_i = dr_i$ para algún $r_i \in \mathbb{Z}$. Así,

$$e = x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m} = x_1^{dr_1} \cdots x_m^{dr_m} = (x_1^{r_1} \cdots x_m^{r_m})^d$$

por lo que $x_1^{r_1} \cdots x_m^{r_m} \in T(G)$. Pero, dado que G es libre de torsión, se sigue que $x_1^{r_1} \cdots x_m^{r_m} = e$, con $r_1, \dots, r_m$ enteros primos relativos entre sí. Sean $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$ tales que $1 = a_1 r_1 + \cdots + a_m r_m$, ver [1, Teorema 3.66, pág. 114], entonces

$$x_1 = x_1^1 = x_1^{a_1 r_1 + \cdots + a_m r_m} = x_1^{a_1 r_1} \cdots x_m^{a_m r_m}. \quad (2)$$

Por otro lado, como $x_1^{r_1} \cdots x_m^{r_m} = e$, se tiene que

$$x_1^{r_1} = x_2^{-r_2} \cdots x_m^{-r_m} \quad (3)$$

y al sustituir la igualdad 3 en la igualdad 2

$$x_1 = (x_2^{-r_2} \cdots x_m^{-r_m})^{a_1} x_2^{a_2 r_2} \cdots x_m^{a_m r_m}. \quad (4)$$

Concluimos que x_1 se puede expresar como un producto de factores en $\{x_2, \dots, x_m\}$, por lo que $\{x_2, \dots, x_m\}$ genera a G . Esto contradice el hecho de que $\{x_1, \dots, x_m\}$ es un conjunto generador de cardinalidad mínima. Por lo tanto, $n_1 = \cdots = n_m = 0$.

2. Sean $x_1, \dots, x_m$ elementos distintos de G tales que $\{x_1, \dots, x_m\}$ es un conjunto generador de G de cardinalidad mínima. Consideremos la función $\phi : \mathbb{Z}^m \rightarrow G$ tal que para toda $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}^m$ se tiene que $\phi(n_1, \dots, n_m) = x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m}$. Veamos que ϕ es un isomorfismo. Sean $(n_1, \dots, n_m), (l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{Z}^m$, entonces, usando que G es abeliano,

$$\begin{aligned} \phi((n_1, \dots, n_m) + (l_1, \dots, l_m)) &= \phi(n_1 + l_1, \dots, n_m + l_m) \\ &= x_1^{n_1+l_1} \cdots x_m^{n_m+l_m} = (x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m})(x_1^{l_1} \cdots x_m^{l_m}) \\ &= \phi(n_1, \dots, n_m)\phi(l_1, \dots, l_m), \end{aligned}$$

por lo que ϕ es un homomorfismo. Además, sabemos que todo $g \in G$ se puede expresar como $g = x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m}$ para algunos $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$, entonces $g = x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m} = \phi(n_1, \dots, n_m)$, probando con ello que ϕ es suprayectiva. Finalmente, si $(n_1, \dots, n_m), (l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{Z}^m$ son tales que $\phi(n_1, \dots, n_m) = \phi(l_1, \dots, l_m)$, entonces $x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m} = x_1^{l_1} \cdots x_m^{l_m}$. Así, $e = gg^{-1} = x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m} (x_1^{l_1} \cdots x_m^{l_m})^{-1}$, y dado que G es abeliano, obtenemos que

$$e = x_1^{n_1-l_1} \cdots x_m^{n_m-l_m}.$$

Del primer inciso de este teorema se sigue que

$$n_i - l_i = 0 \text{ para todo } i \in \{1, \dots, m\},$$

es decir, $n_i = l_i$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. Por lo tanto ϕ es inyectiva. Concluimos que $\mathbb{Z}^m \cong G$.

□

Veamos ahora cómo podemos describir a un grupo abeliano finitamente generado, a partir de su subgrupo de torsión y su cociente respecto a él. El siguiente resultado y su prueba son una adaptación de [14, Teorema 5.2.3, pág. 177].

Teorema 5.4. *Sea G un grupo abeliano finitamente generado. Entonces $G \cong T(G) \times G/T(G)$.*

Demostración. Sea G un grupo abeliano finitamente generado. Por el segundo inciso de la proposición 5.2, sabemos que $G/T(G)$ es un grupo abeliano finitamente generado, por lo que podemos considerar $x_1T(G), \dots, x_mT(G)$ elementos distintos en $G/T(G)$ tales que $\{x_1T(G), \dots, x_mT(G)\}$ es un conjunto

generador finito de $G/T(G)$ de cardinalidad mínima. Sea $K = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$. Notemos que la función

$$\pi : K \rightarrow G/T(G)$$

tal que para toda $k \in K$ $\pi(k) = kT(G)$ es un homomorfismo, ya que para cualesquiera $k_1, k_2 \in K$, $\pi(k_1 k_2) = k_1 k_2 T(G) = k_1 T(G) k_2 T(G) = \pi(k_1) \pi(k_2)$. Además, si $k_1 = x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m}$, $k_2 = x_1^{t_1} \cdots x_m^{t_m} \in K$ con $n_1, \dots, n_m, t_1, \dots, t_m \in \mathbb{Z}$, son tales que $\pi(k_1) = \pi(k_2)$, entonces $k_1 T(G) = k_2 T(G)$, lo que implica que

$$\begin{aligned} T(G) &= k_1^{-1} k_2 T(G) = (x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m})^{-1} (x_1^{t_1} \cdots x_m^{t_m}) \in T(G) \\ &= x_1^{t_1 - n_1} \cdots x_m^{t_m - n_m} T(G) = (x_1 T(G))^{t_1 - n_1} \cdots (x_m T(G))^{t_m - n_m}. \end{aligned}$$

Dado que $G/T(G)$ es un grupo abeliano finitamente generado y $x_1 T(G), \dots, x_m T(G)$ son elementos distintos en $G/T(G)$ con $\{x_1 T(G), \dots, x_m T(G)\}$ un conjunto generador finito de $G/T(G)$ de cardinalidad mínima, usando el primer inciso del teorema 5.3, concluimos que $t_i - n_i = 0$ para toda $i \in \{1, \dots, m\}$, es decir, $t_i = n_i$ para toda $i \in \{1, \dots, m\}$ y así $k_1 = k_2$, probando con ello que π es inyectiva. Ahora, dado $gT(G) \in G/T(G)$, como $\{x_1 T(G), \dots, x_m T(G)\}$ un conjunto generador de $G/T(G)$, existen $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$ tales que $gT(G) = (x_1 T(G))^{n_1} \cdots (x_m T(G))^{n_m}$, por lo que

$$\pi(x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m}) = \pi(x_1)^{n_1} \cdots \pi(x_m)^{n_m} = (x_1 T(G))^{n_1} \cdots (x_m T(G))^{n_m} = gT(G),$$

probando con ello que π es suprayectiva.

Finalmente, veamos que G es el producto interno de $T(G)$ y K . Dado $g \in G$, consideremos $k \in K$ tal que $\pi(k) = gT(G)$, entonces $kT(G) = gT(G)$, por lo que $k^{-1}g = x$ para alguna $x \in T(G)$. Así, $g = kx = xk \in T(G)K$. Ahora veamos que $T(G) \cap K = \{e\}$. Sea $h \in T(G) \cap K$, como $h \in T(G)$ tenemos que $\pi(h) = hT(G) = T(G) = eT(G) = \pi(e)$. Así, $\pi(h) = \pi(e)$ con π inyectiva, por lo que $h = e$.

Por lo tanto, G es el producto directo de $T(G)$ y K , que, por el teorema 3.4, es isomorfo a $T(G) \times K$, y como K es isomorfo a $G/T(G)$, entonces G es isomorfo a $T(G) \times G/T(G)$. $\square$

Con todos los resultados anteriores, la prueba del Teorema Fundamental para grupos abelianos finitamente generados resulta muy sencilla de seguir.

Teorema 5.5. *Todo grupo abeliano finitamente generado es isomorfo a un producto directo de la forma*

$$\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_s^{n_s}} \times \mathbb{Z}^m,$$

con $p_1, p_2, \dots, p_s$ primos (no necesariamente distintos), $n_1, n_2, \dots, n_s$ naturales positivos y $m \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea G un grupo abeliano finitamente generado. Por el teorema 5.4, G es isomorfo a $T(G) \times G/T(G)$. Ahora, de acuerdo al teorema 5.2, $T(G)$ es un grupo abeliano finito, entonces por el teorema 4.4, obtenemos que $T(G)$ es trivial o isomorfo a un producto directo de la forma

$$\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_s^{n_s}},$$

con $p_1, p_2, \dots, p_s$ primos (no necesariamente distintos) y $n_1, n_2, \dots, n_s$ naturales positivos.

Por otro lado, por la proposición 5.2 sabemos que $G/T(G)$ es un grupo abeliano finitamente generado libre de torsión, entonces, de acuerdo al segundo inciso del teorema 5.3, $G/T(G)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$.

Así, G es isomorfo a un producto de la forma

$$\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_s^{n_s}} \times \mathbb{Z}^m,$$

con $p_1, p_2, \dots, p_s$ primos (no necesariamente distintos), $n_1, n_2, \dots, n_s$ naturales positivos y $m \in \mathbb{N}$. □

Agradecimientos

En esta sección deben ir los agradecimientos; por ejemplo, al árbitro o árbitros que hayan revisado el capítulo, a las instituciones o fondos que hayan apoyado a los autores, etc.

Referencias

- [1] Avella, D., Campero, G., Sáenz E. C. (2020). *Curso introductorio de álgebra II*, Colección Papirhos. Instituto de Matemáticas, UNAM.
- [2] Avella, D., Mendoza, O., Sáenz E. C., Souto M. J., (2014). *Grupos I*, Colección Papirhos. Instituto de Matemáticas, UNAM.
- [3] Cayley, A. (1878). *The theory of groups*, Amer. Jour. Math. 1:50-52.

- [4] Gallian, J. A. (2017). *Contemporary abstract algebra (9th. ed. Amer. Jour)*. Cengage Learning.
- [5] Gauss, C. F., *Disquisitiones Arithmeticae, translated by Clark, A., Springer-Verlag, 1986.*
- [6] Herstein, I. N. (1996). *Abstract Algebra* (3th. ed.). Prentice-Hall.
- [7] Judson, T.W., *Abstract Algebra: Theory and Applications*, Department of Mathematics and Statistics Stephen F. Austin State University, 2022. <https://scholarworks.sfasu.edu/ebooks/23/>
- [8] Kleiner, I. (1986). The Evolution of Group Theory: A Brief Survey. *Mathematics Magazine*, 59(4), 195–215.
- [9] Kleiner, I. (2007) A history of abstract algebra. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser.
- [10] Kahrobaei, D., Flores, R., Noce, M., Habeeb, M. E., Battarbee, C. (2024). Applications of group theory in cryptography—post-quantum group-based cryptography. *Mathematical Surveys and Monographs* (Vol. 278). American Mathematical Society.
- [11] Lee, G. T. (2018). *Abstract Algebra: An Introductory Course*. Springer International Publishing.
- [12] Rotman, J. J. (1995). *An introduction to the theory of groups* (4th. ed.). Springer.
- [13] Rotman J. J. (2005). *First course in Abstract Algebra* (3th. ed.). Prentice-Hall.
- [14] Stillwell, J. (1993). *Classical topology and combinatorial group theory* (2da. ed.). Graduate text in mathematics, 72, Springer.
- [15] Sutherland, A. V. (2011). Structure computation and discrete logarithms in finite abelian p-groups. *Mathematics of Computation*, 80(273), 477–500.
- [16] van der Waerden, B. L. (1930). *Moderne Algebra*. (Vol. 1). Springer.

- [17] Zaldívar, F. (2009). *Introducción a la teoría de grupos* (1a. ed.). Editorial Reverte.

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Av. Universidad 3000,
Circuito Exterior s/n Alcaldía Coyoacán, CP 04510 Ciudad Universitaria,
CDMX, México

`avella@ciencias.unam.mx`

`rocioleonel@ciencias.unam.mx`

Matemática Aplicada y Teoría de Control

Capítulo 2

Método de defusificación centro de gravedad, utilizando integración de Lebesgue

Gustavo Mendoza Torres, Yolanda Elinor Bravo García,
Edmundo Reynoso Lara, Octavio Mendoza Gómez, José
Antonio Dávila Pintle

Facultad de Ciencias de la Electrónica, BUAP

Resumen

El control difuso (CD) es el algoritmo que se desarrolla utilizando lógica difusa y teoría de conjuntos difusos, el cual se aplica para el control de sistemas mecánicos, electrónicos, financieros, etc. El algoritmo de CD es la generalización de la regla de inferencia de la lógica clásica, llamada Modus Ponens para proposiciones y conjuntos difusos. La estructura general del CD, tiene cuatro partes; fusificación, inferencia difusa, base de reglas, estas dos últimas forman parte del motor de inferencia y finalmente la defusificación. La defusificación es una parte muy importante en el desarrollo del CD. Al seleccionar algún método, este debe obtener resultados que preserven la información de la o las variables de entrada, representadas de forma difusa en los conjuntos y las reglas difusas asignadas a estas, para ser procesados en el motor de inferencia. Al conjunto difuso que resulta del motor de inferencia, se le aplica algunos de los métodos de defusificación. Hay tres conceptos muy importantes que debe cumplir el método seleccionado, el primero; no debe requerir mucha capacidad de procesamiento, el segundo; preservar la información inicial en este proceso y el tercero; obtener un resultado representativo del problema a resolver y hacer más preciso el proceso recursivo del algoritmo de CD. La propuesta es utilizar la Integral de Lebesgue en el método de defusificación centro de gravedad (CoG), para cumplir con los 3 puntos expuestos anteriormente, es decir, disminuir el proceso computacional sin perder información, representada por los valores difusos, los cuales cumplen con las características de las variables lingüísticas.

1 Introducción

La lógica clásica estudia la representación simbólica y las propiedades de las proposiciones, utilizando las estructuras que involucran a los conectivos lógicos, su estudio se basa en la verdad de las proposiciones y la teoría de prueba. En la lógica clásica, el valor de verdad $v(p) \in \{0, 1\}$ de modo que $v(p) = 1$ significa que p es verdadera y $v(p) = 0$ que es falsa. Tiene su representación simbólica en la lógica proposicional, esta nos permite representar en forma simbólica el razonamiento, a través de un mecanismo que evalúa proposiciones, las cuales son: elemental o compuesta, cada proposición elemental corresponde a una frase del lenguaje natural, tales como “está lloviendo” o “7 es impar”. A partir de las proposiciones elementales se pueden formar proposiciones compuestas mediante la aplicación de conectivos, que son cinco: un conectivo unitario, la negación ($\neg$) y cuatro conectivos binarios: la conjunción ($\wedge$), la disyunción ($\vee$), la implicación ($\rightarrow$) y la doble implicación ($\leftrightarrow$). En la lógica proposicional el valor de verdad de las proposiciones simples o compuestas, se asigna por una función que se nombra función de evaluación.

El razonamiento del ser humano y del mundo que lo rodea no es representado en forma simbólica en su totalidad por la lógica clásica, por tal razón surgen las lógicas multivaluadas, para posteriormente sentar las bases de la lógica difusa.

En la lógica clásica, cada una de las proposiciones elementales o compuestas se le asigna un valor de verdad $v(p)$, dado por la función de valuación v .

Los valores de verdad en las lógicas n -valuadas son elementos del siguiente conjunto:

$$v(p) \in \nu_n = \left\{ 0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1 \right\}, \quad (1)$$

para la lógica difusa

$$v(p) \in [0, 1], \quad (2)$$

en todos los casos, el valor de verdad está entre 0 y 1.

Como notamos, cada función v representa nuestro estado de conocimiento acerca del mundo. Es posible que dos personas distintas tengan creencias diferentes o que las creencias de una persona varíen con el tiempo o que se

pueda razonar sobre mundos hipotéticos y por ello puede haber distintas funciones de verdad v [1].

La regla de inferencia de la lógica clásica es la representación de argumentos válidos, de tal forma que no importa el valor de verdad de las proposiciones que la componen, la conclusión es una consecuencia del conjunto de proposiciones que forman parte de la regla de inferencia.

Basándonos en las estructuras de las reglas de inferencia de la lógica clásica, se construye el algoritmo de CD donde se consideran los valores de verdad de las proposiciones que lo componen en el intervalo $[0, 1]$. Este tipo de algoritmos nos permite crear situaciones del mundo real, donde las proposiciones no son solo falsas o verdaderas, sino que tienen valores de verdad entre estos.

2 Lógica difusa

Las lógicas n -valuadas, son aquellas que toman valores de verdad en ν_n . En la lógica de Lukasiewicz y la de Kleene, las funciones f están definidas a partir de la suma, la resta, el máximo, el mínimo y el valor absoluto, lo cual garantiza que si a y b pertenecen a ν_n también $f_{\neg}(a)$, $f_{\wedge}(a)$, $f_{\vee}(a)$, $f_{\rightarrow}(a)$, y $f_{\leftrightarrow}(a)$ pertenecen. En una lógica n -valuada no se podría tener, por ejemplo, una función de conjunción como $f_{\wedge}(a, b) = a \cdot b$, pues ello implicaría que $f_{\wedge}(1/n, 1/n) = 1/n^2 \notin \nu_n$ [1].

Esta es una de las razones por las que en la lógica difusa se permite que $v(p)$ tome cualquier valor del intervalo $[0, 1]$, con lo cual existe mayor libertad a la hora de definir las funciones lógicas. En este sentido, la lógica difusa es una generalización de las lógicas n -valuadas, del mismo modo que éstas son una generalización de la lógica clásica.

Naturalmente, las lógicas n -valuadas exigen que los valores de verdad sean números racionales y que el conjunto de valores sea finito, de hecho, basta que el valor de verdad asignado a las proposiciones elementales pertenezca al intervalo $[0, 1]$ para que los valores de verdad de las proposiciones compuestas pertenezcan también al intervalo $[0, 1]$. En consecuencia, tanto la lógica de Lukasiewicz como la de Kleene son casos particulares de la lógica difusa [1], [2].

Una de las condiciones fundamentales, denominada límite clásico, en que toda lógica difusa ha de ser una extensión de la lógica clásica, en el sentido de

que cuando los valores de verdad de dos proposiciones está en $\{0, 1\}$, los valores de verdad de las proposiciones resultantes al aplicar los conectivos sean los mismos que en la lógica clásica. Por ejemplo, la propiedad del tercer excluido ($p \vee \neg p \equiv 1$) de la lógica clásica es equivalente a decir que $f_{\vee}^C(0, 1) = 1$, por tanto, la lógica difusa debe cumplir que $f_{\vee}(0, 1) = f_{\vee}^C(0, 1) = 1$, en general $f_{\vee}(a, b) \neq 1$ cuando a o b sean distintos de 0 y 1 [1], [2].

Además de mantener el límite clásico y otras propiedades de la lógica clásica es posible y conveniente mantener en la lógica difusa.

3 Teoría de los Conjuntos Difusos

Los elementos que forman un conjunto clásico, deben cumplir alguna condición o cuando hablamos de proposiciones, esta debe ser verdadera, es decir, un conjunto esta formado por los elementos que hacen verdadera alguna proposición descrita. Cuando se consideran proposiciones difusas los valores de verdad están en el intervalo $[0, 1]$, ahora los elementos pertenecen a un conjunto difuso con cierto valor de verdad, el cual es asignando por la función de pertenencia, que es una generalización de la función característica, a continuación se definen los conjuntos difusos [1], [2].

Función característica

Sabemos que dados un conjunto universal X y A un subconjunto de X , ($A \subseteq X$) el conjunto A puede ser representado mediante una función, llamada función característica, denotada por χ_A la cual está definida por:

La función $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ es una función que caracteriza al subconjunto A , esto ocurre si y sólo si, para todo x ,

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \quad (3)$$

llamada función característica.

La función característica se utiliza para representar conjuntos clásicos.

Función de pertenencia o membresía

La función característica puede ser generalizada, al asignar a cada elemento del conjunto universal X un valor de pertenencia al subconjunto A , que en lógica difusa será llamado **grado de pertenencia o membresía**. Dicha función recibe el nombre de función de pertenencia o membresía y el conjunto que se obtiene al evaluar la **función de pertenencia** sobre los elementos de un conjunto universal es nombrado **conjunto difuso**. La cercanía del valor de la función a 1 indica un mayor grado de pertenencia.

Cada conjunto difuso está completamente y unívocamente determinado por la función de pertenencia y el intervalo en el que se asignan los valores de la función de membresía es $[0, 1]$.

Si X es el conjunto universal y $x \in X$, entonces un conjunto difuso A en X es definido como el conjunto de los pares ordenados

$$A = \{(x, A(x)) / x \in X\}$$

o

$$A = \{(x, \mu_A(x)) / x \in X\}$$

donde $A(x)$ o $\mu_A(x)$ es llamado grado de pertenencia de x [1], [2].

Variables lingüísticas

En la formulación de variables de cuantificación el concepto de conjunto difuso desempeña un papel importante, cuando estos representan conceptos lingüísticos tales como muy pequeño, pequeño, medio, grande, etc. según lo interpretado en un contexto en particular. Cada estado de la variable lingüística se representa por un conjunto difuso, definido en términos de un conjunto de variables.

Como ejemplo y descripción de variables lingüísticas tenemos las variables físicas (temperatura, presión, velocidad, voltaje, humedad, etc.) así como cualquier otra variable numérica (edad, tiempo de funcionamiento, sueldo, confiabilidad, etc.). En una variable lingüística, los términos lingüísticos representan valores aproximados de una base variable, relacionados con una aplicación en particular, los cuales son capturados por conjuntos difusos apropiados. Cada variable lingüística es caracterizada por la quintupla (v, T, X, g, m) en la cual v es el nombre de la variable, T es el conjunto de términos lingüísticos

que refieren a una base variable que toma valores en un rango definido en el conjunto universal X , g es una regla sintáctica para generar los términos lingüísticos y m es una regla semántica que asigna a cada término lingüístico $t \in T$, su significado, $m(t)$ y el cual es un valor difuso definido en X (esto es $m : T \rightarrow F(X)$).

Las variables lingüísticas representadas por los conjuntos difusos, tienen las operaciones de los conjuntos clásicos.

Ejemplo 3.1. *Para ilustrar los conceptos de los conjunto difusos, consideramos tres conjuntos difusos de la Figura 1, que representan los conceptos de hombre joven, adulto, viejo. La forma de presentar estos conjuntos difusos será en forma trapezoidal. Estas funciones se definen en el intervalo $[0, 80]$, la variable x son años.*

$$B_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 20 \\ \frac{35-x}{15} & \text{si } 20 < x < 35 \\ 0 & \text{si } 35 \leq x \end{cases}$$

$$B_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 20 \text{ ó } x \geq 60 \\ \frac{x-20}{15} & \text{si } 20 < x < 35 \\ \frac{60-x}{15} & \text{si } 45 < x < 60 \\ 1 & \text{si } 35 \leq x \leq 45 \end{cases}$$

$$B_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 45 \\ \frac{x-45}{15} & \text{si } 45 < x < 60 \\ 1 & \text{si } 60 \leq x. \end{cases}$$

Operaciones sobre conjuntos difusos

En la teoría de conjuntos se establecen operaciones entre estos, la unión, intersección, complemento, etc. Definiremos esta operaciones para conjuntos difusos, veremos que estas operaciones no son únicas, por ejemplo tenemos varios tipos de uniones e intersecciones para conjuntos difusos. Para cada operación existe una clase de funciones cuyos elementos son calificados como la generalización de las operaciones clásicas. Cada clase es caracterizada por un conjunto de axiomas justificados apropiadamente.

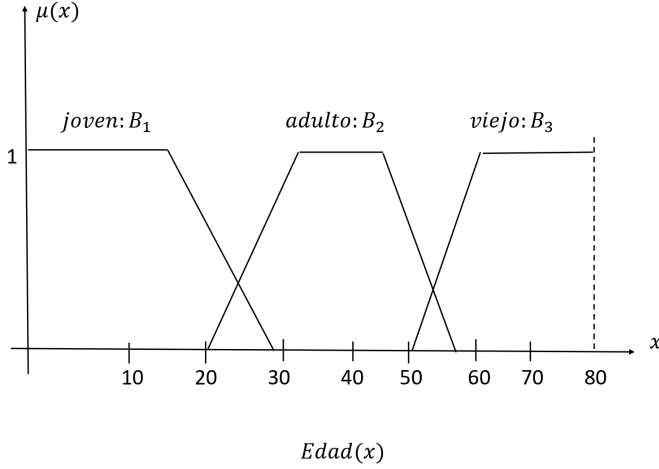


Figura 1: Conjuntos difusos

Aunque se pueden definir varios complementos, intersecciones y uniones difusas, las estándar poseen ciertas propiedades que les dan un significado especial [2].

Complemento difuso

Sea A un conjunto difuso en X cuya función de pertenencia $A : X \rightarrow [0, 1]$, $A(x)$ es interpretada como el grado con el cual x pertenece a A , cA denota el complemento difuso de A tipo c donde la función de pertenencia de cA es $cA : X \rightarrow [0, 1]$.

El valor de $c(A(x))$ es interpretado como el valor de $cA(x)$, tal que $c(A(x)) = cA(x)$ para todo $x \in X$. Dado un conjunto difuso A , obtenemos cA de aplicar la función c a los valores de $A(x)$ para todo $x \in X$.

El punto de equilibrio de un complemento difuso tiene un grado de pertenencia en un conjunto difuso A , y tiene el mismo grado de pertenencia en el complemento cA [2].

Teorema 3.2 (Primera caracterización del complemento difuso). *Si c es una función de $[0, 1]$ a $[0, 1]$, entonces c es un complemento difuso involutivo si y sólo si existe una función $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(0) = 0$, g estrictamente creciente donde*

$$c(a) = g^{-1}(g(1) - g(a)) \quad \text{para todo } a \in [0, 1]. \quad (4)$$

Teorema 3.3 (Segunda caracterización del complemento difuso). *Sea c una función de $[0, 1]$ a $[0, 1]$, entonces c es un complemento difuso si y sólo si existe $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(1) = 0$, f estrictamente decreciente y*

$$c(a) = f^{-1}(f(0) - f(a)), \quad (5)$$

para todo $a, \in [0, 1]$

Las funciones definidas en el teorema anterior son llamadas generadores decrecientes, cada función f es calificada como un generador decreciente que determina un complemento difuso [2].

Complemento difuso estándar

Para definir el complemento difuso, partimos de la definición del complemento $\bar{A}$ para un conjunto clásico A , sabemos que se define de la forma siguiente: $\bar{A} = \{x \in X : \neg(x \in A)\}$, la negación de la proposición es lo que describe a los elementos del conjunto complemento.

Sea A un conjunto difuso cuya función de pertenencia $\mu_{(A)} : X \rightarrow [0, 1]$, cA denota el complemento difuso de A donde la función de pertenencia de cA es: $c(\mu_{(A)}) : X \rightarrow [0, 1]$, el valor $c(\mu_{(A)})$ es el valor del complemento, para todo $x \in X$.

Para definir el **complemento difuso estándar**, utilizamos la negación difusa estándar ($\neg v(p) = 1 - v(p)$).

Intersección difusa t-normas

La intersección de dos conjuntos difusos A y B es generalizada mediante una operación binaria en el intervalo unitario, esta es una función de la forma

$$i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1].$$

Para cada elemento x del conjunto universal, esta función toma como argumento los grados de membresía, en los conjuntos difusos A y B respectivamente y obtenemos el grado de pertenencia en el conjunto contruido por la intersección de A y B . Así

$$(A \cap B)(x) = i[A(x), B(x)], \quad (6)$$

para todo $x \in X$.

Para que una función i de esta forma sea una intersección difusa, debe poseer las características apropiadas, las cuales aseguran que los conjuntos difusos producidos por i sean intuitivamente aceptables para el manejo de las intersecciones difusas, de cualquier par de conjuntos difusos dados.

Dada una función i (t-norma) y los conjunto difusos A y B , aplicamos a cada $x \in X$ para determinar la intersección de A y B .

La función i es totalmente independiente del valor de x ; depende solamente de los valores $A(x)$ y $B(x)$. Por lo tanto, podemos no hacer caso de x y asumir que los valores de i son representados por los números $a, b \in [0, 1]$.

La intersección o t-norma difusa i es una operación binaria en el intervalo de unidad que satisface los siguientes axiomas para todo $a, b, d \in [0, 1]$:

- i1) $i(a, 1) = a$ (condición de frontera)
- i2) si $b \leq d$ entonces $i(a, b) \leq i(a, d)$ (monotonía)
- i3) $i(a, b) = i(b, a)$ (conmutatividad)
- i4) $i(a, i(b, d)) = i(i(a, b), d)$ (asociatividad)

se llama una t - norma o intersección difusa.

Llamaremos a estos axiomas el esqueleto axiomático para la intersección difusa de una t-norma difusa. Los tres primeros axiomas aseguran que la intersección difusa se convierta en la intersección clásica cuando los sistemas A y B son clásicos: $i(0, 1) = 0$ y $i(1, 1) = 1$ se consiguen de la condición de frontera: $i(1, 0) = 0$ resulta de la conmutatividad, mientras que $i(0, 0) = 0$ se obtienen de la monotonía.

Algunos ejemplos de t - normas que son usadas como intersecciones difusas.

Para cualesquiera $a, b \in [0, 1]$:

- 1) $i(a, b) = \min(a, b)$ intersección estándar
- 2) $i(a, b) = ab$ producto algebraico
- 3) $i(a, b) = \max(0, a + b - 1)$ diferencia acotada.
- 4) $i_{\min}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } b = 1 \\ b & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si o.c.} \end{cases}$ intersección drástica

Los ejemplos anteriormente dados cumplen las siguientes relaciones:

$$i_{\min}(a, b) \leq \max(0, a + b - 1) \leq ab \leq \min(a, b),$$

para todo $a, b \in [0, 1]$. [2].

Unión difusa (t-conormas)

De igual forma que en la intersección difusa, generalizamos la unión difusa de dos conjuntos difusos A y B , la cual se especifica por la función

$$u : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1].$$

El argumento de esta función, consiste del par de grados de membresía, de un elemento x en el conjunto difuso A y el otro grado de membresía de igual forma para el conjunto difuso B . El resultado de aplicar la función u es el grado de pertenencia de un valor x al conjunto difuso $A \cup B$.

Esto es,

$$(A \cup B)(x) = u[A(x), B(x)] \quad (7)$$

para todo $x \in X$.

Las propiedades que una función u debe satisfacer para ser unión difusa, son las propiedades que debe de cumplir la función llamada t-conorma.

La unión difusa t-conorma u , es una operación binaria en el intervalo unitario que satisface los siguientes axiomas, para toda $a, b, d \in [0, 1]$,

$$u1) \quad u(a, 0) = a \quad (\text{condicion de frontera})$$

$$u2) \quad b \leq d \quad \text{entonces} \quad u(a, b) \leq u(a, d) \quad (\text{monotonicidad})$$

$$u3) \quad u(a, b) = u(b, a) \quad (\text{conmutatividad})$$

$$u4) \quad u(a, u(b, d)) = u(u(a, b), d). \quad (\text{asociatividad})$$

Estos son los axiomas básicos de la unión difusa, a este conjunto de axiomas lo llamamos esqueleto axiomático de la unión difusa t-conorma.

Comparando los axiomas $u1) - u4)$ con $i1) - i4)$ vemos que la diferencia es la condición de frontera.

Los axiomas $u1$ hasta $u3$ nos aseguran que la unión difusa dada se puede convertir en la unión clásica cuando los conjuntos A y B son clásicos: $u(0, 0) = 0$, $u(0, 1) = u(1, 0) = u(1, 1) = 1$.

Una t-conorma que es continua y superidempotente es llamada Arquimediana, si es estrictamente monótona, es llamada estrictamente arquimediana.

El siguiente teorema muestra el significado de la unión difusa estándar respecto a idempotencia.

Teorema 3.4. *La unión difusa estándar es la única t-conorma idempotente.*

A continuación se presentan algunos ejemplos de t-conormas que son usadas para realizar la unión de conjuntos difusos, para todo $a, b \in [0, 1]$ [2].

- | | |
|---|-----------------|
| 1) $u(a, b) = \max(a, b)$ | Unión estándar |
| 2) $u(a, b) = a + b - ab$ | Suma algebraica |
| 3) $u(a, b) = \min(1, a + b)$ | Suma acotada. |
| 4) $u_{\min}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } b = 0 \\ b & \text{si } a = 0 \\ 1 & \text{o.c.} \end{cases}$ | Unión drástica |

Teorema 3.5. *Para todo $a, b \in [0, 1]$,*

$$\max(a, b) \leq u(a, b) \leq u_{\min}(a, b).$$

Combinación de operaciones

En la teoría de conjuntos clásicos se dice que la intersección y la unión son duales respecto del complemento ya que cumplen las leyes de De Morgan, esto es:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{y} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Nos preguntamos, si esta dualidad se satisface para los conjuntos difusos. La respuesta es si, sólo que son algunas las combinaciones de t-normas y t-conormas, y el complemento difuso las que pueden satisfacer la dualidad. Esto es dada una t-norma y t-conorma son duales respecto al complemento difuso si y sólo si:

$$c(i(a, b)) = u(c(a), c(b)) \tag{8}$$

y

$$c(u(a, b)) = i(c(a), c(b)). \tag{9}$$

Estas ecuaciones describen las leyes de De Morgan para los conjuntos difusos. Sea la terna $\langle i, u, c \rangle$ tales que, i, u sean duales respecto de c , se denominan ternas duales.

En los siguientes ejemplos se verifica que para distintos tipos de t-normas y t-conormas existe dualidad respecto al complemento estándar.

Ejemplo 3.6. $\langle \min(a, b), \max(a, b), c_s \rangle$,

probaremos que:

$$c_s(\min(a, b)) = \max(c_s(a), c_s(b))$$

para lo que suponemos que $a < b$

$$\begin{aligned} c_s(\min(a, b)) &= 1 - \min(a, b) = 1 - a = \max((1 - a), (1 - b)) \\ &= \max(c_s(a), c_s(b)). \end{aligned}$$

Ahora demostraremos que:

$$c_s(\max(a, b)) = \min(c_s(a), c_s(b))$$

supongamos que $a \leq b$

$$\begin{aligned} c_s(\max(a, b)) &= 1 - \max(a, b) = 1 - b = \min((1 - a), (1 - b)) \\ &= \min(c_s(a), c_s(b)). \end{aligned}$$

Teorema 3.7. Las ternas $\langle \min, \max, c \rangle$ y $\langle i_{\min}, i_{\max}, c \rangle$ son duales respecto de cualquier complemento difuso.

Teorema 3.8. Dada una t-norma i y un complemento involutivo c , la operación binaria u en $[0, 1]$ definida por

$$u(a, b) = c(i(c(a), c(b))) \quad (10)$$

para todo a, b en $[0, 1]$ es una t-conorma tal que $\langle i, u, c \rangle$ es una terna dual.

Como un ejemplo de este teorema, consideramos la t-norma $i(a, b) = ab$ y la clase Sugeno de complemento difuso

$$c_\lambda(a) = \frac{1 - a}{1 + \lambda a} \quad \text{si } (\lambda > -1)$$

aplicando estas operaciones a (11), obtenemos la clase de t-conormas

$$\begin{aligned} u_\lambda(a, b) &= c_\lambda(i(c_\lambda(a), c_\lambda(b))) = c_\lambda\left(i\left(\frac{1 - a}{1 + \lambda a}, \frac{1 - b}{1 + \lambda b}\right)\right) \\ u_\lambda(a, b) &= c_\lambda\left(\frac{(1 - a)(1 - b)}{(1 + \lambda a)(1 + \lambda b)}\right) = \frac{a + b + (\lambda - 2)ab}{1 + (\lambda - 1)ab} \end{aligned}$$

[2].

4 Control difuso (CD)

Los sistemas de control difuso (CD) basados en reglas, conocidos como controladores difusos, son sin duda la aplicación más extendida de la lógica difusa. La estructura típica de un controlador basado en un sistema difuso puede verse en la Figura 2.

El CD, es un algoritmo que se construye utilizando las teorías de la lógica difusa y los conjuntos difusos, que se utiliza para resolver problemas de ingeniería, economía, finanzas, etc., para controlar sistemas complejos utilizando información imprecisa.

Los algoritmos de CD están basados en reglas y conjuntos difusos, que intentan emular el razonamiento humano. Por cual, el funcionamiento óptimo del control depende de la información del sistema en el que se aplica. La información que se considera en el desarrollo del algoritmo puede considerarse de la simulación de un modelo dinámico o de la experiencia de algún o algunos operadores.

En el CD se utilizan los conjuntos difusos que describen los estados de las variables para describir las reglas difusas, que representan el conocimiento de expertos. Las variables del sistema son descritas por expresiones lingüísticas, las cuales se llaman variables lingüísticas, pueden ser variables físicas, electrónicas, químicas, etc., los estados de estas pueden describirse como: alto, medio, poco, mucho, negativo, bajo, etc., estos estados de las variables lingüísticas son representados por conjuntos difusos, que asignan un valor o grado de pertenencia a los elementos de un conjunto, en el cual están contenidos los valores de la variable (física, eléctrica, financiera, etc.).

Consta de cuatro etapas: la fusificación, inferencia difusa, regla de inferencia difusa y la defusificación. En la fusificación, los valores de las variables de entrada se convierten en valores difusos por medio de las funciones de pertenencia que describen a los conjuntos difusos. En el motor de inferencia, se utilizan las reglas y la inferencia difusa, para determinar el comportamiento del sistema. Por último, en la defusificación, en esta etapa los valores que se obtienen del motor de inferencia se convierten en valores reales, que se aplican al sistema a controlar.

Se utiliza cuando queremos resolver problemas complejos e imprecisos, que no sea lineal, con un modelo matemático de segundo o tercer orden. Se aplica en diversas áreas tales como: sistemas de temperatura, sistemas médicos, la

toma de decisiones. Este tipo de algoritmos se basa en información imprecisa, proporcionada por expertos o usuarios. Por tal razón es importante, que los métodos que se utilizan en las etapas de este, sean simples o no tan complicados, de fácil programación y que conserven los valores de la información, para llegar al resultado final de forma óptima y precisa. Para lo cual se propone que en el método del centroide se utilice la Integral de Lebesgue, de esta forma simplificar el proceso computacional y que el diseño del algoritmo sea lo más simple posible [3], [4].

Las salidas y las entradas del CD son los estados del sistema controlado, esto es el CD es un estado de las variables controladas por una familia de reglas y mecanismos de inferencia difusa.

Una forma típica de estas reglas se ejemplifica por la regla: "SI la temperatura es muy alta Y la presión es ligeramente baja ENTONCES el cambio de calor es ligeramente negativo", donde la temperatura y la presión son variables del proceso y el cambio de calor es la acción que ejecuta el controlador, los términos muy alto, ligeramente bajo y ligeramente negativo son representados por conjuntos difusos.

Un controlador difuso consiste de 4 módulos:

- Un módulo de fusificación
- Una base de reglas difusas
- Una inferencia difusa
- Un módulo de defusificación,

y el controlador opera por repetición en ciclos de los cuatro pasos anteriormente descritos [3], [4], [5]

Sistema experto

Un sistema experto es una base de datos computarizados que intenta emular el proceso de razonamiento humano en un dominio de conocimientos (información) específico. Los sistemas expertos son construidos con el fin de tomar la experiencia, el entendimiento y resolver problemas con la información obtenida de un experto en un tema en especial, por una persona que no necesariamente sea experta en el tema. Algunos de los temas para los que se diseñan sistemas expertos son; consultoria, diagnósticos médicos, lectura, toma de decisiones, investigación y desarrollo.

El núcleo de un sistema experto consiste en una base de conocimientos (información), una base de datos y un motor de inferencia. Estas tres unidades,

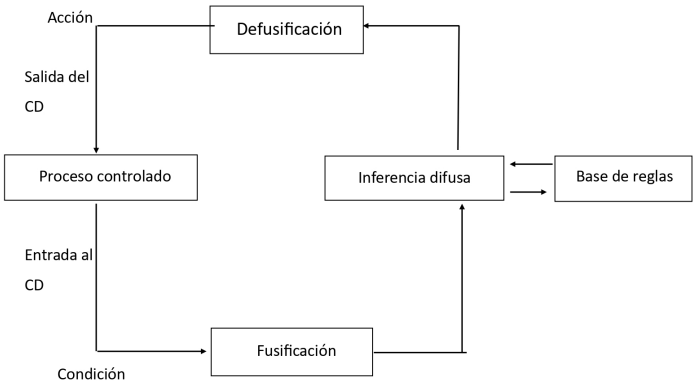


Figura 2: Diagrama de Control difuso

junto con un interfaz para comunicarse con el usuario, forman la configuración mínima de un sistema experto.

- La base de conocimiento (información) contiene información general que pertenece al dominio de conocimiento para el problema. En un sistema experto difuso, el conocimiento es representado por un conjunto de reglas difusas, las cuales conectan el antecedente con el consecuente, premisas con conclusiones ó condiciones con acciones. En un sistema experto difuso, tiene la forma “ SI A , ENTONCES B ”, donde A y B son conjuntos difusos.

- La base de datos es un almacén de estos, dispuestos para ser utilizados por el sistema experto, estos datos establecen un diálogo entre el sistema experto y el usuario. Otros datos pueden ser obtenidos por la inferencia del sistema experto.

- El motor de inferencia de un sistema experto difuso que opera en una serie de reglas de producción y realiza la inferencia difusa. Existen dos aproximaciones para evaluar las reglas de producción. La primera es el manejo de datos y es ejemplificado por la regla de inferencia *modus ponens*. En este caso, provee los datos disponibles al sistema experto, los cuales son evaluados en las reglas de producción y obtenida la posible conclusión. Un método alternativo de evaluación es el manejo de meta; este es generalizado por la regla de inferencia *modus tollens*. El motor de inferencia también puede utilizar el conocimiento de la base en las reglas de producción. Este tipo de conocimiento cuyo nombre es metaconocimiento se localiza en la base de conocimiento [6], [7], [8], [9].

Fusificación

Los conjuntos difusos se utilizan para calificar la información en las bases de reglas, y el mecanismo de inferencia opera sobre conjuntos difusos para producir conjuntos difusos: Por lo tanto, debemos especificar cómo el sistema difuso convertirá sus entradas numéricas x_i , en conjuntos difusos (un proceso llamado fusificación) para que puedan ser utilizados por el sistema difuso.

Sea U_i^* que denota el conjunto de todos los posibles conjuntos difusos que se pueden definir en U_i . Dada $x_i \in U_i$, transformación de fusificación x_i a un conjunto difuso denotado por A_i definido en el universo de discusión. Esta transformación es procesada por el operador F de fusificación, definido como $F : U_i \rightarrow U_i^*$ donde $F(x_i) = A_i$.

Motor de inferencia

El motor de inferencia tiene dos tareas básicas: (1) determinar en qué medida cada regla es relevante para la situación actual, caracterizada por las entradas x_i , y (2) extraer conclusiones utilizando estas misma y la información de la base de reglas. A esta tarea la denominamos paso de inferencia.

Base de reglas

La base de reglas para un sistema de CD, es un conjunto de reglas con la forma $SI \text{ --- } ENTONCES \text{ ---}$ que considera la lógica difusa para utilizar la imprecisión en un sistema para obtener resultados precisos. Las reglas tienen que copiar el razonamiento de algún experto que utilizado variable lingüísticas, las cuales son: variables físicas, electrónicas, financieras, etc., y sus distintos estados representados por conjuntos difusos. Es la parte mas representativa del razonamiento humano y modela las relaciones entre las variables constituyen el núcleo de un sistema de lógica difusa y se utilizan para modelar relaciones entre las variables lingüísticas, para situaciones complejas.

Razonamiento aproximado

El razonamiento aproximado es la generalización de la regla de inferencia Modus Ponens de la lógica clásica, para conjuntos difusos, en las aplicaciones del CD, se requiere una base de reglas, la cual es un conjunto de n proposiciones difusas de la forma $SI \text{ --- } ENTONCES \text{ ---}$, por lo cual es necesaria la

construcción de algoritmos donde se consideren estas características del sistema. Por lo cual se construye el Razonamiento aproximado multicondicional [8], [9].

Razonamiento aproximado multicondicional

Aquí se considera la base de reglas y por cual, la forma general del razonamiento aproximado multicondicional es

Regla 1 : Si $\mathcal{X}$ es A_1 entonces $\mathcal{Y}$ es B_1 (11)

Regla 2 : Si $\mathcal{X}$ es A_2 entonces $\mathcal{Y}$ es B_2

.....

Regla n : Si $\mathcal{X}$ es A_n entonces $\mathcal{Y}$ es B_n

Hecho : $\mathcal{X}$ es A'

Conclusión: $\mathcal{Y}$ es B'

Dadas n reglas *si – entonces* donde $A', A_j \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ para todo $j \in N_n$ y X, Y conjuntos de valores de las variables $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$, esta forma de razonamiento es típica en los controladores construidos con lógica difusa.

El método común para determinar B' , es el método de interpolación, el cual consiste de dos pasos:

PASO 1.- Calcular el grado de consistencia de $r_j(A')$, entre el hecho dado y el antecedente de cada j -regla *si – entonces* en términos de la intersección de los conjuntos asociados A' y A_j , esto es para cada $j \in N_n$,

$$r_j(A') = h(A' \cap A_j),$$

o usando la intersección difusa estándar,

$$r_j(A') = \sup_{x \in X} \min[A'(x), A_j(x)] : \tag{12}$$

PASO 2.- Calcular la conclusión B' por truncamiento de cada conjunto B_j por los valores de $r_j(A')$, el cual expresa el grado con el cual el antecedente A_j es compatible con el hecho A' , y tomando la unión de conjuntos truncados, esto es:

$$B' = \sup_{j \in N_n} \min[r_j(A'), B_j(y)] \tag{13}$$

para todo $y \in Y$.

El método de interpolación es un caso especial de la regla de inferencia composicional, para ver esto mostramos que si R es una relación difusa en $X \times Y$ definida por

$$R(x, y) = \sup_{j \in N_n} \min[A_j(x), B_j(y)]$$

para todo $x \in X$ y $y \in Y$, entonces la B' es igual a $A' \circ R$ donde $\circ$ denota la composición $\sup - \min$.

Observamos que la relación difusa R empleada en este razonamiento es obtenida de las reglas $SI - - - ENTONCES - - -$ para cada regla j determinamos una relación R_j por la fórmula

$$R_j(x, y) = \min[A_j(x), B_j(y)] \quad (14)$$

para todo $x \in X$, $y \in Y$. Entonces R se define por la unión de las relaciones R_j para todas las reglas, esto es

$$R = \bigcup_{j \in N_n} R_j. \quad (15)$$

En estos casos, tratamos la regla $SI - - - ENTONCES$ como *disyuntiva*, obtenemos una conclusión para un hecho dado A' siempre que $r_j(A') > 0$ para al menos una de las reglas j . Cuando $r_j(A') > 0$ [6], [7], [8], [9].

Método de defusificación

Es un método que transforma valores difusos o también llamado vector difuso resultado del motor de inferencia difuso, en un valor no difuso o real. El valor defusificado del CD representa la acción a tomar en el control del proceso determinado. Para cumplir con este objetivo, se pueden emplear el método descrito a continuación [9], [10]:

Método centro de gravedad (CoG)

El más utilizado de todos los métodos de defusificación, el principio básico del método CoG, representado en la Figura 3, para calcular el valor defusificado

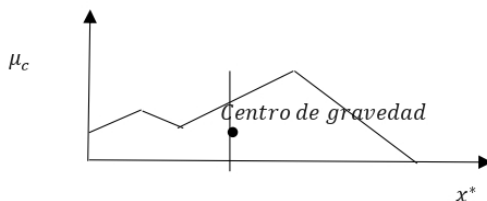


Figura 3: Centro de gravedad

x^* , consiste en calcular la línea vertical que corta la unión de los truncados. como se describe en la Figura 4.

También conocido como método de centro de masa o de gravedad, donde $\int \mu_c dx$ denota el área bajo la curva c .

5 Integral de Lebesgue

Teorema 5.1. *Sea*

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$$

acotada, f es integrable sobre $\mathbf{R}$ si y sólo si $\mathbf{D}_{f,\mathbf{R}}$ tiene medida de Lebesgue cero. Sea $A \subset R$ acotada, diremos que A tiene medida cero si para todo $\epsilon > 0$ existe una colección de intervalos $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$, tales que:

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \epsilon$$

.

Sea $E \subset R$, definimos la función característica de E como la función

$$\chi_E : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$$

dada por $\chi_E = \{1 \text{ si } X \in E\}, 0 \text{ si } x \in E$.

Si E es un intervalo de la forma $[a, b]$, (a, b) , $(a, b]$ o $[a, b)$ donde $a, b \in R$ entonces

$$\int_b^a \chi_E(x) dx = \int_b^a 1 dx = b - a = m(E).$$

Lema 5.2. Sea f una función integrable y $f = \sum_{i=1}^n b_i m(E_i)$, con una representación $E_1, \dots, E_n$ disjuntos y medibles. Entonces

$$\int f = \sum_{i=1}^n b_i m(E_i). \quad (16)$$

Corolario 5.3. Dados $a_1, \dots, a_n \in R$ conjuntos medibles $E_1, \dots, E_n$ con medida finita, tenemos que

$$\int \left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i} \right) = \sum_{i=1}^n a_i m(E_i). \quad (17)$$

De forma general, si $f : [a, b] \rightarrow R$ es continua, la imagen de f es el intervalo $[m, M]$ donde $m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ y $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$. [11], [12].

Consideremos una partición $P = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ del intervalo $[m, M]$ para cada $i = 1, \dots, n$ escogemos $c_i \in [y_{i-1}, y_i]$ y definimos

$$E_1 = f^{-1}[y_0, y_1],$$

$$E_2 = f^{-1}[y_1, y_2],$$

.....

$$E_n = f^{-1}[y_{n-1}, y_n].$$

Definimos una función $g_n : [a, b] \rightarrow R$ dada por

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}(x), \quad (18)$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_b^a g_n(x) dx &= \int_b^a \left(\sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}(x) \right) dx \\ \int_b^a g_n(x) dx &= \sum_{i=1}^n c_i \int_b^a \chi_{E_i}(x) dx \\ \int_b^a g_n(x) dx &= \sum_{i=1}^n c_i m(E_i). \end{aligned} \quad (19)$$

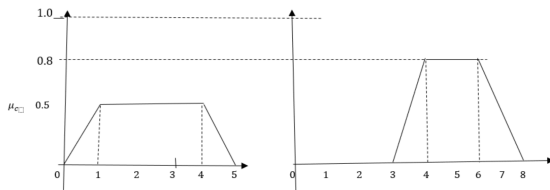


Figura 4: Truncado de los conjuntos difusos

6 Ejemplo del método de defusificación

Ejemplo de CoG

El cálculo del centro de masa para la defusificación en este ejemplo se realiza para la unión de los truncados de la Figura 5, aplicando la ecuación (17)

$$x^* = \frac{\int x \cdot \mu_c dx}{\int \mu_c dx} = \frac{A}{B}.$$

Los límites superiores de las áreas son: para A_1 la función $y = 0.35x$, para el área A_2 por $y = 0.7$, el área A_3 por la función $y = x - 2$, el área A_4 por $y = 1$ y el área A_5 por la función $y = -0.5x + 3$, como se muestra en la figura 5 y descrita de forma general,

$$\mu(x) = \begin{cases} 0.5x & 0 \leq x < 1 \\ 0.5 & 1 \leq x < 3.5 \\ 0.6x - 1.6 & 3.5 \leq x < 4 \\ 0.8 & 4 \leq x < 6 \\ -0.4x + 3.2 & 6 \leq x < 8 \end{cases}$$

$$x^* = \frac{\int x \cdot \mu_c dx}{\int \mu_c dx}, \quad (20)$$

Ahora calculamos $x\mu(x)$ esta función tiene la forma:

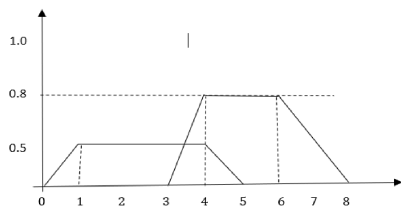


Figura 5: Unión de los conjuntos truncados

$$x\mu(x) = \begin{cases} 0.5x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0.5x & 1 \leq x < 3.5 \\ 0.6x^2 - 1.6x & 3.5 \leq x < 4 \\ 0.8x & 4 \leq x < 6 \\ -0.4x^2 + 3.2x & 6 \leq x < 8 \end{cases}$$

Calculamos las integrales del numerador y el denominador

$$A = \int_0^1 0.5x^2 dx + \int_1^{3.5} 0.5x dx + \int_{3.5}^4 (0.6x^2 - 1.6x) dx +$$

$$\int_4^6 0.8x dx + \int_6^8 (-0.4x^2 + 3.2x) dx = 15.53,$$

$$B = \int_0^1 0.5x dx + \int_1^{3.5} 0.5 dx + \int_{3.5}^4 (0.6x - 1.6) dx +$$

$$\int_4^6 0.8 dx + \int_6^8 (-0.4x + 3.2) dx = 3.925,$$

el resultado es:

$$x^* = \frac{A}{B} = \frac{15.5385}{3.925} = 3.9588.$$

Integral de Lebesgue en el Método de defusificación centro de gravedad (CoG)

Utilizamos la integración de Lebesgue para calcular el centroide del conjunto difuso presentado en la figura 5.

Caso de método de defusificación CoG, utilizando integral de Lebesgue

Primero calculamos la siguiente integral:

El rango de la función $\mu(x)$ es el intervalo $[0, 0.8]$, se considera la partición $P = 0, 0.5, 0.8$ de tal forma que el intervalo se divide en los siguientes subintervalos, $[0, 0.5)$, $[0.5, 0.8)$, $[0, 0.8]$.

Los puntos medios de los subintervalos son:

$$0.25 \in [0, 0.5), \quad 0.65 \in [0.5, 0.8), \quad 0.4 \in [0, 0.8].$$

$$\mu(x) = \begin{cases} 0.5x & 0 \leq x < 1 \\ 0.5 & 1 \leq x < 3.5 \\ 0.6x - 1.6 & 3.5 \leq x < 4 \\ 0.8 & 4 \leq x < 6 \\ -0.4x + 3.2 & 6 \leq x < 8 \end{cases}$$

Consideramos los conjuntos

$$E_1 = \mu^{-1}[0, 0.5) = [0, 3.5),$$

$$E_2 = \mu^{-1}[0.5, 0.8) = [3.5, 4),$$

$$E_3 = \mu^{-1}[0, 0.8) = [4, 6),$$

$$E_4 = \mu^{-1}[0, 0.8) = [6, 8].$$

Construimos la función $g(x) = 0.25\chi_{E_1} + 0.65\chi_{E_2} + 0.4\chi_{E_3} + 0.4\chi_{E_4}$, después integramos esta función

$$B = \int_0^8 g(x)dx = 0.25 \int_0^{3.5} \chi_{E_1} + 0.65 \int_{3.5}^4 \chi_{E_2} + 0.4 \int_4^6 \chi_{E_3} + 0.4 \int_6^8 \chi_{E_4},$$

$$B = \int_0^6 g(x)dx = 0.25(3.5 - 0) + 0.65(4 - 3.5) + 0.4(6 - 4) + 0.4(8 - 6)$$

$$B = \int_0^6 g(x)dx = 1 + 0.325 + 0.58 + 1.6 = 3.725,$$

el resultado de la integral es:

$$\int_0^6 g(x)dx = 3.725.$$

Ahora calculamos $x\mu(x)$ esta función tiene la forma:

$$x\mu(x) = \begin{cases} 0.5x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0.5x & 1 \leq x < 3.5 \\ 0.6x^2 - 1.6x & 3.5 \leq x < 4 \\ 0.8x & 4 \leq x < 6 \\ -0.4x^2 + 3.2x & 6 \leq x < 8 \end{cases}$$

El rango de la función $x\mu(x)$ es el intervalo $[0, 4.8]$, se considera la partición $P = \{0.5, 1.75, 3.2, 4.8\}$ de tal forma que el intervalo $[0, 4.8]$ se divide en los siguientes subintervalos; $[0, 0.5)$, $[0.5, 1.75)$, $[1.75, 3.2)$, $[3.2, 4.8]$, los puntos intermedios son:

$$0.25 \in [0, 0.5), \quad 1.12 \in [0.5, 1.75), \quad 2.5 \in [1.75, 3.2), \quad 2.4 \in [3.2, 4.8).$$

Consideramos los conjuntos

$$\begin{aligned} E_1 &= (x\mu)^{-1}[0, 0.5) = [0, 1), \\ E_2 &= (x\mu)^{-1}[0.5, 1.75) = [1, 3.5), \\ E_3 &= (x\mu)^{-1}[1.75, 3.2) = [3.5, 4), \\ E_4 &= (x\mu)^{-1}[3.2, 4.8) = [4, 6), \\ E_5 &= (x\mu)^{-1}[0, 4.8) = [6, 8). \end{aligned}$$

Construimos la función $h(x) = 0.25\chi_{E_1} + 1.12\chi_{E_2} + 2.5\chi_{E_3} + 2.4\chi_{E_4} + 2.4\chi_{E_5}$, después integramos esta función

$$A = \int_0^{4.8} h(x)dx$$

$$\int_0^{4.8} h(x)dx = 0.25 \int_0^1 \chi_{E_1} + 1.12 \int_1^{3.5} \chi_{E_2} + 2.5 \int_{3.5}^4 \chi_{E_3} + 2.4 \int_4^6 \chi_{E_4} + 2.4 \int_6^8 \chi_{E_5}$$

$$\int_0^{4.8} h(x)dx = 0.25(1-0) + 1.12(3.5-1) + 2.5(4-3.5) + 2.4(6-4) + 2.4(8-6),$$

$\int_0^{4.8} h(x)dx = 0.25 + 2.8 + 1.25 + 4.8 + 4.8 = 13.9$, el resultado de la integral es: $\int_0^{4.8} h(x)dx = 13.9$, el resultado de la defusificación CoG utilizando la integral de Lebesgue es

$$x^* = \frac{A}{B} = \frac{13.9}{3.725} = 3.7315.$$

Este es el resultado final de la aplicación de la Integral de Lebesgue en el método de defusificación CoG.

Agradecimientos

Cualquier duda, comentario o sugerencia acerca de esta plantilla, no dude en escribir al autor (vea un poco más adelante la dirección de correo electrónico).

Referencias

- [1] Bonifacio Martín del Brío y Alfredo Sanz Molina, *Redes Neuronales y Sistemas difusos*, Alfaomega, Ra-Ma, España, 2001.
- [2] Dirk van Dalen, *Logic and Structure*, Springer Verlang, segunda edición U.S.A., 1989.
- [3] Chin-Liang, *Fuzzy logic, based programming*, World Scientific, U.S.A., 1997.
- [4] George L. Klir y Ando Bo Yuan, *Fuzzy sets and fuzzy logic, Theory and applications*, Prentice Hall, U.S.A., 1995.

- [5] Ronald R. Yager y Dimitar P. Filev, *Essential of Fuzzy modeling and control*, Interscience publication, U.S.A., 1994.
- [6] Petr Hájek y Lluís Godó, *Deductive system of logic*, Institute of computer science Praga, Republica Checa, Instituto de Inteligencia Artificial en inteligencia artificial, CSIC, Bellaterra, Cataluña, España, 1996.
- [7] Yager, R. R. *A general approach to rule aggregation in Fuzzy logic control*, Applied Intelligence, U.S.A., 1992.
- [8] Dubois D. y Prade H. *Fuzzy sets in approximate reasoning II*, World Scientific, U.S.A., 1991.
- [9] Smets, P. y P. Magrez, *Implication in Fuzzy logic*, Intern. J. of Approximate Reasoning, U.S.A., 1987.
- [10] Ichihashi, H. y Watanabe, T., *Learning control by Fuzzy models using simplified Fuzzy reasoning*, Journal of Japan Society for Fuzzy Theory and System, Japón, 1990.
- [11] Mazón, J. *La integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$: teoría y problemas*, Publicaciones de la Universidad de Valencia, 2017.
- [12] Burkill, JC, *The Lebesgue Integral:40*, Cambridge Univesity Press, 2004.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

gustavo.mendozato@correo.buap.mx
yolanda.bravog@correo.buap.mx
edmundo.reynoso@correo.buap.mx
octavio.mendoza@alumno.buap.mx
jose.davila@correo.buap.mx

Capítulo 3

Modelando el problema del diseño de las palabras código del ADN a través de grafos y fórmulas booleanas

Sonia Navarro Flores, Carlos Guillén Galván, Carlos
Alberto López Andrade
FCFM, BUAP

Resumen

El problema de diseño de palabras código del ADN es un problema de biología computacional que tiene aplicaciones relevantes en el almacenamiento de información. En este trabajo, introducimos el problema del diseño de las palabras código del ADN y lo modelamos mediante grafos, donde la búsqueda de un conjunto óptimo de códigos se traduce en encontrar el máximo conjunto independiente de los grafos obtenidos. Como el problema del máximo conjunto independiente en grafos es un problema NP-duro, lo abordamos mediante su formulación en términos fórmulas booleanas. De esta manera, el problema se transforma en una instancia del problema de satisfactibilidad máxima (Partial MaxSAT) que busca satisfacer la mayor cantidad de cláusulas de una fórmula booleana dada. Si bien Partial MaxSAT también es computacionalmente complejo, ofrece la ventaja de que cuenta con una vasta literatura y herramientas algorítmicas robustas. Finalmente, presentamos resultados experimentales para palabras de longitud 2, 4 y 6 analizando las ventajas y limitaciones del enfoque propuesto.

1 Introducción

El problema de diseño de palabras código de ADN consiste en seleccionar un conjunto de cadenas de nucleótidos $\{A, C, G, T\}$ que cumplan restricciones combinatorias específicas. Es un problema fundamental para garantizar la

fiabilidad en el almacenamiento y recuperación de información, con aplicaciones en tecnologías de micromatrices de ADN, en computación biomolecular, y en el desarrollo de códigos de barras moleculares para manipular moléculas en bibliotecas químicas [23, 8].

Un factor crítico en este proceso es la tendencia natural del ADN a la hibridación: si las secuencias no presentan la suficiente diferenciación, pueden unirse a sus complementos no deseados, induciendo errores durante la recuperación de datos. En este contexto, la distancia de Hamming ha demostrado ser una métrica eficaz para cuantificar la distinción entre cadenas. Este trabajo se centra en el problema de diseño de palabras de ADN, definido como la búsqueda del mayor conjunto de cadenas de una longitud fija que satisfaga restricciones combinatorias preestablecidas. Históricamente, este reto ha sido abordado mediante diversas técnicas, tales como la estrategia de mapa-plantilla [8], el uso de anillos finitos [14], la búsqueda local estocástica [21, 22], así como diversas metaheurísticas [24] y algoritmos evolutivos [18].

Numerosos autores han trabajado en la optimización de los límites inferiores para este problema, empleando métodos de teoría de la códigos (empaquetamiento de esferas) y enfoques algebraicos [5]. Si bien los algoritmos evolutivos y la búsqueda con vecindario variable han mostrado resultados prometedores, aún existen interrogantes abiertos; por ejemplo, se desconoce si la solución conocida actualmente para palabras de longitud 8 y distancia de Hamming 4 representa un máximo global. En el enfoque que presentamos en este trabajo, observamos que a medida que la longitud de las palabras aumenta, el tamaño de los grafos resultantes crece de forma explosiva, superando la capacidad de resolución de los métodos computacionales convencionales para hallar el conjunto independiente máximo.

El capítulo está estructurado de la siguiente manera: la sección 2 presenta los preliminares sobre complejidad computacional, el problema MaxSAT y teoría de grafos, además al final de la sección describimos el problema de diseño de palabras código de ADN. En la Sección 3, modelamos el problema mediante grafos y presentamos detalladamente la solución para cadenas de longitud $d=2$. En la Sección 4, describimos cómo se traduce el problema del máximo conjunto independiente a una formulación en MaxSAT y presentamos los resultados experimentales obtenidos computacionalmente. Finalmente, se describen las conclusiones.

2 Preliminares

Una idea intuitiva de la complejidad computacional

La teoría de la complejidad computacional se encarga de estudiar la cantidad de recursos computacionales que se requieren para resolver un problema, estos recursos pueden ser tiempo, memoria, entre otros. Conocer el tiempo necesario para resolver un problema es sumamente importante pues cuando queremos resolver un problema de la vida real, nos gustaría saber que obtendremos una respuesta en un tiempo razonable. Ahora bien, deseamos medir el tiempo que le toma a un algoritmo resolver un problema de forma que esta medición no dependa de la computadora que estamos usando ni del lenguaje de programación que estamos usando. Para esto, de forma intuitiva podemos pensar que el tiempo que se tarda un algoritmo en resolver un problema es la cantidad de pasos que debe realizar hasta encontrar la solución. Si decimos que un problema se puede resolver en tiempo $O(n^2)$ intuitivamente queremos decir que se conoce un algoritmo que al recibir una instancia de tamaño n , resolverá el problema para esa instancia en a lo más n^2 pasos.

Para poder establecer las clases de complejidad computacional al menos de manera intuitiva, es necesario hablar de la diferencia entre los algoritmos deterministas y los algoritmos no deterministas. Intuitivamente, los algoritmos deterministas son aquellos donde en cada situación posible el algoritmo conoce una única acción para realizar a continuación. En los algoritmos no deterministas, dada una posible situación el algoritmo conoce varias acciones posibles a ejecutar a continuación. Normalmente los algoritmos no deterministas pueden resolver un problema ejecutando una menor cantidad de pasos que un algoritmo determinista pero el problema es que los algoritmos no deterministas no se pueden implementar.

Así podemos clasificar los problemas computacionales de acuerdo a su dificultad y el tiempo que toma resolverlos dentro de las siguientes categorías:

- La clase **P** contiene a los problemas computacionales para los cuales se conoce un algoritmo determinista que los resuelve en tiempo polinomial. Podemos pensar estos problemas como aquellos que son fáciles de resolver. En esta clase se encuentra el problema de ordenar una lista de n elementos, este problema se puede resolver en tiempo $O(n^2)$.
- La clase **NP** contiene a los problemas computacionales para los cuales

se conoce un algoritmo no determinista que los resuelve en tiempo polinomial. Podemos pensar estos problemas como aquellos que son difíciles de resolver pero una vez que nos dan la solución es fácil verificar la validez de la solución. En esta clase se encuentra el problema del agente viajero (TSP), en el cual se debe encontrar el camino más corto que pase por todas las ciudades de una lista dada. Si nos dan una solución es fácil verificar su validez, pero encontrar la solución óptima es un muy difícil y no se puede realizar en tiempo polinomial.

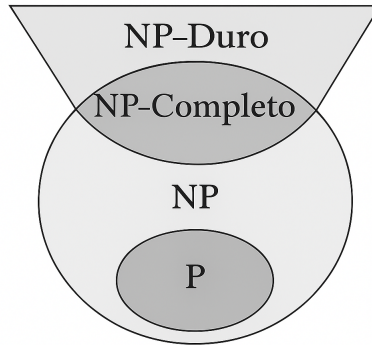
- La clase **NP-completo** contiene a los problemas que son NP y se pueden reducir a cualquier otro problema en clase NP en tiempo polinomial. Estos problemas son muy importantes pues si se encuentra un algoritmo para resolverlos en tiempo polinomial, ese algoritmo se puede traducir a un algoritmo para resolver cualquier problema de la clase NP. En esta clase se encuentra el problema de la mochila (KP) en el cual se debe encontrar la combinación de objetos de una lista, cada uno con valor y peso específico, de forma que dicha selección maximiza el costo sin sobrepasar una capacidad máxima de la mochila. Este problema es difícil y no se puede resolver en tiempo polinomial pero se puede reducir a otros problemas NP.
- La clase **NP-duro** contiene a los problemas que se pueden reducir a cualquier otro problema en clase NP en tiempo polinomial, pero no necesariamente son NP. En esta clase encontramos a los problemas de decisión que son al menos tan difíciles como un problema NP. Un problema que es NP-duro pero no es NP-completo es el problema de parada, este problema consiste en decidir si dados un programa y una entrada, este puede terminar después de un número finito de pasos o no.

El lector interesado en profundizar sobre la Teoría de la complejidad computacional puede revisar [2].

Los problemas SAT y Partial MaxSAT

El problema SAT es un problema muy importante dentro de la Teoría de complejidad computacional. La importancia de este problema radica en que diversos problemas de computación, inteligencia artificial e investigación de operaciones se pueden modelar a través del problema SAT. Este problema es

Figura 1: Algunas clases de complejidad computacional



NP, lo que significa que no se conoce un algoritmo determinista que lo resuelva en tiempo polinomial y además es de los problemas más difíciles dentro de esta clase. Más aún, este fue el primer problema que se clasificó dentro de la categoría de los NP- completos, lo que significa que encontrar un algoritmo que resuelva este problema en tiempo polinomial implicaría que las clases P y NP son las mismas. Vamos a presentar las definiciones básicas necesarias para introducir los problemas SAT y MaxSAT.

Una *variable* booleana es cualquier símbolo al que se le pueden asociar los valores 0 y 1.

Definición 2.1. *Las fórmulas booleanas se definen recursivamente de la siguiente manera:*

- Las variables booleanas y las constantes 0 y 1 son fórmulas booleanas.
- Si ϕ y ψ son fórmulas booleanas entonces $\neg\phi$, $\phi \vee \psi$ y $\phi \wedge \psi$ también son fórmulas booleanas.

Dada una fórmula booleana ϕ , denotaremos al conjunto de sus variables como $var(\phi)$. Una asignación de verdad para las variables de una fórmula ϕ consiste en una función $\lambda : var(\phi) \rightarrow \{0, 1\}$, si la asignación asocia 0 a una variable booleana entenderemos que la hace falsa y si la asignación asocia 1 a una variable booleana entenderemos que la hace verdadera.

Dada una asignación $\lambda : var(\phi) \rightarrow \{0, 1\}$, podemos extender λ a subfórmulas de ϕ de la siguiente manera:

- $\lambda(\neg\psi) = 1 - \lambda(\psi)$
- $\lambda(\psi_1 \vee \psi_2) = 0$ si y sólo si $\lambda(\psi_1) = 0$ y $\lambda(\psi_2) = 0$.
- $\lambda(\psi_1 \wedge \psi_2) = 1$ si y sólo si $\lambda(\psi_1) = 1$ y $\lambda(\psi_2) = 1$.

Decimos que una fórmula booleana es *satisfactible* si existe una asignación para sus variables que hace verdadera a la fórmula. El problema SAT consiste en decidir si cualquier fórmula booleana libre de cuantificadores es satisfactible.

Una *literal* l es o bien una variable booleana x_i o bien la negación de ella $\neg x_i$. Una *cláusula* es una disyunción de literales. Las cláusulas tienen la forma $l_1 \vee \dots \vee l_r$. Finalmente, decimos que una fórmula F está en su *forma normal conjuntiva* si es la conjunción de un conjunto de cláusulas. Las fórmulas en su forma normal conjuntiva son conjunciones de cláusulas $\phi = C_1 \wedge \dots \wedge C_m$. Por ejemplo, la fórmula $(x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge (x_3 \vee \neg x_4)$ está en la forma normal conjuntiva. La razón por la que presentamos las fórmulas FNC es porque cualquier fórmula booleana libre de cuantificadores se puede expresar en su forma normal conjuntiva por lo cual es suficiente estudiar las fórmulas booleanas que tienen esta forma.

Para determinar si una fórmula es satisfactible o no, basta con realizar la tabla de verdad de la fórmula e intentar con diversas asignaciones de verdad para las variables de la fórmula. El problema con esta estrategia es que si la fórmula tiene n variables, el número de asignaciones de valores de verdad para las variables es 2^n , lo cual no es eficiente para problemas con una gran cantidad de variables.

Ejemplo 2.2. *La siguiente tabla de verdad muestra las asignación de verdad para la fórmula Φ es $(x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge (x_3 \vee \neg x_4)$*

Una generalización del problema SAT es el problema Partial MaxSAT. Se utiliza para modelar problemas en los que es imposible satisfacer todas las cláusulas. En este caso, dividimos las cláusulas en dos tipos: las que forzosamente deben satisfacerse (duras) y las que pueden satisfacerse o no (blandas). En las cláusulas que se pueden satisfacer o no, podemos asociar pesos a las cláusulas para indicar su importancia. Dada una instancia de Partial MaxSAT, se busca encontrar una asignación que satisfaga todas las cláusulas duras y minimice la suma de los pesos de las cláusulas blandas no satisfechas.

Cuadro 1: Tabla de verdad

x_1	x_2	x_3	x_4	$(x_1 \vee \neg x_3)$	$(x_2 \vee x_4)$	$(x_3 \vee \neg x_4)$	Φ
0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Una *cláusula pesada* es un par (C, w) donde C es una clausula y w puede ser un número natural o infinito. A w le llamamos el peso de C . La idea es que el peso representa la penalización por no cumplir la cláusula C . Una cláusula pesada es *dura* si su peso correspondiente es infinito, y es *blanda* en otro caso.

Definición 2.3. Una *fórmula pesada de Partial MaxSAT* es un conjunto de cláusulas pesadas

$$\varphi = \{(C_1, w_1), \dots, (C_m, w_m), (C_{m+1}, w_{m+1}), \dots, (C_{m+n}, w_{m+n})\}$$

donde las primeras m clausulas son blandas y las últimas n clausulas son duras, es decir, $w_{m+i} = \infty$.

El conjunto de todas las variables que aparecen en las clausulas de φ se denota $var(\varphi)$. Dada una asignación de valores de verdad I para las variables

de φ , el costo de la asignación λ sobre φ es la suma de los pesos de las cláusulas que son falsas bajo la asignación λ , es decir,

$$cost(\varphi, \lambda) = \sum_{\substack{(C_i, w_i) \in \varphi \\ \lambda(C_i) = 0}} w_i$$

En el problema Partial MaxSAT se busca minimizar el costo de las cláusulas que no se satisfacen, así, se define el costo de la fórmula φ como:

$$costo(\varphi) = \min\{cost(\varphi, \lambda) \mid \lambda(\varphi) \rightarrow \{0, 1\}\}$$

Diremos que una asignación λ es óptima si su costo es el mínimo posible, es decir, $costo(\varphi) = cost(\varphi, \lambda)$. El problema Partial MaxSAT para una variable φ consiste en encontrar una asignación óptima para las variables de φ . Si el costo óptimo es ∞ es porque alguna de las cláusulas duras es insatisfactible y en ese caso diremos que la fórmula φ es insatisfactible.

Observamos que si en una fórmula no hay cláusulas blandas entonces el problema es parte de SAT. El problema Partial MaxSAT para fórmulas que no tienen cláusulas duras es el problema MaxSAT. El problema Partial MaxSAT puede ser utilizado en planificación, creación de horarios, enrutamiento en FPGA, instalación de paquetes de software, etc. Este problema es NP-duro por lo tanto hay diversos trabajos encaminados a encontrar algoritmos que pueden resolver de forma eficiente los problemas reales, nosotros usaremos PySAT de Python.

Veamos un ejemplo intuitivo de cómo se modela un problema con Partial MaxSAT.

Ejemplo 2.4. *Un ejemplo de un problema de la vida real que se puede modelar con el problema Partial MaxSAT es el problema de asignación de horarios. En este problema tenemos cláusulas duras como las siguientes:*

- *Dos clases no pueden ocurrir en el mismo salón y el mismo horario.*
- *Un profesor no puede dar dos clases diferentes al mismo tiempo.*
- *Se deben abrir todos los cursos solicitados.*
- *El salón asignado a un curso debe tener espacio suficiente para los alumnos que se inscribirán al curso.*

Las clasusulas blandas pueden ser de este tipo:

- *Cierto profesor prefiere dar clases por la mañana.*
- *Se debe procurar que los profesores tengan las clases consecutivas.*
- *Se debe evitar que haya dos cursos de la misma materia en el mismo horario para que los alumnos tengan opciones.*

Si modelamos este problema con una fórmula booleana con cláusulas sin peso y resulta imposible que todos los profesores tengan su horario corrido simultáneamente, obtendríamos que la fórmula es insatisfactible. Al modelarla con cláusulas pesadas los algoritmos que resuelven MaxSAT buscarán una asignación que haga verdaderas todas las cláusulas duras y la mayor cantidad de cláusulas blandas por lo cual con MaxSAT obtenemos mejores resultados.

Definiciones básicas de Teoría de grafos

Vamos a presentar las definiciones básicas de teoría de grafos necesarias para presentar el problema del máximo conjunto independiente. Elegimos este enfoque para abordar el problema pues los grafos son estructuras muy generales y gracias a ello nos permiten modelar una gran variedad de problemas tanto de matemáticas como de otras áreas.

Definición 2.5. *Un grafo es un par $G = (V, E)$ donde V es el conjunto de vértices y $E \subset [V]^2$ es el conjunto de aristas. Si $\{u, v\} \in E$, diremos que los vértices u y v son adyacentes y escribiremos $uv \in E$.*

Ejemplo 2.6. *El siguiente grafo tiene como conjunto de vértices $\{a, b, c, d, e, f\}$ y el conjunto de aristas $\{ab, ac, bc, bd, be, cd, de, ef\}$.*

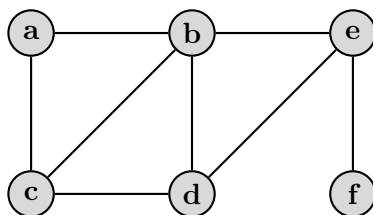
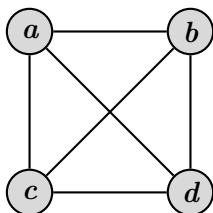


Figura 2: Algunas clases de complejidad computacional

Definición 2.7. Un grafo G es completo si tiene todas las aristas posibles, es decir, existe una arista para cada par de vértices.

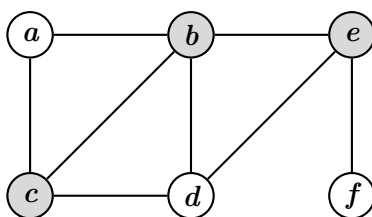
Ejemplo 2.8. El grafo completo con 4 vértices, K_4 .



Definición 2.9. Un conjunto independiente es un conjunto de vértices $I \subseteq V$ tal que para cada $u, v \in I$ distintos se cumple que $uv \notin E$. Un conjunto independiente es maximal si no está contenido propiamente en otro conjunto independiente.

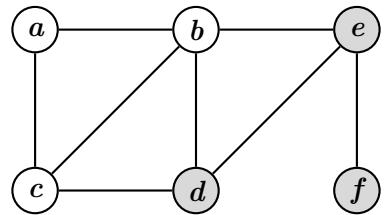
Los conjuntos independientes son muy importantes dentro de la teoría de grafos pues permiten identificar grupos donde no haya relaciones o conflictos.

Ejemplo 2.10. Retomando el grafo del Ejemplo 2.8, observamos que el conjunto de vértices $\{a, d, f\}$ es un conjunto independiente pues ningún par de vértices son adyacentes.



Definición 2.11. Un clique en un grafo G es un grafo completo contenido en G . El número de clique $\omega(G)$ es el tamaño máximo de un clique contenido en G .

Ejemplo 2.12. El triángulo generado por los vértices a, b, c es un clique de G .



El problema del máximo conjunto independiente consiste en encontrar un conjunto independiente de máxima cardinalidad. Es un problema NP-duro con aplicaciones en muchos campos. Diversos problemas de optimización combinatoria, asignación de recursos y toma de decisiones sin conflictos se resuelven a través de un conjunto independiente máximo. Uno de los mejores enfoques para abordar este problema, desarrollado inicialmente para el problema de clique máximo, es un algoritmo de ramificación y acotación (MCQ) [20] basado en la kernelización, que también se ha propuesto en [10]. En este trabajo para encontrar el máximo conjunto independiente de un grafo vamos a traducirlo con fórmulas booleanas a una instancia del problema SAT.

Descripción del problema

El problema de diseño de palabras código de ADN consiste en buscar conjuntos de cadenas de nucleótidos $\{A, C, G, T\}$ que satisfacen restricciones adicionales. Una de sus aplicaciones es codificar información con cadenas de ADN y luego decodificarla de forma confiable. Un inconveniente es que si las cadenas de ADN son muy parecidas pueden hibridar con su complemento, lo que produce errores en sus diversas aplicaciones. Algunas de las restricciones más comunes en la literatura son la distancia de Hamming, que garantiza la diferencia entre cadenas de ADN, y sus complementos inversos. La restricción de distancia de Hamming del complemento inverso asegura la diferencia entre las palabras código de ADN y sus cadenas complementarias inversas. La restricción de contenido GC constante asegura que cada palabra código tenga la mitad de su longitud en contenido GC y, por lo tanto, la mitad de su longitud en contenido AT.

Vamos a presentar las definiciones necesarias para plantear el problema formalmente.

Un *alfabeto* es un conjunto de símbolos finito y no vacío, utilizamos el símbolo Σ para designar al alfabeto.

Una *cadena* (o *palabra*) de un alfabeto Σ es una sucesión finita $w = w_1, w_2, \dots, w_n$ con $w_i \in \Sigma$. Por ejemplo, 011101 es una cadena del alfabeto $\{0, 1\}$, *ATTCGAA* es una cadena en el alfabeto $\Sigma = \{A, C, G, T\}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, Σ^n denota el conjunto de cadenas con símbolos en Σ de longitud n . Así, la cadena G pertenece a Σ^1 , la cadena TC pertenece a Σ^2 , la cadena GTC pertenece a Σ^3 , y la cadena $TAGC$ pertenece a Σ^4 para el alfabeto $\{A, C, G, T\}$.

Como nos interesan secuencias de ADN, trabajaremos con el alfabeto $\Sigma = \{A, C, G, T\}$ donde A, C, G, y T representan los nucleótidos.

Si $w = w_1 w_2 \dots w_n$ es una palabra, el reverso de w es la palabra $w_n w_{n-1} \dots w_1$ que denotaremos por $R(w)$. Por ejemplo, el reverso de la palabra *AACATG* es *GTACAA*.

Definición 2.13. Si $n \in \mathbb{N}$ y $w \in \Sigma^n$, el *complemento de Watson-Crick* de w es la cadena obtenida al reemplazar cada ocurrencia de A por T , de T por A , de C por G y de G por C .

Por ejemplo, el complemento de Watson-Crick de $w = \textit{AACATG}$ es la cadena *TTGTAC*.

Definición 2.14. Si $n \in \mathbb{N}$ y $x, w \in \Sigma^n$ son palabras distintas, la *distancia de Hamming* $H(x, w)$ es la cantidad de índices $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_i \neq w_i$. Es decir, es el número de posiciones en las que x y w difieren.

El problema busca encontrar el conjunto más grande S de cadenas (palabras) de longitud n sobre el alfabeto $\Sigma = \{A, C, G, T\}$ con las siguientes restricciones:

- **Restricción de Contenido GC:** Cada palabra en S tiene el 50 % de sus símbolos de $\{C, G\}$ y el 50 % restante de símbolos de $\{A, T\}$.
- **Restricción de Distancia de Hamming (HD):** Cada par de palabras distintas $w_1, w_2 \in S$, difiere en al menos d posiciones, es decir, $H(w_1, w_2) \geq d$.
- **Restricción de Distancia de Complemento Inverso (RC):** Cada par de palabras $w_1, w_2 \in S$, donde w_1 puede ser igual a w_2 , tiene $H(R(w_1), C(w_2)) \geq d$. $R(w)$ representa la inversa de la palabra w y $C(w)$ representa la palabra complementaria de w , obtenida reemplazando cada C en w por G y viceversa, y cada A en w por T y viceversa.

A partir de este punto, definiremos un problema-instancia como el par (n, d) , que significa que las palabras de una solución tienen que satisfacer las restricciones de Distancia de Hamming y Distancia de Complemento Inverso para d . Uno de los casos más estudiados en la literatura es $(8, 4)$. La Tabla 2 obtenida de [15] muestra los resultados conocidos para $n = 8, d = 4$ utilizando diferentes técnicas.

Cuadro 2: Resultados conocidos para la instancia $n=8, d=4$

Método	Tamaño de la Solución
Estrategia de mapa-plantilla [8]	108
Búsqueda Local Estocástica [21]	112
Búsqueda Local Estocástica [22]	128
Enfoque de código algebraico [14]	224

3 Modelando el problema con grafos

El problema puede traducirse a un grafo definido por las siguientes condiciones:

- Cada palabra de ADN tiene un vértice asignado v_k ;
- El conjunto V contiene todos los vértices v_k ;
- E_{HD} contiene pares de vértices que tienen un conflicto en la distancia de Hamming;
- E_{RC} contiene pares de vértices que tienen un conflicto en la distancia de Complemento Inverso;
- $E = E_{HD} \cup E_{RC}$;

Una solución para el problema de Diseño de Palabras de ADN es un Conjunto Independiente Máximo para el grafo $G = (V, E)$.

Los pasos necesarios para generar el grafo asociado a un problema-instancia definido por el par (n, d) son:

- **Paso 1. Generación de palabras:** Generamos todas las palabras de tamaño n que pueden tener en cada posición una letra del alfabeto $\{A, C, G, T\}$.
- **Paso 2. Filtrado de palabras:** Aplicamos el filtro de *contenido GC* a todas las palabras generadas y mantenemos solo aquellas que tienen la mitad de sus símbolos en $\{A, T\}$ y la otra mitad en $\{C, G\}$; verificamos la restricción *RC* aplicada a la propia palabra, recordando que la restricción *RC* también se aplica a dos palabras distintas.
- **Paso 3. Generación de grafos:** Cada palabra restante representa un vértice. Se establece una arista entre dos vértices generados si tienen un conflicto de *HD* o *RC*.

Grafos que modelan el problema del diseño de palabras código del ADN de longitud 2

Ejemplo 3.1. *Vamos a generar el grafo que modela la instancia del problema $(2, 0)$.*

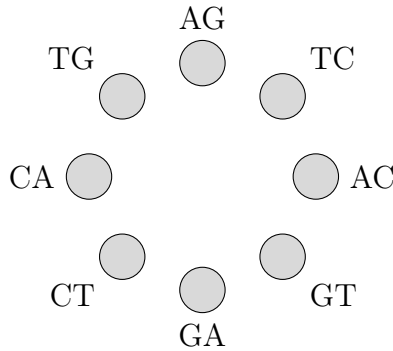
- *En el paso 1 consideramos todas las cadenas de longitud 2 letras del alfabeto $\Sigma = \{A, C, G, T\}$. En este caso obtenemos la lista:*
 $AA, AC, AG, AT, CA, CC, CG, CT, GA, GC, GG, GT, TA, TC, TG, TT$.
- *En el paso 2 removemos de la lista las cadenas que no tengan la mitad de sus letras en $\{A, T\}$ y la otra mitad en $\{C, G\}$ y también removemos de la lista las palabras w que no cumplan que $H(R(w), C(w)) \geq d$. Como en este caso $d = 0$, solamente tenemos que remover a las palabras que tengan ambas letras en el conjunto $\{A, T\}$ o ambas letras en el conjunto $\{C, G\}$. Así nos queda la lista:*

$\cancel{AA}, AC, AG, \cancel{AT}, CA, \cancel{CC}, \cancel{CG}, CT, GA, \cancel{GC}, \cancel{GG}, GT, \cancel{TA}, TC, TG, \cancel{TT}$.

Los vértices del grafo son las palabras: $AC, AG, CA, CT, GA, GT, TC, TG$.

- En el paso 3 agregamos una arista a un par de palabras w_1, w_2 si falla alguna de las condiciones $H(w_1, w_2) \geq d$ o $H(R(w_1), C(w_2)) \geq d$. Como en este caso $d = 0$, no agregamos ninguna arista a nuestro grafo.

Por lo tanto, el grafo que modela esta instancia del problema consiste en 8 vértices aislados. Observamos que el conjunto total de vértices es un conjunto independiente.



Ejemplo 3.2. Vamos a generar el grafo que modela la instancia del problema $(2,1)$.

- En el paso 1 consideramos todas las cadenas de longitud 2 letras del alfabeto $\Sigma = \{A, C, G, T\}$. En este caso obtenemos la lista:
AA, AC, AG, AT, CA, CC, CG, CT, GA, GC, GG, GT, TA, TC, TG, TT.

- En el paso 2 removemos de la lista las cadenas que no tengan la mitad de sus letras en $\{A, T\}$ y la otra mitad en $\{C, G\}$ y también removemos de la lista las palabras w que no cumplan que $H(R(w), C(w)) \geq d$. Primero removemos a las palabras que tengan ambas letras en el conjunto $\{A, T\}$ o ambas letras en el conjunto $\{C, G\}$. Así nos queda la lista:

~~AA~~, AC, AG, ~~AT~~, CA, ~~CC~~, ~~CG~~, CT, GA, ~~GC~~, ~~GG~~, GT, ~~TA~~, TC, TG, ~~TT~~.

Ahora necesitamos remover las palabras w que no cumplan que

$$H(R(w), C(w)) \geq 1.$$

Calculamos $H(R(AG), C(AG)) = H(GA, TC) = 2$ y $H(R(TC), C(TC)) = H(CT, AG) = 2$.

Antes de seguir haciendo cálculos observamos que como w tiene una letra en $\{A, T\}$ y una letra en $\{C, G\}$, al tomar el complemento de Watson-Crick se cambian ambas letras y así w y $C(w)$ no tienen ninguna letra en común. Así obtenemos que $H(R(w), C(w)) = 2 > 1$ y no es necesario remover más palabras.

Los vértices del grafo serán las palabras: $AC, AG, CA, CT, GA, GT, TC, TG$. Tenemos que revisar 28 parejas de vértices para determinar si forman arista o no.

- En el paso 3 agregamos una arista a un par de palabras w_1, w_2 si falla alguna de las condiciones $H(w_1, w_2) \geq d$ o $H(R(w_1), C(w_2)) \geq 1$.

Primero observamos que si tomamos dos vértices distintos w_1 y w_2 puede ocurrir que w_1 y w_2 no compartan letras, que compartan una letra o que compartan ambas letras. Si w_1 y w_2 no comparten letras entonces w_1 y $C(w_2)$ tienen las mismas letras, puede ser en la misma posición o en diferente posición, es decir $w_1 = C(w_2)$ o $R(w_1) = C(w_2)$. Entonces tenemos los siguientes casos:

Caso 1. w_1 y w_2 no comparten letras y $R(w_1) = C(w_2)$. Entonces $H(w_1, w_2) = 2$ y como $R(w_1)$ y $C(w_2)$ coinciden, $H(R(w_1), C(w_2)) = 0 < d$. Por lo tanto debemos incluir la arista $w_1 w_2$ en nuestro grafo. Los pares de vértices que cumplen esta condición son AG y CT , TC y GA , AC y GT , TG y CA .

Caso 2. w_1 y w_2 no comparten letras y $w_1 = C(w_2)$. En este caso $R(w_1)$ y $C(w_2)$ tienen las mismas letras pero en diferente posición. Entonces $H(w_1, w_2) = 2$ y $H(R(w_1), C(w_2)) = 2$. Entonces no debemos incluir la arista $w_1 w_2$ en nuestro grafo. Los pares de vértices que cumplen esta condición son AG y TC , CT y GA , AC y TG , GT y CA .

Caso 3. w_1 y w_2 comparten una letra x que se encuentra en la misma posición en ambas palabras. En este caso $H(w_1, w_2) = 1 = d$. Además, w_1 y $C(w_2)$ también comparten una letra en la misma posición (distinta de x), por lo tanto $R(w_1)$ y $C(w_2)$ no comparten letras en la misma posición y $H(R(w_1), C(w_2)) = 2 > d$. Por lo tanto tampoco debemos incluir la arista $w_1 w_2$ en nuestro grafo. Las parejas que cumplen esta

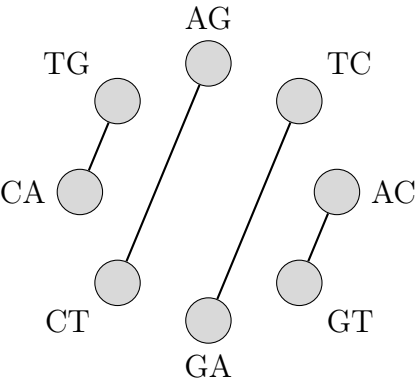
condición son AG y AC , AG y TG , TG y TC , TG y AG , CA y CT , CA y GA , CT y GT , GA y GT .

Caso 4. w_1 y w_2 comparten una letra que se encuentra en diferente posición en ambas palabras. En este caso $H(w_1, w_2) = 2 > d$. Además, $R(w_1)$ y $C(w_2)$ comparten una letra en la misma posición, entonces $H(R(w_1), C(w_2)) = 1 = d$. Por lo tanto tampoco debemos incluir la arista w_1w_2 en nuestro grafo. Las parejas que cumplen esta condición son AG y CA , AG y GT , TG y CT , TG y GA , CA y TC , CT y AC , GA y AC , GT y TC .

Caso 5. w_1 y w_2 comparten ambas letras pero en diferente posición. En este caso $R(w_1) = w_2$ y $H(w_1, w_2) = 2 > d$. Además, $R(w_1)$ y $C(w_2)$ no comparten ninguna letra y por lo tanto $H(R(w_1), C(w_2)) = 2 > d$. Entonces la arista w_1w_2 no es parte de nuestro grafo. Las parejas que cumplen esta condición son AG y GA , TC y CT , AC y CA , GT y TG .

Estos cinco casos cubren las 28 parejas posibles de vértices. Entonces nuestro grafo consiste de las cuatro aristas disjuntas $\{AG, CT\}$, $\{TC, GA\}$, $\{AC, GT\}$ y $\{TG, CA\}$.

Observamos que si tomamos un vértice de cada arista obtenemos un conjunto independiente de tamaño 4. Además, si tomamos un conjunto de 5 vértices este debe contener una arista.



Ejemplo 3.3. Vamos a generar el grafo que modela la instancia del problema $(2,2)$.

De manera análoga al ejemplo anterior, los vértices del grafo serán las palabras: AC, AG, CA, CT, GA, GT, TC, TG. Tenemos que revisar 28 parejas de vértices para determinar si forman arista o no. Nuevamente, debemos analizar 5 casos diferentes para decidir si incluimos cada arista o no. En el ejemplo anterior ya calculamos $H(w_1, w_2)$ y $H(R(w_1), C(w_2))$ en los 5 casos.

Caso 1. w_1 y w_2 no comparten letras y $R(w_1) = C(w_2)$. Entonces $H(w_1, w_2) = 2$ y $H(R(w_1), C(w_2)) = 0 < d$. Por lo tanto, debemos incluir la arista $w_1 w_2$ en nuestro grafo. Los pares de vértices que cumplen esta condición son AG y CT, TC y GA, AC y GT, TG y CA.

Caso 2. w_1 y w_2 no comparten letras y $w_1 = C(w_2)$. En este caso $H(w_1, w_2) = 2$ y $H(R(w_1), C(w_2)) = 2$. Entonces no debemos incluir la arista $w_1 w_2$ en nuestro grafo. Los pares de vértices que cumplen esta condición son AG y TC, CT y GA, AC y TG, GT y CA.

Caso 3. w_1 y w_2 comparten una letra x que se encuentra en la misma posición en ambas palabras. En este caso $H(w_1, w_2) = 1 < d$ y $H(R(w_1), C(w_2)) = 2$. Por lo tanto sí debemos incluir la arista $w_1 w_2$ en nuestro grafo. Las parejas que cumplen esta condición son AG y AC, AG y TG, TG y TC, TG y AG, CA y CT, CA y GA, CT y GT, GA y GT.

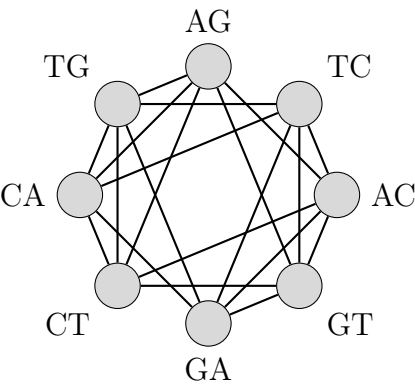
Caso 4. w_1 y w_2 comparten una letra que se encuentra en diferente posición en ambas palabras. En este caso $H(w_1, w_2) = 2$ y $H(R(w_1), C(w_2)) = 1 < d$. Por lo tanto sí debemos incluir la arista $w_1 w_2$ en nuestro grafo. Las parejas que cumplen esta condición son AG y CA, AG y GT, TG y CT, TG y GA, CA y TC, CT y AC, GA y AC, GT y TC.

Caso 5. w_1 y w_2 comparten ambas letras pero en diferente posición. En este caso $H(w_1, w_2) = 2$ y $H(R(w_1), C(w_2)) = 2$. Entonces la arista $w_1 w_2$ no es parte de nuestro grafo. Las parejas que cumplen esta condición son AG y GA, TC y CT, AC y CA, GT y TG.

Estos cinco casos cubren las 28 parejas de vértices por lo que las aristas del grafo son las siguientes: $\{AG, CT\}$, $\{TC, GA\}$, $\{AC, GT\}$, $\{TG, CA\}$, $\{AG, AC\}$, $\{AG, TG\}$, $\{TG, TC\}$, $\{TG, AG\}$, $\{CA, CT\}$, $\{CA, GA\}$, $\{CT, GT\}$, $\{GA, GT\}$, $\{AG, CA\}$, $\{AG, GT\}$, $\{TG, CT\}$, $\{TG, GA\}$, $\{CA, TC\}$, $\{CT, AC\}$, $\{GA, AC\}$, $\{GT, TC\}$.

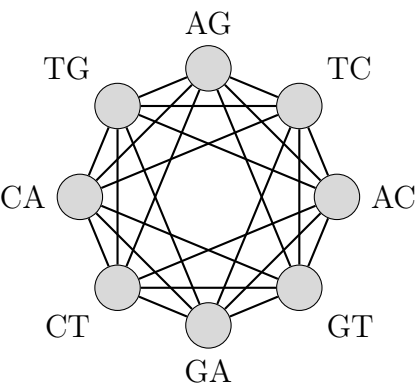
Observamos que todos los vértices tienen grado 5. Además, si fijamos un vértice, los dos vértices que no están conectados con él sí están conectados entre sí. Por lo tanto el tamaño máximo de un conjunto independiente es 2.

Ejemplo 3.4. Vamos a generar el grafo que modela la instancia del problema



(2,3).

En el ejemplo 2 observamos que para cualquier par de nodos w_1, w_2 , $H(w_1, w_2) \leq 2$ y $H(R(w_1), C(w_2)) \leq 2$ por lo tanto violan la condición $H(w_1, w_2) \geq d$. Así, el grafo que modela esta instancia de problema es el grafo completo de 8 vértices. Por lo tanto el máximo tamaño de un conjunto independiente es 1.



Los tamaños estimados de los grafos que modelan diversas instancias del problema se dan en la Tabla 3) que hemos tomado de [15].

Cuadro 3: Tamaños estimados de los grafos.

Tamaño de la instancia	V	E	Tamaño de la instancia	V	E
n=4, d=2	88	396	n=10, d=2	238,848	$2,51 \cdot 10^9$
n=4, d=3	88	2064	n=10, d=3	238,848	$57,14 \cdot 10^9$
n=4, d=4	88	3872	n=10, d=4	238,848	$0,38 \cdot 10^{12}$
n=6, d=2	1,088	7,372	n=10, d=5	238,848	$1,32 \cdot 10^{12}$
n=6, d=3	1,088	56,032	n=10, d=6	238,848	$3,18 \cdot 10^{12}$
n=6, d=4	1,088	202,192	n=10, d=7	238,848	$12,08 \cdot 10^9$
n=6, d=5	1,088	469,472	n=10, d=8	238,848	$22,55 \cdot 10^9$
n=6, d=6	1,088	586,976	n=10, d=9	238,848	$26,38 \cdot 10^9$
			n=10, d=10	238,848	$28,5 \cdot 10^9$
n=8, d=2	17,440	145,240	n=12, d=2	5,664,384	$45,81 \cdot 10^9$
n=8, d=3	17,440	$1,75 \cdot 10^6$	n=12, d=3	5,664,384	$0,38 \cdot 10^{12}$
n=8, d=4	17,440	$9,43 \cdot 10^6$	n=12, d=4	5,664,384	$1,61 \cdot 10^{12}$
n=8, d=5	17,440	$32,65 \cdot 10^6$	n=12, d=5	5,664,384	$0,78 \cdot 10^{15}$
n=8, d=6	17,440	$91,17 \cdot 10^6$	n=12, d=6	5,664,384	$214,44 \cdot 10^9$
n=8, d=7	17,440	$138,89 \cdot 10^6$	n=12, d=7	5,664,384	$0,78 \cdot 10^{15}$
n=8, d=8	17,440	$151,5 \cdot 10^6$	n=12, d=8	5,664,384	$21,14 \cdot 10^{12}$
			n=12, d=9	5,664,384	$4,28 \cdot 10^{12}$
			n=12, d=10	5,664,384	$6,04 \cdot 10^{12}$
			n=12, d=11	5,664,384	$6,48 \cdot 10^{12}$
			n=12, d=12	5,664,384	$6,71 \cdot 10^{12}$

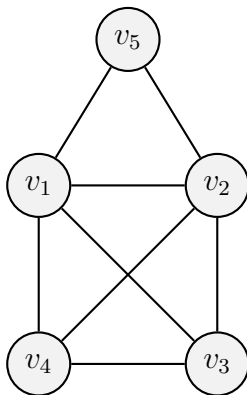
4 Modelando el problema del máximo conjunto independiente con Partial MaxSAT

Dado un grafo $G = (V, E)$, podemos modelar el problema de encontrar un conjunto independiente a través del Problema SAT.

Ejemplo 4.1. *Queremos determinar si existe un conjunto independiente de tamaño $k = 2$ en el grafo $G = (V, E)$ donde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y*

$$E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2, v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_4\}$$

.



Para cada vértice v_i con $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, sea x_i una variable booleana, la idea es que los nodos correspondientes a las variables booleanas que resulten verdaderas formen un conjunto independiente. Para esto, vamos a definir las cláusulas de forma que las variables correspondientes a los dos extremos de una arista no puedan ser verdaderas al mismo tiempo.

Para cada arista $v_i v_j \in E$, consideramos la cláusula C_{ij} como $(\neg x_i \vee \neg x_j)$. Observamos que el único caso donde esta cláusula es falsa es cuando x_i y x_j son verdaderas simultáneamente. Por lo tanto para que la cláusula sea verdadera por lo menos una de las dos variables debe ser falsa. Esto nos garantiza que al tomar los vértices asociados a las variables que resulten verdaderas obtendremos un conjunto independiente. Sea:

$$\Phi_I = (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_1) \\ \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_5) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_5) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_4)$$

Ahora, vamos a agregar cláusulas que nos garanticen que al menos haya dos variables verdaderas, esto para que el conjunto independiente que obtendremos no sea un singulete. Para garantizar que al menos haya dos variables verdaderas, debemos evitar que 4 variables sean falsas al mismo tiempo.

Las cláusulas que vamos a considerar son:

1. C_5 es $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)$
2. C_4 es $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_5)$
3. C_3 es $(x_1 \vee x_2 \vee x_4 \vee x_5)$

4. C_2 es $(x_1 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)$

5. C_1 es $(x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)$

Observamos que C_i es la única cláusula donde no aparece la variable x_i . Además, las cuatro variables que aparecen en C_i son falsas si y solamente si C_i es falsa. Por lo tanto si C_i es falsa, la única variable que podría ser verdadera es x_i y entonces no se cumpliría la restricción de que el tamaño del conjunto independiente es 2. Entonces sean:

$$\Phi_C = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4 \wedge C_5$$

y

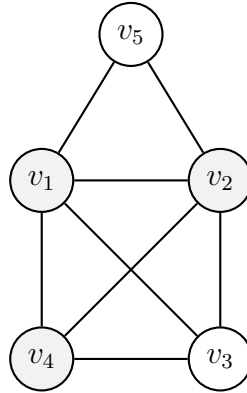
$$\Phi = \Phi_C \wedge \Phi_I$$

Ya quedefinimos la fórmula booleana que modela el grafo, buscamos una asignación de verdad λ para las variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 que haga verdadera a Φ .

- Si elegimos $\lambda(x_5) = 1$:
 - Como $\neg x_1 \vee \neg x_5$ es una cláusula de Φ_I , $\lambda(x_1) = 0$.
 - Como $\neg x_2 \vee \neg x_5$ es una cláusula de Φ_I , $\lambda(x_2) = 0$.
- Como $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)$ es una cláusula de Φ_C , alguno de x_3 o x_4 pueden ser verdaderos.
- Observamos que ninguna cláusula de Φ_{Indep} incluye a x_5 y x_3 entonces podemos asignar $\lambda(x_3) = 1$. Como $\neg x_3 \vee \neg x_4$ es una cláusula de Φ_I , $\lambda(x_4) = 0$.

Por lo tanto, la asignación $\lambda(x_1) = 0, \lambda(x_2) = 0, \lambda(x_3) = 1, \lambda(x_4) = 0, \lambda(x_5) = 1$ hace verdadera a la fórmula Φ . Observamos que entonces $\{v_3, v_5\}$ es un conjunto independiente.

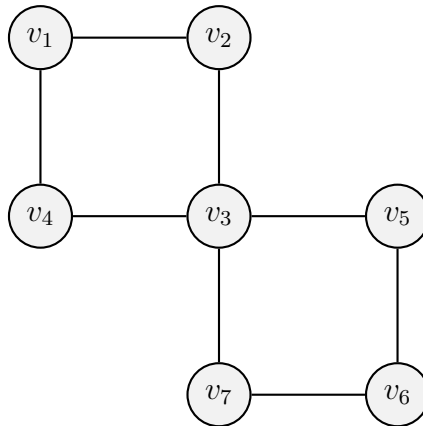
De forma análoga pudimos asignar $\lambda(x_3) = 0$ y $\lambda(x_4) = 1$ obteniendo el conjunto independiente $\{v_4, v_5\}$.



Si bien podemos modelar un conjunto independiente mediante SAT, las cláusulas que elegimos no nos garantizan que este sea maximal. En el siguiente ejemplo veremos cómo encontrar el máximo conjunto independiente de un grafo y lo haremos traduciendo el problema a una fórmula de Partial MaxSAT y encontrando una asignación óptima para la fórmula.

Ejemplo 4.2. *Vamos a encontrar el máximo conjunto independiente del grafo $G = (V, E)$ donde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ y las aristas*

$$E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1, v_3v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_3\}.$$



Para cada vértice v_i con $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, sea x_i una variable booleana, nuevamente la idea es que los nodos correspondientes a las variables booleanas que resulten verdaderas formen un conjunto independiente. Enumeramos las aristas $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$, $e_3 = v_3v_4$, $e_4 = v_4v_1$, $e_5 = v_3v_5$, $e_6 = v_5v_6$,

$e_7 = v_6v_7$, $e_8 = v_7v_3$. Para cada arista $e_i = v_jv_k$ definimos la cláusula C_i como $(\neg x_j \vee \neg x_k)$. Como en el ejemplo anterior, el único caso donde esta cláusula es falsa es cuando x_j y x_k son verdaderas simultáneamente. Por lo tanto para que la cláusula sea verdadera por lo menos una de las dos variables debe ser falsa. Esto nos garantiza que al tomar los vértices asociados a las variables que resulten verdaderas obtendremos un conjunto independiente. Estas cláusulas serán las cláusulas duras pues nos sirven para garantizar que los vértices asociados a las variables que resulten verdaderas van a formar un conjunto independiente.

Ahora, vamos a agregar las cláusulas blandas que nos garanticen que nuestra asignación haga verdaderas la mayor cantidad de variables posibles. Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, sea C_{7+i} la cláusula que consiste en la variable booleana x_i . A estas cláusulas les asignaremos el peso 1. Recordamos que en el problema Partial MaxSAT se busca minimizar el total de los pesos de las cláusulas que sean falsas bajo la asignación. Como en este caso las cláusulas blandas son las variables y el peso de cada una es 1, lo que se va a minimizar es la cantidad de variables que resulten falsas, es decir, la cantidad de vértices que no agregaremos al conjunto independiente.

Con todas nuestras cláusulas podemos definir la fórmula de Partial MaxSAT

$$\Psi = \{(C_1, \infty), \dots, (C_7, \infty), (C_8, 1), \dots, (C_{15}, 1)\}.$$

Observamos que si λ es una asignación de verdad para las variables $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ entonces

$$\text{cost}(\Psi, \lambda) = \sum_{\substack{(C_i, w_i) \in \Psi \\ \lambda(C_i) = 0}} w_i = \sum_{\substack{i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ \lambda(x_i) = 0}} 1.$$

Para resolver el problema Partial MaxSAT para la fórmula Ψ , buscaremos una asignación $\lambda : \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\} \rightarrow \{0, 1\}$ que sea óptima. Vamos a revisar varios casos posibles para λ .

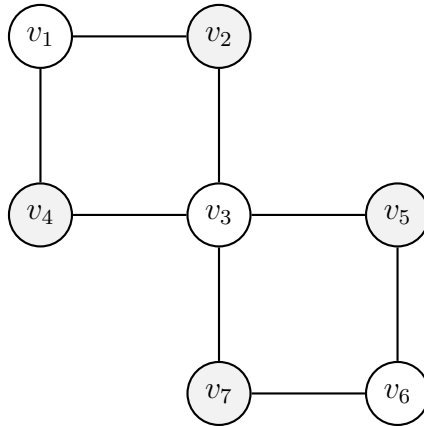
Caso 1. Primero, vamos a ver qué pasa si tenemos una asignación de verdad λ tal que $\lambda(x_3) = 1$. Este sería el caso donde incluimos el vértice v_3 en un conjunto independiente. Como x_3 es parte de las cláusulas duras C_2 , C_3 , C_5 y C_8 ; para hacer verdaderas esas cláusulas es necesario que $\lambda(x_2) = 0$, $\lambda(x_4) = 0$, $\lambda(x_5) = 0$ y $\lambda(x_7) = 0$. Las variables que podrían ser verdaderas o falsas son x_1 y x_7 , y como ambas no son parte de una misma cláusula dura

todas las asignaciones de estas variables dan lugar a una asignación válida para Ψ . Osea que podemos tener entre 4 y 6 variables falsas. Tendremos 4 variables falsas si $\lambda(x_1) = 1$ y $\lambda(x_6) = 1$; por otro lado tendremos 6 variables falsas si $\lambda(x_1) = 0$ y $\lambda(x_6) = 0$.

Observamos que esta asignación hace verdaderas a todas las cláusulas duras y

$$4 \leq \sum_{\substack{i \in \{1,2,3,4,5,6,7\} \\ \lambda(x_i)=0}} 1 \leq 6$$

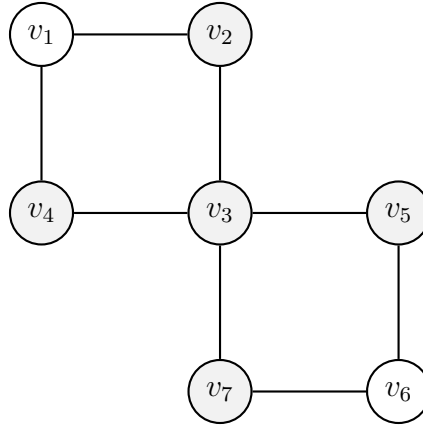
Entonces en este caso el valor mínimo del costo de λ es 4.



Caso 2. Ahora veamos qué pasa si tenemos una asignación de verdad λ tal que $\lambda(x_3) = 0$. Sin importar la asignación de x_2 , x_4 , x_5 y x_7 las cláusulas C_2 , C_3 , C_5 y C_8 son verdaderas. Tenemos los siguientes casos:

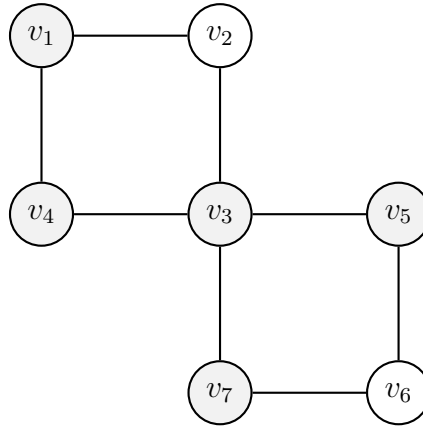
- *Todas las variables x_2 , x_4 , x_5 y x_7 son falsas, es decir $\lambda(x_2) = 0$, $\lambda(x_4) = 0$, $\lambda(x_5) = 0$ y $\lambda(x_7) = 0$. En ese caso las únicas que pueden ser verdaderas o falsas son x_1 y x_6 así*

$$5 \leq \sum_{\substack{i \in \{1,2,3,4,5,6,7\} \\ \lambda(x_i)=0}} 1 \leq 7.$$



- *Exactamente una variable de x_2 , x_4 , x_5 y x_7 es verdadera. En este caso*

$$4 \leq \sum_{\substack{i \in \{1,2,3,4,5,6,7\} \\ \lambda(x_i)=0}} 1 \leq 7.$$

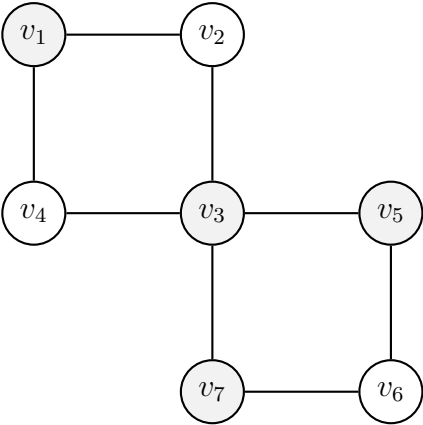


- *Exactamente dos variables de x_2 , x_4 , x_5 y x_7 son verdaderas. Esencialmente hay dos casos distintos.*

1. *Suponga que $\lambda(x_2) = 1$ y $\lambda(x_4) = 1$, $\lambda(x_5) = 0$ y $\lambda(x_7) = 0$. Como x_1 y x_2 pertenecen a la cláusula C_2 y como x_2 es verdadera entonces $\lambda(x_1) = 0$ En este caso*

$$4 \leq \sum_{\substack{i \in \{1,2,3,4,5,6,7\} \\ \lambda(x_i)=0}} 1 \leq 5$$

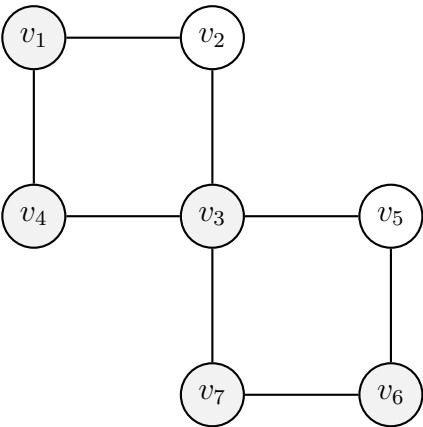
Observamos que el caso donde $\lambda(x_2) = 0$ y $\lambda(x_4) = 0$, $\lambda(x_5) = 1$ y $\lambda(x_7) = 1$ es análogo.



2. Suponga que $\lambda(x_2) = 1$ y $\lambda(x_4) = 0$, $\lambda(x_5) = 1$ y $\lambda(x_7) = 0$. Como x_1 y x_2 son parte de la cláusula C_1 y como x_2 es verdadera entonces x_1 debe ser falsa. Como x_5 y x_6 son parte de la cláusula C_6 y como x_5 es verdadera entonces x_6 debe ser falsa. Así, $\lambda(x_1) = 0$ y $\lambda(x_6) = 0$. Entonces

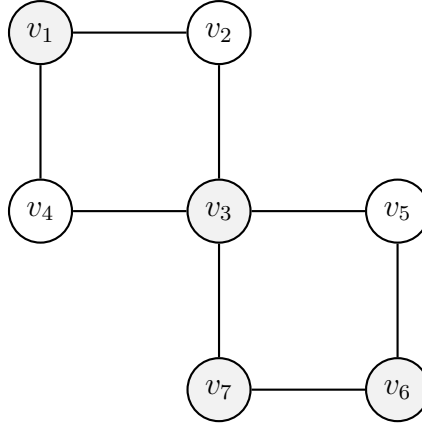
$$\sum_{\substack{i \in \{1,2,3,4,5,6,7\} \\ \lambda(x_i)=0}} 1 = 5$$

Observamos que el caso donde $\lambda(x_2) = 0$ y $\lambda(x_4) = 1$, $\lambda(x_5) = 0$ y $\lambda(x_7) = 1$ es análogo.



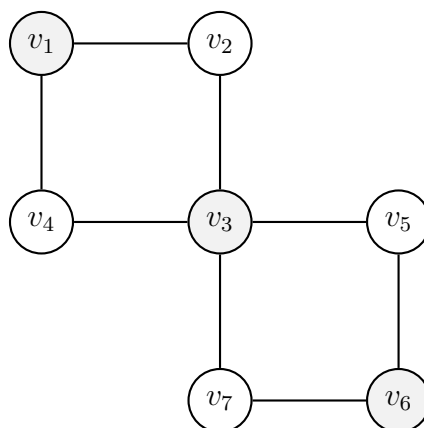
- *Exactamente tres variable de entre x_2 , x_4 , x_5 y x_7 son verdaderas. Sin pérdida de generalidad suponga que $\lambda(x_2) = 1$ y $\lambda(x_4) = 1$, $\lambda(x_5) = 1$ y $\lambda(x_7) = 0$. Como x_1 y x_2 son parte de la cláusula C_1 y como x_2 es verdadera entonces x_1 debe ser falsa. Como x_5 y x_6 son parte de la cláusula C_6 y como x_5 es verdadera entonces x_6 debe ser falsa. En este caso*

$$\sum_{\substack{i \in \{1,2,3,4,5,6,7\} \\ \lambda(x_i)=0}} 1 = 5$$



- *Todas las variables x_2 , x_4 , x_5 y x_7 son verdaderas, es decir $\lambda(x_2) = 1$, $\lambda(x_4) = 1$, $\lambda(x_5) = 1$ y $\lambda(x_7) = 1$. Como x_1 y x_2 son parte de la cláusula C_1 y como x_2 es verdadera entonces x_1 debe ser falsa. Como x_5 y x_6 son parte de la cláusula C_6 y como x_5 es verdadera entonces x_6 debe ser falsa. Así, obtenemos que*

$$cost(\Psi, \lambda) = \sum_{\substack{i \in \{1,2,3,4,5,6,7\} \\ \lambda(x_i)=0}} 1 = 3$$



Observamos que es en el último caso donde se minimiza $\text{cost}(\Psi, \lambda)$, es decir, cuando todas las variables x_2, x_4, x_5 y x_7 son verdaderas. Así, hemos encontrado el máximo conjunto independiente del grafo que es $I = \{v_2, v_4, v_5, v_7\}$.

Grafos que modelan el problema del diseño de palabras código del ADN de longitud 4, 6 y 8

Para estudiar las instancias de las palabras código de ADN con $n = 4$, $n = 6$ y $n = 8$ haremos uso de Python ya que los grafos que modelan las instancias tienen demasiados vértices y aristas. Ahora presentamos los resultados que obtuvimos con el código que aparece al final de esta Subsección.

- $n = 4, d = 2$.

El grafo que modela esta instancia, $G_{4,2}$ tiene 88 vértices de los cuales 72 tienen grado 9 y 16 tienen grado 5. A continuación presentamos los

vértices de $G_{4,2}$.

'AACC','AACG','AAGC','AAGG','ACAC','ACAG','ACCA','ACCT','AC
CTC','ACTG','AGAC','AGAG','AGCA','AGGA','AGGT','AGTC','AGTG
TCC','ATCG','ATGC','ATGG','CAAC','CAAG','CACA','CACT','CAGA
'CAGT','CATC','CCAA','CCAT','CCTA','CCTT','CGAA','CGAT','CGT
'CGTT','CTAC','CTCA','CTCT','CTGA','CTGT','CTTC','CTTG','GAA
'GAAG','GACA','GACT','GAGA','GAGT','GATG','GCAA','GCAT','GCT
'GCTT','GGAA','GGAT','GGTA','GGTT','GTAG','GTCA','GTCT','GTG
'GTGT','GTTC','GTTG','TACC','TACG','TAGC','TAGG','TCAC','TCA
'TCCA','TCCT','TCGT','TCTC','TCTG','TGAC','TGAG','TGCT','TGG
'TGGT','TGTC','TGTG','TTCC','TTCG','TTGC','TTGG'

El máximo conjunto independiente tiene 24 nodos:

AGG','ACTC','AGGT','AGTG','ATCG','CAGA',
'CCAA','CTAC','CTGT','CTTG','GAAC','GACA',
'GATG','GCAT','GGAA','GGTT','GTCT','GTGA',
'TACG','TAGC','TCCA','TCGT','TGAG','TGCT'

- $n = 4, d = 4$

El grafo que modela la instancia para $n = 4, d = 4$, $G_{4,4}$ tiene 72 nodos y 2412 aristas. Todos los nodos tienen grado 67. Los vértices de $G_{4,4}$ son los vértices del grafo $G_{4,2}$ pero removiendo los siguientes vértices de bido a que cumplen $H(R(w), C(w)) = 2$.

'TGCT','CTTG','TCGT','CATC','GTAG','AGCA','TCCA','ACCT',
'CTAC','GATG','AGGT','GTTC','GAAC','ACGA','CAAG','TGGA'

El máximo conjunto independiente tiene 2 nodos: 'TGTG' y 'TACG'.

- $n=6, d=2$, El grafo G que modela esta instancia tiene 1280 vértices y 8320 aristas. Todos los nodos tienen grado 13. El conjunto con los

vértices que mostramos a continuación es un conjunto independiente de

tamaño máximo y tiene cardinalidad 320.

AACCC', *AAACGG'*, *AAAGCG'*, *AAAGGC'*, *AACACC'*, *AACAGG'*,
ACCAC', *AACCCA'*, *AACCGT'*, *AACCTG'*, *AACGAG'*, *AACGCT'*,
ACGGA', *AACGTC'*, *AACTCG'*, *AACTGC'*, *AAGACG'*, *AAGAGC'*,
AGCAG', *AAGCCT'*, *AAGCGA'*, *AAGCTC'*, *AAGGAC'*, *AAGGCA'*,
AGGGT', *AAGGTG'*, *AAGTCC'*, *AAGTGG'*, *AATCCG'*, *AATCGC'*,
ATGCC', *AATGGG'*, *ACAACC'*, *ACAAGG'*, *ACACAC'*, *ACACCA'*,
CACGT', *ACACTG'*, *ACAGAG'*, *ACAGCT'*, *ACAGGA'*, *ACAGTC'*,
CATCG', *ACATGC'*, *ACCAAC'*, *ACCACA'*, *ACCAGT'*, *ACCATG'*,
CCCAA', *ACCGAT'*, *ACCGTA'*, *ACCTAG'*, *ACCTCT'*, *ACCTGA'*,
CCTTC', *ACGAAG'*, *ACGACT'*, *ACGAGA'*, *ACGATC'*, *ACGCAT'*,
CGCTA', *ACGGAA'*, *ACGTAC'*, *ACGTCA'*, *ACGTTG'*, *ACTACG'*,
CTAGC', *ACTCAG'*, *ACTCCT'*, *ACTCGA'*, *ACTCTC'*, *ACTGAC'*,
CTGCA', *ACTGTG'*, *ACTTCC'*, *ACTTGG'*, *AGAACG'*, *AGAAGC'*,
GACAG', *AGACCT'*, *AGACGA'*, *AGACTC'*, *AGAGAC'*, *AGAGCA'*,
GAGTG', *AGATCC'*, *AGATGG'*, *AGCAAG'*, *AGCACT'*, *AGCAGA'*,
GCATC', *AGCCAT'*, *AGCCTA'*, *AGCGAA'*, *AGCTAC'*, *AGCTCA'*,
GCTTG', *AGGAAC'*, *AGGACA'*, *AGGATG'*, *AGGCAA'*, *AGGGAT'*,
GGGTA', *AGGTAG'*, *AGGTGA'*, *AGGTTC'*, *AGTACC'*, *AGTAGG'*,
GTCAC', *AGTCCA'*, *AGTCTG'*, *AGTGAG'*, *AGTGGA'*, *AGTGTC'*,
GTTCG', *AGTTGC'*, *ATACCG'*, *ATACGC'*, *ATAGCC'*, *ATAGGG'*,
TCACG', *ATCAGC'*, *ATCCAG'*, *ATCCGA'*, *ATCCTC'*, *ATCGAC'*,
TCGCA', *ATCGTG'*, *ATCTCC'*, *ATCTGG'*, *ATGACC'*, *ATGAGG'*,
TGCAC', *ATGCCA'*, *ATGCTG'*, *ATGGAG'*, *ATGGGA'*, *ATGGTC'*,
TGTCG', *ATGTGC'*, *ATTCCC'*, *ATTCCG'*, *ATTGCG'*, *ATTGGC'*,
'CAAACC', *'CAAAGG'*, *'CAACAC'*, *'CAACCA'*, *'CAACTG'*, *'CAAGAG'*,
'CAAGGA', *'CAAGTC'*, *'CAATCG'*, *'CAATGC'*, *'CACAAC'*, *'CACACA'*,
'CACATG', *'CACCAA'*, *'CACGTA'*, *'CACTAG'*, *'CACTGA'*, *'CACTTC'*,
'CAGAAG', *'CAGAGA'*, *'CAGATC'*, *'CAGCTA'*, *'CAGGAA'*, *'CAGTAC'*,
'CAGTCA', *'CATACG'*, *'CATAGC'*, *'CATCAG'*, *'CATCGA'*, *'CATCTC'*,
'CATGAC', *'CATGCA'*, *'CATTCC'*, *'CATTGG'*, *'CCAAAC'*, *'CCAACA'*,
'CCACAA', *'CCAGTA'*, *'CCATAG'*, *'CCATGA'*, *'CCATTC'*, *'CCCAAA'*,
'CCCTTA', *'CCGATA'*, *'CCGTAA'*, *'CCTAAG'*, *'CCTAGA'*, *'CCTATC'*,
'CCTCTA', *'CCTGAA'*, *'CCTTAC'*, *'CCTTCA'*, *'CGAAAG'*, *'CGAAGA'*,

- $n = 6, d = 4$ 1,088 vértices, 201,440 aristas

Para este grafo el algoritmo que usamos no resuelve el problema en un tiempo razonable. Usando un algoritmo que aproxima el problema en Python obtenemos el siguiente conjunto de 14 nodos:

*ACCCT', 'ACAAGC', 'ACCGAA', 'AGTTCC', 'ATAGCG', 'ATGCGA',
'CAACAG', 'CACATC', 'CCATCA', 'CGTAGA', 'CTTGAC', 'GAGTAC',
'GCGATA', 'TAGGCA'*

- $n = 8, d = 2$ El grafo G que modela esta instancia tiene 17,824 vértices y 150,736 aristas. Para este grafo el algoritmo que usamos no resuelve el problema en un tiempo razonable. Usando un algoritmo que aproxima el problema en Python obtuvimos un conjunto independiente de 4,336 nodos.

- $n = 8, d = 4$

El grafo G que modela esta instancia tiene 17,440 vértices y 9,110,096 aristas. Con otros enfoques se han encontrado conjuntos independientes de 128 y 224 secuencias. Por la gran cantidad de aristas el algoritmo que resuelve MaxSAT no es eficiente en este grafo. Usando una aproximación obtuvimos un conjunto independiente de 112 secuencias.

AAACCCC', 'AAAAGGGG', 'AACCAACC', 'AACCCGAT', 'AACCGCTA',
 ACCTTGG', 'AAGGAAGG', 'AAGGCGTA', 'AAGGGCAT', 'AAGGTTCC',
 ATTCCGG', 'AATTGGCC', 'ACACACAC', 'ACACCAGT', 'ACACGTCA',
 CACTGTG', 'ACCAACGT', 'ACCACAAC', 'ACCAGTTG', 'ACCATGCA',
 CGTACCA', 'ACGTCATG', 'ACGTGTAC', 'ACTGACTG', 'ACTGCACA',
 CTGTGAC', 'AGAGAGAG', 'AGAGCTGA', 'AGAGGACT', 'AGAGTCTC',
 GCTAGGA', 'AGCTCTAG', 'AGCTGATC', 'AGCTTCCT', 'AGGACTTC',
 GGAGAAG', 'AGGATCGA', 'AGTCAGTC', 'AGTCGAGA', 'AGTCTCAG',
 TATCGCG', 'ATATGCGC', 'ATCGATCG', 'ATCGCCAA', 'ATCGTAGC',
 TGCATGC', 'ATGCGGAA', 'ATGCTACG', 'ATTACGGC', 'ATTAGCCG',
 'CAACACCA', 'CAACCATG', 'CAACGTAC', 'CAACAACCTG', 'CACACAC',
 'CACATGAC', 'CAGTACAC', 'CAGTGTC', 'CATGCAAC', 'CATGTGCA',
 'CCAAATCG', 'CCAACCAA', 'CCAATAGC', 'CCCCAAAA', 'CCGGTTA',
 'CCTTATGC', 'CCTTGGA', 'CCTTTACG', 'CGATAACC', 'CGATGCTA',
 'CGCGTATA', 'CGGCATTA', 'CGTACGTA', 'CGTATTCC', 'CTAGCTTC',
 'CTAGGAAG', 'CTAGTCGA', 'CTCTAGTC', 'CTCTGAGA', 'CTCTTCA',
 'CTGACTGA', 'CTGATCTC', 'CTTCAGGA', 'CTTCGATC', 'GAAGAGGA',
 'GAAGGATC', 'GACTCTGA', 'GACTTCTC', 'GAGAGAGA', 'GATCTCGA',
 'GCATCGTA', 'GCATTTCC', 'GCCGATTA', 'GCGCTATA', 'GCTAAACC',
 'GCTAGCTA', 'GGAAGGAA', 'GGCCTTAA', 'GGGGAAAA', 'GGTTCCAA',
 'GTACCAAC', 'GTAAGTGA', 'GTCAACAC', 'GTCAGTCA', 'GTGTCACA',
 'GTTGACCA', 'TACGGGAA', 'TAGCCCAA', 'TCAGGAGA', 'TCCTTCGA',
 'TGACCACA', 'TGCAACCA'

A continuación presentamos el código con el cual calculamos el máximo conjunto independiente para los grafos que modelan el problema de códigos de ADN.

```

1 import itertools
2 from pysat.examples.rc2 import RC2
3 from pysat.formula import WCNF
4

```

```

5 # --- 1. CONFIGURACIÓN INICIAL ---
6 LONGITUD = 4
7 DISTANCIA_MINIMA = 3
8 BASES = ['A', 'C', 'G', 'T']
9 MAPA_COMPLEMENTO = {'A': 'T', 'T': 'A', 'C': 'G', 'G': 'C'}
10
11 def obtener_reverso(s): return s[::-1]
12 def obtener_complemento_simple(s): return "".join([
13     MAPA_COMPLEMENTO[b] for b in s])
14 def distancia_hamming(s1, s2): return sum(1 for a, b in zip(s1
15     , s2) if a != b)
16 def cumple_contenido_gc(s):
17     return (s.count('A')+s.count('T')) == len(s)/2 and (s.
18     count('C')+s.count('G')) == len(s)/2
19
20 # --- 2. GENERAR VÉRTICES VÁLIDOS ---
21 print(f"Buscando código: Longitud {LONGITUD}, Distancia {
22     DISTANCIA_MINIMA}...")
23 todas = [''.join(p) for p in itertools.product(BASES, repeat=
24     LONGITUD)]
25 nodos_validos = []
26
27 for w in todas:
28     # Filtro GC
29     if not cumple_contenido_gc(w): continue
30
31     # Filtro Auto-Hibridación
32     rev_w = obtener_reverso(w)
33     comp_w = obtener_complemento_simple(w)
34     # Ahora pedimos que para cada nodo, la distancia de su
35     reverso con su complemento sea >= d
36     if distancia_hamming(rev_w, comp_w) >= DISTANCIA_MINIMA:
37         nodos_validos.append(w)
38
39 print(f"Nodos candidatos (cumplen filtros internos): {len(
40     nodos_validos)}")
41
42 # --- 3. MAPEO A id's ---
43 mapa_nombre_a_id = {nombre: i+1 for i, nombre in enumerate(
44     nodos_validos)}
45 mapa_id_a_nombre = {i+1: nombre for i, nombre in enumerate(
46     nodos_validos)}
47
48 wcnf = WCNF()

```

```

40
41 # --- 4. GENERAR RESTRICCIONES (ARISTAS) ---
42 conflictos = 0
43 print("Generando grafo de conflictos (esto será denso)...")
44
45 for i in range(len(nodos_validos)):
46     for j in range(i + 1, len(nodos_validos)):
47         u = nodos_validos[i]
48         v = nodos_validos[j]
49         id_u = mapa_nombre_a_id[u]
50         id_v = mapa_nombre_a_id[v]
51
52         hay_conflicto = False
53
54         # 1. Similitud Directa (d < 3)
55         if distancia_hamming(u, v) < DISTANCIA_MINIMA:
56             hay_conflicto = True
57
58         # 2. Hibridación Cruzada (d < 3)
59         if not hay_conflicto:
60             rev_u = obtener_reverso(u)
61             comp_v = obtener_complemento_simple(v)
62             if distancia_hamming(rev_u, comp_v) <
DISTANCIA_MINIMA:
63                 hay_conflicto = True
64
65         if hay_conflicto:
66             wcnf.append([-id_u, -id_v], weight=None)
67             conflictos += 1
68
69 print(f"Total de conflictos encontrados: {conflictos}")
70
71 # --- 5. TRADUCIR A FÓRMULAS BOOLEANAS ---
72 for id_nodo in mapa_id_a_nombre.keys():
73     wcnf.append([id_nodo], weight=1)
74
75 # --- 6. RESOLVER ---
76 print("\n--- EJECUTANDO SOLVER ---")
77 with RC2(wcnf) as rc2:
78     modelo = rc2.compute()
79
80     if modelo:
81         ids_elegidos = [x for x in modelo if x > 0]
82         adn_elegido = sorted([mapa_id_a_nombre[x] for x in

```

```
ids_elegidos])
83
84     print(f"Tamaño del código encontrado: {len(adn_elegido
)})")
85     print(f"Palabras: {adn_elegido}")
```

Listing 3.1: Generación de Código de ADN con PySAT

Como observamos en los cálculos que realizamos, la complejidad de los grafos crece demasiado al aumentar la longitud de las palabras y la distancia de Hamming. En el caso donde $n = 8$ y $d = 4$ ya se ha encontrado un conjunto de cadenas de 224 elementos pero usando cómputo convencional encontramos un conjunto de 112 cadenas. La conclusión es que para obtener resultados competitivos debemos buscar heurísticas que aprovechen la estructura de los grafos para agilizar los cálculos.

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por sus valiosos comentarios y sugerencias, que contribuyeron a mejorar este trabajo. Asimismo, la autora Sonia Navarro Flores agradece a SECIHTI por la beca posdoctoral durante la cual se realizó este trabajo.

Referencias

- [1] T. Akiba and Y. Iwata, *Branch-and-reduce exponential/fpt algorithms in practice: a case study of vertex cover*, Theoret. Comput. Sci. **609** (2016), 211–225.
- [2] D. P. Bovet, P. Crescenzi and D. Bovet, *Introduction to the Theory of Complexity*. London: Prentice Hall, 1994.
- [3] M. Butenko and S. Trukhanov, *Using critical sets to solve the maximum independent set problem*, Oper. Res. Lett. **32** (2004), 519–525.
- [4] Y. M. Chee and S. Ling, *Improved lower bounds for constant GC-content DNA codes*, IEEE Trans. Inform. Theory **54** (2008), 391–394.

- [5] M. Codish, M. Frank, V. Lagoon and P. J. Stuckey, *The DNA Word Design Problem: A New Constraint Model and New Results*, Proc. 26th Internat. Joint Conf. Artificial Intelligence, IJCAI (2017), 585–591.
- [6] R. Deaton, J. Chen, H. Bi and J. A. Rose, *A software tool for generating non-crosshybridizing libraries of DNA oligonucleotides*, Internat. Workshop on DNA Based Computers (2002), 252–261.
- [7] R. Dementiev, L. Kettner and P. Sanders, *STXXL: standard template library for XXL data sets*, Softw. Pract. Exper. **38** (2008), 589–637.
- [8] A. G. Frutos, Q. Liu, A. J. Thiel, A. M. Sanner, A. Condon, L. Smith and R. Corn, *Demonstration of a word design strategy for DNA computing on surfaces*, Nucleic Acids Res. **25** (1997), 4748–4757.
- [9] S. Lamm, P. Sanders, C. Schulz, D. Strash and R. F. Werneck, *Finding Near-Optimal Independent Sets at Scale*, Proc. 16th Meeting on Algorithm Engineering and Experimentation (ALENEX16) (2016), 138–150.
- [10] C. E. Larson, *A note on critical independence reductions*, Bull. Inst. Combin. Appl. **49** (2007), 34–46.
- [11] J. Leskovec and C. Faloutsos, *Sampling from large graphs*, Proc. 12th ACM SIGKDD Internat. Conf. on Knowledge Discovery and Data Mining (2006), 631–636.
- [12] U. S. Likhite, *Algorithms and data structures for external memory*, Found. Trends Theor. Comput. Sci. **2** (2008), 305–474.
- [13] D. Limbachiya, B. Rao and M. K. Gupta, *The art of dna strings: sixteen years of dna coding theory*, arXiv preprint arXiv:1607.00266 (2016).
- [14] D. Limbachiya, K. G. Benerjee, B. Rao and M. K. Gupta, *On DNA Codes using the Rings $\mathbb{Z}_4 + u\mathbb{Z}_4$* , 2018 IEEE Internat. Symposium on Information Theory (ISIT) (2018), 2401–2405.
- [15] V. Luncasu and M. Raschip, *A graph-based approach for the DNA word design problem*, IEEE/ACM Trans. Comput. Biol. Bioinform. **18** (2020), 2747–2752.

- [16] A. Marathe, A. E. Condon and R. M. Corn, *On combinatorial DNA word design*, J. Comput. Biol. **8** (2001), 201–219.
- [17] A. Metodi, M. Codish, V. Lagoon and P. J. Stuckey, *Boolean equipropagation for optimized SAT encoding*, Internat. Conf. on Principles and Practice of Constraint Programming (2011), 621–636.
- [18] R. Montemanni, *Combinatorial optimization algorithms for the design of codes: a survey*, J. Appl. Oper. Res. **7** (2015), 56–81.
- [19] P. Sanders and C. Schulz, *Think Locally, Act Globally: Highly Balanced Graph Partitioning*, Proc. 12th Internat. Symposium on Experimental Algorithms (SEA'13), LNCS **7933** (2013), 164–175.
- [20] E. Tomita, Y. Sutani, T. Higashi, S. Takahashi and M. Wakatsuki, *A simple and faster branch-and-bound algorithm for finding a maximum clique*, Internat. Workshop on Algorithms and Computation (2010), 191–203.
- [21] D. Tulpan and H. Hoos, *A Stochastic Local Search Algorithms for DNA Word Design*, 8th Internat. Workshop on DNA Based Computers, DNA8 (2002), 229–241.
- [22] D. Tulpan, *Effective heuristic methods for DNA strand design*, PhD thesis, University of British Columbia, 2006.
- [23] M. van Dongen, *CSPLib problem 033: Word design for dna computing on surfaces*, <http://www.csplib.org/Problems/prob033>.
- [24] Y. Wang, Y. Shen, X. Zhang, G. Cui and J. Sun, *An improved non-dominated Sorting Genetic Algorithm-II (INSGA-II) applied to the design of DNA codewords*, Math. Comput. Simulation **151** (2018), 131–150.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

sonianavarroflores91@gmail.com

cguillen@fcfm.buap.mx

clopez@fcfm.buap.mx

Topología

Capítulo 4

Algunos resultados sobre compactaciones del rayo $[0, \infty)$

Felipe de Jesús Aguilar Romero, Diana Cuaya Simbro,
David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP

Resumen

Una compactación de un espacio topológico consiste en “completarlo” mediante la adición de puntos ideales o fronteras, transformándolo en un espacio compacto. Este trabajo aborda, en primer lugar, las propiedades básicas y ejemplos fundamentales de las compactaciones del rayo $X = [0, \infty)$. Se demuestra que, para cualquier compactación cX , el residuo R resultante es necesariamente un subcontinuo de cX . A partir de esta base teórica, se presenta un ejemplo específico donde el residuo obtenido es el cuadrado unitario $[0, 1]^2$, lo que conduce al resultado general de que cualquier continuo X puede servir como residuo de una compactación de $[0, \infty)$. Finalmente, se analiza la clasificación de estos espacios, estableciendo la existencia de E -continuos que no son homeomorfos entre sí.

1 Introducción

Un problema fundamental en topología consiste en extender un espacio topológico dado a otro que posea propiedades deseables, como la compacidad. Desde los inicios de la topología general, a comienzos del siglo XX, con los trabajos de matemáticos como Pável Serguéyevich Alexandroff, Eduard Čech y Marshall Harvey Stone, el estudio de las compactaciones ha desempeñado un papel central en la comprensión de espacios no compactos y en la relación entre propiedades locales y globales.

A grandes rasgos, una compactación consiste en construir un espacio compacto a partir de otro que no lo es, mediante la adición de puntos. El

propósito de este proceso es obtener un espacio más completo que conserve las propiedades topológicas esenciales del espacio original y, al mismo tiempo, permita aprovechar características propias de la compacidad, tales como la existencia de puntos extremos, la convergencia de redes y sucesiones, y la posibilidad de extender funciones continuas definidas inicialmente en el espacio de partida.

En este trabajo se exploran algunos resultados relevantes en el tópico de las compactaciones del rayo $[0, \infty)$, un ejemplo clásico en topología que ilustra de manera clara la diversidad de compactaciones posibles de un mismo espacio. Se presentan algunos ejemplos visuales que ilustran estas ideas, así como propiedades básicas de las mismas. Se demuestra que todo continuo es el residuo de alguna compactación del rayo $[0, \infty)$. Asimismo, se exhiben dos compactaciones del rayo que no son homeomorfas y, posteriormente, se discute la generalización del concepto de compactaciones no comparables.

2 Preliminares

A lo largo de este trabajo se condireerará la siguiente notación. Si X es un espacio topológico y A un subconjunto de X , los símbolos $\text{cl}_X(A)$ e $\text{int}_X(A)$ denotan la **cerradura** de A y el **interior** de A en X , respectivamente. A su vez, Id_X denotará la función identidad de X en X . La cardinalidad de un conjunto A se representa por $|A|$ y $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$. Un **arco** será cualquier espacio homeomorfo a $[0, 1]$. Para $n \in \mathbb{N}$, una n -celda es cualquier espacio homeomorfo a $\prod_{i=1}^n [0, 1]_i \subset \mathbb{R}^n$. Denotaremos el cubo de Hilbert por $\mathbf{Q} = \prod_{i=1}^{\infty} [0, 1]_i$, y lo

consideramos con la métrica $d_{\mathbf{Q}}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$.

Un **continuo** es un espacio métrico con más de un punto, conexo y compacto. Un **subcontinuo** de un continuo X es un subconjunto cerrado, conexo y no vacío de X . Sea d la métrica de un continuo X , para $p \in X$, y $r > 0$, definimos $B_X(p, r) = \{x \in X : d(p, x) < r\}$.

Definición 2.1. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **conexo por trayectorias** si para cada par de puntos $p, q \in X$, existe una función $f : [0, 1] \rightarrow X$ continua tal que $f(0) = p$ y $f(1) = q$.*

Definición 2.2. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **arco conexo** si para cada par de puntos $p, q \in X$ existe un encaje homeomorfo $f : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f(0) = p$ y $f(1) = q$.

A modo de complemento, presentamos la demostración del siguiente resultado, cuya aplicación será relevante en este trabajo.

Teorema 2.3. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Entonces X es conexo si y solo si para cada $p, q \in X$ y cada $\epsilon > 0$, existen $x_0, x_1, \dots, x_m \in X$ tal que $x_0 = p$, $x_m = q$ y $d(x_{i-1}, x_i) < \epsilon$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

Demostración. $[\Rightarrow]$ Supongamos que X es conexo y sean $p, q \in X$ y $\epsilon > 0$. Dado que X es compacto entonces existen $x_0, x_1, \dots, x_s \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^s B\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right)$. Sean $\mathcal{B} = \{B(x_i, \frac{\epsilon}{2}) : i \in \{1, \dots, s\}\}$ y

$$\mathcal{C} = \{x \in X : \text{existe } B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\} \subset \mathcal{B} \text{ no vacío, finito e indexado tal que } p \in B_1, x \in B_n \text{ y } B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset \text{ para cualquier } i = 1, \dots, n-1\}.$$

Veamos que $\mathcal{C}$ es abierto de X . Si $x \in \mathcal{C}$ entonces existe $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\} \subset \mathcal{B}$ no vacío, finito e indexado tal que $x \in B_n$. Como $B_n \in \mathcal{B}$, entonces existe $k \in \{1, \dots, s\}$ tal que $B_n = B(x_k, \frac{\epsilon}{2})$, de ahí que B_n es abierto de X . Además, notemos que para todo $z \in B_1$, se tiene que $z \in \mathcal{C}$, por lo tanto $x \in B_1 \subset \mathcal{C}$. De manera que $\mathcal{C}$ es abierto.

Ahora, veamos que $X \setminus \mathcal{C}$ es abierto de X . Sea $x \in X \setminus \mathcal{C}$, entonces existe $j \in \{1, \dots, s\}$ tal que $x \in B(x_j, \frac{\epsilon}{2})$, luego observemos que para todo $w \in B(x_i, \frac{\epsilon}{2})$, se tiene que $w \in X \setminus \mathcal{C}$ (ya que en caso contrario, implicaría que $x \in \mathcal{C}$, lo cual es una contradicción). Por lo tanto $x \in B(x_j, \frac{\epsilon}{2}) \subset X \setminus \mathcal{C}$, de donde se sigue que $X \setminus \mathcal{C}$ es abierto de X . En conclusión, $\mathcal{C}$ es abierto y cerrado de X , además $p \in \mathcal{C}$ por lo que $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Por lo tanto, dado que X es conexo, se tiene que $\mathcal{C} = X$.

Como $q \in X = \mathcal{C}$ entonces existe $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\} \subset \mathcal{B}$ no vacío, finito e indexado tal que $p \in B_1$, $q \in B_n$ y $B_i \cap B_{i+1}$ para cualquier $k = 1, \dots, n-1$. Sea $t = 1, \dots, n$, como $B_t \in \mathcal{B}$ entonces existe $k \in \{1, \dots, s\}$ tal que $B_t = B(x_k, \frac{\epsilon}{2})$, denotemos por $y_t = x_k$. Evidentemente, $d(p, y_1) < \epsilon$ y $d(y_n, q) < \epsilon$. Sea $j \in \{2, \dots, n\}$, como $B_{j-1} \cap B_j \neq \emptyset$ entonces existe $x_j \in B_{j-1} \cap B_j$, luego $d(y_{j-1}, y_j) = d(y_{j-1}, x_j) + d(x_j, y_j) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Por lo tanto los puntos $y_0 = p, y_1, \dots, y_n, y_{n+1} = q$ cumplen que $d(y_{j-1}, y_j) < \epsilon$ para cada $j \in \{1, \dots, n+1\}$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que X es desconexo. Entonces existen A y B cerrados de X y distintos del vacío tales que $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$. Luego, por [6, lema 5.3.1], se tiene que $d(A, B) = \min\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} > 0$. Sean $\epsilon = \frac{d(A, B)}{2}$, $p \in A$ y $q \in B$, por hipótesis, existen $x_0, x_1, \dots, x_m \in X$ tal que $x_0 = p$, $x_m = q$ y $d(x_{i-1}, x_i) < \epsilon$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Sea $k = \min\{i \in \{1, \dots, m\} : x_i \in B\}$, luego $d(x_{k-1}, x_k) < \epsilon$ (contradicción, ya que $\epsilon < d(A, B)$). Por lo tanto, X es conexo. $\square$

Sean X y Y espacios topológicos, y sea M un subespacio de X . Dada una función $f : X \rightarrow Y$, se denomina **restricción de f a M** a la función

$$f|_M : M \rightarrow Y \text{ tal que } f|_M(x) = f(x) \text{ para todo } x \in M.$$

Asimismo, denotaremos por

$$f|^M : M \rightarrow f(M),$$

a la función que asigna a cada $x \in M$ el punto $f(x)$ del subespacio $f(M) \subset Y$.

3 Compactaciones

En esta sección presentamos la definición de compactación, junto con algunos ejemplos representativos. Asimismo, establecemos ciertas convenciones de notación que se utilizarán a lo largo de este trabajo.

Definición 3.1. Sean X un espacio topológico y M un subespacio de X . Un **encaje** del subespacio M en el espacio X es una función $e_M : M \rightarrow X$ tal que $e_M(x) = x$.

Definición 3.2. Sean X, Y espacios topológicos. Una función $f : X \rightarrow Y$ es llamada un **encaje homeomorfo** si es una composición de un homeomorfismo y un encaje, es decir, si existe $Y' \subset Y$ y un homomorfismo $h : X \rightarrow Y'$ tal que $f(x) = (e_{Y'} \circ h)(x)$ para todo $x \in X$. Además, se dice que X se puede encajar (o que está encajado) en Y si existe un encaje homeomorfo de X en Y .

Note que $Y' = f(X)$ y además, $f(x) = (e_{Y'} \circ h)(x) = h(x)$ para toda $x \in X$. De manera que X se puede encajar en Y si existe Y' un subespacio de Y homeomorfo a X .

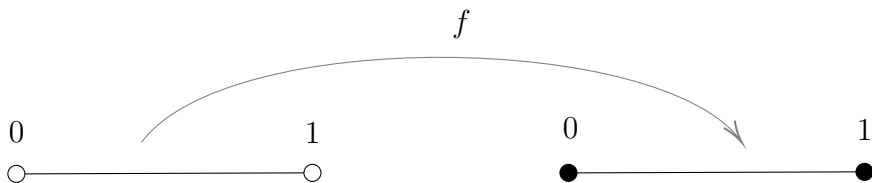
Definición 3.3. Una **compactación** del espacio X es un par (c, Y) , donde Y es un espacio compacto y $c : X \rightarrow Y$ es una encaje homeomorfo tal que $\text{cl}_Y(c(X)) = Y$.

Definición 3.4. Sea cX una compactación de un espacio X . El conjunto

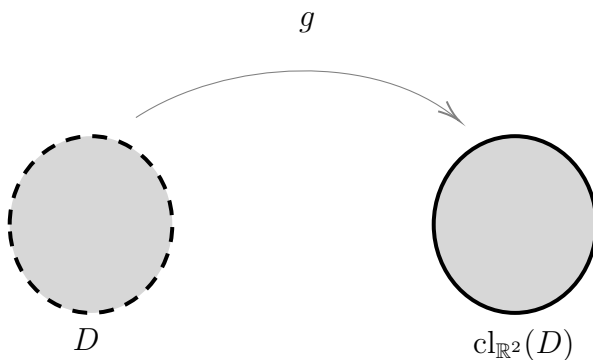
$$cX \setminus c(X) = \{x \in cX : x \notin c(X)\}$$

es el **residuo** de la compactación cX .

Ejemplo 3.5. Consideremos el intervalo abierto $(0, 1)$ en $\mathbb{R}$, con la topología euclidiana inducida. Como es bien conocido, este conjunto no es compacto. Sea $c : (0, 1) \rightarrow [0, 1]$ la función definida por $c(x) = x$. Note que el par $(c, [0, 1])$ constituye una compactación de $(0, 1)$.



Ejemplo 3.6. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ el disco abierto unitario en $\mathbb{R}^2$. Consideramos a D con la topología inducida por la euclidiana de $\mathbb{R}^2$. Este conjunto no es compacto, ya que no es cerrado en $\mathbb{R}^2$. Similar al Ejemplo 3.5, podemos considerar el par $(c, \text{cl}_{\mathbb{R}^2}(D))$, donde c es la función de D a $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(D)$ definida por $c((x, y)) = (x, y)$, la cual constituye una compactación de D .



Ejemplo 3.7. Sea X el subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$ definido por

$$X = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \right\}.$$

Este conjunto no es compacto, ya que no es cerrado en $\mathbb{R}^2$. Sea

$$cX = X \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1)\}.$$

*El par (c, cX) , donde c es el encaje identidad de X en cX , es una compactación de X , ya que X es un subconjunto denso de cX y además cX es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$, por lo cual es compacto. A cX se le conoce como **curva del topólogo**.*

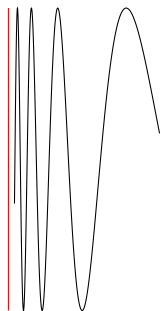


Figura 1: Curva del topólogo.

Observación 3.8. *En adelante, por compactación de X nos referiremos no solo a un par (c, Y) , sino también al espacio compacto Y en el que X puede estar encajado como un subespacio denso. Las compactaciones de un espacio X se denotarán habitualmente por los símbolos cX , c_iX , αX , etc., donde c , c_i y α son los símbolos para los encajes homeomorfos de X en la compactación correspondiente. Por lo tanto, al considerar una compactación como un espacio siempre sabremos qué encaje homeomorfo se está utilizando. Así, para una compactación cX de un espacio X tenemos*

$$c : X \rightarrow cX, c|_X : X \rightarrow c(X) \text{ es un homeomorfismo, y } \text{cl}_{cX}(c(X)) = cX.$$

4 Compactaciones del rayo $[0, \infty)$

En esta sección consideraremos el espacio $[0, \infty)$ con la métrica euclidiana inducida por $\mathbb{R}$. Para comenzar, presentamos la definición que usaremos en este trabajo y algunos ejemplos visuales de compactaciones del rayo $[0, \infty)$.

Definición 4.1. Una *compactación del rayo* $[0, \infty)$ es un par (c, cX) , donde cX es un continuo y $c : [0, \infty) \rightarrow cX$ es un encaje homeomorfo tal que $\text{cl}_{cX}(c([0, \infty))) = cX$. Para cada $a > 0$, denotamos por c_aX a $\text{cl}_{cX}(c([a, \infty)))$.

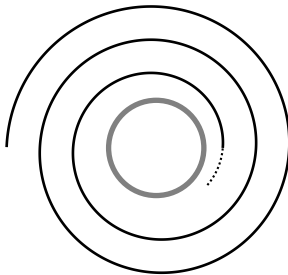


Figura 2: Compactación del rayo con residuo una circunferencia.

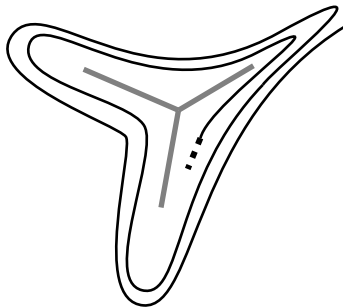


Figura 3: Compactación del rayo con residuo un triodo simple.

El Teorema 4.3 describe propiedades acerca de las compactaciones del rayo. Antes de abordar este resultado, es necesario demostrar el siguiente lema.

Lema 4.2. Sean Y un espacio topológico y $f : [0, \infty) \rightarrow Y$ una función inyectiva. Sean $x, y \in [0, \infty)$, entonces $x < y$ si y solo si $f([y, \infty)) \subsetneq f([x, \infty))$.

Demostración. Sean $x, y \in [0, \infty)$. Supongamos que $x < y$, esto sucede si y solo si $[y, \infty) \subsetneq [x, \infty)$, luego dado que f es inyectiva, entonces $f([y, \infty)) \subsetneq f([x, \infty))$ si y solo si $f([y, \infty)) \subsetneq f([x, \infty))$. $\square$

Teorema 4.3. *Sea cX una compactación del rayo $X = [0, \infty)$ con residuo R . Las siguientes proposiciones se cumplen:*

- a) *Si $0 \leq a < b$ entonces $c([0, b))$ y $c((a, b))$ son abiertos en cX .*
- b) *Si $0 < a$ entonces $cX \setminus \{c(a)\}$ es desconexo y $c([a, \infty)) \cup R$ es homeomorfo a cX .*
- c) *Si A es un subcontinuo de cX con $A \cap R \neq \emptyset$, entonces $A \subset R$ o $R \subset A$.*
- d) *Si A es un subcontinuo de cX entonces A tiene una de las siguientes formas:*
 - i) *A es un subcontinuo de R ,*
 - ii) *$A = c([a, b])$ para algunos $0 \leq a \leq b$,*
 - iii) *$A = c([a, \infty)) \cup R$ para algún $a \in [0, \infty)$.*
- e) *Existe una función $f : cX \rightarrow [0, 1]$ continua y suprayectiva tal que $f^{-1}(\{t\})$ es un subcontinuo de cX , para cada $t \in [0, 1]$.*
- f) *Si R es un conjunto de un solo punto entonces cX es un arco.*
- g) *Si R tiene más de un punto entonces cX no es conexo por trayectorias.*

Demostración. a) Sean $a, b \in X$ tales que $0 \leq a < b$. Sabemos que los conjuntos (a, b) y $[0, b)$ son abiertos en X , y dado que $c|_X : X \rightarrow c(X)$ es un homeomorfismo, entonces $c((a, b))$ y $c([0, b))$ son abiertos en $c(X)$. Luego, existen A_1, A_2 abierto de cX tales que

$$A_1 \cap c(X) = c((a, b)),$$

$$A_2 \cap c(X) = c([0, b)).$$

Veamos que $A_1 = c((a, b))$, para ello basta probar que $A_1 \subset c((a, b))$. En efecto, como $[a, b]$ es compacto en X entonces $c([a, b])$ es compacto en cX , de ahí que $c([a, b])$ es cerrado de cX . Además, como $(a, b) \subset [a, b]$ entonces $c((a, b)) \subset c([a, b])$ así $\text{cl}_{cX}(c((a, b))) \subset \text{cl}_{cX}(c([a, b])) = c([a, b])$. Finalmente, por [5, Teorema 1.3.6], tenemos que

$$A_1 \subset \text{cl}_{cX}(A_1) \subset \text{cl}_{cX}(A_1 \cap c(X)) = \text{cl}_{cX}(c((a, b))) \subset c([a, b]),$$

pero $c([a, b]) \subset c(X)$, por ende

$$A_1 = A_1 \cap c([a, b]) \subset A_1 \cap c(X) = c((a, b)),$$

es decir, $A_1 \subset c((a, b))$. De manera análoga se prueba que $A_2 = c([0, b])$. Por lo tanto hemos demostrado que $c((a, b))$ y $c([0, b])$ son abiertos en cX .

- b) Sea $a \in X$ con $a > 0$. Por a) sabemos que $c([0, a))$ es abierto de cX , por ende $c([0, a)) = c([0, a)) \cap (cX \setminus \{c(a)\})$ es abierto de $cX \setminus \{c(a)\}$. Además, sabemos que $c([0, a])$ es cerrado de cX , de manera que $c([0, a)) = c([0, a]) \cap (cX \setminus \{c(a)\})$ es cerrado de $cX \setminus \{c(a)\}$. Así, el conjunto $c([0, a))$ es cerrado y abierto de $cX \setminus \{c(a)\}$. Por lo tanto, se deduce que $c([0, a))$ y $c((a, \infty)) \cup R$ desconectan a $cX \setminus \{c(a)\}$.

Ahora demostraremos la segunda parte del enunciado. Sean $d > a$, $A = cX \setminus c([0, d])$ y $B = c([0, d])$. Por a), sabemos que A y B son cerrados en cX y además $cX = A \cup B$. Sean

$$h_1 : A \rightarrow c([a, \infty)) \cup R \text{ tal que } h_1(x) = x \text{ para todo } x \in A$$

y

$$h_2 := c|^{[a, d]} \circ g \circ (c|^{[0, d]})^{-1} : B \rightarrow c([a, \infty)) \cup R$$

donde $g : [0, d] \rightarrow [a, d]$ tal que $g(z) = \frac{z(d-a)}{d} + a$. Observemos que, la función h_1 es continua y por construcción la función h_2 también es continua, además $A \cap B = \{c(d)\}$ y

$$\begin{aligned} h_2(c(d)) &= \left(c|^{[a, d]} \circ g \circ (c|^{[0, d]})^{-1} \right) (c(d)) \\ &= c|^{[a, d]}(g(d)) \\ &= c|^{[a, d]} \left(\frac{d(d-a)}{d} + a \right) \\ &= c(d) \\ &= h_1(c(d)). \end{aligned}$$

Aplicando el Lema del pegado (ver [9, Teorema 18.3]) para las funciones h_1 y h_2 , se tiene que la función $f : cX \rightarrow c([a, \infty)) \cup R$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in cX \setminus c([0, d]); \\ c\left(\frac{c^{-1}(x)(d-a)}{d} + a\right) & \text{si } x \in c([0, d]), \end{cases} \quad (1)$$

es continua. Resta probar que f es biyectiva. Para ello, note que $f(A) = f_1(A) = A$, además

$$f(B) = f_2(B) = (c \circ g)(c^{-1}(B)) = (c \circ g)([0, d]) = c(g([0, d])) = c([a, d]),$$

de manera que

$$f(cX) = f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) = A \cup c([a, d]) = c([a, \infty)) \cup R,$$

por lo cual f es suprayectiva. Por otro lado, para demostrar la inyectividad de f y dado que h_1 y h_2 son inyectivas, resta probar que si $f(x) = f(y)$ donde $x \in A$, $y \in B$ entonces $x = y$. Observemos que

$$f(A) \cap f(B) = (c([d, \infty) \cup R)) \cap c([a, d]) = \{c(d)\},$$

luego $f(x) = f(y) = c(d)$. Dado que $x \in A$ entonces $f(x) = x$ de ahí que $x = c(d)$. Por otro lado, dado que $y \in B$, tenemos que

$$c(d) = f(y) = h_2(y) = c\left(\frac{c^{-1}(y)(d-a)}{d} + a\right)$$

de ahí que

$$\begin{aligned} c(d) = c\left(\frac{c^{-1}(y)(d-a)}{d} + a\right) &\implies d = \frac{c^{-1}(y)(d-a)}{d} + a \\ &\implies d - a = \frac{c^{-1}(y)(d-a)}{d} \\ &\implies d = c^{-1}(y) \\ &\implies c(d) = y. \end{aligned}$$

Por lo tanto $y = c(d) = x$, concluyendo que $x = y$. De esta manera, hemos probado que f es una función biyectiva. Finalmente, por [4, Corolario 7.8(3)], tenemos que f es un homeomorfismo entre $c([a, \infty)) \cup R$ y cX .

- c) Sea A un subcontinuo de cX con $A \cap R \neq \emptyset$. Si $A \not\subseteq R$, entonces existe $a \geq 0$ tal que $c(a) \in A$. Veamos que $c([a, \infty)) \subset A$. Supongamos que existe $b > a$ tal que $c(b) \notin A$. Dado que $b > 0$, por b), tenemos que $cX \setminus \{c(b)\}$ es desconexo, más aún, sabemos que $c([0, b))$ y $c((b, \infty)) \cup R$ desconectan a $cX \setminus \{c(b)\}$. Luego, tenemos que f (definido como en $b)(1)$ con $d = b$) es un homeomorfismo, de manera que $f(c([0, b)))$ y $f(c((b, \infty)) \cup R)$ desconectan a $f(cX \setminus \{c(b)\})$, pero

$$f(c([0, b))) = c([a, b)),$$

$$f(c((b, \infty)) \cup R) = c((b, \infty)) \cup R,$$

$$f(cX \setminus \{c(b)\}) = (c([a, \infty)) \cup R) \setminus f(c(b)) = (c([a, \infty)) \cup R) \setminus \{c(b)\}.$$

Luego, $(c([a, b))) \cap A$ y $(c((b, \infty)) \cup R) \cap A$ desconectan a A (lo cual es una contradicción, ya que A es conexo). Por lo tanto $c([a, \infty)) \subset A$. Por otro lado, notemos que $f(c([0, \infty))) = c([a, \infty))$ entonces

$$\text{cl}_{c_a X} (f(c([0, \infty)))) = \text{cl}_{c_a X} (c([a, \infty))) \subset \text{cl}_{c_a X} (A) = A$$

pero

$$\text{cl}_{c_a X} (f(c([0, \infty)))) = f(\text{cl}_{c_X} (c([0, \infty)))) = f(cX) \supset R,$$

de manera que $R \subset A$.

- d) Sea A un subcontinuo de cX . Consideramos los siguientes casos:

1. Si $A \cap R \neq \emptyset$, por c), tenemos que $A \subset R$ o $R \subset A$. Si $A \subset R$ entonces A es un subcontinuo de R . Si $R \subsetneq A$, entonces $B = A \cap c(X)$ es distinto del vacío, luego $c^{-1}(B)$ es cerrado de X y acotado inferiormente, por lo tanto tiene mínimo. Sea $a = \min(c^{-1}(B))$ y notemos que $c([a, \infty)) = B$ (ver la demostración del inciso c)). Por lo tanto, $A = B \cup R = c([a, \infty)) \cup R$.

2. Si $A \cap R = \emptyset$ entonces $A \subset c(X)$. Dado que A es cerrado de cX entonces A es compacto, de ahí que $c^{-1}(A)$ es compacto, así, por el [6, Lema 5.28], tenemos que $c^{-1}(A)$ tiene mínimo y máximo, es decir, existen $0 \leq a \leq b$ tales que $a \leq x \leq b$ para todo $x \in c^{-1}(A)$. Finalmente, dado que A es conexo entonces $c^{-1}(A) = [a, b]$ de ahí que $A = c([a, b])$.
- e) Sabemos que $(c|^{[0,1]})^{-1}$ es un homeomorfismo, y además notemos que la función $g : c([1, \infty)) \cup R \rightarrow [0, 1]$ tal que $g(z) = 1$ para todo $z \in c([1, \infty)) \cup R$, es continua. Sean $A = c([0, 1])$ y $B = c([1, \infty)) \cup R$, observemos que A y B son cerrados en cX y además $A \cap B = \{c(1)\}$ luego $(c|^{[0,1]})^{-1}(c(1)) = 1 = g(c(1))$. Aplicando el Lema del pegado (ver [9, Teorema 18.3]) para las funciones $(c|^{[0,1]})^{-1}$ y g , se tiene que la función $f : cX \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} c^{-1}(x) & \text{si } x \in c([0, 1]); \\ 1 & \text{si } x \in c([1, \infty)) \cup R. \end{cases}$$

es continua. Dado que $(c|^{[0,1]})^{-1}$ es un homeomorfismo, entonces f es suprayectiva. Finalmente, sea $t \in [0, 1]$ y recordemos que $f^{-1}(\{t\}) = \{x \in cX : f(x) = t\}$. Si $t \in [0, 1)$ y dado que $(c|^{[0,1]})^{-1}$ es inyectiva, entonces $f^{-1}(\{t\}) = \{c(t)\}$, dado que $f^{-1}(\{t\})$ es un conjunto singular, entonces es cerrado de cX y evidentemente es conexo, por lo tanto $f^{-1}(\{t\})$ es un subcontinuo de cX . Si $t = 1$ entonces $f^{-1}(\{t\}) = c([1, \infty)) \cup R$, por a) tenemos que $f^{-1}(\{t\})$ es cerrado de cX y por b), se tiene que $f^{-1}(\{t\})$ es conexo, por lo tanto $f^{-1}(\{t\})$ es un subcontinuo de cX . En conclusión, para cada $t \in [0, 1]$, se tiene que $f^{-1}(\{t\})$ es un subcontinuo de cX .

- f) Sea cX una compactación del rayo $[0, \infty)$, tal que $|cX \setminus c([0, \infty))| = 1$. Digamos que $\{\Omega\} = cX \setminus c([0, \infty))$. Consideremos la la función $f : cX \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c^{-1}(y)}{1+c^{-1}(y)} & \text{si } y \in c([0, \infty)); \\ 1 & \text{si } y = \Omega. \end{cases}$$

Note que la función f , está bien definida y es biyectiva. Veamos que f es continua. Sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que converge a algún $y_0 \in cX$.

Si $y_0 \neq \Omega$, podemos suponer sin perder generalidad que $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset c([0, \infty))$. Dado que $y_0 \in c([0, \infty))$ y c^{-1} es un homeomorfismo, se cumple que $\{c^{-1}(y_n)\}_{n=1}^\infty$ converge a $c^{-1}(y_0)$. Como $f(y_n) = \frac{c^{-1}(y_n)}{1+c^{-1}(y_n)}$, se cumple que $\{f(y_n)\}_{n=1}^\infty$ converge a $f(y_0) = \frac{c^{-1}(y_0)}{1+c^{-1}(y_0)}$. Si $y_0 = \Omega$, podemos suponer sin perder generalidad que $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset c([0, \infty))$. Note que, la sucesión $\{c^{-1}(y_n)\}_{n=1}^\infty$ no es acotada. Si fuese acotada, se llegaría a una contradicción, ver la demostración de la afirmación del Teorema 4.5. Sea $n \in \mathbb{N}$, veamos que existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $1 - \frac{1}{n} < f(y_{m_n})$. Como $\{c^{-1}(y_n)\}_{n=1}^\infty$ no es acotada, existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $n-1 < c^{-1}(y_{m_n})$. Así, $n-1 + nc^{-1}(y_{m_n}) < c^{-1}(y_{m_n}) + nc^{-1}(y_{m_n})$, luego, $n-1 + nc^{-1}(y_{m_n}) - c^{-1}(y_{m_n}) < nc^{-1}(y_{m_n})$, es decir, $c^{-1}(y_{m_n})(n-1) + (n-1) < nc^{-1}(y_{m_n})$, entonces $(n-1)(c^{-1}(y_{m_n}) + 1) < nc^{-1}(y_{m_n})$, esto implica que, $\frac{n-1}{n} < \frac{c^{-1}(y_{m_n})}{1+c^{-1}(y_{m_n})}$. Por ende, $1 - \frac{1}{n} < f(y_{m_n})$. Como $f(y_n) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Obtenemos una subsucesión $\{y_{m_n}\}_{n=1}^\infty$ de $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ que por la propiedad que cumple, se tiene que $\lim f(y_{m_n}) = 1$. De [6, Teorema 4.18] se tiene que $\lim f(y_n) = \lim f(y_{m_n}) = 1 = f(y_0)$. De [4, Proposición 3.42] concluimos que f es continua. Por lo tanto, de [4, Corolario 7.8(3)] se tiene que f es un homeomorfismo. Luego, cX es un arco.

- g) Sean $p, q \in R$ tal que $p \neq q$. Supongamos que cX es conexo por trayectorias, por lo que existe una función continua $f : [0, 1] \rightarrow cX$ tal que $f(0) = c(0)$ y $f(1) = p$. Notemos que $f([0, 1])$ es compacto y conexo, por lo que es un subcontinuo en cX , así por c) y d) se cumple que $f([0, 1]) = cX$. Luego, existe $0 < r_1 < 1$ tal que $f(r_1) = q$. Ahora, observemos que $[0, r_1]$ es cerrado y conexo, de manera análoga al razonamiento previo, se tiene que $R \subset f([0, r_1])$, por lo que existe $0 < r_2 < r_1$ tal que $f(r_2) = p$. Continuando de esta manera podemos crear la sucesión $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ donde $f(r_i) = p$ si i es par y $f(r_i) = q$ si i es impar. Luego, dado que la sucesión $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiormente, entonces es convergente, por lo que existe $r \in [0, 1]$ tal que $r_n \rightarrow r$, pero f es una función continua, por lo que $f(r_n) \rightarrow f(r)$. Dado que $\{f(r_{2n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{f(r_{2n-1})\}_{n \in \mathbb{N}}$ son subsucesiones de $\{f(r_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ entonces $f(r_{2n}) \rightarrow f(r)$ y $f(r_{2n-1}) \rightarrow f(r)$, de ahí que $p = f(r) = q$ (contradicción ya que por hipótesis $p \neq q$). Por lo tanto cX no es conexo por trayectorias.

□

Corolario 4.4. Si $X = [0, \infty)$ y cX es una compactación de X con residuo R , entonces R es un subcontinuo de cX .

Demostración. Por el inciso a) y b) del Teorema 4.3, tenemos que $c([n, \infty)) \cup R$ es un subcontinuo de cX , para cualquier $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Veamos que $\bigcap_{n=0}^{\infty} c([n, \infty)) = \emptyset$. Supongamos que existe $t \in \bigcap_{n=0}^{\infty} c([n, \infty))$, luego $c^{-1}(t) \in \bigcap_{n=0}^{\infty} [n, \infty)$, esto es una contradicción, ya que $\bigcap_{n=0}^{\infty} [n, \infty) = \emptyset$. Note que, $c([n+1, \infty)) \cup R \subset c([n, \infty)) \cup R$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, luego por el Teorema 4.3(b)) y [7, Teorema 1.2], tenemos que $\bigcap_{n=0}^{\infty} (c([n, \infty)) \cup R)$ es un subcontinuo de cX , pero

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} (c([n, \infty)) \cup R) = R \cup \bigcap_{n=0}^{\infty} c([n, \infty)) = R \cup \emptyset = R,$$

es decir, R es un subcontinuo de cX . □

En relación con la conexión entre continuos y compactaciones, el siguiente resultado muestra un caso particularmente interesante e ilustrativo en el que el residuo de una compactación del rayo $[0, \infty)$, es una 2-celda.

Teorema 4.5. Existe una compactación de $X = [0, \infty)$ con residuo $[0, 1]^2$.

Demostración. Sea $I = [0, 1]$ y consideremos a $J = I^2 \times \{0\}$ como subespacio de $I^3 = [0, 1]^3$. Sea $P = \{(x_i, y_i, 0) : i \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso y numerable de J .

Para cada $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$ y $t \in (0, 1]$, fijemos $\alpha_{i,j}^t$ un arco contenido en $I^2 \times \{t\}$ con puntos extremos (x_i, y_i, t) y (x_j, y_j, t) . A su vez, para cada $s, t \in (0, 1]$ con $s < t$ y $i \in \mathbb{N}$, fijemos $\beta_i^{t,s} = \{(x_i, y_i, r) : r \in [s, t]\}$ el arco en I^3 con puntos extremos (x_i, y_i, t) , (x_i, y_i, s) .

Sea

$$A_1 = \alpha_{1,2}^1 \cup \beta_2^{1, \frac{1}{2}} \cup \alpha_{1,2}^{\frac{1}{2}}.$$

A continuación, dividimos el intervalo $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ en tres partes iguales, y sean $d_1^2, d_2^2 \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ con $\frac{1}{3} < d_1^2 < d_2^2 < \frac{1}{2}$ los puntos que determinan dicha división.

Sea

$$A_2 = \beta_1^{\frac{1}{2}, d_2^2} \cup \alpha_{1,3}^{d_2^2} \cup \beta_3^{d_2^2, d_1^2} \cup \alpha_{2,3}^{d_1^2} \cup \beta_2^{d_1^2, \frac{1}{3}} \cup \alpha_{1,2}^{\frac{1}{3}}.$$

Luego, dividimos el intervalo $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$ en cuatro partes iguales, y sean $d_1^3, d_2^3, d_3^3 \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$ con $\frac{1}{4} < d_1^3 < d_2^3 < d_3^3 < \frac{1}{3}$ los puntos que determinan dicha división. Sea

$$A_3 = \beta_1^{\frac{1}{3}, d_3^3} \cup \alpha_{1,4}^{d_3^3} \cup \beta_4^{d_3^3, d_2^3} \cup \alpha_{3,4}^{d_2^3} \cup \beta_3^{d_2^3, d_1^3} \cup \alpha_{2,3}^{d_1^3} \cup \beta_2^{d_1^3, \frac{1}{4}} \cup \alpha_{1,2}^{\frac{1}{4}}.$$

En general, sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. La construcción de A_n es de la siguiente forma, dividimos el intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ en $n+1$ partes iguales, sean $d_1^n, \dots, d_n^n \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ con $\frac{1}{n+1} < d_1^n < \dots < d_n^n < \frac{1}{n}$ los puntos que determinan dicha división. Sea

$$A_n = \beta_1^{\frac{1}{n}, d_n^n} \cup \alpha_{1,n+1}^{d_n^n} \cup \left(\bigcup_{m=2}^n \beta_{m+1}^{d_m^n, d_{m-1}^n} \right) \cup \left(\bigcup_{m=2}^n \alpha_{m,m+1}^{d_{m-1}^n} \right) \cup \beta_2^{d_1^n, \frac{1}{n+1}} \cup \alpha_{1,2}^{\frac{1}{n+1}}.$$

Observación 1. De la construcción de A_n se tiene que:

1. A_n es un arco contenido en $I^2 \times \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ cuyos puntos extremos son $\left(x_1, y_1, \frac{1}{n}\right)$ y $\left(x_1, y_1, \frac{1}{n+1}\right)$;
2. para cada $j \in \{1, \dots, n+1\}$ existe $s_n^j \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ tal que A_n contiene al punto (x_j, y_j, s_n^j) ;
3. $A_n \cap J = \emptyset$;
4. $A_n \cap A_m \neq \emptyset$ si y solo si $|n - m| \leq 1$. Además, si $n > 1$ entonces

$$A_n \cap \left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \setminus A_n \right) = \left\{ \left(x_1, y_1, \frac{1}{n} \right), \left(x_1, y_1, \frac{1}{n+1} \right) \right\}.$$

$$\text{Sea } cX = \text{cl}_{I^3} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, como A_n es un arco, podemos definir un homeomorfismo

$$c_n : [n-1, n] \rightarrow A_n \text{ tal que } c_n(n-1) = \left(x_1, y_1, \frac{1}{n} \right) \text{ y } c_n(n) = \left(x_1, y_1, \frac{1}{n+1} \right).$$

Sea $c : [0, \infty) \rightarrow cX$ definida por $c(t) = c_n(t)$ cuando $t \in [n-1, n]$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por el inciso (4) de la Observación 1, se cumple que c es una

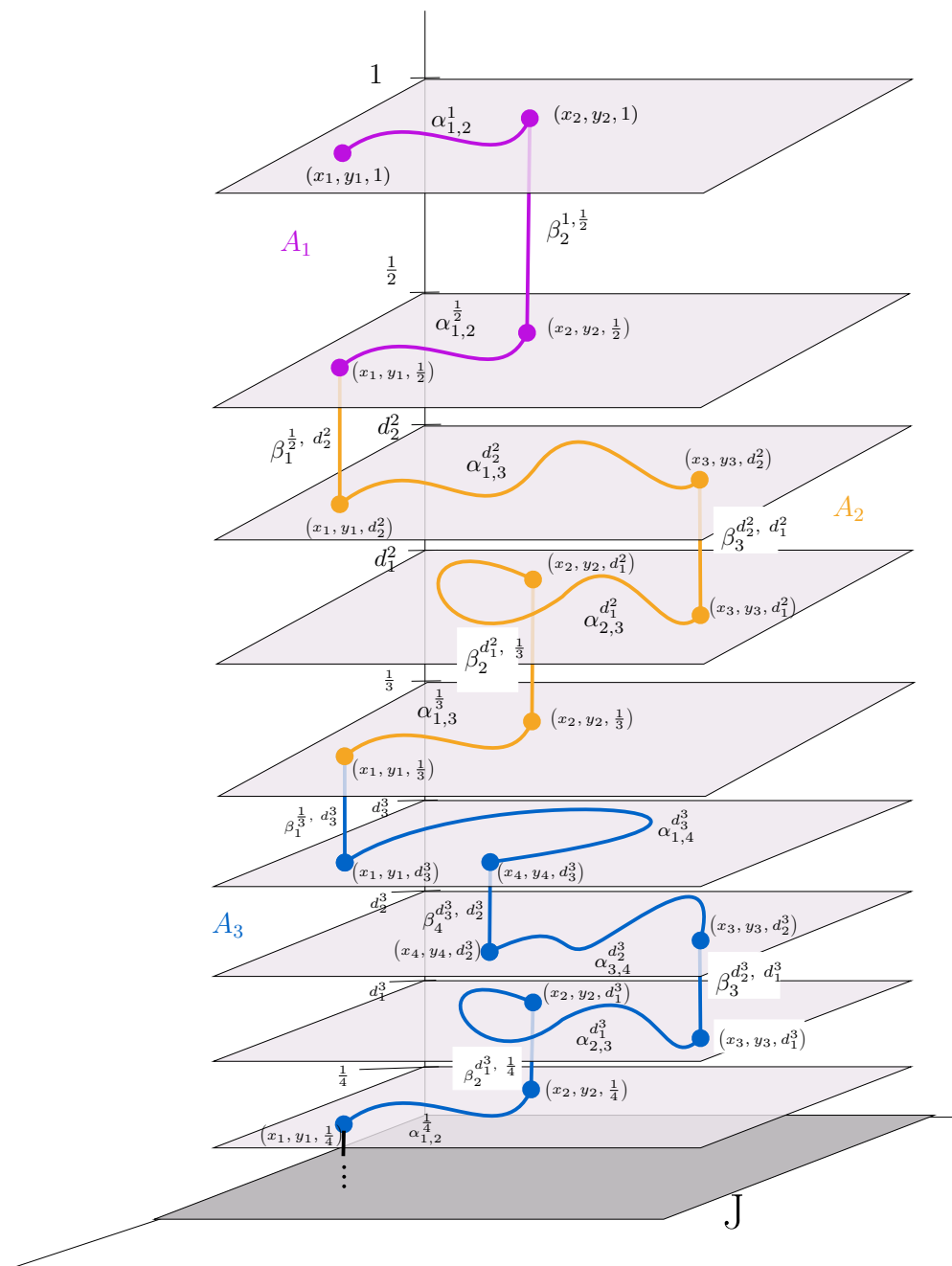


Figura 4: Construcción de los A_n .

función inyectiva, además por el Lema del pegado ([9, Teorema 18.3]), c es una función continua. Observemos que cada c_n es un homeomorfismo, por lo que $(c|^{[0, \infty)})^{-1}$ es un homeomorfismo; por ende, c es un encaje homeomorfo de $[0, \infty)$ sobre cX . Además, notemos que $c([0, \infty)) = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_n$; y por ende, $\text{cl}_{I^3}(c([0, \infty))) = cX$. Por lo tanto, (c, cX) es una compactación del rayo $[0, \infty)$.

Afirmación. $J = cX \setminus c([0, \infty))$

Demostración de la afirmación. $[\subset]$ Por el inciso (2) de la Observación 1, se cumple que $P \subset cX$, de esto se deduce que $\text{cl}_{I^3}(P) \subset cX$, es decir, $J \subset cX$. Luego, por el inciso (3) de la Observación 1 concluimos que $J \subset cX \setminus c([0, \infty))$.

$[\supset]$ Sea $(x, y, z) \in cX \setminus c([0, \infty))$. Dado que $cX \subset I^3$, entonces $x, y, z \in [0, 1]$. A su vez, existe una sucesión $\{(x_j, y_j, z_j)\}_{j=1}^{\infty}$ de elementos de $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ tal que $\lim(x_j, y_j, z_j) = (x, y, z)$, esto define una sucesión $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ en $[0, \infty)$ tal que $c(t_j) = (x_j, y_j, z_j)$. Note que la sucesión $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ diverge a infinito, ya que en caso contrario sería acotada, lo que daría una subsucesión convergente en algún intervalo cerrado de la forma $[0, k]$ para algún $k \in \mathbb{N}$; esto implica que $(x, y, z) \in c([0, \infty))$, lo cual es una contradicción.

Así, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $j_m \in \mathbb{N}$ tal que $(x_{j_m}, y_{j_m}, z_{j_m}) \notin \bigcup_{n=1}^m A_n$ (donde $(x_{j_m}, y_{j_m}, z_{j_m})$ es un elemento de la sucesión $\{(x_j, y_j, z_j)\}_{j=1}^{\infty}$, esto implica que $z_{j_m} < \frac{1}{m+1}$. Luego $\{z_{j_m}\}_{m=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $\lim z_{j_m} = 0 = \lim z_j$. Por lo tanto, $z = 0$. Por ende, $(x, y, z) \in J$.

Por la afirmación anterior, podemos concluir que (c, cX) es una compactación del rayo $[0, \infty)$, cuyo residuo es J . $\square$

Con el propósito de generalizar el Teorema 4.5, se da el siguiente resultado, que es necesario para poder realizar dicha generalización.

Teorema 4.6. Sean X un continuo y $r > 0$. La nube $N_{d_Q}(X, r) = \bigcup_{\bar{x} \in X} B_Q(\bar{x}, r)$ es un subconjunto arco conexo de $\mathbb{Q}$.

Demostración. Por el [7, Teorema 1.1], podemos considerar a X como un subespacio de $\mathbf{Q}$. Sean $r > 0$ y $\bar{p}', \bar{q}' \in N_{d_Q}(X, r)$. Luego, existen $\bar{p}, \bar{q} \in X$ tales que $\bar{p}' \in B_Q(\bar{p}, r)$ y $\bar{q}' \in B_Q(\bar{q}, r)$. Luego, por el Teorema 2.3, existen $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in X$ tales que $\bar{x}_1 = \bar{p}$, $\bar{x}_n = \bar{q}$ y $d_Q(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}) < r$ para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Definamos $\bar{x}_0 = \bar{p}'$ y $\bar{x}_{n+1} = \bar{q}'$, entonces $d_Q(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}) < r$ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$.

Sea $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, definimos $\alpha_i : [i, i+1] \rightarrow \mathbf{Q}$ tal que $\alpha_i(t) = (1 - (t - i))\bar{x}_i + (t - i)\bar{x}_{i+1}$ para todo $t \in [i, i+1]$. Donde si $\bar{x}_i = (x_j^i)_{j=1}^\infty$ y $\bar{x}_{i+1} = (x_j^{i+1})_{j=1}^\infty$, entonces $\alpha_i(t) = ((1 - (t - i))x_j^i + (t - i)x_j^{i+1})_{j=1}^\infty$. Note que α_i es una función continua, $\alpha_i(i) = \bar{x}_i$ y $\alpha_i(i+1) = \bar{x}_{i+1}$.

Sean $i \in \{1, \dots, n\}$ y $t \in [i, i+1]$, entonces

$$\begin{aligned} d_Q(\alpha_i(t), \bar{x}_i) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left| \left((1 - (t - i))x_j^i + (t - i)x_j^{i+1} \right) - x_j^i \right|}{2^j} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|(t - i)x_j^{i+1} - (t - i)x_j^i|}{2^j} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(t - i) |x_j^{i+1} - x_j^i|}{2^j} \\ &= (t - i) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|x_j^{i+1} - x_j^i|}{2^j} \\ &= (t - i) d_Q(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}) \\ &< r. \end{aligned}$$

Esto implica que $\alpha_i([i, i+1]) \subset B_Q(\bar{x}_i, r) \subset N_{d_Q}(X, r)$. Además, similarmente obtenemos que $\alpha_0([0, 1]) \subset B_Q(\bar{x}_1, r) \subset N_{d_Q}(X, r)$. Definimos $\alpha : [0, n+1] \rightarrow \mathbf{Q}$ por $\alpha(t) = \alpha_i(t)$ cuando $t \in [i, i+1]$. Por el Lema del pegado ([9, Teorema 18.3]), tenemos que α es una función continua. Además $\alpha(0) = \bar{p}'$, $\alpha(n+1) = \bar{q}'$ y $\alpha([0, n+1]) \subset N_{d_Q}(X, r)$. Por [10, Proposición 8.16], tenemos que $\alpha([0, n+1])$ es un continuo localmente conexo, luego de [10, Proposición 8.23], se cumple que $\alpha([0, n+1])$ es arco conexo. Por lo tanto, existe γ un arco con puntos extremos $\bar{p}'$, $\bar{q}'$, tal que $\gamma \subset \alpha([0, n+1]) \subset N_{d_Q}(X, r)$. Concluimos que $N_{d_Q}(X, r)$ es un subconjunto arco conexo de $\mathbf{Q}$. $\square$

Teorema 4.7. *Si X es un continuo, entonces existe una compactación del rayo $[0, \infty)$ con residuo X .*

Demostración. Por [7, Teorema 1.1], podemos considerar a X como un subespacio de $\mathbf{Q}$. El espacio en el cual definiremos nuestra compactación será en $\mathbf{Q} \times [0, 1]$, usando ideas similares a las del Teorema 4.5

Por [5, Teorema 4.1.18], existe $P = \{\bar{p}_i : i \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso y numerable de X . Para cada $t \in [0, 1]$ consideramos X_t una copia homeomorfa de X , contenida en $\mathbf{Q} \times \{t\} \subset \mathbf{Q} \times [0, 1]$. A su vez, sea $N_{d_Q}(X, t) \times \{t\}$ una copia homeomorfa de $N_{d_Q}(X, t)$ contenida en $\mathbf{Q} \times \{t\}$.

Por el Teorema 4.6, $N_{d_Q}(X, t) \times \{t\}$ es un subconjunto arco conexo de $\mathbf{Q} \times \{t\}$, para cada $t \in [0, 1]$. Para cada $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$ y $t \in (0, 1]$, fijemos $\alpha_{i,j}^t$ como el arco contenido en $N_{d_Q}(X, t) \times \{t\}$ cuyos extremos son $(\bar{p}_i, t)$ y $(\bar{p}_j, t)$. A su vez, para cada $s, t \in (0, 1]$ con $s < t$ y $i \in \mathbb{N}$, fijemos $\beta_i^{t,s} = \{(\bar{p}_i, r) : r \in [s, t]\}$ el arco en $\mathbf{Q} \times [0, 1]$ con extremos $(\bar{p}_i, t)$, $(\bar{p}_i, s)$.

Sea

$$A_1 = \alpha_{1,2}^1 \cup \beta_2^{1,\frac{1}{2}} \cup \alpha_{1,2}^{\frac{1}{2}}.$$

A continuación, dividimos el intervalo $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ en tres partes iguales, y sean $d_1^2, d_2^2 \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ con $\frac{1}{3} < d_1^2 < d_2^2 < \frac{1}{2}$ los puntos que determinan dicha división. Sea

$$A_2 = \beta_1^{\frac{1}{2}, d_2^2} \cup \alpha_{1,3}^{d_2^2} \cup \beta_3^{d_2^2, d_1^2} \cup \alpha_{2,3}^{d_1^2} \cup \beta_2^{d_1^2, \frac{1}{3}} \cup \alpha_{1,2}^{\frac{1}{3}}.$$

Dividimos el intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ en cuatro partes iguales, y sean $d_1^3, d_2^3, d_3^3 \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ con $\frac{1}{4} < d_1^3 < d_2^3 < d_3^3 < \frac{1}{3}$ los puntos que determinan dicha división. Sea

$$A_3 = \beta_1^{\frac{1}{3}, d_3^3} \cup \alpha_{1,4}^{d_3^3} \cup \beta_4^{d_3^3, d_2^3} \cup \alpha_{3,4}^{d_2^3} \cup \beta_3^{d_2^3, d_1^3} \cup \alpha_{2,3}^{d_1^3} \cup \beta_2^{d_1^3, \frac{1}{4}} \cup \alpha_{1,2}^{\frac{1}{4}}.$$

En general, sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. La construcción de A_n es de la siguiente manera, dividimos el intervalo $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ en $n+1$ partes iguales y sean $d_1^n, \dots, d_n^n \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ con $\frac{1}{n+1} < d_1^n < \dots < d_n^n < \frac{1}{n}$ los puntos que determinan dicha división. Sea

$$A_n = \beta_1^{\frac{1}{n}, d_n^n} \cup \alpha_{1,n+1}^{d_n^n} \cup \left(\bigcup_{m=2}^n \beta_{m+1}^{d_m^n, d_{m-1}^n} \right) \cup \left(\bigcup_{m=2}^n \alpha_{m,m+1}^{d_{m-1}^n} \right) \cup \beta_2^{d_1^n, \frac{1}{n+1}} \cup \alpha_{1,2}^{\frac{1}{n+1}}.$$

Observación 2. De la construcción de A_n se observa que:

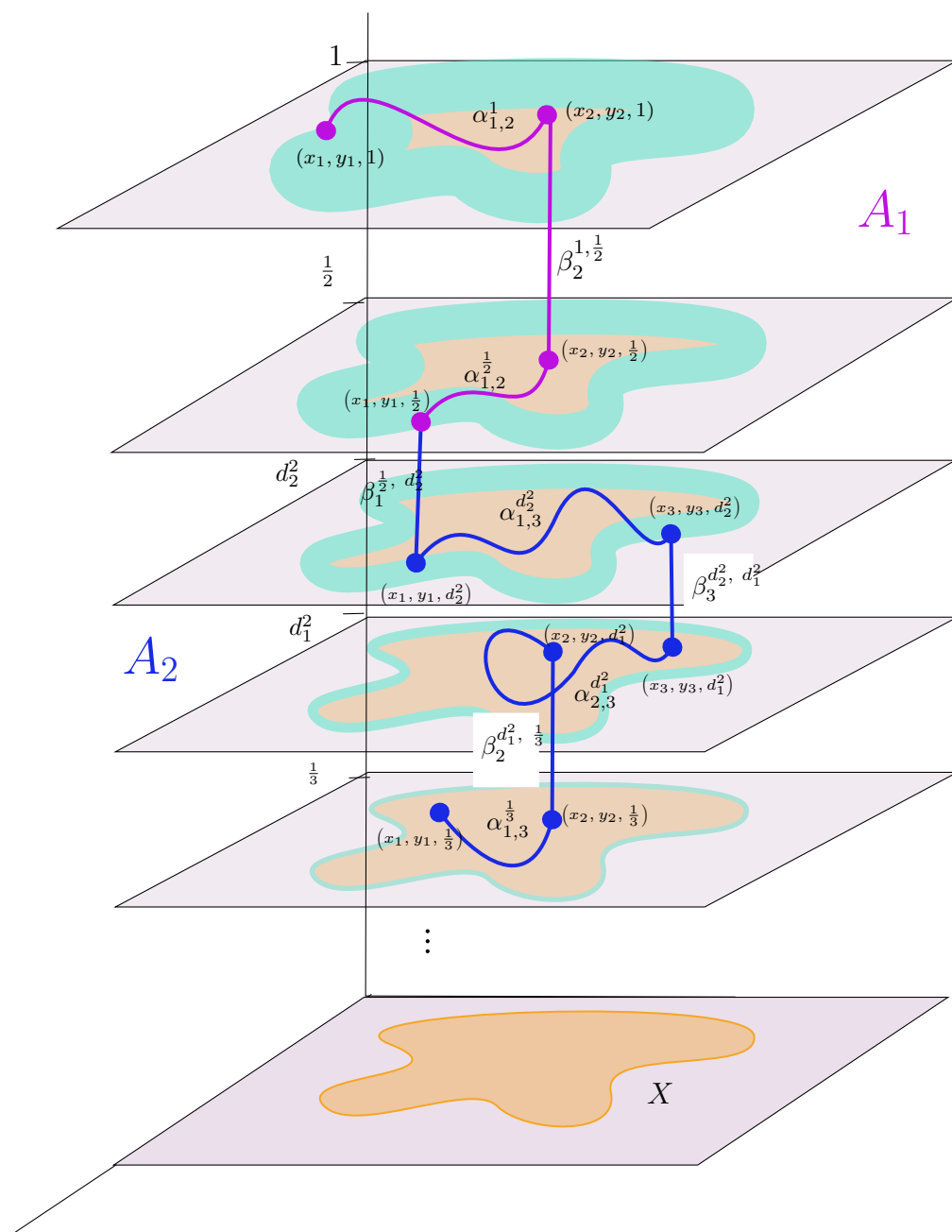


Figura 5: Construcción de A_n .

1. A_n es un arco contenido en $N_{d_Q}(X, \frac{1}{n}) \times [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ cuyos extremos son $(\bar{p}_1, \frac{1}{n})$ y $(\bar{p}_1, \frac{1}{n+1})$;
2. para cada $j \in \{1, \dots, n+1\}$ existe $s_n^j \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ tal que A_n contiene al elemento $(\bar{p}_j, s_n^j)$;
3. $A_n \cap X_0 = \emptyset$;
4. $A_n \cap A_m \neq \emptyset$ si y solo si $|n - m| \leq 1$. Además, si $n > 1$ entonces

$$A_n \cap \left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \setminus A_n \right) = \left\{ \left(\bar{p}_1, \frac{1}{n} \right), \left(\bar{p}_1, \frac{1}{n+1} \right) \right\}.$$

$$\text{Sea } \bar{X} = \text{cl}_{\mathbf{Q} \times [0,1]} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, como A_n es un arco, podemos definir un homeomorfismo $c_n : [n-1, n] \rightarrow A_n$ tal que $c_n(n-1) = (\bar{p}_1, \frac{1}{n})$ y $c_n(n) = (\bar{p}_1, \frac{1}{n+1})$. Sea $c : [0, \infty) \rightarrow \bar{X}$ definida por $c(t) = c_n(t)$ cuando $t \in [n-1, n]$ para algún $n \in \mathbb{N}$. De (4) de la Observación 2 se cumple que c es una función inyectiva y por el Lema del pegado ([9, Teorema 18.3]), se tiene que c es una función continua, por ende c es un encaje homeomorfo de $[0, \infty)$ sobre $\bar{X}$. Además, $c([0, \infty)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y por ende $\text{cl}_{\mathbf{Q} \times [0,1]}(c([0, \infty))) = \bar{X}$. Por lo tanto, $(c, \bar{X})$ es una compactación del rayo $[0, \infty)$.

Afirmación. $X_0 = \bar{X} \setminus c([0, \infty))$.

Demostración de la afirmación. $[\subset]$ De (2) de la Observación 2 se cumple que $P \times \{0\} \subset \bar{X}$, de esto que $\text{cl}_{\mathbf{Q} \times [0,1]}(P \times \{0\}) \subset \bar{X}$, es decir, $X_0 \subset \bar{X}$, y por (3) de la Observación 2, concluimos que $X_0 \subset \bar{X} \setminus c([0, \infty))$.

$[\supset]$ Sea $(\bar{x}, z) \in \bar{X} \setminus c([0, \infty))$, donde $\bar{x} \in \mathbf{Q}$ y $z \in [0, 1]$. Luego, existe una sucesión $\{(\bar{x}_j, z_j)\}_{j=1}^{\infty}$ de elementos de $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ tal que $\lim(\bar{x}_j, z_j) = (\bar{x}, z)$; note que $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathbf{Q}$ que converge a $\bar{x}$ y $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión en $[0, 1]$ que converge a z . A su vez, existe una sucesión $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ en $[0, \infty)$ tal que $c(t_j) = (\bar{x}_j, z_j)$. Observemos que la sucesión

$\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ diverge a infinito, ya que en caso contrario sería acotada, lo que daría una subsucesión convergente en algún intervalo cerrado de la forma $[0, k]$ para algún $k \in \mathbb{N}$, esto implica que $(\bar{x}, z) \in c([0, \infty))$, lo cual es una contradicción. Así, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $j_m \in \mathbb{N}$ tal que $(\bar{x}_{j_m}, z_{j_m}) \notin \bigcup_{n=1}^m A_n$ (donde $(\bar{x}_{j_m}, z_{j_m})$ es un elemento de la sucesión $\{(\bar{x}_j, z_j)\}_{j=1}^{\infty}$) esto implica que $z_{j_m} < \frac{1}{m+1}$. Luego $\{z_{j_m}\}_{m=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $\lim z_{j_m} = 0 = \lim z_j$. Por lo tanto, $z = 0$. Esto significa que, $(\bar{x}, z) \in \mathbf{Q} \times \{0\}$.

Supongamos que $\bar{x} \notin X$, dado que X es compacto, existe $r > 0$ tal que $B_Q(\bar{x}, r) \cap X = \emptyset$. Por otro lado, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq N_1$ se cumple que $d_Q(\bar{x}, \bar{x}_j) < \frac{r}{2}$. Por la propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \frac{r}{2}$. Dado que $\lim z_j = 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq N_2$ se cumple que $0 < |z_j| < \frac{1}{N+1}$. Sea $m_0 = \max\{N_1, N_2\}$. Note que $(\bar{x}_{m_0}, z_{m_0}) \notin \bigcup_{n=1}^N A_n$, por lo que existe $N' > N$ tal que $(\bar{x}_{m_0}, z_{m_0}) \in A_{N'}$. De (1) de la Observación 2 se cumple que $(\bar{x}_{m_0}, z_{m_0}) \in N_{d_Q}(X, \frac{1}{N'}) \times [\frac{1}{N'+1}, \frac{1}{N'}]$. Esto implica que existe $\bar{a} \in X$ tal que $d_Q(\bar{a}, \bar{x}_{m_0}) < \frac{1}{N'} < \frac{1}{N} < \frac{r}{2}$. Así,

$$d_Q(\bar{x}, \bar{a}) \leq d_Q(\bar{x}, \bar{x}_{m_0}) + d_Q(\bar{a}, \bar{x}_{m_0}) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\bar{x} \in X$, es decir, $(\bar{x}, z) \in X_0$. Luego, $X_0 = \bar{X} \setminus c([0, \infty))$.

Por la afirmación anterior, podemos concluir que $(c, \bar{X})$ es una compactación del rayo $[0, \infty)$, cuyo residuo es X_0 . $\square$

Entre la familia de continuos que resultan ser una compactación del rayo $[0, \infty)$, se distingue una subfamilia cuyos elementos se definen a continuación.

Definición 4.8. *Un continuo de Elsa es una compactación del rayo $[0, \infty)$ cuyo residuo es un arco; lo denotaremos por E -continuo.*

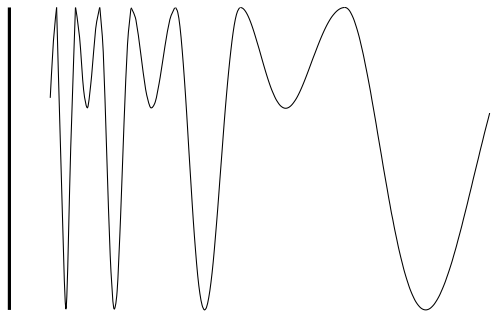


Figura 6: Ejemplo de un E -continuo.

Teorema 4.9. *Existen dos E -continuos no homeomorfos.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos

$$L_n^+ = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{2n+1}{2n(n+1)} \right], \quad y = 2n(n+1)x - 2n \right\}$$

y

$$L_n^- = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \in \left[\frac{2n+1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n} \right], \quad y = -2n(n+1)x + 2(n+1) \right\}.$$

Sea $A_n = L_n^+ \cup L_n^-$, observemos que A_n es un arco (ver figura 7).

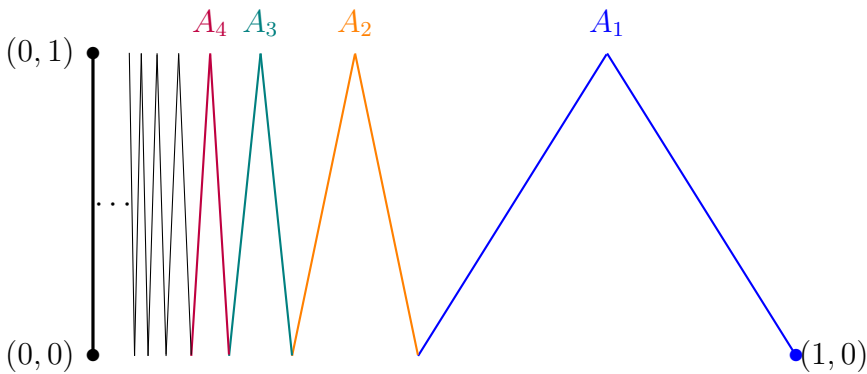


Figura 7: Compactación (c, cX) de $[0, \infty)$.

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos considerar un homeomorfismo $c_n : [n-1, n] \rightarrow A_n$ tal que $c_n(n-1) = (\frac{1}{n}, 0)$ y $c_n(n) = (\frac{1}{n+1}, 0)$. Sea $cX = \text{cl}_{\mathbb{R}^2} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)$.

Sea $c : [0, \infty) \rightarrow cX$ definida por $c(t) = c_n(t)$ cuando $t \in [n-1, n]$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por construcción y por el Lema del pegado ([9, Teorema 18.3]), se cumple que (c, cX) es una compactación del rayo $[0, \infty)$, cuyo residuo es el arco $I = \{0\} \times [0, 1]$, es decir, cX es un E -continuo.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean

$$J_n^+ = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{4n+1}{4n(n+1)} \right], y = 4n(n+1)x - 4n \right\},$$

$$l_n^- = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\frac{4n+1}{4n(n+1)}, \frac{2n+1}{2n(n+1)} \right], y = -2n(n+1)x + \frac{4n+3}{2} \right\},$$

$$l_n^+ = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\frac{2n+1}{2n(n+1)}, \frac{4n+3}{4n(n+1)} \right], y = 2n(n+1)x - \frac{4n+1}{2} \right\}$$

y

$$J_n^- = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\frac{4n+3}{4n(n+1)}, \frac{1}{n} \right], y = -4n(n+1)x + 4(n+1) \right\}.$$

Sea $B_n = J_n^+ \cup l_n^- \cup l_n^+ \cup J_n^-$. Observemos que B_n es un arco (ver figura 8).

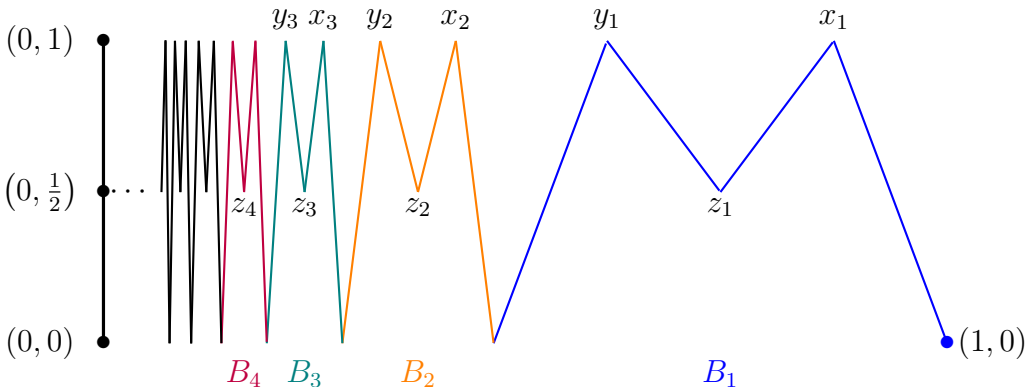


Figura 8: Compactación (s, sX) de $[0, \infty)$.

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos considerar un homeomorfismo $s_n : [n-1, n] \rightarrow B_n$ tal que $s_n(n-1) = (\frac{1}{n}, 0)$ y $s_n(n) = (\frac{1}{n+1}, 0)$. Sea $sX = \text{cl}_{\mathbb{R}^2} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right)$.

Sea $s : [0, \infty) \rightarrow cX$ definida por $s(t) = s_n(t)$ cuando $t \in [n-1, n]$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por construcción y por el Lema del pegado ([9, Teorema 18.3]), se cumple que (s, sX) es una compactación del rayo $[0, \infty)$, cuyo residuo es el arco $I = \{0\} \times [0, 1]$, es decir, sX es un E -continuo.

Veamos que cX no es homeomorfo sX . Para ello supongamos que existe $h : sX \rightarrow cX$ un homeomorfismo. Dado que la propiedad de ser localmente conexo en un punto se conserva bajo homeomorfismo entonces se cumple que $h(s([0, \infty))) = c([0, \infty))$ y $h(I) = I$. Por ende $h(\{(0, 1), (0, 0)\}) = \{(0, 1), (0, 0)\}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $h((0, 1)) = (0, 1)$ y $h((0, 0)) = (0, 0)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $y_n = (\frac{4n+1}{4n(n+1)}, 1)$, $z_n = (\frac{2n+1}{2n(n+1)}, \frac{1}{2})$ y $x_n = (\frac{4n+3}{4n(n+1)}, 1)$ (ver figura 8).

Note que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones en $s([0, \infty))$ tales que $\lim z_n = (0, \frac{1}{2})$ y $\lim y_n = (0, 1) = \lim x_n$. De la continuidad de h se cumple que $\lim h(z_n) = h((0, \frac{1}{2}))$ y $\lim x_n = \lim h(y_n) = h((0, 1)) = (0, 1)$.

Como $h((0, \frac{1}{2})) \notin \{h((1, 0)), h((0, 0))\}$, entonces $h((0, \frac{1}{2})) \in \{0\} \times (0, 1)$. Para $\varepsilon = \frac{\|h((0, \frac{1}{2})) - (0, 1)\|}{4}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $h(x_n), h(y_n) \in B((0, 1), \varepsilon)$ y $h(z_n) \in B(h((0, \frac{1}{2})), \varepsilon)$, para todo $n \geq N$. Como $h((0, \frac{1}{2})) \in \{0\} \times (0, 1)$, podemos suponer que $h((0, \frac{1}{2})) = (0, w)$ para algún $w \in (0, 1)$. Definimos $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < w + 2\varepsilon\}$ y $H' = \mathbb{R}^2 \setminus H$. Note que $B(h((0, \frac{1}{2})), \varepsilon) \subset H$ y $B((0, 1), \varepsilon) \subset H'$. Sea V_n al arco en $s([0, \infty))$ con puntos extremos x_n y y_n . Note que que $V_n = l_n^- \cup l_n^+$.

Afirmación. Para cada $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ tales que $t_1 < t_2$, existen únicos $r_1, r_2 \in [0, \infty)$ tales que $r_1 < r_2$, $h(s(t_1)) = c(r_1)$ y $h(s(t_2)) = c(r_2)$.

Demostración de la afirmación. Primero, veamos que $h(s(0)) = c(0)$. En efecto, dado que $h(sX \setminus \{s(0)\}) = cX \setminus \{h(s(0))\}$, como $sX \setminus \{s(0)\}$ es conexo y h es un homeomorfismo, se debe cumplir que $cX \setminus \{h(s(0))\}$ es conexo, del Teorema 4.3(b), se tiene que la única opción para que esto sea posible es que $h(s(0)) = c(0)$. Sean $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ tales que $t_1 < t_2$, de la inyectividad de h , s y c existen únicos $r_1, r_2 \in [0, \infty)$ tales que $h(s(t_1)) =$

$c(r_1)$ y $h(s(t_2)) = c(r_2)$. Supongamos que $r_1 \geq r_2$. Dado que $t_1 \neq t_2$ nuevamente de la inyectividad de h , s y c tenemos que $r_1 \neq r_2$. Por otro lado, si $r_1 > r_2$, dado que $h(s(0)) = c(0)$ entonces $h(s([0, t_1])) = c([0, r_1])$ y como $r_1 > r_2$ entonces $h(s([0, t_1])) = c([0, r_1]) = c([0, r_2]) \cup c([r_2, r_1])$, es decir, $c(r_2) \in h(s([0, t_1]))$. Además, dado que $s([0, t_1]) \cap s((t_1, t_2]) = \emptyset$ entonces $h(s([0, t_1])) \cap h(s((t_1, t_2])) = \emptyset$ (contradicción ya que $c(r_2) \in h(s([0, t_1])) \cap h(s((t_1, t_2]))$ debido a que $h(s(t_2)) = c(r_2)$). Por lo tanto $r_1 < r_2$.

Sea $n \geq N$, consideremos $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $h(x_n) \in A_{m_n}$. Veamos que $(\frac{1}{m_n+1}, 0) = A_{m_n} \cap A_{m_n+1} \subset h(V_n)$. Supongamos lo contrario, por la afirmación anterior tenemos que $h(V_n) \subset A_{m_n}$. Note que $h(x_n) \in L_{m_n}^- \cap H'$ o $h(x_n) \in L_{m_n}^+ \cap H'$, en cualquier caso la afirmación anterior implica que $h(z_n) \in L_{m_n}^+ \cap H$. Como $h(y_n) \in h(V_n)$, la afirmación anterior implica que $h(y_n) \in L_{m_n}^+ \cap H$ lo cual es una contradicción, ya que $h(y_n) \in H'$. Por lo tanto $A_{m_n} \cap A_{m_n+1} \subset h(V_n)$.

Así, tenemos una sucesión $\{m_n\}_{n=N}^\infty$ estrictamente creciente, tal que $(\frac{1}{m_n+1}, 0) \in h(V_n)$ para cada $n \geq N$. Note que, la sucesión $(\frac{1}{m_n+1}, 0)$ converge a $(0, 0)$. De la continuidad de h^{-1} , se tiene que $\lim h^{-1}((\frac{1}{m_n+1}, 0)) = h^{-1}((0, 0)) = (0, 0)$. Pero, dado que $h^{-1}(\frac{1}{m_n}, 0) \in V_n$ para toda $n \geq N$, se tiene que $\lim h^{-1}((\frac{1}{m_n}, 0)) \in \lim V_n = \{0\} \times [\frac{1}{2}, 1]$, lo cual es una contradicción, esto de suponer que sX es homeomorfo a cX . Por lo tanto, cX no es homeomorfo a sX . $\square$

Dos continuos se dicen **incomparables** si no existen funciones continuas y suprayectivas en ninguna dirección; es decir, X y Y son incomparables si no existe $f : X \rightarrow Y$ continua y suprayectiva, ni tampoco $g : Y \rightarrow X$ continua y suprayectiva. En el Teorema 4.9, mostramos que existen dos E -continuos que no son homeomorfos entre sí, y por ende son incomparables. Sin embargo, Marwan M. Awartani en el artículo titulado *An Uncountable Collection of Mutually Incomparable Chainable Continua* ([3]), demuestra el siguiente resultado.

Teorema 4.10. [3, Teorema 4.7] *Existe una colección no numerable de compactaciones del rayo $[0, \infty)$ con residuo un arco, tal que sus elementos son incomparables por pares.*

En resumen, en este artículo Awartani trabaja con el conjunto de Cantor, donde cada punto de este conjunto es visto como una sucesión de ceros y unos.

Primero define dos relaciones en el espacio de Cantor: la relación dominar y dominar verticalmente. Luego demuestra que, con respecto a estas relaciones, existe una colección no numerable de sucesiones mutuamente incomparables. Finalmente, asocia cada elemento de dicha colección con un E -continuo y se demuestra que no existe una función continua y suprayectiva entre cualquier par de tales compactaciones resultantes. La compactación del rayo que se construye a partir de algún punto de Cantor es de la siguiente forma.

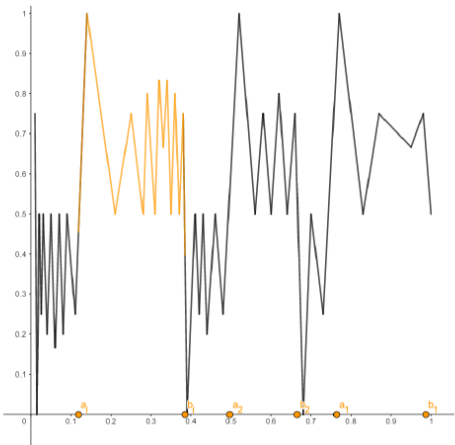


Figura 9: Compactación de $[0, \infty)$ a partir de un elemento del conjunto de Cantor.

Si es del interés del público estudiar la construcción de estas compactaciones, recomendamos ver [2]. En [2], se realiza la construcción de estas compactaciones y se desarrollan exhaustivamente los resultados del artículo [3].

Finalmente, mencionamos que en 2014, Verónica Martínez-de-la-Vega y Piotr Minc demuestran en el artículo titulado *Uncountable families of metric compactifications of the ray* el siguiente Teorema.

Teorema 4.11. [8, Teorema 1]

Todo continuo no degenerado X , tiene una cantidad no numerable de compactaciones del rayo $[0, \infty)$, no homeomorfas entre sí y con residuo X .

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión; sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar el capítulo.

Bibliografía

- [1] Felipe de Jesús Aguilar Romero, Diana Cuaya Simbro, David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero, « Estudio de compactaciones en espacios topológicos (Capítulo 5)» Matemáticas y sus aplicaciones 25, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 133–164. Primera Edición 2026, ISBN: . Versión electrónica en <https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>. Publicado el 16 de enero de 2026.
- [2] Edwin René Araque Alarcón. *Continuos de Awartani*. Tesis de Licenciatura. Universidad Industrial de Santander, 2021.
- [3] M. M. Awartani. *An uncountable collection of mutually incomparable chainable continua*. Proceedings of the American Mathematical Society 118 (1993), 239–245.
- [4] F. Casarrubias-Segura, A. Tamariz-Mascarúa. *Elementos de topología general*. Spanish. Vol. 37. Aportaciones Mat., Textos. México: Sociedad Matemática Mexicana; (2012). ISBN: 978–607–02–3000–4.
- [5] R. Engelking, *General topology*. English. Rev. and compl. ed. Vol. 6. Sigma Ser. Pure Math. Berlin: Heldermann Verlag, 1989. ISBN: 3–88538–006–4.
- [6] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, L. A. Guerrero-Méndez. *La magia de los espacios métricos*. Puebla: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2025. ISBN: 978–607–2637–10–8.
- [7] A. Illanes. *Continuum Theory*. Springer Cham, 2025. ISBN: 978–3–031–91010–4.
- [8] V. Martínez-de-la-Vega, P. Minc. *Uncountable families of metric compactifications of the ray*. Topol. Appl. 173 (2014), 28–31.

- [9] J. R. Munkres. *Topology*. English. 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000. isbn: 0-13-181629-2.
- [10] S.B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs y Textbooks in Pure y Applied Math., volume 158, Marcel Dekker, New York, 1992.
- [11] S. Willard, *General Topology*.(1970) Addison-Wesley.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

`felipe.aguilarr@alumno.buap.mx`

`diana.cuayasi@alumno.buap.mx`

`dherrera@fcfm.buap.mx`

`fmacias@fcfm.buap.mx`

Capítulo 5

El arco y la curva cerrada simple tienen hiperespacio cociente C_n/C_1 único

Maricela Briones de Gante, Fernando Macías Romero y
David Herrera Carrasco
FCFM, BUAP

Resumen

En este capítulo presentamos un estudio del hiperespacio cociente $C_n(X)/C_1(X)$ para cuando X es un arco o una curva cerrada simple y con $n > 1$, y detallamos la prueba presentada en [7] de que estos continuos tienen dicho hiperespacio cociente único.

1 Preliminares

Definición 1.1. Un *continuo* es un espacio métrico X con más de un punto compacto y conexo. Un subconjunto Y de X es un *subcontinuo* de X si Y es un continuo.

Ejemplo 1.2. Si consideramos $[0, 1]$ con la métrica usual, se cumple lo siguiente:

- i) $[0, 1]$ es conexo por ser un intervalo,
- ii) $[0, 1]$ es compacto ya que es cerrado y acotado,

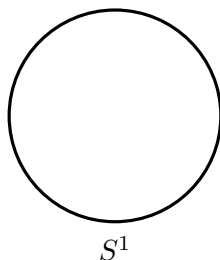
Así, $[0, 1]$ es un continuo.

[0, 1]

Definición 1.3. Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. Si $\alpha : [0, 1] \rightarrow A$ es un homeomorfismo, diremos que $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ son los puntos extremos del arco A .

Ejemplo 1.4. Sea $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la circunferencia unitaria con la métrica euclídeana de $\mathbb{R}^2$, entonces se cumple que

- i) S^1 es conexo pues S^1 es conexo por trayectorias, luego S^1 es conexo.
- ii) S^1 es compacto pues es un conjunto cerrado y acotado.



Definición 1.5. Una **curva cerrada simple** es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria S^1 .

Definición 1.6. Sea $n \in \mathbb{N}$. Una **n -celda** es un espacio topológico homeomorfo a la bola cerrada n – dimensional B^n en $\mathbb{R}^n$, donde

$$B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sqrt{x_1^2, \dots, x_n^2} \leq 1\}.$$



Definición 1.7. Sea $n \in \mathbb{N}$. Una ***n-esfera*** es cualquier espacio homeomorfo a la esfera n – dimensional S^n en $\mathbb{R}^{n+1}$, donde

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sqrt{x_1^2, \dots, x_{n+1}^2} = 1\}.$$

Definición 1.8. Un continuo X es una ***gráfica finita*** si es la unión de una familia finita de arcos tales que cada par de ellos o son ajenos o se intersectan en uno o dos de sus puntos extremos.

Algunas gráficas finitas significativas son el intervalo cerrado $[0, 1]$, la circunferencia unitaria S^1 y los n – odos simples.

Dada un gráfica finita X , $E(X)$ denota el conjunto de puntos de X cuyo orden es uno. Los elementos de $E(X)$ se denominan **puntos extremos** de X . El conjunto de puntos de X cuyo orden es mayor o igual a 3 se denota por $R(X)$ y sus elementos se denominan **puntos de ramificación** de X . Nótese que $R(X)$ es el conjunto de vértices de X .

2 Hiperespacios

Definición 2.1. Sea un continuo X , decimos que un ***hiperespacio*** de X es una colección de subconjuntos de X que cumplen alguna propiedad en particular.

Ejemplo 2.2. Sea X un continuo,

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado de } X \text{ y no vacío}\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\},$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo mas } n \text{ componentes}\},$$

$$F_n(X) = \{A \subset X : A \text{ tiene a lo mas } n \text{ puntos}\},$$

$$F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X).$$

Estas colecciones son algunos ejemplos de hiperespacios del continuo X .

Notemos que como X es un compacto, entonces 2^X es el hiperespacio de todos los subconjuntos compactos no vacíos de X , en particular $X \in 2^X$, y $C(X)$ es el hiperespacio de todos los subcontinuos de X . Por otra parte, $C_n(X)$ es conocido como el **n -ésimo hiperespacio** de X .

Para un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, se tiene lo siguiente:

- i) $C(X) = C_1(X)$,
- ii) $F_n(X) \subset F_{n+1}(X)$ y $C_n(X) \subset C_{n+1}(X)$,
- iii) $F_n(X) \subset C_n(X)$.

Definición 2.3. Sean un continuo X con métrica d , $A \subset X$ y $r > 0$. La nube de radio r con centro en A es

$$N(r, A) = \{x \in X : d(x, a) < r \text{ para algún } a \in A\}.$$

Definición 2.4. Sean un continuo X y un hiperespacio $H(X)$ de X , se dice que el continuo X tiene **hiperespacio único** $H(X)$ si, para cada continuo Y tal que $H(X)$ es homeomorfo a $H(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y .

Ahora nos interesa dotar al hiperespacio 2^X de una métrica, pero antes, tenemos lo siguiente.

Sean X un continuo y $A, B \subset X$, la distancia entre A y B que denotamos como $d(A, B)$, está dada de la siguiente manera:

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Si $p \in X$, escribimos $d(p, A) = d(\{p\}, A)$. Mientras no se diga lo contrario, dado un continuo X , denotaremos por d la métrica de X . Además, si $p \in X$ y $\epsilon > 0$, denotamos por $B_d(\epsilon, p)$, la bola abierta con centro en p y radio ϵ .

Si $A, B \in 2^X$, la función $H_d: 2^X \times 2^X \rightarrow [0, \infty)$, para cada $A, B \in 2^X$ está dada por

$$H_d(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N_d(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\epsilon, A)\}.$$

Esta función define una métrica en 2^X .

A la métrica H_d se le conoce como la **métrica de Hausdorff inducida por d** o simplemente **métrica de Hausdorff**. De ahora en adelante, siempre que consideraremos a 2^X , lo haremos con esta métrica. También, al ser los

demás hiperespacios, $F_1(X)$, $C(X)$ y $C_n(X)$ subconjuntos de 2^X , se les considera dotados con la restricción correspondiente de la métrica de Hausdorff H_d .

Si X es un continuo con métrica d , $\epsilon > 0$ y $A \in 2^X$, denotaremos la bola abierta de 2^X con centro en A y radio ϵ como:

$$B_{H_d}(\epsilon, A) = \{B \in 2^X : H_d(A, B) < \epsilon\}.$$

Definición 2.5. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \dots, U_n \subset X$. El **vietórico** de $U_1, U_2, \dots, U_n$ en 2^X , está dado de la siguiente manera:

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Definición 2.6. Sean un continuo X y un hiperespacio $H(X)$ de X , se dice que el continuo X tiene **hiperespacio único** $H(X)$ si, para cada continuo Y tal que $H(X)$ es homeomorfo a $H(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y .

Teorema 2.7. [8, Teorema 1.2.10] Sea $f : X \rightarrow Y$ una función sobreyectiva entre espacios métricos, $G_f = \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ una partición de X y la función $\varphi_f : X/G_f \rightarrow Y$ dada por $\varphi_f(q(x)) = f(x)$. Si f es abierta o cerrada, entonces $\varphi_f : X/G_f \rightarrow Y$ es un homeomorfismo.

3 Hiperespacio de subcontinuos de $[0, 1]$

Sea $T = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ y sea $\varphi : C([0, 1]) \rightarrow T$ definida por

$$\varphi([a, b]) = (a, b).$$

Sabemos que φ es un homeomorfismo entre $C([0, 1])$ y T . Es decir, el triángulo representado en la figura 1 es un modelo para $C([0, 1])$.

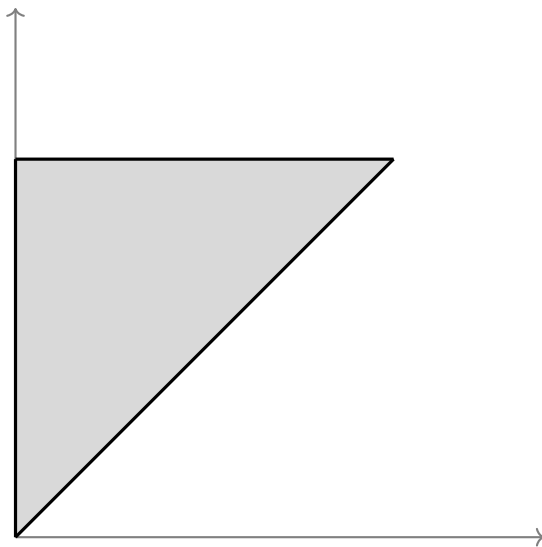


Figura 1: Modelo geométrico de $C([0, 1])$.

4 Hiperespacio de subcontinuos de S^1

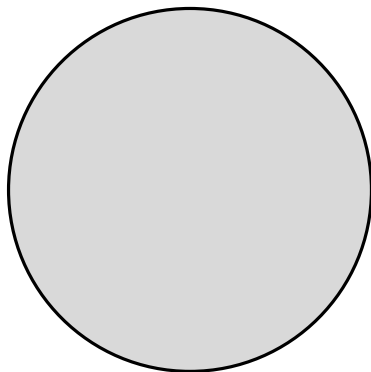
Sea $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Sea $\varphi : C(S^1) \rightarrow R$ dada por

$$\varphi(A) = \begin{cases} \left[1 - \frac{L(A)}{2\pi}\right] m(A), & A \neq S^1 \\ (0, 0), & A = S^1 \end{cases}$$

donde $L(A)$ es la longitud de arco de A y $m(A)$ el punto medio.

Sabemos que φ es un homeomorfismo entre $C(S^1)$ y R , y como R es el disco unitario, $C(S^1)$ es una 2-celda.

Figura 2: Modelo geométrico de $C(S^1)$.

Con este modelo vemos que el hiperespacio de subcontinuos tanto para $[0, 1]$ como para S^1 es una 2-celda, ambos continuos tienen el mismo hiperespacio. En otras palabras, los continuos $[0, 1]$ y S^1 no tienen hiperespacio $C(X)$ único.

Teorema 4.1. $C_2([0, 1])$ es homeomorfo a $[0, 1]^4$.

Demostración. Demostración Sea $D^1 = \{A \in C_2([0, 1]) \mid 1 \in A\}$ y $D_0^1 = \{A \in C_2([0, 1]) \mid 0, 1 \in A\}$.

Veamos que $C_2([0, 1])$ es homeomorfo a $K(D^1)$ (el cono sobre D^1). Sea $f : K(D^1) \rightarrow C_2([0, 1])$ dada por $f((A, t)) = (1 - t)A = \{(1 - t)a : a \in A\}$. Dado que $f((A, 1)) = \{0\}$ para cada $A \in C_2([0, 1])$, f es una función bien definida. Sean $A, B \in D^1$ y $s, t \in [0, 1]$ tales que $f((A, t)) = f((B, s))$. Dado que $1 \in A \cap B$, $1 - t = \max(1 - t)A$ y $1 - s = \max(1 - s)B$. Esto implica que $t = s$. Si $t = s = 1$, entonces $(A, 1)$ y $(B, 1)$ representan el vértice de $K(D^1)$. Por lo tanto, asumimos que $t < 1$. Como $(1 - t)A = (1 - t)B$, $A = B$. Por lo tanto, f es inyectiva.

Ahora, sea $A \in C_2([0, 1]) \setminus \{0\}$. Supongamos que $t = 1 - \max A$. Entonces, $\max(\frac{1}{1-t})A = 1$. Por lo tanto, $(\frac{1}{1-t})A \in D^1$ y $f((\frac{1}{1-t})A, t) = A$. Por lo tanto, f es suprayectiva. Por lo tanto, $C_2([0, 1])$ es homeomorfo a $K(D^1)$.

Veamos que D^1 es homeomorfo a $K(D_0^1)$. Sea $g : K(D_0^1) \rightarrow D^1$ dada por $g((A, t)) = t + (1 - t)A = \{t + (1 - t)a : a \in A\}$. Entonces, de manera similar a f , g es un homeomorfismo.

Finalmente veamos que (D_0^1) es homeomorfo a $[0, 1]^2$. Sea $T = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$, y sea $S = T/\Delta$, donde $\Delta = \{(a, b) \in T : a = b\}$. Nótese que S es homeomorfo a $[0, 1]^2$.

Sea $h : T \rightarrow D_0^1$ dada por $h((a, b)) = [0, a] \cup [b, 1]$. Entonces h es continua. Nótese que $h((a, b)) = h((c, d))$ si y solo si $a = c$ y $b = d$. Por lo tanto, por Teorema 2.7, S y D_0^1 son homeomorfos. $\square$

Lema 4.2. *Existe un encaje φ de $C_2([0, 1])$ en $\mathbb{R}^4$ tal que $\varphi(C_1([0, 1]))$ es convexo.*

Demostración. Siguiendo la notación del Teorema 4.1, tenemos $f : K(D^1) \rightarrow C_2([0, 1])$ el homeomorfismo dado por

$$f(A, t) = \begin{cases} (1-t)A & , t < 1 \\ \{0\} & , t = 1 \end{cases}$$

y

$g : K(D_0^1) \rightarrow D^1$ es el homeomorfismo dado por

$$g(A, t) = \begin{cases} t + (1-t)A & , t < 1 \\ \{1\} & , t = 1 \end{cases}$$

El Teorema 4.1, se muestra que D_0^1 es una 2-celda y, usando f y g , que el $K(K(D_0^1))$ es homeomorfo a $C_2([0, 1])$. Sea T_2 el 2-simplejo estándar definido por el origen y la base estándar de $\mathbb{R}^2$, y sea $h_1 : D_0^1 \rightarrow T_2$ un homeomorfismo tal que $h_1([0, 1]) = (0, 0)$. Sea T_3 el 3-simplejo estándar definido por el origen y la base estándar de $\mathbb{R}^3$. De la construcción de h_1 , tenemos que existe un homeomorfismo $h_2 : \text{Cono}(D_0^1) \rightarrow T_3$ tal que $h_2([0, 1], 0) = (0, 0, 0)$ y $h_2([0, 1], t) = (0, 0, t)$. Por lo tanto, $h_2(\text{vertice}(K(D_0^1))) = (0, 0, 1)$. Ahora, sea $r_3 : T_3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^4$ la función definida por $r_3((x, y, z), t) = ((1-t)x, (1-t)y, (1-t)z, t)$, la cual es continua y es un homeomorfismo de $K(T_3)$ al 4-simplejo estándar. Por lo tanto, r_3 y h_2 inducen un homeomorfismo $\varphi : K(K(D_0^1)) \rightarrow T_4$, con T_4 el 4-simplejo estándar, de modo que $C_1([0, 1])$ se asigna al 2-simplejo estándar en el plano zt , que es convexo. $\square$

5 Espacio Cociente

Definición 5.1. *Sea X un espacio topológico no vacío. Una familia $\mathcal{D}$ de conjuntos no vacíos y ajenos dos a dos de X tales que $\bigcup \mathcal{D} = X$, se llama **partición** de X . Si los elementos de la partición son todos subconjuntos cerrados de X , se dice que la partición es cerrada.*

Teorema 5.2. Sean (X, τ) un espacio topológico no vacío y $\mathcal{D}$ una partición de X . La colección

$$T(\mathcal{D}) = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{D} : \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \tau\},$$

es una topología para $\mathcal{D}$.

Demostración. i) Como $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ y es tal que $\bigcup \mathcal{D} = X \in \tau$, entonces $\mathcal{D} \in T(\mathcal{D})$. Además como $\emptyset \in \mathcal{D}$ y $\bigcup \emptyset = \emptyset \in \tau$, se tiene que $\emptyset \in T(\mathcal{D})$.

ii) Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in T(\mathcal{D})$. Luego, $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathcal{D}$ y cumplen que $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \tau$ y $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \in \tau$. Luego $[\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U] \cap [\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V] \in \tau$, así $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \tau$.

iii) Por último sea $\{\mathcal{U}_i : i \in I\}$ una familia de subconjuntos de $T(\mathcal{D})$. Para cada $i \in I$, tenemos que $\bigcup_{A \in \mathcal{U}_i} A \in \tau$. Luego $\bigcup_{i \in I} \bigcup_{A \in \mathcal{U}_i} A = \bigcup_{i \in I} (\bigcup_{A \in \mathcal{U}_i} A) \in \tau$.

Por lo tanto, $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \in T(\mathcal{D})$.

□

Definición 5.3. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{D}$ una partición de X . El espacio topológico $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D}))$ es llamado **espacio de descomposición** de X y la topología $\mathcal{D}$ es llamada la **topología de descomposición**.

Intuitivamente una descomposición es el espacio que se obtiene del espacio original indentificando todos los puntos de cada miembro de una partición determinada. Por esta razón, a las descomposiciones frecuentemente se les llama espacios de identificación o también se les suele llamar **espacios cocientes**.

Teorema 5.4. Sea (X, τ) un espacio topológico, Y un conjunto no vacío y $g : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva, entonces

$$\tau_g = \{E \subset Y : g^{-1}[E] \in \tau\}$$

es una topología para Y .

Demostración. Sea $g : X \rightarrow Y$ suprayectiva.

i) Como $\emptyset, X \in \tau$, y como g es suprayectiva tenemos que $\emptyset = g^{-1}(\emptyset) \in \tau_g$ y $Y = g^{-1}(X) \in \tau_g$. Por lo tanto, el vacío y el conjunto total Y son abiertos.

- ii) Si W_1, W_2 son abiertos de X , $g^{-1}(W_1) \cap g^{-1}(W_2) = g^{-1}(W_1 \cap W_2)$ es la intersección de dos abiertos de X y, en consecuencia, también abierto en X . Por lo tanto, $W_1 \cap W_2$ es abierto de Y .
- ii) Si $\{W_j \mid j \in J\}$ es una familia de abiertos de X , entonces $p^{-1}(W_j)$ son abiertos de X y $\bigcup_j p^{-1}(W_j) = p^{-1}\left(\bigcup_j W_j\right)$ también es abierto. Por tanto, la unión $\bigcup_j W_j$ es un abierto de Y .

□

La función g es continua con la topología τ_g . Además, si τ es otra topología para Y con la que g resulta ser continua, entonces $\tau \subset \tau_g$.

Definición 5.5. Sea (X, τ) un espacio topológico, Y un conjunto no vacío y $g : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva. La topología $\tau_g = \{E \subset Y : g^{-1}(E) \in \tau\}$ es conocida como la **topología cociente** sobre Y inducida por la función g .

Definición 5.6. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{D}$ una partición de X . La función natural de X sobre $\mathcal{D}$ es la función $\pi : X \rightarrow \mathcal{D}$ dada por

$$\pi(x) = D \text{ si y solo si } x \in D.$$

La función natural π es una función continua ya que dado $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}$ abierto de $\mathcal{D}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\mathcal{U}) &= \{x \in X : \text{existe } D \in \mathcal{U} \text{ tal que } \pi(x) = D\} \\ &= \{x \in X : \text{existe } D \in \mathcal{U} \text{ tal que } x \in D\} \\ &= \bigcup_{D \in \mathcal{U}} D \end{aligned}$$

que es un abierto de X , es decir, $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ es un abierto de X .

Si tenemos un espacio de descomposición de un espacio topológico X , la topología $T(\mathcal{U})$ es la topología más grande tal que la función natural es continua. Más aún, π es una función cociente.

Definición 5.7. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una partición $\mathcal{D}$ de X es **semicontinua superior** si para cada $D \in \mathcal{D}$ y $U \in \tau$ tal que $D \subset U$ existe $V \in \tau$ con $D \subset V$ tal que si $A \in \mathcal{D}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subset U$.

Definición 5.8. Sea $\mathcal{D}$ un espacio de descomposición de un espacio topológico X . Un subconjunto E de X es $\mathcal{D}$ -**saturado** si existe $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}$ tal que $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$.

Teorema 5.9. Si $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superior de un espacio métrico compacto X , entonces $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D}))$ es metrizable.

Demostración. Como X es compacto, basta probar que el espacio de descomposición $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D}))$ es un espacio Hausdorff. Para ello sean $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ tales que $D_1 \neq D_2$, como X es T_1 , tenemos que D_1 y D_2 son cerrados de X y $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Luego, como X es normal existen dos subconjuntos abiertos y ajenos de X , digamos U_1 y U_2 tales que $D_1 \subset U_1$ y $D_2 \subset U_2$. Como $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superior por el, existen dos subconjuntos V_1 y V_2 abiertos de X tales que, para cada $i \in \{1, 2\}$, $D_i \subset V_i \subset U_i$ y V_i es $\mathcal{D}$ -saturado. Ahora, observemos que para todo $i \in \{1, 2\}$, se tiene que $D_i \in \pi[V_i]$, pues de lo contrario si $D_i \notin \pi[V_i]$ entonces $D_i \not\subset [V_i]$, pero $D_i \subset [V_i]$ lo que es absurdo.

Ahora, como V_1 y V_2 son abiertos y $\mathcal{D}$ -saturados, tenemos que $\pi[V_1]$ y $\pi[V_2]$ son abiertos de $\mathcal{D}$. Como $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y $V_i \subset U_i$, se sigue que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Luego, tenemos que para todo $i \in \{1, 2\}$ se cumple que $\pi^{-1}[\pi[V_i]] = V_i$ por ser V_i $\mathcal{D}$ -saturado. Así, $\pi[V_1] \cap \pi[V_2] = \emptyset$. De esta forma encontramos dos subconjuntos abiertos $\pi[V_1]$ y $\pi[V_2]$ ajenos de $\mathcal{D}$ tales que $D_1 \in \pi[V_1]$ y $D_2 \in \pi[V_2]$. Por lo tanto, hemos probado que $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D}))$ es un espacio Hausdorff. $\square$

Teorema 5.10. Sean un continuo X y $\mathcal{D}$ una descomposición semicontinua superior de X , entonces $\mathcal{D}$ es un continuo.

Demostración. Consideremos a $\pi : X \rightarrow \mathcal{D}$ la función natural. Como π es continua, la compacidad y conexidad son invariantes topológicos. Tenemos que $\mathcal{D}$ es compacto y conexo. Además, por el Teorema 5.9, tenemos que $\mathcal{D}$ es metrizable. Así, $\mathcal{D}$ es un continuo. $\square$

Teorema 5.11. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea A un subconjunto cerrado de X no vacío, entonces la partición $\mathcal{G}_A$ definida como sigue es semicontinua superior.

$$\mathcal{G}_A = \{A\} \bigcup \{\{z\} : z \in X \setminus A\}.$$

Demostración. Sean $G \in \mathcal{G}_A$ y $U \in \tau$ con $G \subset U$.

CASO 1: Primero supongamos que $G = A$ y sean $V = U$ y $B \in \mathcal{G}_A$ con $B \cap V \neq \emptyset$. Si $B = A$, se sigue que $B \subset U$. Si $B = \{z\}$ para algún $z \in X \setminus A$ entonces $z \in U$, luego $B = \{z\} \subset U$.

CASO 2: Supongamos que $G = \{z\}$ para algún $z \in X \setminus A$. Sea $V = U \cap (X \setminus A) \in \tau$ y $B \in \mathcal{G}_A$ con $B \cap V \neq \emptyset$. Notemos que $B \neq A$ pues de lo contrario por un lado tendríamos que $A \cap V \neq \emptyset$ y por otro lado $A \cap V = A \cap (U \cap (X \setminus A)) = \emptyset$, de aquí que $B = \{z\}$ para algún $z \in X \setminus A$, como $\{z\} \cap V \neq \emptyset$, luego $\{z\} \in U$, es decir, $B \subset U$.

En ambos casos llegamos a que $B \subset U$, por lo tanto $\mathcal{G}_A$ es semicontinua superior. $\square$

Dado (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{G}_A$ definida como arriba, denotaremos el espacio de descomposición $(\mathcal{G}_A, \tau(\mathcal{G}_A))$ simplemente por X/A , a saber, podemos pensar intuitivamente a X/A como el espacio obtenido de X al reducir A a un punto y se le conoce como **espacio cociente**.

6 Hiperespacio $C_n(X)/C_1(X)$

Sea n un entero positivo. Dado un continuo X , consideremos el siguiente cociente $C_1^n(X) = C_n(X)/C_1(X)$, con la topología cociente.

La función $q_X^n : C_n(X) \rightarrow C_1^n(X)$ denota la función cociente. Definida por

$$q_X^n(A) = \begin{cases} \{A\}, & A \in C_n(X) \setminus C_1(X) \\ \mathbf{c}_X^n, & A \in C_1(X). \end{cases}$$

De este modo

$$C_1^n = \{\{A\} : A \in C_n(X) \setminus C_1(X)\} \cup \{\mathbf{c}_X^n\}.$$

Donde $\mathbf{c}_X^n$ es el elemento $q_X^n(C_1(X))$ de $C_1^n(X)$.

Nótese que si $m \leq n$, entonces $\mathcal{C}_1^m(X)$ es un subconjunto de $\mathcal{C}_1^n(X)$. Por lo tanto, si f es una función con dominio $\mathcal{C}_1^n(X)$, entonces hay una restricción natural de f a $\mathcal{C}_1^m(X)$. Nótese que si $m < n$, entonces $q_X^m = q_X^n|_{\mathcal{C}_1^m(X)}$.

Observación 6.1. *Nótese que si $n \in \mathbb{N}$, entonces $q_X^n : C_n(X) \setminus C_1(X) \rightarrow C_1^n(X) \setminus \{\mathbf{c}_X^n\}$ es un homeomorfismo.*

Recordemos que el hiperespacio $C_n(X)/C_1(X)$ lo denotamos por $C_1^n(X)$. En esta sección presentamos la prueba dada en [7] de que las gráficas finitas sin puntos de ramificación, es decir, el arco y la curva cerrada simple, X , tienen hiperespacio $C_1^n(X)$ único para cada $n > 1$.

Sea X una gráfica finita tal que $R(X) = \emptyset$. Definimos el conjunto de aristas de X de forma topológica de la siguiente manera:

$$\mathfrak{U}_S(X) = \{J \subset X \mid J \text{ es un arco libre maximal o } J \text{ es un ciclo en } X\}$$

$\mathfrak{U}_R(X)$ denota el conjunto de ciclos de X y $\mathfrak{U}_E(X)$ es el subconjunto de $\mathfrak{U}_S(X)$ que consiste en arcos que tienen un solo punto de ramificación de X . En el caso de $R(X) = \emptyset$, definimos $\mathfrak{U}_S(X)$ como el conjunto $\{X\}$.

Dada una gráfica finita X y $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$\mathcal{L}_n(X) = \{A \in C_n(X) \mid A \text{ tiene una vecindad } N \in C_n(X) \text{ tal que } N \text{ es una } 2n - \text{celda}\};$$

$$\mathcal{QL}_n(X) = \{\chi \in C_1^n(X) \mid \chi \text{ tiene una vecindad } N \in C_1^n(X) \text{ tal que } N \text{ es una } 2n - \text{celda}\};$$

$$\partial\mathcal{QL}_n(X) = \{\chi \in C_1^n(X) \mid \chi \text{ tiene una vecindad } N \in C_1^n(X) \text{ tal que } N \text{ es una } 2n - \text{celda y } \chi \text{ esta en la frontera como variedad de } N\}.$$

Lema 6.2. *Sea X una gráfica finita y $n \geq 3$. Sea $A \in C_{n-1}(X) \setminus C(X)$ tal que $A \cap R(X) = \emptyset$. Entonces existe una vecindad V de A en $C_n(X)$ tal que cada vecindad cerrada W de A en $C_n(X)$ que satisface $W \subset V$ puede separarse por un conjunto cerrado $S \subset C_{n-1}(X)$ tal que $\dim[S] \leq 2n - 2$.*

Demostración. Sean $A \in C_{n-1}(X) \setminus C(X)$ tal que $A \cap R(X) = \emptyset$ y $A_1, \dots, A_m$ las componentes de A . Notemos que $2 \leq m < n$. Sean

$$\alpha = \min\{d(A_i, A_j) : i, j \in \{1, \dots, m\} \text{ con } i \neq j\}; \delta = \min\{d(A_i, R(X)) : i \in \{1, \dots, m\}\} \text{ y } \epsilon = \min\{\frac{\alpha}{2}, \frac{\delta}{2}\}.$$

Luego, $N(\epsilon, A_i) \cap N(\epsilon, A_j) = \emptyset$ y $N(\epsilon, A_i) \cap R(X) = \emptyset$ para cada $i, j \in \{1, \dots, m\}$ con $i \neq j$, por la normalidad de X para $j \in \{1, \dots, m\}$, existe un conjunto abierto T en X tal que $A_j \subset T_j \subset \overline{T_j} \subset N(\epsilon, A_j)$. Sea M_j la componente de T_j tal que $A_j \subset M_j$, tenemos que M_j es un conjunto abierto en X y de aquí, M_j es no degenerado. Luego, $A_j \subset \overline{M_j} \subset \overline{T_j} \subset N(\epsilon, A_j)$. Para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, sea $J_j = \overline{M_j}$.

Como J_j es un subcontinuo de X , tenemos que J_j es una gráfica finita, como $J_j \cap R(X) = \emptyset$, $J_j \neq X$ y J_j es no degenerado, se obtiene que J_j es un arco. Para cada $i, j \in \{1, \dots, m\}$, tenemos que $J_i \cap J_j = \emptyset$ y $A_i \subset \text{int}_X(J_i)$.

Tomemos a $\mathcal{V} = \langle J_1, \dots, J_m \rangle_n$. Como $A \in \langle M_1, \dots, M_m \rangle_n \subset \mathcal{V}$, tenemos que $\mathcal{V}$ es una vecindad de A en $C_n(X)$.

Sean $\mathcal{W}$ una vecindad cerrada de A en $C_n(X)$ tal que $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ y consideremos los conjuntos

$\mathcal{P} = \{B \in \mathcal{W} : B \cap J_1 \text{ tiene al menos dos componentes}\}$ y $\mathcal{Q} = \{B \in \mathcal{W} : B \cap (J_2 \cup \dots \cup J_m) \text{ tiene al menos } n-1 \text{ componentes}\}$.

Sean $C \in \mathcal{P}$, $C_1, \dots, C_l$ las componentes de C con $m \leq l$ y $\delta_1 = \min\{\frac{d(C_i, C_j)}{2} : i, j \in \{1, \dots, l\} \text{ con } i \neq j\}$. Sea $\epsilon_1 = \min\{\frac{\epsilon}{2}, \frac{\delta_1}{2}\}$, notemos que $B_{C_n}(X)(C, \epsilon_1) \cap \mathcal{W}$ es un conjunto abierto en $\mathcal{W}$ y está contenida en $\mathcal{P}$. De manera análoga, sean $D \in \mathcal{Q}$, $D_1, \dots, D_k$ las componentes de D con $m \leq k$ y $\delta_2 = \min\{\frac{d(D_i, D_j)}{2} : i, j \in \{1, \dots, k\} \text{ con } i \neq j\}$. Sea $\epsilon_2 = \min\{\frac{\epsilon}{2}, \frac{\delta_2}{2}\}$, así $B_{C_n}(X)(D, \epsilon_2) \cap \mathcal{W}$ es un conjunto abierto en $\mathcal{W}$ y está contenido en $\mathcal{Q}$. Por lo tanto, $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son conjuntos abiertos en $\mathcal{W}$.

Como $\mathcal{W}$ es una vecindad de A , existe $\gamma > 0$ tal que $B_{C_n}(X)(A, \gamma) \subset \mathcal{W}$. Sea $p \in J_1 \setminus A_1$ tal que $d(p, A_1) < \gamma$ notemos que $A \cup \{p\} \in B_{C_n}(X)(A, \gamma) \subset \mathcal{W}$ y que $(A \cup \{p\}) \cap J_1$ tiene dos componentes, donde $(A \cup \{p\}) \in \mathcal{P}$. Así, $\mathcal{P}$ es no vacío.

Sean $q_{m+1}, \dots, q_n \in J_2 \setminus A_2$ puntos distintos tales que $d(q_i, A_2) < \gamma$, para $i \in \{m+1, \dots, n\}$ así, $A \cup \{q_{m+1}, \dots, q_n\} \in 2B_{C_n}(X)(A, \gamma) \subset \mathcal{W}$. Notemos que en este paso estamos usando la hipótesis de que $n \geq 3$, ya que $A \cup \{q_{m+1}, \dots, q_n\}$ tiene al menos 3 componentes, A_1, A_2 y $\{q_n\}$. Notemos que $A \cup \{q_{m+1}, \dots, q_n\} \cap (J_2 \cup \dots \cup J_m)$ tiene al menos $n-1$ componentes, de donde $A \cup \{q_{m+1}, \dots, q_n\} \in \mathcal{Q}$ así, $\mathcal{Q}$ es no vacío. Supongamos que $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$, sea $B \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, luego, B tiene al menos $n+1$ componentes lo cual es una contradicción ya que $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \subset C_n(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$. En conclusión, $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son subconjuntos abiertos de $\mathcal{W}$ no vacíos y ajenos.

Sea $\mathcal{S} = \mathcal{W} \setminus (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) = \{B \in \mathcal{W} : B \text{ tiene exactamente una componente contenida en } J_1 \text{ y } B \cap (J_2 \cup \dots \cup J_m) \text{ tiene a lo mas } n-2 \text{ componentes}\}$. Notemos que $\mathcal{S} \subset C_{n-1}(X)$. Como $\mathcal{W}$ es vecindad cerrada en $C_n(X)$ y $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ es un conjunto abierto en $\mathcal{W}$, tenemos que $\mathcal{S}$ es un conjunto cerrado en $C_{n-1}(X)$. Luego, para cada $B \in \mathcal{S}$ tenemos que $B \cap R(X) = \emptyset$, así, $\mathcal{S} \subset \{B \in C_{n-1}(X) : B \cap R(X) = \emptyset\} = \mathcal{W}_{n-1}(X)$, tenemos que $\dim[\mathcal{W}_{n-1}(X)] \leq 2n-2$ y como $\mathcal{S} \subset \mathcal{W}_{n-1}(X)$, tenemos que $\dim[\mathcal{S}] \leq 2n-2$. Como $\mathcal{W} \setminus \mathcal{S} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$, concluimos que $\mathcal{W}$ es separado por un subconjunto cerrado $\mathcal{S}$ en $C_{n-1}(X)$ tal

que $\dim[\mathcal{S}] \leq 2n - 2$. $\square$

Teorema 6.3. *Sea X un continuo. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_n(X)$ es nada denso en $C_{n+1}(X)$. En particular, $C_n(X)$ es nada denso en 2^X .*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\text{Int}_{C_{n+1}(X)}(C_n(X)) \neq \emptyset$. Recordemos que $F(X)$ es denso en 2^X (véase la demostración del Corolario 1.8.9). Por lo tanto, X no pertenece a $\text{Int}_{C_{n+1}(X)}(C_n(X))$.

Sea $A \in \text{Int}_{C_{n+1}(X)}(C_n(X) \setminus \{X\})$, y supongamos que $A_1, \dots, A_k$ son las componentes de A . Por lo tanto, $k \leq n$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, A) \cap C_{n+1}(X) \subset \text{Int}_{C_{n+1}(X)}(C_n(X))$. Sin pérdida de generalidad, asumimos que ϵ es lo suficientemente pequeño como para que $N(\epsilon, A_j) \cap N(\epsilon, A_l) = \emptyset$ si $j \neq l$ y $j, l \in \{1, \dots, k\}$. Supóngase que $n - k = m$ y sean $x_1, \dots, x_{m+1} \in N(\epsilon, A_1) \setminus A_1$ $m + 1$ puntos distintos. Sea $B = A \cup \{x_1, \dots, x_{m+1}\}$. Entonces $B \in C_{n+1}(X) \setminus C_n(X)$ y $H(A, B) < \epsilon$. $\square$

Teorema 6.4. *Sea X una gráfica finita con $R(X) = \emptyset$ y $n \geq 3$. Entonces $C_n(X) \setminus C_{n-1}(X) = \mathcal{L}_n(X)$*

Demostración. Sea $A \in C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)$. Sean $A_1, \dots, A_n$ las diferentes componentes de A . Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe un arco J_i en X tal que A_i está contenido en el interior de J_i en X y $J_1, \dots, J_n$ son ajenos por pares. Entonces $U = \langle J_1, \dots, J_n \rangle_n$ es una vecindad de A en $C_n(X)$. Además, el producto cartesiano $C(J_1) \times \dots \times C(J_n)$ es homeomorfo a U . Dado que cada $C(J_i)$ es una $2 - \text{celda}$, concluimos que U es una $2n - \text{celda}$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{L}_n(X)$.

Ahora, tomemos $A \in \mathcal{L}_n(X)$. Entonces, existe una vecindad U de A en $C_n(X)$ tal que U es una $2n - \text{celda}$. Necesitamos demostrar que $A \notin C_{n-1}(X)$. Supongamos lo contrario, es decir, que $A \in C_{n-1}(X)$. Entonces existe un elemento $A_0 \in C_{n-1}(X) \setminus C(X)$ tal que $A_0 \in \text{int}_{C_n(X)}(U)$.

Sea V una vecindad de A_0 en $C_n(X)$. Dado que U es una $2n - \text{celda}$, existe una $2n - \text{celda}$ W tal que $A_0 \in W \subset U \cap V$. Por el Lema 6.2 y como W es una vecindad cerrada de A_0 en $C_n(X)$, W puede separarse por un subconjunto cerrado S de W tal que $\dim[S] \leq 2n - 2$. Esto es una contradicción al Corolario del Teorema IV.4 de [5]. Por lo tanto $A \notin C_{n-1}(X)$. $\square$

Teorema 6.5. *Sea X una gráfica finita y supongamos que $R(X) = \emptyset$. Si $n \geq 3$, entonces $q_X^n(\mathcal{L}_n) = \mathcal{Q}\mathcal{L}_n(X)$.*

Demostración. Como $n \geq 3$ y $R(X) = \emptyset$, por Teorema 6.4, tenemos que $\mathcal{L}_n(X) = C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)$. Sea $A \in \mathcal{L}_n(X)$, entonces existe una $2n - celda$ M en $C_n(X)$ tal que $A \in \text{Int}_{C_n(X)}(M)$. Como $A \in M \cap (C_n(X) \setminus C_{n-1}(X))$, existe una $2n - celda$ M' en $M \cap (C_n(X) \setminus C_{n-1}(X))$ tal que $A \in \text{Int}_{C_n(X)}(M') \subset M' \subset M \cap (C_n(X) \setminus C_{n-1}(X))$.

Por lo tanto, $q_X^n(\mathcal{M}')$ es una $2n - celda$ contenida en $C_1^n(X) \setminus \{\mathfrak{c}_X^n\}$ y $q_X^n(A) \in \text{Int}_{C_1^n(X)}(q_X^n(\mathcal{M}'))$. Por lo tanto, $q_X^n(\mathcal{L}_n) \subset \mathcal{QL}_n(X)$.

Ahora, sea $\mathcal{A} \in \mathcal{QL}_n(X) \setminus \{\mathfrak{c}_X^n\}$, entonces existe una $2n - celda$ N en $C_1^n(X)$ tal que $\mathcal{A} \in \text{Int}_{C_1^n(X)}(N)$. Como $\mathcal{A} \in N \cap (\mathcal{QL}_n(X) \setminus \{\mathfrak{c}_X^n\})$, existe una $2n - celda$ N' en $N \cap (\mathcal{QL}_n(X) \setminus \{\mathfrak{c}_X^n\})$ tal que $\mathcal{A} \in \text{Int}_{C_1^n(X)}(N') \subset N \subset N \cap (\mathcal{QL}_n(X) \setminus \{\mathfrak{c}_X^n\})$. Luego, por la Observación 6.1, $(q_X^n)^{-1}(N')$ es una $2 - celda$ y $(q_X^n)^{-1}(\mathcal{A}) \in \text{Int}_{C_n(X)}((q_X^n)^{-1}(N'))$, Así $(q_X^n)^{-1}(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}_n(X)$. Por lo tanto $\mathcal{QL}_n(X) \setminus \{\mathfrak{c}_X^n\} \subset \mathcal{L}_n(X)$.

Veamos que $\mathfrak{c}_X^n \in C_1^n(X) \setminus \mathcal{QL}_n(X)$. Supongamos que $\mathfrak{c}_X^n \in \mathcal{QL}_n(X)$. Entonces existe una $2n - celda$ M en $C_1^n(X)$ tal que $\mathfrak{c}_X^n \in \text{Int}_{C_n(X)}(M)$. Sea $A' \in C_1(X)$. Nótese que $A' \in \text{Int}_{C_n(X)}((q_X^n)^{-1}(M))$. Sea $A \in C_{n-1}(X) \setminus C_1(X)$ tal que $q_X^n(A) \in \text{Int}_{C_1^n(X)}(M)$ (Teorema 6.3), pero $q_X^n(A) \neq \mathfrak{c}_X^n$ por lo que existe una $2n - celda$ N en $C_1^n(X) \setminus \{\mathfrak{c}_X^n\}$ tal que $q_X^n(A) \in \text{Int}_{C_1^n(X)}(N)$. Por la Observación 6.1, tenemos que $(q_X^n)^{-1}(N)$ es una $2n - celda$ en $C_n(X)$ y $A \in \text{Int}_{C_n(X)}((q_X^n)^{-1}(M))$, es decir, $A \in \mathcal{L}_n$ una contradicción con el hecho de que $\mathcal{L}_n = C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)$. Por lo tanto, $q_X^n(\mathcal{L}_n) = \mathcal{QL}_n(X)$ $\square$

Teorema 6.6. *El hiperespacio cociente $C_1^2([0, 1])$ es una $4 - celda$.*

Demostración. Sean x, y, z y w las coordenadas estándar de $\mathbb{R}^4$. Como ya vimos, el hiperespacio $C_2([0, 1])$ es una $4 - celda$, Teorema 4.1.

Sea $\varphi : C_2([0, 1]) \rightarrow [0, 1]^4$ un homeomorfismo. Sea β la frontera como variedad de $\varphi(C_2([0, 1]))$. Por el Lema 4.2, tenemos que $\varphi(C_1([0, 1])) \subset \beta$. Como $\varphi(C_1([0, 1])) \subset \beta$ y β es una $3 - esfera$, se deduce que $\beta/\varphi(C_1([0, 1]))$ es una $3 - esfera$ [1, Teorema, p. 21].

Para ver que $C_1^2([0, 1])$ es una $4 - celda$, sea $q : \beta \rightarrow \beta/C_1([0, 1])$ la función cociente. Dado que β y $\beta/C_1([0, 1])$ son $3 - esferas$ y $C_1([0, 1])$ es compacto, q es una función celular [10, Corolario 1.8.1, pág. 44]. Por lo tanto, q puede extenderse a una función f desde la $4 - celda$ $C_2([0, 1])$ sobre una $4 - celda$ I^4 tal que f es un homeomorfismo en el interior de la variedad de $C_2([0, 1])$ al interior de la variedad de I^4 [11, Teorema, pág. 1279]. Nótese que la única fibra no degenerada de f es $q^{-1}(C_1([0, 1])) = C_1([0, 1])$, que también es la única

fibra no degenerada de la función cociente $q_{[0,1]}^2 : C_2([0,1]) \rightarrow C_1^2([0,1])$. Por lo tanto, $q_{[0,1]}^2 \circ f^{-1}$ es un homeomorfismo de I^4 sobre $C_1^2([0,1])$ (la continuidad se demuestra por el Lema de Transgresión [9, 3.22, p. 45]. Esto demuestra que $C_1^2([0,1])$ es una 4 – celda. $\square$

Teorema 6.7. *Sea $n \geq 2$. Entonces el espacio $C_1^n([0,1])$ no es homeomorfo a $C_1^n(S^1)$.*

Demostración. Consideramos dos casos.

Caso 1. $n = 2$

Por el Teorema 6.6, $C_1^2([0,1])$ es una 4 – celda. Esto implica que, para cada $\chi \in C_1^2([0,1])$, $C_1^2([0,1]) \setminus \{\chi\}$ es simplemente conexo.

Veamos que $C_2(S^1) \setminus C_1(S^1)$ no es simplemente conexo. Esto implica que $C_1^2(S^1) \setminus \{\mathbf{c}_X^2\}$ no es simplemente conexo (Observación 6.1).

Definamos $mid : C_1(S^1) \setminus \{S^1\} \rightarrow F_1(S^1)$ de la siguiente manera: Para un arco A en S^1 sea $mid(A)$ como el singular del punto medio del arco A , y para cualquier punto $p \in S^1$ defina $mid(\{p\}) = \{p\}$. Obsérvese que $mid|_{C_1(S^1) \setminus \{S^1\}} : C_1(S^1) \setminus \{S^1\} \rightarrow F_1(S^1)$ es una función continua.

Si $A \in C_2(S^1) \setminus C_1(S^1)$, entonces sean A_1 y A_2 las dos componentes de A . Sea $f_1 : C_2(S^1) \setminus C_1(S^1) \rightarrow F_2(S^1) \setminus F_1(S^1)$ dada por $f_1(A_1 \cup A_2) = \{mid(A_1), mid(A_2)\}$ y sea $f_2 : F_2(S^1) \setminus F_1(S^1) \rightarrow F_2(S^1) \setminus F_1(S^1)$ definida por $f_2(\{a, b\}) = \{mid(\overrightarrow{\{a, b\}}), mid(\overleftarrow{\{a, b\}})\}$, (donde $\overrightarrow{\{a, b\}}$ es el arco que une a con b en sentido horario de modo que $\overrightarrow{\{a, b\}}$ comienza en el elemento con argumento complejo mínimo y termina en el elemento con argumento complejo máximo, y $\overleftarrow{\{a, b\}}$ es el arco que une a con b en sentido antihorario de modo que $\overleftarrow{\{a, b\}}$ comienza en el elemento con argumento complejo mínimo y termina en el elemento con argumento complejo máximo).

Obsérvese que f_1 y f_2 son funciones continuas. Por lo tanto, la función $g = f_2 \circ f_2 \circ f_1$ también es una función continua de $C_2(S^1) \setminus C_1(S^1)$ en $F_2(S^1)$, con la propiedad de que cada elemento de $C_2(S^1) \setminus C_1(S^1)$ se aplica a un par de puntos antípodas $\{p, q\}$.

Sea $S = \{\{p, q\} \in F_2(S^1) | p = -q\}$, tenemos que $S \subset C_2(S^1) \setminus C_1(S^1)$ y la restricción de g a S es la función identidad, $g|_S : S \rightarrow S$, mas aún, $g|_S$ es un homeomorfismo. Notemos que S^1 es homeomorfo a $S \subset F_2(S^1)$. Por lo tanto, $C_2(S^1) \setminus C_1(S^1)$ no es simplemente conexo. Luego, $C_1^2(S^1) \setminus \{\mathbf{c}_X^2\}$ tampoco lo es (Observación 6.1). Hemos demostrado que $C_1^2(S^1) \setminus \{\mathbf{c}_X^2\}$ no es simplemente conexo y que $C_1^2([0,1]) \setminus \{\chi\}$ es simplemente conexo para todo

$\chi \in C_1^2([0, 1])$. Por lo tanto, $C_1^2([0, 1])$ no es homeomorfo a $C_1^2(S^1)$.

Caso 2. $n \geq 3$

Sea $n \geq 3$ y sea $h : C_1^n([0, 1]) \rightarrow C_1^n(S^1)$ un homeomorfismo. Por la Observación 6.1 y el Teorema 6.5, tenemos que $\mathcal{L}_n([0, 1])$ es homeomorfo a $\mathcal{QL}_n([0, 1])$, $\mathcal{L}_n(S^1)$ es homeomorfo a $\mathcal{QL}_n(S^1)$ y $h(\mathcal{QL}_n([0, 1])) = \mathcal{QL}_n(S^1)$.

Como $n \geq 3$, $R([0, 1]) = \emptyset$ y $R(S^1) = \emptyset$, por Lema 6.4, tenemos que $\mathcal{L}_n([0, 1]) = C_n([0, 1]) \setminus C_{n-1}([0, 1])$ y $\mathcal{L}_n(S^1) = C_n(S^1) \setminus C_{n-1}(S^1)$. Por lo tanto, $C_n([0, 1]) \setminus C_{n-1}([0, 1])$ es homeomorfo a $C_n(S^1) \setminus C_{n-1}(S^1)$. Sea

$$f_1 : C_n([0, 1]) \setminus C_{n-1}([0, 1]) \rightarrow C_n(S^1)$$

y

$$f_2 : C_n(S^1) \setminus C_{n-1}(S^1) \rightarrow C_n([0, 1])$$

dadas por

$$f_1(A) = (q_{S^1}^n)^{-1}(h(q_{[0,1]}^n(A)))$$

y

$$f_2(B) = (q_{[0,1]}^n)^{-1}(h^{-1}(q_{S^1}^n(B))).$$

Como $q_{[0,1]}^n$, h y $q_{S^1}^n$ son continuas con dominio compacto, son uniformemente continuas, así $q_{[0,1]}^n|_{C_n([0,1]) \setminus C_{n-1}([0,1])}$ y $q_{S^1}^n|_{C_n(S^1) \setminus C_{n-1}(S^1)}$ también son uniformemente continuas. Por la Observación 6.1, $(q_{[0,1]}^n|_{C_n([0,1]) \setminus C_{n-1}([0,1])})^{-1}$ y $(q_{S^1}^n|_{C_n(S^1) \setminus C_{n-1}(S^1)})^{-1}$, son uniformemente continuas. Con ello, f_1 y f_2 son uniformemente continuas. Además tenemos sus espacios de rango son espacios métricos compactos, en particular, son espacios métricos completos. Por Teorema 6.3, $C_n([0, 1]) \setminus C_{n-1}([0, 1])$ y $C_n(S^1) \setminus C_{n-1}(S^1)$ son subconjuntos densos de $C_n([0, 1])$ y $C_n(S^1)$, respectivamente. Por lo tanto, por [12, Teorema D, pág. 78], existen extensiones únicas $\widehat{f}_1 : C_n([0, 1]) \rightarrow C_n(S^1)$ y $\widehat{f}_2 : C_n(S^1) \rightarrow C_n([0, 1])$ de f_1 y f_2 , respectivamente, que son uniformemente continuas.

Sea $A \in C_{n-1}([0, 1])$ y sea $\{A_m\}_{m=1}^\infty$ una sucesión en $C_n([0, 1]) \setminus C_{n-1}([0, 1])$ que converge a A . Entonces, $\{\widehat{f}_1(A_m)\}_{m=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $C_n(S^1)$. Por lo tanto, existe $B \in C_n(S^1)$ tal que $\{\widehat{f}_1(A_m)\}_{m=1}^\infty$ converge a B y $\widehat{f}_1(A) = B$, hemos llegado a que $\widehat{f}_1(C_{n-1}([0, 1])) \subset C_{n-1}(S^1)$ y similarmete, $\widehat{f}_2(C_{n-1}(S^1)) \subset C_{n-1}([0, 1])$, y por cómo se definió f_1 y f_2 , tenemos que $\widehat{f}_2$ es la inversa de $\widehat{f}_1$. Por lo tanto, $C_n([0, 1])$ es homeomorfo a $C_n(S^1)$, lo cual es

una contradicción, [6, Teorema 3.8]. Por lo tanto, $C_1^n([0, 1])$ no es homeomorfo a $C_1^n(S^1)$.

Por los casos 1 y 2, $C_1^n([0, 1])$ no es homeomorfo a $C_1^n(S^1)$. $\square$

Teorema 6.8. [2, Teorema 5.12] *Sea $n > 1$. Si X es un continuo tal que $C_1^n(X)$ es homeomorfo a $C_1^n([0, 1])$ o a $C_1^n(S^1)$, entonces X es homeomorfo a $[0, 1]$ o a S^1 .*

Teorema 6.9. *Sea $n \geq 2$, sea $X \in \{S^1, [0, 1]\}$ y Y un continuo. Si $C_1^n(X)$ es homeomorfo a $C_1^n(Y)$ entonces X es homeomorfo a Y .*

Demostración. Supóngase que $X = S^1$. Por hipótesis tenemos que $C_1^n(X)$ es homeomorfo a $C_1^n(Y)$. Por Teorema 6.8, Y es homeomorfo a S^1 o a $[0, 1]$, pero por Teorema 6.7, $C_1^n([0, 1])$ no es homeomorfo a $C_1^n(S^1)$, así Y es homeomorfo a X . Un argumento similar prueba el caso $X = [0, 1]$. $\square$

Hemos demostrado que $[0, 1]$ y S^1 tienen hiperespacio $C_n(X)/C_1(X)$ único.

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar el capítulo.

Referencias

- [1] R. J. Bean, *Decompositions of E^3 with a null sequence of starlike equivalent non-degenerate elements are E^3* , Ill. J. Math. 11 (1967) 21–23.
- [2] J. Camargo, S. Macías, *Quotients of n -fold hyperspaces*, Topol. Appl. 197 (2016) 154–166.
- [3] F. Casarrubias-Segura y A. Tamariz-Mascarúa, *Elementos de topología general*, 2012.
- [4] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Finite graphs have unique hyperspace $HS_n(X)$* , Topol. Proc. 44 (2014) 75–95.

- [5] W. Hurewicz y H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton, NJ: Princeton University Press, ninth printing, 1974.
- [6] A. Illanes, *Finite graphs X have unique hyperspaces $C_n(X)$* , Topol. Proc. 27 (2003) 179–188.
- [7] S. Macías y U. Morales, *Graphs have unique quotient hyperspace $C_1^n(X)$* , Topology and its Applications, 109 (2022), 237–256.
- [8] S. Macías, *Topics on Continua*, second edition, Springer, Cham, 2018.
- [9] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum theory, an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158, Marcel Dekker, New York, 1992.
Math., vol. 49, Marcel Dekker, New York, Basel, 1978, Reprinted in: Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, Serie Textos, vol. 33, 2006.
- [10] T. B. Rushing, *Topological Embeddings*, Academic Press, New York, 1973.
- [11] W. Haver, *A characterization theorem for cellular maps*, Bull. Am. Math. Soc. 76 (1970) 1277–1280.
- [12] G.F. Simmons, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd, Tokyo, 1963

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

marybriones107@gmail.com

dherrera@fcfm.buap.mx

fmacias@fcfm.buap.mx

Capítulo 6

Sobre abanicos suaves

José Alberto Ortega Becerril, David Herrera Carrasco,
Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP

Resumen

A partir del estudio de los dendroides surgen los dendroides simples, comúnmente llamados abanicos. El análisis de estos continuos ha dado pie al desarrollo de la teoría de curvas y, en particular, al estudio de diversas nociones asociadas a los abanicos, tales como la *suavidad*.

El propósito de este capítulo es presentar la estructura de los abanicos suaves y analizar algunas propiedades que se preservan bajo ciertas funciones. Los resultados expuestos en este capítulo se basan principalmente en el trabajo de Charatonik [1].

1 Preliminares

A lo largo de este capítulo, los espacios topológicos considerados serán, bajo las hipótesis correspondientes, continuos; es decir, espacios métricos, compactos y conexos.

La siguiente notación será usada: xy denota un arco no vacío con puntos extremos x y y . $\delta(X) = \text{diám}(X)$, $\rho(x, y)$ la distancia entre x y y , $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, a) : a \in A\}$ y $\lambda(A)$ la longitud de un arco rectificable A . Más aún, $\mathcal{I}$ denotará el segmento 01 . Sea X un continuo,

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado de } X \text{ y no vacío}\},$$

Recordemos la definición de la métrica de Hausdorff para $A, B \in 2^X$,

$$H_d(A, B) = \inf \{ \varepsilon > 0 : A \subset N_d(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\varepsilon, A) \}.$$

donde $N_d(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon \text{ para algún } a \in A\}$, es la ε -nube abierta alrededor de A (análogamente para B).

Lema 1.1. *Sea (X, d) un espacio métrico completo y sean $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ sucesiones de conjuntos compactos no vacíos en X tales que $A_n \subset B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $A_n \rightarrow A$ y $B_n \rightarrow B$ en la métrica de Hausdorff H_d , entonces $A \subset B$.*

Demostración. Sea $a \in A$. Probaremos que $a \in B$. Dado $\varepsilon > 0$, como $H_d(A_n, A) \rightarrow 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_1$ se tiene $H_d(A_n, A) < \varepsilon$. Esto implica, por definición, que

$$A \subset N_d(\varepsilon, A).$$

En particular, para $a \in A$, existe $a_n \in A_n$ tal que $d(a, a_n) < \varepsilon$.

Como $A_n \subset B_n$, tenemos $a_n \in B_n$. Por la convergencia $H_d(B_n, B) \rightarrow 0$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_2$ se cumple $H_d(B_n, B) < \varepsilon$, lo que implica

$$B_n \subset N_d(\varepsilon, B).$$

Luego, para $a_n \in B_n$, existe $b_n \in B$ tal que $d(a_n, b_n) < \varepsilon$.

Tomando $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, obtenemos

$$d(a, B) \leq d(a, b_n) \leq d(a, a_n) + d(a_n, b_n) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $d(a, B) = 0$. Puesto que B es compacto (en particular cerrado), se sigue que $a \in B$.

Por lo tanto, $A \subset B$. □

Lema 1.2. *Sean $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ y $\{b'_l\}_{l=1}^\infty$ sucesiones en un espacio métrico, con métrica d tales que*

$$b_k \rightarrow b \quad \text{y} \quad b'_l \rightarrow b.$$

Entonces la sucesión intercalada $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ dada por

$$c_{2l-1} = b_{k_l}, \quad c_{2l} = b'_l, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Satisface $c_n \rightarrow b$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $b_k \rightarrow b$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq N_1 \Rightarrow d(b_k, b) < \varepsilon.$$

Como $b'_l \rightarrow b$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$l \geq N_2 \Rightarrow d(b'_l, b) < \varepsilon.$$

Tomemos

$$N = 2 \max\{N_1, N_2\}.$$

Sea $n \geq N$. Entonces se presentan dos casos:

- Si n es impar, $n = 2l - 1$ para algún $l \geq \max\{N_1, N_2\}$, y por tanto

$$d(c_n, b) = d(b_{k_l}, b) < \varepsilon.$$

- Si n es par, $n = 2l$ para algún $l \geq \max\{N_1, N_2\}$, y por tanto

$$d(c_n, b) = d(b'_l, b) < \varepsilon.$$

En ambos casos se tiene $d(c_n, b) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$, lo cual prueba que

$$c_n \rightarrow b.$$

□

Definición 1.3. Un punto p de un continuo arco conexo X es **un punto de orden** r en el sentido clásico, si p es un punto extremo en común de exactamente r arcos ajenos dos a dos salvo en el punto p y están contenidos en X , se escribe $\text{Ord}_p X = r$. En particular, un punto p de X es un **punto extremo** de X en el sentido clásico si $\text{Ord}_p X = 1$, y un punto de **ramificación** de X en el sentido clásico si $\text{Ord}_p X \geq 3$.

A partir de ahora las palabras “en el sentido clásico” serán omitidas. El conjunto de todos los puntos extremos de X será denotado por $E(X)$.

Definición 1.4. Un continuo X es **unicoherente** si es conexo y para cualesquiera A y B subconjuntos cerrados y conexos de X tales que $X = A \cup B$, se cumple que $A \cap B$ es conexo.

Un continuo X es **hereditariamente unicoherente** si cada uno de sus subconjuntos cerrados y conexos son unicoherentes.

Definición 1.5. Un **dendroide** es un continuo arco conexo y hereditariamente unicoherente. Un **abanico** es un dendroide X con un único punto de ramificación, llamado *top* o *vértice* de X .

Observación 1.6. Un abanico visto como un dendroide es un continuo 1-dimensional y puede ser encajado en un 3- dimensional cubo unitario $\mathcal{I}^3$ en virtud del Teorema Menger-Nöbeling (véase el teorema 1.11.4 de [2]).

Observación 1.7. Sea t el top de un abanico X y e un punto extremo de este, por la definición de abanico se tiene

$$X = \bigcup_{e \in E(X)} te.$$

Donde el conjunto $E(X)$ es el conjunto de todos los puntos extremos de X .

Como se estableció en 1.5, un abanico es un continuo hereditariamente unicoherente. En consecuencia, en lo que sigue presentaremos una caracterización de la unicoherencia en términos de la noción de irreducibilidad.

Definición 1.8. Sea Y un continuo y sea $A \subset Y$. Entonces Y es **irreducible respecto de A** si ningún subcontinuo propio de Y contiene a A . Un continuo Y es **irreducible** si Y es irreducible respecto de $\{p, q\}$ para algunos $p, q \in Y$; en este caso, a veces decimos que Y es **irreducible entre p y q** .

Proposición 1.9. Sea X un continuo.

- (a) Si $A \subset X$ es cerrado, entonces existe un subcontinuo de X que es irreducible respecto de A .
- (b) Si $p, q \in X$, entonces existe un subcontinuo de X que es irreducible entre p y q . En particular, todo continuo no degenerado contiene un subcontinuo irreducible no degenerado.

Demostración. 1. Sea $\mathcal{C} = \{K \in C(X) : A \subset K\}$. Como $X \in \mathcal{C}$, se sigue que $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Afirmamos que $\mathcal{C}$ es un subconjunto cerrado de 2^X . Sea $B \in cl_{2^X}(\mathcal{C})$. Entonces existe una sucesión $\{C_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{C}$ tal que

$$C_i \rightarrow B \quad \text{en } 2^X.$$

Por el Corolario 4.7 de [4] se tiene que $B \in C(X)$.

Sólo resta ver que $A \subset B$. Como cada $C_i \in \mathcal{C}$, entonces $A \subset C_i$ para cada i . Sea $x \in A$, entonces $x \in C_i$ para cada i . Para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que,

$$C_i \subset N_d(\varepsilon, B).$$

Como $x \in C_i$ para cada i , existe $b_i \in B$ tal que

$$d(x, b_i) < \varepsilon.$$

De aquí se sigue que $x \in \overline{B} = B$, pues B es cerrado. Por lo tanto, $A \subset B$ y $B \in \mathcal{C}$, lo que prueba que $\mathcal{C}$ es cerrado en 2^X .

Como $\mathcal{C}$ es cerrado en 2^X , por [6, 4.34, pág. 68] existe $E \in \mathcal{C}$ tal que E es mínimo con respecto a la inclusión. Es decir,

$$A \subset E \quad \text{y no existe } K \in \mathcal{C} \text{ tal que } A \subset K \subsetneq E.$$

En otras palabras, E es irreducible con respecto a A .

2. Se sigue de 1 puesto que $\{p, q\}$ es un subconjunto cerrado de X . □

Teorema 1.10. *Un continuo M es hereditariamente unicoherente, si y solo si, dados dos puntos x y y de M , existe un único subcontinuo irreducible de M respecto a $\{x, y\}$.*

Demostración. Sea $x, y \in M$. La existencia del continuo $I(\{x, y\}) \subset M$ se sigue por 2 de 1.9

Supongamos que existe más de un continuo. Sea $\{x, y\} \subset I_1(\{x, y\}) \cap I_2(\{x, y\})$, de donde se sigue que

$$I_1(\{x, y\}) \cap I_2(\{x, y\}) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, la unión $I_1(\{x, y\}) \cup I_2(\{x, y\})$ es un subcontinuo del continuo hereditariamente unicoherente M . En consecuencia, $I_1(\{x, y\}) \cap I_2(\{x, y\})$ es un continuo y, por tanto,

$$I_1(\{x, y\}) = I_1(\{x, y\}) \cap I_2(\{x, y\}) = I_2(\{x, y\}),$$

por la irreducibilidad de los continuos $I_1(\{x, y\})$ e $I_2(\{x, y\})$. □

Corolario 1.11. *Si X es un dendroide, entonces para cada par de puntos distintos de X , existe un único arco que los une.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, como X un dendroide entonces hereditariamente unicoherente, entonces por 1.10, existe H un único subcontinuo irreducible entre $\{x, y\}$, más aún X es arco conexo, entonces existe α un arco con punto extremos x y y , como α es un subcontinuo irreducible entre $\{x, y\}$ entonces por la unicidad de H se tiene que $H = \alpha$. $\square$

Definición 1.12. *Sea (S, T) un espacio topológico, y sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de S . Definimos $\liminf A_i$ y el $\limsup A_i$ como sigue:*

$$\liminf A_i = \{x \in S : \text{para cada } U \in T \text{ tal que } x \in U, U \cap A_i \neq \emptyset \\ \text{para todos, salvo para un numero finito de } i\}.$$

$$\limsup A_i = \{x \in S : \text{para cada } U \in T \text{ tal que } x \in U, U \cap A_i \neq \emptyset \\ \text{para infinitos } i\}.$$

Observación 1.13. *Podemos notar que $\liminf A_i \subset \limsup A_i$, por como se definen los conjuntos.*

Definición 1.14. *Sean (S, T) y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ como en la definición 1.12, y sea $A \subset S$. Entonces $\lim A_i = A$, siempre que*

$$\liminf A_i = A = \limsup A_i.$$

Proposición 1.15. *Sea (S, T) un espacio topológico, y sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ cualquier sucesión de subconjuntos S . Entonces*

1. $\liminf A_i$ y $\limsup A_i$ son subconjuntos cerrados de S .
2. $\liminf \overline{A_i} = \liminf A_i$ y $\limsup \overline{A_i} = \limsup A_i$
3. $\lim A_i = \lim \overline{A_i}$ siempre y cuando $\lim A_i$ o $\lim \overline{A_i}$ existan.

Demostración. [4, 3.3, págs. 203–204] $\square$

Teorema 1.16. *Sea X un espacio métrico compacto, y sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos y compacto de X . Entonces $\lim A_i = A$ si y solo si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a A en 2^X con respecto a la métrica de Hausdorff H_d .*

Demostración. [4, 3.5, págs. 204–206] □

Lema 1.17. *Sea X un espacio métrico compacto y sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos conexos de X tales que $\liminf E_i \neq \emptyset$. Entonces $\limsup E_i$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que

$$\limsup E_i = A \cup B, \quad A \cap B = \emptyset,$$

con A y B cerrados de $\limsup E_i$.

Como $\limsup E_i$ es un cerrado de X por 1.15, se sigue que A y B son cerrados de X . Además, como X es un espacio normal, existen abiertos y disjuntos U y V tales que

$$A \subset U \quad \text{y} \quad B \subset V.$$

Sea $C = X \setminus (U \cup V)$. Entonces C es cerrado en X .

Notemos que para todo $x \in C$ se tiene $x \notin \limsup E_i$, por lo tanto existe un abierto W_x que contiene a x tal que W_x intersecta solamente a un número finito de los conjuntos E_i .

Luego,

$$C \subset \bigcup_{x \in C} W_x.$$

Como C es compacto, existen $x_1, \dots, x_m \in C$ tales que

$$C \subset \bigcup_{i=1}^m W_{x_i}.$$

Como cada W_{x_i} intersecta solo a un número finito de los E_i , entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq N_0$,

$$E_i \cap C = \emptyset.$$

Es decir,

$$E_i \subset U \cup V, \quad \text{para cada } i \geq N_0.$$

Como $\liminf E_i \neq \emptyset$, sea $p \in \liminf E_i$. Supongamos sin pérdida de la generalidad que $p \in A$, luego, $p \in U$. Entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq N_1$,

$$E_i \cap U \neq \emptyset.$$

De manera análoga, como $B \neq \emptyset$, sea $q \in B$, entonces $q \in \limsup E_i$, se sigue que

$$E_i \cap V \neq \emptyset \text{ para infinitos } i.$$

Por tanto, si

$$i \geq \max\{N_0, N_1\},$$

se tiene

$$E_i \subset U \cup V, \quad E_i \cap U \neq \emptyset, \quad E_i \cap V \neq \emptyset.$$

Esto formaría una desconexión de los E_i , siendo una contradicción puesto que cada E_i es conexo.

Por lo tanto, $\limsup E_i$ debe ser conexo. $\square$

Lema 1.18. *Sean X un continuo hereditariamente unicoherente y $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos en X . Entonces, $\liminf C_n$ es un continuo.*

Demostración. Como $\liminf C_n$ es compacto (por ser cerrado de X por 1.15), basta con probar que es conexo. Si $\liminf C_n \neq \emptyset$, supongamos que $\liminf C_n$ no es conexo. Entonces existen conjuntos compactos no vacíos A y B tales que

$$A \cup B = \liminf C_n \quad \text{y} \quad A \cap B = \emptyset.$$

Sean $a \in A$ y $b \in B$. Por 1.17 y 1.15, $\limsup C_n$ es un continuo; entonces por 1.9, contiene un continuo irreducible $I(\{a, b\})$ entre los puntos a y b .

Como $\liminf C_n$ no es conexo, existe en $\limsup C_n$ un punto $c \in I(\{a, b\}) \setminus \liminf C_n$, una vecindad U de c y una sucesión $\{C_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ tal que ninguno de los C_{n_m} interseca a U . Por lo tanto $L = \limsup C_{n_m} \neq \emptyset$ y $U \subset X \setminus L$. Donde L es un continuo y $\{a, b\} \subset L$. Denotemos por $I'(\{a, b\})$ un continuo irreducible en L entre los puntos a y b , tenemos que $c \in X \setminus L$, por lo cual $c \in X \setminus I'(\{a, b\})$, esto es $I(\{a, b\}) \neq I'(\{a, b\})$, contradiciendo la unicoherencia de X . $\square$

Corolario 1.19. *Si X es un dendroide y sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones convergentes de X , entonces $\liminf a_n b_n$ es un continuo y*

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{y} \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (1.1)$$

Implica que

$$ab \subset \liminf a_n b_n. \quad (1.2)$$

Demostración. Como X es un dendroide, para cada par de puntos a_n y b_n existe un único arco que los une. Además, la sucesión $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subcontinuos de X , por 1.18 tenemos que

$$\liminf a_n b_n$$

es un continuo. Ahora si

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad y \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Consideremos el arco ab y sea $x \in ab$ y U un abierto tal que $x \in U$. Si $x = a$, entonces $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in U$ para $n \geq N$, es decir, $a_n b_n \cap U \neq \emptyset$ para $n \geq N$, implica que $x \in \liminf a_n b_n$. Si $x = b$ es análogo. En otras palabras $a, b \in \liminf a_n b_n$, como el arco ab es un continuo que contiene a los puntos a, b , se sigue que $ab \cap \liminf a_n b_n \neq \emptyset$; como X es un dendroide, se sigue que $ab \cap \liminf a_n b_n$ es conexo, pero notemos que el arco ab es irreducible, entonces $ab = ab \cap \liminf a_n b_n \subset \liminf a_n b_n$. $\square$

2 Suavidad

Definición 2.1. Un abanico X con vértice t es **suave** si siempre que una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de X converge a un punto límite a , entonces la sucesión de arcos $\{ta_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y

$$\lim ta_n = ta.$$

Observación 2.2. Si un abanico X es suave, entonces todo subabanico de X también es suave (la suavidad para abanicos es hereditaria).

Teorema 2.3. Un abanico

$$X = \bigcup_{e \in E(X)} te$$

es suave si y solo si para cualesquiera dos sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de X que satisfacen la condición (1.1) y además

$$a_n b_n \setminus \{t\} \text{ es conexo para } n = 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

implica que

$$ab = \lim a_n b_n. \quad (2.2)$$

Demostración. Si la implicación anterior es válida, el abanico X es trivialmente suave tomando $b_n = t$. Recíprocamente, si esta implicación no es verdadera, entonces existen en X dos sucesiones de puntos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ que satisfacen (1.1), (2.1) y la negación de (2.2). Por el 1.19 tenemos (1.2). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer en relación con (2.1) que

$$a_n \in tb_n \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Ahora consideremos dos casos.

Caso 1.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n b_n \neq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n b_n.$$

Entonces existe un punto

$$c \in \limsup a_n b_n \setminus \liminf a_n b_n.$$

Como $c \in \limsup a_n b_n$, entonces, para cada m , $B(c, \frac{1}{nm}) \cap a_{n_m} b_{n_m} \neq \emptyset$, de ahí, existe una sucesión de puntos $\{c_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ tal que

$$c_{n_m} \in a_{n_m} b_{n_m} \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

además

$$c = \lim_{m \rightarrow \infty} c_{n_m}. \quad (2.5)$$

Por lo tanto, $c_{n_m} \in tb_{n_m}$ por (2.3) y (2.4), y

$$c \in \limsup tb_n \quad (2.6)$$

por (2.5). Si $c \in X - tb$, entonces $tb \neq \limsup tb_n$ por (2.6), y por lo tanto, X no es suave.

Si $c \in tb$, tenemos $c \in tb \setminus ab$, ya que

$$ab \subset \liminf a_n b_n$$

por 1.19. Así,

$$c \in ta \setminus \{a\}. \quad (2.7)$$

Sustituyendo en el mismo corolario 1.19 el punto t por los puntos b_n y b , concluimos que $\liminf ta_n$ es un continuo y que

$$ta \subset \liminf ta_n,$$

de donde, por (2.7), se sigue que

$$c \in \liminf ta_n.$$

Esto implica, en particular, que existe una sucesión de puntos $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $n \neq n_m$, tal que

$$c_n \in ta_n \quad \text{para } n \neq n_m, \quad (2.8)$$

y

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \quad \text{para } n \neq n_m. \quad (2.9)$$

(La sucesión existe por los mismos argumentos de (2.4) y (2.5)).

Así, por (2.5) y (2.9), se tiene

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Además, se sigue de (2.3) y (2.4) que

$$a_n \notin tc_{n_m} \quad \text{para } m = 1, 2, \dots,$$

de donde $a \in \limsup_{n \rightarrow \infty} tc_n$. Pero (2.7) implica que

$$tc = ta \setminus \{a\};$$

por lo tanto,

$$tc \neq \limsup tc_n,$$

y el abanico X no es suave.

Caso 2.

$$\liminf a_nb_n = \limsup a_nb_n.$$

Entonces, la sucesión $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, y por 1.19 se tiene

$$ab = \lim a_nb_n.$$

Por lo tanto, la negación de (2.2) implica que existe un punto c tal que

$$c \in \lim a_nb_n \setminus ab. \quad (2.10)$$

Así, existe una sucesión de puntos c_n con las propiedades

$$c_n \in a_nb_n, \quad (2.11)$$

$$y \quad c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n. \quad (2.12)$$

(La sucesión existe por los mismos argumentos de (2.4) y (2.5)).

Si X es suave, entonces (1.2) y (2.12) implican

$$ta = \lim ta_n, \quad tb = \lim tb_n, \quad y \quad tc = \lim tc_n. \quad (2.13)$$

Pero se sigue de (2.3) y (2.11) que

$$ta_n \subset tc_n \subset tb_n,$$

de donde

$$ta \subset tc \subset tb$$

por el Lema 1.1 y (2.13). En consecuencia,

$$c \in ab,$$

en contradicción con (2.10), lo cual completa la demostración. □

Corolario 2.4. *Si un abanico $X = \bigcup_{e \in E(X)} te$ es suave, y si para cualesquiera dos sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de X se satisfacen las condiciones (1.1) y (2.1), entonces el conjunto*

$$ab \setminus \{t\}$$

es conexo.

Demostración. Supongamos que

$$ab \setminus \{t\} \text{ no es conexo.}$$

Entonces existen abiertos disjuntos $U, V \subset ab \setminus \{t\}$ tales que

$$ab \setminus \{t\} = U \cup V, \quad U \cap V = \emptyset, \quad U \neq \emptyset \neq V$$

Por el teorema 2, $ab = \lim a_n b_n$. Como $U \neq \emptyset$, entonces existe $x \in U$, lo que implica que $x \in ab \setminus \{t\}$; en particular, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$U \cap a_n b_n \neq \emptyset \quad \text{para todo } n \geq N_1.$$

Luego, para cada $n \geq N_1$, existe $x_n \in U \cap a_n b_n \setminus \{t\}$, notemos que $x_n \neq \{t\}$ puesto que $x_n \in U \subset ab \setminus \{t\}$.

De manera análoga, como $V \neq \emptyset$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$V \cap a_n b_n \setminus \{t\} \neq \emptyset \quad \text{para todo } n \geq N_2.$$

Sea

$$N = \max\{N_1, N_2\}.$$

Entonces, para todo $n \geq N$, se cumple que

$$U \cap a_n b_n \setminus \{t\}, \quad V \cap a_n b_n \setminus \{t\}, \quad \text{forman una separación de } a_n b_n \setminus \{t\}$$

lo cual contradice su conexidad.

Por lo tanto,

$$ab \setminus \{t\} \text{ es conexo.}$$

□

La hipótesis de suavidad del abanico X es esencial en el 2.4. En efecto, sea X el abanico en el plano compuesto por el segmento recto ab , donde $a = (0, 1)$, $b = (0, -1)$, y por la sucesión de líneas poligonales de la forma $a_n b_n c_n t$, donde

$$a_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right), \quad b_n = \left(\frac{1}{n}, -\frac{n+1}{n}\right), \quad c_n = \left(-\frac{1}{n}, -\frac{n+1}{n}\right),$$

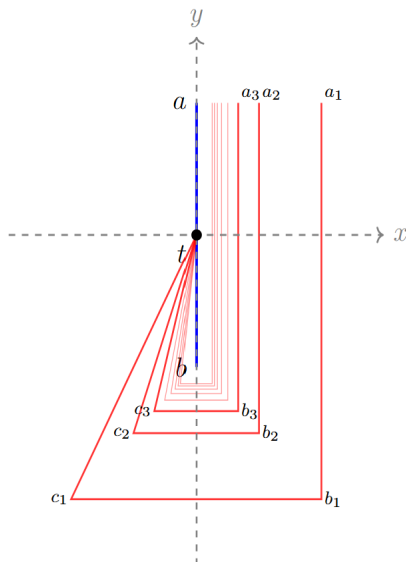
y

$$t = (0, 0).$$

Entonces

$$ab = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n,$$

la condición (2.1) se satisface, pero el punto t desconecta al arco ab .



Teorema 2.5. *Un abanico $X = \bigcup_{e \in E(X)} te$ es suave si y solo si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número $\eta > 0$ tal que para cada punto $e \in E(X)$ las condiciones*

$$a \in te, \quad b \in te, \quad \text{y} \quad \rho(a, b) < \eta \quad (2.14)$$

implica

$$\delta(ab) < \varepsilon. \quad (2.15)$$

Demostración. En primer lugar, supongamos que el abanico X es suave y que existe un número $\varepsilon > 0$ tal que para cada número $\eta > 0$ existe un punto $e \in E(X)$ y puntos a y b que satisfacen (2.14) con la negación de (2.15). Así, tomando $\eta = 1/n$, donde $n = 1, 2, \dots$, vemos que existen dos sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de X tales que

$$a_n \in tb_n, \quad (2.16)$$

$$\rho(a_n, b_n) < \frac{1}{n}, \quad (2.17)$$

$$\delta(a_nb_n) \geq \varepsilon. \quad (2.18)$$

Como X es compacto, la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión convergente $\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$. Sea

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{n_m} = a. \quad (2.19)$$

Luego, por (2.17),

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_{n_m} = a. \quad (2.20)$$

Se sigue de (2.18), existen puntos $x_m, y_m \in a_{n_m} b_{n_m}$ tales que $\rho(x_m, y_m) \geq \varepsilon$, luego, por la desigualdad del triángulo se tiene

$$\rho(x_m, y_m) \leq \rho(x_m, a_{n_m}) + \rho(a_{n_m}, y_m).$$

Por lo tanto, al menos una de las siguientes desigualdades debe cumplirse:

$$\rho(a_{n_m}, x_m) \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{o} \quad \rho(a_{n_m}, y_m) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces los puntos que satisfacen lo anterior los denotamos c_m y son tales que

$$c_m \in a_{n_m} b_{n_m}, \quad (2.21)$$

$$\rho(a_{n_m}, c_m) \geq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.22)$$

La sucesión $\{c_m\}_{m=1}^{\infty}$ contiene, por la compacidad de X , una subsucesión convergente $\{c_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Sea

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_{m_k} = c.$$

Por lo tanto, (2.19) y (2.22) implican que

$$a \neq c. \quad (2.24)$$

Si $a = c$, eso implicaría que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_m} = c$, luego para $\frac{\varepsilon}{2}$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(a_{n_m}, c) < \frac{\varepsilon}{2}$ para $m \geq N_1$, por otra parte existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(c_{m_k}, c) < \frac{\varepsilon}{2}$ para $k \geq N_2$, entonces, para $k \geq N = \max\{N_1, N_2\}$ se tiene que $\rho(a_{n_k}, c_{m_k}) \leq \rho(a_{n_k}, c) + \rho(c, c_{m_k}) < \varepsilon$, contradiciendo (2.22). Como el abanico

X es suave y $a_n b_n \setminus \{t\}$ es conexo, concluimos, por (2.19) y (2.20) y según el Teorema 2, que

$$\lim a_{n_m} b_{n_m} = \{a\},$$

Puesto que $a_{n_m} b_{n_m} \subset N_d(\varepsilon, \{a\})$ para cualquier $\varepsilon > 0$, y para cada m , $c_m \in a_{n_m} b_{n_m}$, nos implica que $c = \lim_{m \rightarrow \infty} c_m = a$, en contradicción con (2.24) debido a (2.21) y (2.23).

Ahora para la contra recíproca, supongamos que el abanico X no es suave, es decir, que existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de X que tiende a un punto límite a , esto es,

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad (2.25)$$

y tal que o bien $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es convergente, o bien es convergente con

$$\lim ta_n \neq ta. \quad (2.26)$$

Por 1.19 tenemos

$$ta \subset \liminf ta_n,$$

y por 1.13

$$\liminf ta_n \subset \limsup ta_n, \quad (2.28)$$

Existe un punto c tal que

$$c \in \limsup ta_n \setminus ta, \quad (2.29)$$

porque de lo contrario tendríamos $\limsup ta_n \subset ta$ y, por (2.27) y (2.28),

$$ta = \liminf ta_n = \limsup ta_n,$$

en contradicción con (2.26). Por (2.29) para cada $m \in \mathbb{N}$, $c \in B(c, \frac{1}{m})$ lo cual implica que $B(c, \frac{1}{m}) \cap ta_n \neq \emptyset$, entonces hay una subsucesión de arcos $\{ta_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ y una sucesión de puntos $\{c_m\}_{m=1}^{\infty}$ tales que

$$c_m \in ta_{n_m}, \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, \quad (2.30)$$

y

$$c = \lim_{m \rightarrow \infty} c_m. \quad (2.31)$$

Como X es hereditariamente unicoherente, $ta \cap tc$ es un arco o un punto. Si es un arco, denotemos por b el extremo de ese arco diferente de t ; si es un punto, sea $b = t$. En ambos casos tenemos

$$tb = ta \cap tc \quad (2.32)$$

(en particular podemos tener $b = a$). Se sigue de (2.29) y (2.32) que

$$b \neq c \neq a. \quad (2.33)$$

Además, (2.32) implica que

$$b \in tc. \quad (2.34)$$

Por 1.19, 1.13 $\liminf tc_m \subset \limsup ta_m$ y (2.31) implican $tc \subset \limsup tc_m$, y tenemos $b \in \limsup tc_m$ por (2.34). Para cada $k \in \mathbb{N}$, $b \in B(b, \frac{1}{k})$ lo cual implica que $B(b, \frac{1}{k}) \cap tc_{m_k} \neq \emptyset$. Así, hay una subsucesión de arcos $\{tc_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y una sucesión de puntos $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que

$$b_k \in tc_{n_k}, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots \quad (2.35)$$

y

$$b = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k. \quad (2.36)$$

Además, se sigue de (2.32) que

$$b \in ac. \quad (2.32)$$

Sea

$$A_k = a_{n_k} c_{n_k}. \quad (2.38)$$

Por (2.25) y (2.31), concluimos, por el mismo argumento anterior, que

$$ac \subset \limsup A_k, \quad (2.39)$$

Por lo tanto, existen por (2.37) y (2.39) una subsucesión de arcos $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ y una sucesión de puntos $\{b'_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que

$$b'_k \in A_k, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots \quad (2.40)$$

y

$$b = \lim_{k \rightarrow \infty} b'_k. \quad (2.41)$$

(Para cada $l \in \mathbb{N}$, $b \in B(b, \frac{1}{l})$) lo cuál implica que $B(b, \frac{1}{l}) \cap A_{k_l} \neq \emptyset$). Sea ε un número positivo. Para ese ε existe por hipótesis un número positivo η tal que para cada arco te de X las condiciones (2.14) implican (2.15).

Observemos que para cualquier l fijo los puntos b_{k_l} y b'_l pertenecen al mismo arco te del abanico X , y por (2.35) y (2.40)

$$c_{m_{k_l}} \in b_{k_l}b'_l, \quad \text{para } l = 1, 2, \dots \quad (2.42)$$

Por (2.36) y (2.41) y 1.2 la sucesión

$$b_{k_1}, b'_1, b_{k_2}, b'_2, \dots, b_{k_l}, b'_l, \dots$$

converge al punto b , y así para índices l suficientemente grandes tenemos $\varrho(b_{k_l}, b'_l) < \eta$, de donde $\delta(b_{k_l}b'_l) < \varepsilon$ por hipótesis. Por (2.42) tenemos que $c_{m_{k_l}} \in b_{k_l}b'_l$ para todo l , se tiene por definición del diámetro que

$$\varrho(c_{m_{k_l}}, b_{k_l}) \leq \delta(b_{k_l}b'_l).$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\delta(b_{k_l}b'_l) \rightarrow 0$, existe $L_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$l \geq L_1 \Rightarrow \delta(b_{k_l}b'_l) < \varepsilon/2.$$

Además, como $b_{k_l} \rightarrow b$, existe $L_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$l \geq L_2 \Rightarrow \varrho(b_{k_l}, b) < \varepsilon/2.$$

Sea $L := \max\{L_1, L_2\}$. Para $l \geq L$, usando que $c_{m_{k_l}} \in b_{k_l}b'_l$, se tiene

$$\varrho(c_{m_{k_l}}, b_{k_l}) \leq \delta(b_{k_l}b'_l) < \varepsilon/2.$$

Por la desigualdad triangular,

$$\varrho(c_{m_{k_l}}, b) \leq \varrho(c_{m_{k_l}}, b_{k_l}) + \varrho(b_{k_l}, b) < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} c_{m_{k_l}} = b.$$

Es decir, $c = b$ por (2.31) y (2.36), en contradicción con (2.33). Esto completa la demostración $\square$.

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar este capítulo.

Referencias

- [1] J. J. Charatonik, *On fans*, Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne) **54**, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa, 1967.
- [2] Ryszard Engelking, *Dimension Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam–Oxford–New York, 1978.
- [3] Ryszard Engelking, *General Topology*. Warsaw: PWN—Polish Scientific Publishers, 1977.
- [4] David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, y Jose Alberto Ortega Becerril, *Límite de conjuntos y teoremas de golpes a la frontera*, Matemáticas y sus Aplicaciones **23** (2024), 189–218, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla.
- [5] H. C. Miller, *On unicoherent continua*, Trans. Amer. Math. Soc. **69** (1950), 179–194.
- [6] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

jose.ortegabec@alumno.buap.mx

dherrera@fcfm.buap.mx

fmacias@fcfm.buap.mx

Capítulo 7

Más acerca de funciones sobre continuos

Daniel Domínguez Málaga, David Herrera Carrasco,
Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP

Resumen

El objetivo de este capítulo expositivo es el de presentar una breve actualización acerca de funciones especiales sobre continuos gran parte de este trabajo se centra en la tesis doctoral de Tadeusz Mackowiak [5]. Dado que el tema es bastante amplio no podemos ser tan exhaustivos y solo presentaremos algunos tipos de funciones centrándonos más en como se interrelacionan entre si, también presentamos algunas caracterizaciones de ciertas clases de funciones. Para el lector interesado en un tratamiento más sistemático y exhaustivo puede remitirse al material original [5].

1 Introducción

Las funciones especiales entre continuos fueron un tema de estudio inclusive en una etapa temprana antes de que se constituyera la teoría de continuos, como muestra de ello, las funciones continuas y los homeomorfismos de espacios topológicos abstractos fueron considerados por primera vez por Maurice Frechet en 1910, aunque, en un sentido más estricto, la noción de homeomorfismo había sido ya introducido por Henri Poincaré, no obstante, fue Felix Hausdorff quien por primera vez da un tratamiento exhaustivo y sistemático de esas clases de funciones en 1914 en su libro “Grundzüge der Mengenlehre”.

Una de las clases más importante de funciones la cual se sitúa de forma natural entre la clase de homeomorfismos y de las presentadas en la definición 3.1 es la clase de las funciones abiertas, dicha noción fue introducida por Hermann

Weyl (aunque solo las considero del plano real en si mismo) en 1913 y por Simion Stoilow en 1928 quien adicionalmente asumió que las fibras de dichas funciones no contenían continuos no degenerados (esta noción corresponde al de función ligera), pero fue hasta que en 1931 Natan Aronszajn consideró funciones abiertas en espacios topológicos arbitrarios. Gordon Thomas Whyburn hace un estudio sistemático de las funciones abiertas (anteriormente llamadas funciones interiores) sobre espacios métricos compactos.

Las funciones monótonas fueron estudiadas por primer vez en 1925 por Robert Lee Moore aunque en términos de descomposiciones semi continuas superiores [6, pág.36], no fue hasta 1934 cuando Gordon Thomas Whyburn introduce la noción actual de función monótona y posteriormente estudiada por Doniphan Wallace.

Otra función monótona particular es la función atómica concepto introducido en 1956 por Richard Davis Anderson nuevamente en conexión con las descomposiciones, de las muchas generalizaciones del concepto de función monótona, es la noción de función quasi monótona introducidas por Alexander Doniphan Wallace.

En 1972 A. Lelek introduce las funciones OM y MO estas clases de funciones como se vera mas adelante coincide con la clase de las funciones quasi-interiores. Otra generalización común de las funciones monótonas y abiertas es el de función confluyente definidas por Janusz Charatonik en 1964, las funciones confluentes se han generalizado de diversas maneras, por ejemplo, las funciones débilmente confluentes noción introducida en 1972 por A. Lelek, las funciones semi confluentes definidas al año siguiente por T. Mackowiak, también, la noción de función pseudo confluyente concepto nuevamente introducido por A. Lelek y E. D. Tymchatyn en 1975.

Cada clase de función anteriormente mencionada ha sido estudiada extensivamente y todas las interrelaciones entre dichas funciones y sus diversas propiedades tales como: la propiedad de composición, la propiedad del factor de composición, entre otras se han estudiado y recopilado en la tesis doctoral de Tadeusz Mackowiak publicada en 1979.

2 Preliminares

Continuos

Un *continuo* es un espacio métrico compacto y conexo con más de un punto (a los conjuntos con más de un punto se le suelen llamar *no degenerados*). Un *subcontinuo* de un continuo X es un subconjunto no vacío de X cerrado y conexo, como subcontinuo este puede ser un conjunto de un solo punto, no obstante, si este es no degenerado se dice también que es un continuo.

Ejemplo 2.1. *Uno de los continuos más simples es el intervalo cerrado unitario $[0, 1]$ en la recta real. Un arco es un continuo homeomorfo a $[0, 1]$. Si A es un arco y $h : A \rightarrow [0, 1]$ es un homeomorfismo, los puntos finales de A son $h(0)$, $h(1)$ y decimos que A une $h(0)$ y $h(1)$.*

Ejemplo 2.2. *Otro continuo simple y relevante es la circunferencia unitaria en el plano real la cual suele denotarse como S^1 . Una curva cerrada simple es un continuo homeomorfo a S^1 .*

Dado un espacio métrico X con métrica d , $A \subset X$ y $x_0 \in X$ se definen la distancia de x_0 al conjunto A como $\text{dist}(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}$ y el diámetro de A como $\text{diam}(A) = \sup \{d(a, b) : a, b \in A\}$, como ya es bien sabido, si A es compacto, entonces existen $a, b, a_0 \in A$ tales que $d(x, A) = d(x_0, a_0)$ y $\text{diam}(A) = d(a, b)$, para $\varepsilon > 0$, la bola con centro en x_0 y radio ε se define como $B(x_0, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$, también, se define la ε -nube como $N(A, \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$ (fig. 1).

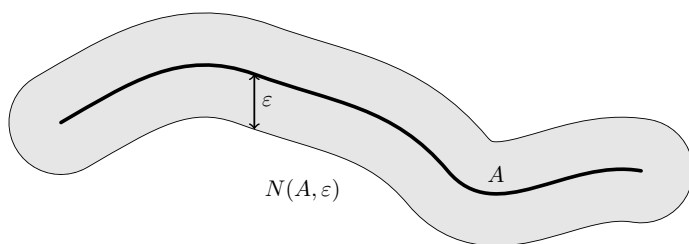


Figura 1: ε -nube de un conjunto cerrado A .

Algunos resultados generales

El siguiente resultado tiene su dual y es conocido como *teorema de la reducción de Brouwer* el cual puede consultarse en [1, pág.15].

Teorema 2.3. *Sean X un espacio métrico compacto, $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos cerrados no vacíos de X con la siguiente propiedad: para cada sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A_n \subset A$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe $A' \in \mathcal{A}$ el cual es un elemento maximal respecto a la inclusión.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A}$ no tiene elementos maximales, como X es compacto existe una base numerable $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $A_1 \in \mathcal{A}$, como A_1 no es un elemento maximal de $\mathcal{A}$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A_1 \subsetneq A$, sea $a \in A \setminus A_1$ como $a \in X \setminus A_1$ el cual es abierto, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $a \in U_r \subset X \setminus A_1$, por tanto $U_r \cap A_1 = \emptyset$. Entonces es posible definir

$$m_1 = \min \{n \in \mathbb{N} : \text{existe } B \in \mathcal{A} \text{ tal que } A_1 \subset B, \\ U_n \cap A_1 = \emptyset \text{ y } U_n \cap B \neq \emptyset\}.$$

Sea $A_2 \in \mathcal{A}$ tal que $A_1 \subset A_2$, $U_{m_1} \cap A_1 = \emptyset$ y $A_2 \cap U_{m_1} \neq \emptyset$, como A_2 no es elemento maximal de $\mathcal{A}$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A_2 \subsetneq A$, procediendo de manera similar al caso anterior, es posible definir

$$m_2 = \min \{n \in \mathbb{N} : \text{existe } B \in \mathcal{A} \text{ tal que } A_2 \subset B, \\ U_n \cap A_2 = \emptyset \text{ y } U_n \cap B \neq \emptyset\}.$$

Sea $A_3 \in \mathcal{A}$ tal que $A_2 \subset A_3$, $U_{m_2} \cap A_2 = \emptyset$ y $U_{m_2} \cap A_3 \neq \emptyset$. Continuando de este forma, es posible definir sucesiones $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{U_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de enteros positivos, elementos de $\mathcal{A}$ y de conjuntos abiertos de X , respectivamente, tal que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$m_k = \min \{n \in \mathbb{N} : \text{existe } B \in \mathcal{A} \text{ tal que } A_k \subset B, \\ U_n \cap A_k = \emptyset \text{ y } U_n \cap B \neq \emptyset\},$$

$A_k \subset A_{k+1}$, $U_{m_k} \cap A_k = \emptyset$ y $U_{m_k} \cap A_{k+1} \neq \emptyset$. Dado $k \in \mathbb{N}$, como

$$A_k \subset A_{k+1} \subset A_{k+2}, \quad U_{m_{k+1}} \cap A_k \subset U_{m_{k+1}} \cap A_{k+1} = \emptyset \text{ y } U_{m_{k+1}} \cap A_{k+2} \neq \emptyset,$$

así m_{k+1} pertenece al conjunto cuyo mínimo es m_k , por tanto, $m_k \leq m_{k+1}$. Por otro lado, como $A_{k+1} \cap U_{m_k} \neq \emptyset$ y $U_{m_{k+1}} \cap A_{k+1} = \emptyset$, entonces $m_k < m_{k+1}$, por tanto, $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ no es acotada.

Por hipótesis, existe $B_0 \in \mathcal{A}$ tal que $A_n \subset B_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y dado que B_0 no es un elemento maximal de $\mathcal{A}$, existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $B_0 \subsetneq A_0$. Sea $p \in A_0 \setminus B_0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $p \in U_n$ y $U_n \cap B_0 = \emptyset$. Dado $k \in \mathbb{N}$, por definición de m_k , y como $A_k \subsetneq B_0$, $U_n \cap A_k = \emptyset$ y $p \in U_n \cap A_0$ se tiene que $m_k \leq n$, pero esto contradice lo del párrafo anterior. Con lo cual $\mathcal{A}$ tiene un elemento maximal. $\square$

Teorema 2.4 (del cable cortado, [1, Teorema 3.3]). *Sea X un espacio métrico compacto. Si A y B son subconjuntos cerrados de X tales que ningún subconjunto conexo de X intersecta a ambos conjuntos simultáneamente, entonces existen subconjuntos cerrados y ajenos K y L de X tales que $A \subset K$, $B \subset L$ y $X = K \cup L$.*

Teorema 2.5 (de golpes en la frontera, [1, Teorema 3.4]). *Sea X un continuo, si A es un subconjunto propio no vacío de X y C una componente de A . Entonces $\text{cl}_X(C) \cap \text{fr}_X(A) \neq \emptyset$.*

Proposición 2.6. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua, cerrada (abierta) y suprayectiva entre espacios métricos. Si B es un subconjunto de Y , entonces la función $f|_{f^{-1}(B)} : f^{-1}(B) \rightarrow B$ es cerrada (abierta).*

Demostración. Solo mostraremos que $g = f|_{f^{-1}(B)}$ es cerrada, sea E un subconjunto cerrado de $f^{-1}(B)$, entonces existe un cerrado F de X tal que $E = f^{-1}(B) \cap F$. Note que $g(E) = f(F) \cap B$, donde $f(F)$ es cerrado de Y y por tanto $g(E)$ es cerrado de B . $\square$

Sucesiones de conjuntos

En esta breve sección vamos introducir las bases para el manejo de sucesiones de conjuntos de un continuo, empezamos definiendo la convergencia de una sucesión de conjuntos y después determinaremos algunas propiedades básicas, esto será de utilidad en las secciones posteriores.

Definición 2.7. Sean X un espacio métrico y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de X . El límite inferior se define como:

$$\liminf A_n = \{x \in X : \text{para cada abierto } U \subset X \text{ con } x \in U, \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para cada } n \geq N\}.$$

El límite superior se define como:

$$\limsup A_n = \{x \in X : \text{para cada abierto } U \subset X \text{ con } x \in U, \text{ existe } J \subset \mathbb{N} \text{ infinito, tal que } U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para cada } n \in J\}.$$

Escribimos $\lim A_n = A$ lo cual significa que $\liminf A_n = A = \limsup A_n$. El lector podrá comprobar fácilmente que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$ (véase figura 2).

Ejemplo 2.8. En $\mathbb{R}^2$, sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por $A_n = \{(x, \frac{1}{n}) : 0 \leq x \leq 2\}$ si n es impar y $A_n = \{(x, \frac{1}{n}) : 0 \leq x \leq 3\}$ si n es par. Entonces $\liminf A_n = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 2\}$ y $\limsup A_n = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 3\}$.

Como consecuencia de la definición 2.7 se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.9. Sean X un espacio métrico, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de X y $A \subset X$. Entonces son equivalentes.

- (1) $\lim A_n = A$;
- (2) $A \subset \liminf A_n$ y $\limsup A_n \subset A$.

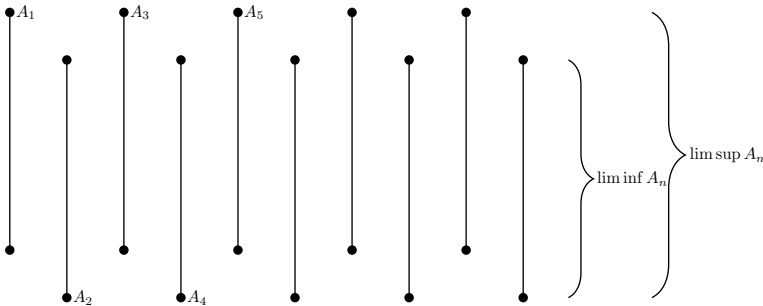


Figura 2: Límite superior e inferior de una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$

Proposición 2.10. *Sean X un espacio métrico y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de X . Entonces $\liminf A_n$, $\limsup A_n$ son subconjuntos cerrados de X .*

Demostración. Sea $x \in \text{cl}_X(\liminf A_n)$ y $U \subset X$ abierto tal que $x \in U$, entonces existe $y \in U \cap \liminf A_n$, con lo cual existe $N \in \mathbb{N}$ que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq N$, por tanto, $x \in \liminf A_n$. De forma similar se muestra que $\limsup A_n$ es un cerrado de X . $\square$

Lema 2.11. *Sea X un espacio métrico compacto con métrica d , $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos cerrados no vacíos de X . Entonces*

- (1) $x \in \liminf A_n$ si y solo existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $x_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \rightarrow x$.
- (2) $x \in \limsup A_n$ si y solo si existe una sucesión $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathbb{N}$ tal que $n_k < n_{k+1}$, $x \in A_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $x_{n_k} \rightarrow x$.

Demostración. (1) Asumamos que $x \in \liminf A_n$. Como A_n es compacto, existe $a_n \in A_n$ tal que $\text{dist}(x, A_n) = d(x, a_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x , sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq N$. Así, existe $y_n \in X$ tal que $d(x, y_n) < \varepsilon$ y $y_n \in A_n$, como $\text{dist}(x, A_n) = d(x, a_n) \leq d(x, y_n) < \varepsilon$ se sigue que $a_n \in B(x, \varepsilon)$ para cada $n \geq N$, por lo que $a_n \rightarrow x$.

Recíprocamente, asumamos que existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $x_n \rightarrow x$ y $x_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $U \subset X$ abierto tal que $x \in U$, como $x_n \rightarrow x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para cada $n \geq N$, así, $x_n \in U \cap A_n$ para cada $n \geq N$, por lo que $x \in \liminf A_n$.

(2) Supongamos que $x \in \limsup A_n$, para $\varepsilon_1 = 1$ existe $J_1 \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $B(x, \varepsilon_1) \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \in J_1$, sea $n_1 = \min J_1$ tal que $x_{n_1} \in A_{n_1}$ y $d(x_{n_1}, x) < \varepsilon_1$. Para $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, existe $J_2 \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $B(x, \varepsilon_2) \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \in J_2$, como J_2 es infinito, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_1$, así, es posible definir

$$n_2 = \min \{m \in J_2 : B(x, \varepsilon_2) \cap A_m \neq \emptyset \text{ y } m > n_1\}$$

tal que $x_{n_2} \in A_{n_2}$ y $d(x_{n_2}, x) < \varepsilon_2$. Continuando de esta forma inductiva es posible definir una sucesión $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $\mathbb{N}$ tal que $n_1 < n_2 < \dots$, $x_{n_k} \in A_{n_k}$ y $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon_n$, se sigue que $x_{n_k} \rightarrow x$. El recíproco se hace de manera similar al inciso anterior. $\square$

Corolario 2.12. $\liminf A_n$, $\limsup A_n$ son subconjuntos no vacíos.

Demostración. Solo mostraremos que $\limsup A_n \neq \emptyset$, dado que $A_n \neq \emptyset$ sea $a_n \in A$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión en el compacto X y por tanto, admite una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ tal que $a_{n_k} \rightarrow a$ con $a \in X$, $a_{n_k} \in A_{n_k}$ y $n_k < n_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, así, por el lema 2.11, $a \in \limsup A_n$. $\square$

Corolario 2.13. Si A es cerrado y para cada $A_n \subset A$, $\limsup A_n \subset A$.

Demostración. Sea $x \in \limsup A_n$ por el lema 2.11 existe, en particular, una sucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ tal que $x_{n_k} \in A_{n_k}$ y $x_{n_k} \rightarrow x$, por lo que $x \in \text{cl}_X(A) = A$. $\square$

Corolario 2.14. Si $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ es otra sucesión de subconjuntos cerrados no vacíos tal que $\lim A_n = A$, $\lim B_n = B$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset B_n$. Entonces $A \subset B$.

Demostración. Sea $a \in A \subset \liminf A_n$, entonces existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $a_n \rightarrow a$ y $a_n \in A_n \subset B_n$, así, por el lema 2.11, $a \in \liminf B_n = B$. $\square$

Corolario 2.15. (1) Si $A_{n+1} \subset A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$;

(2) si $A_n \subset A_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim A_n = \text{cl}_X(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$.

Demostración. (1) Si $A' = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$ mostraremos que $A' \subset \liminf A_n$ y $\limsup A_n \subset A'$. Note que $A' \neq \emptyset$ y que $A' \subset A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así, para $a \in A'$ la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ dada por $a_n = a \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ es tal que $a_n \rightarrow a$, por tanto, $a \in \liminf A_n$. Por otro lado, sea $b \in \limsup A_n$, entonces existe una sucesión $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ tal que $a_{n_k} \rightarrow b$, $n_k < n_{k+1}$ y $a_{n_k} \in A_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ arbitrario, pero fijo, como $n_{k_0} \geq k_0$, entonces $a_{n_{k_0}} \in A_{n_{k_0}} \subset A_{k_0}$, así, $\{a_{n_k}\}_{k=k_0}^\infty$ es una sucesión de A_k la cual converge a b , por tanto, $b \in \text{cl}_X(A_k) = A_k$, como lo anterior se cumple para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $b \in A'$.

(2) Si $A'' = \text{cl}_X(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$, note que $A_n \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n \subset A''$, así, por el corolario 2.13, $\limsup A_n \subset A''$. Por otro lado, sea $a \in \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a \in A_N$, sea $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ donde $a_n \in A_n$ si $n < N$ y $a_n = a$ si $n \geq N$, como $a \in A_n$ siempre que $n \geq N$ y dado que $a_n \rightarrow a$ se sigue que $a \in \liminf A_n$, por tanto $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \subset \liminf A_n$, pero como A'' es el cerrado mas pequeño que contiene a $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$, se sigue que $A'' \subset \liminf A_n$. $\square$

Teorema 2.16. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva entre espacios métricos compactos. Entonces f es continua si y solo si para cada $y \in Y$ y cada sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Y tal que $y_n \rightarrow y$, $\limsup f^{-1}(y_n) \subset f^{-1}(y)$.*

Demostración. Asumamos que f es continua. Sean $y \in Y$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Y tal que $y_n \rightarrow y$ y $x \in \limsup f^{-1}(y_n)$, por el lema 2.11 existe una sucesión estrictamente creciente $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $x_{n_k} \in f^{-1}(y_{n_k})$ y $x_{n_k} \rightarrow x$, por la continuidad de f , $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$, pero $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por lo que $f(x_{n_k}) \rightarrow y$, dada la unicidad del límite, $f(x) = y$, por tanto, $x \in f^{-1}(y)$.

Recíprocamente, sea $F \subset Y$ cerrado, veamos que $f^{-1}(F)$ es cerrado de X , sea $x \in \text{cl}_X(f^{-1}(F))$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $f^{-1}(F)$ tal que $x_n \rightarrow x$, nótese que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión del compacto F , por tanto, existe $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $f(x_{n_k}) \rightarrow y$ con $y \in F$, como $x_{n_k} \rightarrow x$ se sigue sin dificultad por el lema 2.11 y dada nuestra suposición que $x \in \limsup f^{-1}(f(x_{n_k})) \subset f^{-1}(y)$, por tanto, $f(x) = y \in F$, así, $x \in f^{-1}(F)$, como x fue arbitrario, $\text{cl}_X(f^{-1}(F)) \subset f^{-1}(F)$. Por tanto f es continua. $\square$

Hiperespacios

Un *hiperespacio* de un continuo X es una familia de subconjuntos de X que satisfacen una propiedad en específico, algunos de los más estudiados son los siguientes:

- (1) $2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\};$
- (2) $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\},$

donde 2^X esta dotado con la *métrica de Hausdorff* [1, Proposición 9.2] $H : 2^X \times 2^X \rightarrow [0, \infty)$ dada por:

$$H(A, B) = \inf \{\varepsilon > 0 : A \subset N(B, \varepsilon) \text{ y } B \subset N(A, \varepsilon)\}.$$

Dada una familia finita de subconjuntos $U_1, \dots, U_n$ de X , se define:

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset.$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}\}$ y

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, \dots, U_n \rangle : n \in \mathbb{N} \text{ y } U_1, \dots, U_n \text{ son abiertos de } X\},$$

ya es bien conocido el hecho que $\mathcal{B}$ es una base para una topología $\mathcal{V}$ conocida como la *topología de Vietoris*, la cual coincide con la topología inducida por la métrica de Hausdorff [1, Teorema 9.3], otro hecho también notable es que 2^X , $C(X)$ son continuos [1, Teorema 2.5, Corolario 9.17].

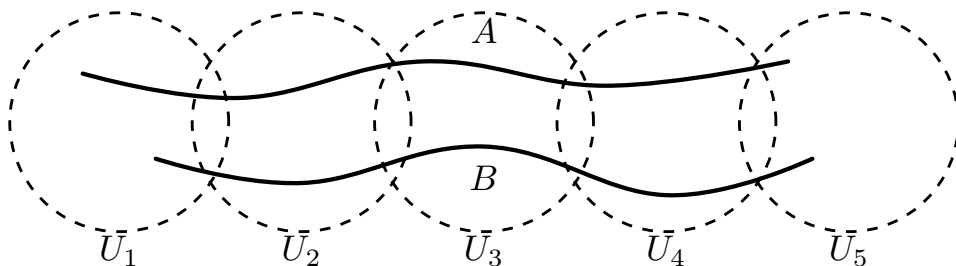


Figura 3

Lema 2.17. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua entre espacios métricos compactos, si $\lim A_n = A$ entonces $\lim f(A_n) = f(A)$.

Demostración. Veamos que $f(A) \subset \liminf f(A_n)$ y $\limsup f(A_n) \subset f(A)$. Sea $b \in f(A)$ entonces $f(a) = b$ para algún $a \in A \subset \liminf A_n$, por lo que existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $a_n \rightarrow a$ y $a_n \in A_n$, por la continuidad de f , $f(a_n) \rightarrow f(a)$, así, $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión la cual converge a b y $f(a_n) \in f(A_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así, $b \in \liminf f(A_n)$.

Por otro lado, sea $y \in \limsup f(A_n)$, entonces existe una sucesión $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $n_k < n_{k+1}$, $y_{n_k} \in f(A_{n_k})$ y $y_{n_k} \rightarrow y$. Sea $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $f(a_{n_k}) = y_{n_k}$ y $a_{n_k} \in A_{n_k}$, como X es compacto, existe $\{a_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $a_{n_{k_j}} \rightarrow a$ con $a \in X$, entonces $a \in \limsup A_n \subset A$, por la continuidad de f , $f(a_{n_{k_j}}) \rightarrow f(a)$ y como $f(a_{n_{k_j}}) \rightarrow y$ se sigue que $f(a) = y$, por tanto $y \in f(A)$. $\square$

Lema 2.18. Sea X un espacio métrico compacto, la función $\text{diam} : 2^X \rightarrow [0, \infty)$ tal que $A \mapsto \text{diam}(A)$ es continua.

Demostración. Dado que A es compacto se sigue que $\text{diam}(A)$ existe y es finito, por tanto, la función diam está bien definida. Sea $A \in 2^X$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X tal que $A_n \rightarrow A$, mostraremos que $\text{diam}(A_n) \rightarrow \text{diam}(A)$.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \varepsilon/2$, con lo cual $A_n \subset N(A, \varepsilon/2)$ y $A \subset N(A_n, \varepsilon/2)$ para cada $n \geq N$, se sigue que:

$$\begin{aligned} \text{diam}(A_n) &\leq \text{diam}(N(A, \varepsilon/2)) \leq \varepsilon + \text{diam}(A); \\ \text{diam}(A) &\leq \text{diam}(N(A_n, \varepsilon/2)) \leq \varepsilon + \text{diam}(A_n), \end{aligned}$$

para cada $n \geq N$, con lo cual $|\text{diam}(A_n) - \text{diam}(A)| \leq \varepsilon$ para cada $n \geq N$, es decir, $\text{diam}(A_n) \rightarrow \text{diam}(A)$. $\square$

3 Clases de funciones

Definición 3.1. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos, decimos que f es:

- (1) abierta si para cada $U \subset X$ abierto, $f(U) \subset Y$ es abierto;
- (2) atómica si para subcontinuo K de X tal que $f(K)$ es no degenerado, se cumple que $K = f^{-1}(f(K))$;
- (3) atriódica si para cada subcontinuo $Q \subset Y$, existe dos componentes C_1, C_2 de $f^{-1}(Q)$ tal que:
 - (i) $f(C_1) \cup f(C_2) = Q$,
 - (ii) Para cada componente C de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $f(C) = Q$ o $f(C) \subset f(C_1)$ o $f(C_2)$.
- (4) casi monótona si $f^{-1}(Q)$ sea un subconjunto conexo de X para cada subcontinuo con interior no vacío Q de Y ;
- (5) confluyente siempre que para cada subcontinuo Q de Y y cada componente K de $f^{-1}(Q)$ se cumple que $f(K) = Q$;
- (6) de unión siempre que para cada subcontinuo Q de Y y para cada dos componentes C_1, C_2 de $f^{-1}(Q)$, tengamos que $f(C_1) \cap f(C_2) \neq \emptyset$;
- (7) débilmente confluyente si para cualquier subcontinuo Q de Y , existe un subcontinuo K de X tal que $f(K) = Q$.
- (8) débilmente monótona si para cada subcontinuo Q de Y con interior no vacío, si C es una componente de $f^{-1}(Q)$, entonces $f(C) = Q$;

- (9) homeomorfismo *siempre que la función inversa f^{-1} exista y sea continua;*
- (10) interior en el punto $p \in X$ *si para cada subconjunto abierto U de X tal que $p \in U$, $f(p) \in \text{int}_Y(f(U))$;*
- (11) libremente descomponible *si para cualesquiera A, B subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$, existen subcontinuos propios A', B' de X con $X = A' \cup B'$ tales que $f(A') \subset A$, $f(B') \subset B$;*
- (12) ligera *siempre que $f^{-1}(f(x))$ sea totalmente desconexo para cada $x \in X$;*
- (13) monótona *si $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in Y$;*
- (14) pseudo-confluente *si para cada subcontinuo irreducible Q de Y , existe una componente C de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C) = Q$.*
- (15) quasi-interior *si para cada $y \in Y$, $U \subset X$ abierto el cual contenga alguna componente de $f^{-1}(y)$, $y \in \text{int}_X(f(U))$.*
- (16) quasi-monótona *si para cada subcontinuo Q de Y con interior no vacío, $f^{-1}(Q)$ tiene un número finito de componentes y si C es una componente de $f^{-1}(Q)$, $f(C) = Q$;*
- (17) semi-abierta *si para cada subconjunto abierto U de X , $\text{int}_Y(f(U)) \neq \emptyset$.*
- (18) semi-confluente *si para cada Q subcontinuo de Y y para cualesquiera dos componentes C_1, C_2 de $f^{-1}(Q)$, $f(C_1) \subset f(C_2)$ o bien $f(C_2) \subset f(C_1)$.*
- (19) semi-interior en el punto $p \in X$ *siempre que f sea suprayectiva y para cada subconjunto abierto U de X tal que $p \in U$, exista un punto $z \in U$ tal que $f(z) \in \text{int}_Y(f(U))$.*
- (20) MO *siempre que sea suprayectiva y existan un continuo Z , una función monótona $m : Z \rightarrow Y$ y una función abierta $o : X \rightarrow Z$ tal que $f = m \circ o$.*
- (21) OM *siempre que sea suprayectiva y existan un continuo Z , una función abierta $o : Z \rightarrow Y$ y una función monótona $m : X \rightarrow Z$ tal que $f = o \circ m$.*

Proposición 3.2. *Sea $h : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo entre continuos, entonces h es ligera, abierta y atómica.*

Demostración. Sea $x \in X$, como h es biyectiva se tiene que $h^{-1}(h(x)) = \{x\}$ el cual es totalmente desconexo. Sea $U \subset X$ abierto, como h^{-1} es continua, $(h^{-1})^{-1}(U) = h(U)$ es abierto de Y . Claramente h es suprayectiva, sea $K \subset X$ subcontinuo, al ser h inyectiva, $K = h^{-1}(h(K))$. $\square$

Proposición 3.3. *Si $f : X \rightarrow Y$ es una función abierta, entonces f es quasi-interior.*

Demostración. Sea $y \in Y$, $U \subset X$ abierto el cual contiene una componente C de $f^{-1}(y)$, como $C \subset U$, entonces $y \in f(C) \subset f(U) = \text{int}_Y(f(U))$. $\square$

Proposición 3.4. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Entonces f es semi abierta si y solo si es semi-interior en cada punto de X .*

Teorema 3.5. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Entonces f es abierta si y solo si para cada $y \in Y$ y cada sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Y tal que $y_n \rightarrow y$, se cumple que $\lim f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$.*

Demostración. Sean $y \in Y$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Y tal que $y_n \rightarrow y$, por el teorema 2.16 basta mostrar que $f^{-1}(y) \subset \liminf f^{-1}(y_n)$. Sean $u \in f^{-1}(y)$, $U \subset X$ abierto tal que $u \in U$, como f es abierta, $f(U)$ es un abierto de Y , dado que $y_n \rightarrow y = f(u) \in f(U)$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in f(U)$ para cada $n \geq N$, así, existe $u_n \in U$ tal que $f(u_n) = y_n$ para cada $n \geq N$, por tanto, $f^{-1}(y_n) \cap U \neq \emptyset$ para cada $n \geq N$.

Recíprocamente, sea U un subconjunto abierto de X , mostraremos que $f(U) \subset \text{int}_Y(f(U))$, supongamos que existe $y \in f(U) \setminus \text{int}_Y(f(U))$ donde $y = f(x)$ para algún $x \in U$, así, para cada $n \in \mathbb{N}$, si $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, existe $y_n \in B(y, \varepsilon_n) \setminus f(U)$ donde $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en Y tal que $y_n \rightarrow y$ ya que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in B(y, \varepsilon_{n_0}) \subset B(y, \varepsilon)$ para cada $n \geq n_0$. Nótese que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$f^{-1}(y_n) \subset f^{-1}(Y \setminus f(U)) = X \setminus f^{-1}(f(U)) \subset X \setminus U,$$

con $X \setminus U$ cerrado de X , así, por el corolario 2.13, $\limsup f^{-1}(y_n) \subset X \setminus U$ pero como $X \setminus U \subset X \setminus \{x\}$ se sigue que $\limsup f^{-1}(y_n) \subset X \setminus \{x\}$ y por tanto $x \in f^{-1}(y) \setminus \limsup f^{-1}(y_n)$ lo cual contradice nuestra hipótesis. $\square$

Lema 3.6. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Entonces f es ligera si y solo si se satisface la siguiente condición: para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si Q es un subcontinuo de Y con $\text{diam}(Q) < \delta$, entonces cada componente C de $f^{-1}(Q)$, $\text{diam}(C) < \varepsilon$.*

Demostración. Asumamos que f es ligera pero que existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $\delta_n = \frac{1}{n}$ existe un subcontinuo $Q_n \subset Y$ con $\text{diam}(Q_n) < \delta_n$ tal que, al menos una componente conexa C_n de $f^{-1}(Q_n)$ tiene $\text{diam}(C_n) \geq \varepsilon_0$. Note que $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones en los espacios compactos $C(Y)$, $C(X)$ respectivamente donde $\text{diam}(Q_n) \rightarrow 0$ y $\text{diam}(C_n) > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ admiten subsucesiones convergentes a algún punto de $C(Y)$, $C(X)$ respectivamente, asumamos sin pérdida de generalidad que $Q_n \rightarrow Q$, $C_n \rightarrow C$ donde Q es un subcontinuo de Y y C es un subcontinuo de X respectivamente, se sigue por el lema 2.18 que $\text{diam}(Q_n) \rightarrow \text{diam}(Q)$, por la unicidad del límite tenemos que $\text{diam}(Q) = 0$ donde $Q \neq \emptyset$, así, se sigue necesariamente que $Q = \{q\}$ para algún $q \in Y$. Por otro lado, por el lema 2.17 se tiene que $f(C_n) \rightarrow f(C)$, como $f(C_n) \subset Q_n$ se sigue por el corolario 2.14 que $f(C) \subset Q$, por tanto $C \subset f^{-1}(q)$, así, $0 < \text{diam}(C) \leq \text{diam}(f^{-1}(q))$, pero note también que C es un subconjunto conexo del conjunto totalmente desconexo $f^{-1}(q)$ por lo que $\text{diam}(C) = 0$ y esto claramente es una contradicción.

Recíprocamente, asumamos que se satisface la condición pero que f no es ligera, entonces existe una componente C no degenerada de $f^{-1}(f(x_0))$ para algún $x_0 \in X$, por lo que $\text{diam}(C) > 0$, así, si elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \text{diam}(C)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para $Q = \{f(x_0)\}$ se cumple que $\text{diam}(C) < \varepsilon$ y esto no puede ser posible. $\square$

Lema 3.7. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Entonces f es monótona si y solo si para cada $K \subset Y$ conexo, $f^{-1}(K)$ es conexo.*

Demostración. Asumamos que f es monótona, sea $C \subset Y$ conexo, supongamos que $f^{-1}(C) = \bigcup_{c \in C} f^{-1}(c) = C_1 \cup C_2$ es una separación. Sean $I_k = \{c \in C : f^{-1}(c) \in C_k\} \subset C$ para $k = 1, 2$, como $f^{-1}(c)$ es conexo, entonces $f^{-1}(c) \subset C_1$ o $f^{-1}(c) \subset C_2$ y dado que $C_k \neq \emptyset$, se sigue que $I_k \neq \emptyset$.

Afirmamos que $f(C_1)$, $f(C_2)$ forman una separación de C . Como f es suprayectiva, se sigue que $I_k = f(f^{-1}(I_k)) = f(C_k)$, por lo que $C = \bigcup_{k=1}^2 I_1 = \bigcup_{k=1}^2 f(C_k)$, mostremos ahora que:

$$f(C_1) \cap \text{cl}_Y(f(C_2)) = \emptyset = \text{cl}_Y(f(C_1)) \cap f(C_2).$$

Supongamos que existe $y \in f(C_1) \cap \text{cl}_Y(f(C_2))$, entonces $y = f(x_1)$ para algún $x_1 \in C_1$, por otro lado, como $y \in \text{cl}_Y(f(C_2)) = f(\text{cl}_X(C_2))$ (dicha igualdad se cumple al ser f cerrada), entonces $y = f(x_2)$ para algún $x_2 \in \text{cl}_X(C_2)$, note que $x_1, x_2 \in f^{-1}(y) \subset C_1$, entonces $x_2 \in C_1 \cap \text{cl}_X(C_2)$, lo cual no puede ser posible, ya que $C_1 \cap \text{cl}_X(C_2) = \emptyset$. De forma similar se muestra la intersección restante. Así, dicha afirmación contradice que C es conexo.

Recíprocamente, dado $y \in Y$, $\{y\}$ es conexo y por tanto el resultado se sigue de inmediato. $\square$

Corolario 3.8. *Si $f : X \rightarrow Y$ es una función monótona, f es confluyente.*

Demostración. Sean $Q \subset Y$ un subcontinuo, K una componente de $f^{-1}(Q)$, por el lema 3.7, $f^{-1}(Q)$ es conexo, por tanto $K = f^{-1}(Q)$, dada la suprayectividad de f , se sigue que $Q = f(f^{-1}(Q)) = f(K)$. $\square$

Lema 3.9. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Entonces f es quasi-interior si y solo si se satisface la siguiente condición: para cada $y \in Y$, cada sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Y tal que $y_n \rightarrow y$ y para cada componente C de $f^{-1}(y)$, $C \cap \limsup f^{-1}(y_n) \neq \emptyset$.*

Demostración. Asumamos que f es quasi-interior, sean $y \in Y$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Y tal que $y_n \rightarrow y$ y C una componente de $f^{-1}(y)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $U_k = N(C, \frac{1}{k})$, note que U_k es un abierto que contiene a C por tanto, $y \in \text{int}_Y(f(U_k))$, es decir, $f(U_k)$ es una vecindad de y para cada $k \in \mathbb{N}$. Así, dado que $y_n \rightarrow y$ existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_k$, entonces $y_n \in f(U_k)$. Para $k = 1$ elijamos $n_1 > N_1$, entonces $y_{n_1} \in f(U_1)$ por lo que existe $u_1 \in U_1$ tal que $y_{n_1} = f(u_1)$ y por definición de U_1 existe $c_1 \in C$ tal que $d(u_1, c_1) < 1$. Para $k = 2$ elijamos $n_2 > \max\{n_1, N_2\}$, entonces $y_{n_2} \in f(U_2)$, por lo que existe $u_2 \in U_2$ tal que $y_{n_2} = f(u_2)$ y por definición de U_2 existe $c_2 \in C$ tal que $d(u_2, c_2) < 1/2$. Una vez elegidos $n_1, n_2, \dots, n_k$, tomemos n_{k+1} tal que:

$$n_{k+1} > \max\{n_k, N_{k+1}\}, \text{ entonces } y_{n_{k+1}} \in f(U_{k+1}), \text{ por lo que existen } u_{k+1} \in U_{k+1}, c_{k+1} \in C \text{ tales que } y_{n_{k+1}} = f(u_{k+1}) \text{ y } d(u_{k+1}, c_{k+1}) < \frac{1}{k+1}.$$

Continuando inductivamente de esta manera, obtenemos una sucesión $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathbb{N}$ estrictamente creciente y sucesiones $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ en U y C respectivamente, tales que $u_k \in f^{-1}(y_{n_k})$ y $d(u_k, c_k) < \frac{1}{k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Dado que C es compacto, existe $\{c_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $c_{k_j} \rightarrow c$ para algún $c \in C$, por la desigualdad triangular se sigue que $u_{k_j} \rightarrow c$, así, por el lema 2.11 se sigue que $c \in \limsup f^{-1}(y_n)$ y por tanto, $c \in C \cap \limsup f^{-1}(y_n)$.

Recíprocamente, asumamos que se cumple la condición. Sea $U \subset X$ abierto el cual contiene una componente C de $f^{-1}(y)$ y supongamos que $y \notin \text{int}_Y(f(U))$ de forma similar a como se mostró en el teorema 3.5 existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $y_n \rightarrow y$ y $y_n \in Y \setminus f(U)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $f^{-1}(y_n) \subset f^{-1}(Y \setminus f(U)) = X \setminus f^{-1}(f(U))$, pero como $U \subset f^{-1}(f(U))$, entonces $f^{-1}(y_n) \subset X \setminus U$ con $X \setminus U$ cerrado de X , así, por el corolario 2.13, $\limsup f^{-1}(y_n) \subset X \setminus U \subset X \setminus C$, esto es que $C \cap \limsup f^{-1}(y_n) = \emptyset$ lo cual contradice nuestra condición inicial. $\square$

Proposición 3.10. *Si $f : X \rightarrow Y$ una función confluyente, f es semi-confluyente.*

Demostración. Sean $Q \subset Y$ subcontinuo, C_1, C_2 componentes de $f^{-1}(Q)$, como f es confluyente, se sigue que $f(C_1) = f(C_2) = Q$, así, este caso particular se tiene que $f(C_1) \subset f(C_2)$ y $f(C_2) \subset f(C_1)$. $\square$

Proposición 3.11. *Si $f : X \rightarrow Y$ una función semi-confluyente, f es de unión.*

Demostración. Sean $Q \subset Y$ un subcontinuo, C_1, C_2 componentes de $f^{-1}(Q)$, dado que f es pseudo confluyente, se sigue que $f(C_1) \subset f(C_2)$ o $f(C_2) \subset f(C_1)$, por lo que $\emptyset \neq f(C_1) = f(C_1) \cap f(C_2)$, $\emptyset \neq f(C_2) = f(C_1) \cap f(C_2)$ respectivamente. $\square$

Proposición 3.12. *Si $f : X \rightarrow Y$ es débilmente confluyente, f es atriódica.*

Demostración. Sea $Q \subset Y$ subcontinuo, dado que f es débilmente confluyente, existe una componente C de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C) = Q$. Si $C_1 := C_2 := C$, entonces $f(C_1) \cup f(C_2) = Q$ y si K es cualquier otra componente de $f^{-1}(Q)$, entonces $f(K) \subset f(f^{-1}(Q)) \subset Q \subset f(C_1), f(C_2)$. $\square$

Lema 3.13. *Sean X, Y continuos, $y \in Y$ y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Si $W \subset X$ abierto tal que $f^{-1}(y) \subset W$, entonces $y \in \text{int}_Y(f(W))$.*

Demostración. Supongamos por el contrario que existe un abierto $W \subset X$ tal que $f^{-1}(y) \subset W$, pero que $y \notin \text{int}_Y(f(W))$, de forma similar a como se mostró en el teorema 3.5, existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $Y \setminus f(W)$ tal que $y_n \rightarrow y$. Sea $P = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\} = \{y\} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \{y_n\})$ el cual es un subconjunto compacto de Y y por tanto cerrado, dado que f es continua, $f^{-1}(P) = f^{-1}(y) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(y_n)) \subset X$ es cerrado, y por tanto compacto. Sea para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in f^{-1}(y_n)$, como $y_n \in Y \setminus f(W)$, entonces

$$f^{-1}(y_n) \subset f^{-1}(Y \setminus f(W)) = X \setminus f^{-1}(f(W)) \subset X \setminus W.$$

Así, $x_n \notin W$ (*), por otro lado, note que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es sucesión del compacto $f^{-1}(P)$, así, existe $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_{n_k} \rightarrow x$ con $x \in f^{-1}(P)$, dado que f es continua, $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$, pero $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$ por lo que $f(x_{n_k}) \rightarrow y$, así, por la unicidad del límite, $f(x) = y$ y por tanto $x \in f^{-1}(y) \subset W$ con W abierto, así, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} \in W$ para cada $k \geq K$ lo cual no puede ser posible ya que contradice (*). $\square$

Corolario 3.14. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función monótona, entonces f es quasi-interior.*

Demostración. Sean $y \in Y$, $U \subset X$ abierto el cual contiene una componente C de $f^{-1}(y)$, dado que f es monótona, $f^{-1}(y)$ es conexo, así, $f^{-1}(y) = C \subset W$, por el lema 3.13, $y \in \text{int}_Y(f(U))$. $\square$

Teorema 3.15. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función abierta, entonces f es confluyente.*

Demostración. Asumamos que f no es confluyente, entonces existe un subcontinuo $Q \subset Y$ y una componente C de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C) \neq Q$, así, existe $q \in Q \setminus f(C)$ tal que $f^{-1}(q) \cap C = \emptyset$, dado que C es una componente del compacto $f^{-1}(Q)$, se sigue por el teorema 2.4 que existen $K, L \subset f^{-1}(Q)$ cerrados y ajenos tales que $f^{-1}(q) \subset K$, $C \subset L$ y $f^{-1}(Q) = K \cup L$. Como $f|_{f^{-1}(Q)} : f^{-1}(Q) \rightarrow Q$ es tanto abierta como cerrada y L también es abierto y cerrado en $f^{-1}(Q)$ se sigue que $f(L) \neq \emptyset$ (ya que $L \neq \emptyset$) es un subconjunto propio que es tanto abierto como cerrado de Q (ya que $q \notin f(L)$), pero esto no es posible ya que Q es conexo. $\square$

Teorema 3.16. *Si $f : X \rightarrow Y$ es una función atómica, entonces f es monótona.*

Demostración. Sea $y \in Y$, asumamos que $f^{-1}(y) = M \cup N$ donde $M, N \subset X$ cerrados tales que $M \cap N = \emptyset$ y $M \neq \emptyset$. Dado que X es normal, existen $U, V \subset X$ abiertos tales que $U \cap V = \emptyset$ y $M \subset U, N \subset V$. Sean $m \in M$ y C_m la componente de $\text{cl}_X(U)$ que tiene al punto m . Por el teorema 2.5 existe $n \in C_m \cap \text{fr}_X(\text{cl}_X(U))$. Como $\text{cl}_X(U) \cap V = \emptyset$ y dado que U es abierto, $\text{fr}_X(\text{cl}_X(U)) = \text{cl}_X(U) \setminus U$ se sigue que $n \notin f^{-1}(y)$ por tanto $f(m), f(n) \in f(C_m)$, así, dado que f es atómica y $y \in f(C_m)$ se sigue que

$$N \subset M \cup N = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(C_m)) = C_m \subset \text{cl}_X(U).$$

Por tanto $N \subset C_m$, así, $N = C_m \cap N \subset \text{cl}_X(U) \cap V = \emptyset$, por tanto $N = \emptyset$ lo cual muestra que $f^{-1}(y)$ es conexo. $\square$

Teorema 3.17. *Si $f : X \rightarrow Y$ semi-confluente, entonces f es débilmente confluente.*

Demostración. Sean $Q \subset Y$ subcontinuo deseamos encontrar un subcontinuo $C \subset X$ tal que $f(C) = Q$, para ello sea:

$$\mathcal{B} = \{B \subset Y : B \text{ es un subcontinuo de } Q \text{ y existe una componente } K \text{ de } f^{-1}(Q) \text{ tal que } B \subset f(K)\}$$

Dado $q \in Q$, note que $\{q\}$ es un subcontinuo de Q , como $f^{-1}(q) \neq \emptyset$, sean $p \in f^{-1}(q)$ y K_p la componente de $f^{-1}(q)$ que tiene al punto p , entonces $f(p) \in f(K_p)$ y por tanto $\{q\} \subset f(K_p)$, esto muestra que $\{q\} \in \mathcal{B}$. Sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de $\mathcal{B}$ tal que $B_n \subset B_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, veamos que $B_0 = \text{cl}_Y(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \in \mathcal{B}$ en dos pasos: 1. Por definición de B_0 se sigue que este cerrado en Q y es conexo por [4, corolario 9.7], por tanto, B_0 es un subcontinuo de Q .

2. Queremos mostrar la existencia de una componente K de $f^{-1}(Q)$ tal que $B_0 \subset f(K)$, antes de continuar note que $f^{-1}(Q)$ es un cerrado de X (ya que f es continua), por tanto $C(f^{-1}(Q))$ es compacto. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe K_n componente de $f^{-1}(Q)$ tal que $B_n \subset f(K_n)$, se sigue que $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de $C(f^{-1}(Q))$, así, existe una subsucesión $\{K_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $K_{n_k} \rightarrow K$ para algún $K \in C(f^{-1}(Q))$, como K es conexo de $f^{-1}(Q)$, existe una componente K^* de $f^{-1}(Q)$ tal que $K \subset K^*$ (basta tomar $k \in K$ y considerar la unión de todos los subconjuntos conexos de $f^{-1}(Q)$ que tiene al punto k , por tanto, K esta en dicha unión), se sigue por el lema 2.17 y el

corolario 2.14 que $B_0 = \lim B_{n_k} \subset \lim f(K_{n_k}) = f(K) \subset f(K^*)$ por tanto K^* es la componente buscada.

Se sigue por el teorema 2.3 que existe un elemento maximal L de $\mathcal{B}$, así, por definición de $\mathcal{B}$ existe una componente C de $f^{-1}(Q)$ tal que $L \subset f(C)$, afirmamos que $f(C) = Q$, solo mostraremos que $Q \subset f(C)$, supongamos que existe $q \in Q \setminus f(C)$, sea C' una componente de $f^{-1}(Q)$ tal que $q \in f(C')$, como f es semi-confluente y $q \in f(C') \setminus f(C)$ se sigue necesariamente que $f(C) \subsetneq f(C')$ y $L \subsetneq f(C')$, pero note que $f(C') \in \mathcal{B}$, lo cual contradice la maximalidad de L , por tanto, $f(C) = Q$. $\square$

Los resultados 3.18 – 3.20 se siguen inmediatamente de la definición 3.1.

Proposición 3.18. *Si $f : X \rightarrow Y$ es monótona, entonces f es quasi-monótona.*

Demostración. Sea $Q \subset Y$ subcontinuo tal que $\text{int}_Y(Q) \neq \emptyset$, por el lema 3.7 $f^{-1}(Q)$ es conexo y por tanto tiene un número finito de componentes, a decir, una sola $C = f^{-1}(Q)$ y es tal que $f(C) = f(f^{-1}(Q)) = Q$ por la suprayectividad de f . $\square$

Proposición 3.19. *Si $f : X \rightarrow Y$ es quasi-monótona, entonces f es débilmente monótona.*

Proposición 3.20. *Si $f : X \rightarrow Y$ es confluente, entonces f es débilmente monótona.*

Proposición 3.21. *Si $f : X \rightarrow Y$ es una función suprayectiva la cual es monótona y ligera, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Note que f es cerrada y suprayectiva, por lo que solo resta mostrar que f es inyectiva, para ello, mostraremos que para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto singular. Sea $y \in Y$, dado que f es ligera, $f^{-1}(y)$ es totalmente disconexo, pero al ser f monótona, $f^{-1}(y)$ es conexo y por tanto $f^{-1}(y)$ debe ser un conjunto unipuntual. $\square$

4 Funciones MO, OM

Teorema 4.1 (de la factorización monótona-ligera, [6, Teorema 13.3]). *Sean X, Y espacios métricos compactos. Si f es una función continua y suprayectiva,*

entonces existen un espacio métrico compacto Z , una función monótona $m : X \rightarrow Z$ y una función ligera $l : Z \rightarrow Y$ tal que $f = l \circ m$. Más aún, esta factorización monótona-ligera es única salvo homeomorfismos.

Los resultados 4.2-4.3 se siguen de la proposición 3.2.

Proposición 4.2. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función abierta, entonces f es OM(MO).*

Proposición 4.3. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función monótona, entonces f es OM(MO).*

Lema 4.4. *Sean $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ funciones confluentes, entonces $g \circ f : X \rightarrow Z$ es confluente.*

Demostración. Sean Q un subcontinuo de Z , C una componente de $(g \circ f)^{-1}(Q)$, note que $f(C)$ es un subcontinuo de Y tal que $g(f(C)) \subset Q$. Sea D la componente de $g^{-1}(Q)$ que contiene a $f(C)$, como g es confluente, $g(D) = Q$. Por otro lado, sea E la componente de $f^{-1}(D)$ la cual contiene a C , dado que f es confluente, $f(E) = D$, así, $g(f(E)) = Q$. Como C es una componente de $(g \circ f)^{-1}(Q)$, E es conexo y $C \subset E$ concluimos que $C = E$, por tanto, $(g \circ f)(C) = Q$. $\square$

Lema 4.5. *Sean $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ funciones continuas y suprayectivas entre continuos tal que g es ligera y $g \circ f : X \rightarrow Z$ es quasi-interior, entonces g es abierta.*

Demostración. Sea $V \subset Y$ abierto, mostraremos que $g(V) \subset \text{int}_Z(g(V))$, sea $z \in g(V)$, entonces $z = g(y)$ para algún $y \in V$, sea C una componente de $f^{-1}(y)$, note que $C \subset (g \circ f)^{-1}(z)$. Sea D la componente de $(g \circ f)^{-1}(z)$ la cual contiene a C , entonces $(g \circ f)(D) = \{z\}$ con lo cual $f(D) \subset g^{-1}(z)$, donde $g^{-1}(z)$ es totalmente desconexo y $f(D)$ es conexo, por tanto, $f(D)$ es degenerado, por lo que $f(D) = \{y\}$, así, $D \subset f^{-1}(y) \subset (g \circ f)^{-1}(z)$, es decir, D es una componente de $(g \circ f)^{-1}(z)$ y por tanto, $C = D$. Tenemos que $C = D \subset f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V)$. Donde $f^{-1}(V)$ es abierto y $g \circ f$ es quasi-interior, con lo cual $z \in \text{int}_Z((g \circ f)(f^{-1}(V))) = \text{int}_Z(g(V))$ con z arbitrario. $\square$

Corolario 4.6. *Si $q : X \rightarrow Y$ es quasi-interior, entonces existe un continuo Z y funciones $m : X \rightarrow Z$, $l : Z \rightarrow Y$ donde m es monótona, l es ligera y abierta tal que $h = m \circ l$.*

Demostración. Por el teorema 4.1 existen $m : X \rightarrow Z$ función monótona y $l : Z \rightarrow Y$ función ligera con Z un continuo tal que $h = l \circ m$, se sigue por el lema 4.5 que l es tanto abierta como ligera. $\square$

Corolario 4.7. *Si $f : X \rightarrow Y$ es quasi-interior, entonces f es confluyente.*

Demostración. Por el corolario 4.6 existen $m : X \rightarrow Z$, $l : Z \rightarrow Y$, donde Z es un continuo, m es monótona y l es abierta tal que $f = l \circ m$, por el corolario 3.8, teorema 3.15 y el lema 4.4 se sigue que f es confluyente $\square$

Lema 4.8. *Sean $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ funciones quasi-interiores, entonces $g \circ f : X \rightarrow Z$ es quasi interior.*

Demostración. Sean $z \in Z$ y $U \subset X$ abierto el cual contiene una componente C de $(g \circ f)^{-1}(z)$, mostraremos que $z \in \text{int}_Z((g \circ f)(U))$, note que por la continuidad de f , $f(C)$ es un subcontinuo de Y tal que $f(C) \subset g^{-1}(z)$. Sea D una componente de $g^{-1}(z)$ la cual contiene a $f(C)$, tenemos que:

$$C \subset f^{-1}(f(C)) \subset f^{-1}(D) \subset f^{-1}(g^{-1}(z)) = (g \circ f)^{-1}(z).$$

Por tanto, C es una componente de $f^{-1}(D)$, así, $f(C) = D$. Sea $y \in D$, entonces existe $x \in C$ tal que $f(x) = y$, sea C_y la componente de $f^{-1}(y)$ la cual contiene a x , se sigue que

$$x \in C \cap C_y \quad \text{y} \quad C_y \subset f^{-1}(y) \subset f^{-1}(D),$$

así, por la maximalidad de C se tiene que $C_y \subset C \subset U$, al ser f quasi-interior, $y \in \text{int}_Y(f(U))$ para cada $y \in Y$, por lo que $D \subset \text{int}_Y(f(U))$, luego, al ser g quasi-interior, $z \in \text{int}_Z(\text{int}_Y(f(U))) \subset \text{int}_Z((g \circ f)(U))$. $\square$

Teorema 4.9. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua entre continuos, entonces f es OM si y solo si f es quasi-interior.*

Demostración. Si f es OM, entonces existen Z continuo, $m : X \rightarrow Z$ función monótona y $o : Z \rightarrow Y$ función abierta tal que $f = o \circ m$ se sigue por la proposición 3.3 y el corolario 3.14 que o , m son funciones quasi-interiores, así, por el lema 4.8, $f = o \circ m$ es quasi-interior. El recíproco es el corolario 4.6. $\square$

Corolario 4.10. *Si $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ son funciones OM, entonces $g \circ f : X \rightarrow Z$ es OM.*

Corolario 4.11. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función OM, entonces f es confluyente.

Corolario 4.12. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función MO, entonces f es OM

Demostración. Como las funciones monótonas y abiertas son quasi-interiores, y la composición de funciones quasi-interiores da como resultado una función quasi-interior, se sigue por el teorema 4.9 que f es una función OM. $\square$

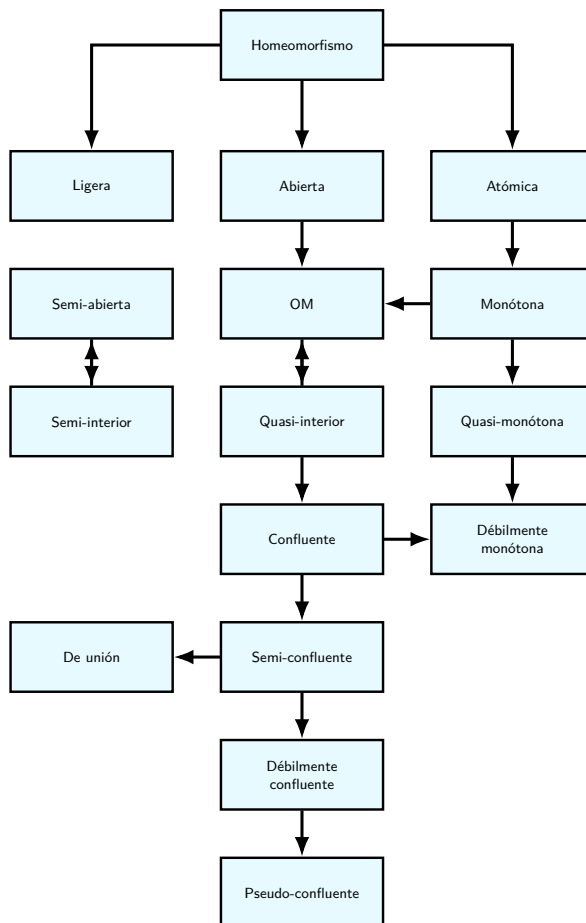


Figura 4: Relaciones entre algunas clases de funciones

5 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar el capítulo.

Bibliografía

- [1] Alejandro Illanes, *Continuum Theory*, Springer, Cham (2025).
- [2] Charatonik J., *Confluent mappings and unicoherence of continua*, Topology Appl., 33 (1989), 209–215.
- [3] Charatonik J., *On feebly monotone and related classes of mappings*, Topology Appl., 105 (2000), 15–29.
- [4] K. Parthasarathy, *Topology: An Invitation*, Springer, Singapore (2022).
- [5] Maćkowiak T., *Continuos mappings on continua*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat), 158 (1979), 1–95.
- [6] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, New york, Basel (1992).

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

daniel.dominguezm@alumno.buap.mx
dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx

Capítulo 8

El lazo solenoidal universal

Ingrid Carolina Martínez Barahona

Universidad de El Salvador, UES

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP

Resumen

Este capítulo tiene como objetivo construir el lazo solenoidal universal, el cual es un lazo que se construye a partir de un lazo topológico dado usando todas las aplicaciones cubrientes sobre este lazo. Los lazos topológicos son estructuras algebraicas - topológicas no asociativas. Los primeros trabajos sobre éstas estructuras fueron presentados por Karl Hofmann (ver [1]), Lev Sabinin y Mal'cev (ver [3]). Podemos encontrar ejemplos de lazos en varias ciencias como en física en la solución de la ecuación de Yang - Baxter.

1 Preliminares

En esta sección, comenzaremos introduciendo los conceptos básicos de la estructura algebraica de lazo para, posteriormente, estudiar su estructura topológica.

Lazos

Un magma es un conjunto no vacío G junto con una operación binaria interna $\cdot$, al que denotaremos por $(G, \cdot)$.

Ejemplo 1.1. Sea $G = \{0, 1\}$ y la operación $\cdot$ mostrada en la siguiente tabla es un magma.

$\cdot$	0	1
0	1	1
1	1	1

Sea $(G, \cdot)$ un magma y $a \in G$ un elemento fijo. Llamaremos **traslaciones por la izquierda** y **traslaciones por la derecha** a las funciones $L_a : G \rightarrow G$ y $R_a : G \rightarrow G$, respectivamente, definidas por

$$L_a(x) = a \cdot x \text{ y } R_a(x) = x \cdot a$$

para todo $x \in G$.

Se dice que un magma $(G, \cdot)$ es:

1. **Conmutativo** si $L_a = R_a$ para todo $a \in G$.
2. **Asociativo** si $R_{a \cdot b} = R_a \circ R_b$ para todo $a, b \in G$.
3. Tiene **elemento identidad por la izquierda (derecha)** $e \in G$, si $L_e : G \rightarrow G$ ($R_e : G \rightarrow G$) es la función identidad de G . También e es un **elemento identidad** de $(G, \cdot)$ si e es identidad por la izquierda y por la derecha.

Definición 1.2. Un magma $(G, \cdot)$ es llamado **cuasigrupo** si las funciones $L_a : G \rightarrow G$ y $R_a : G \rightarrow G$ son biyectivas para todo $a \in G$.

Proposición 1.3. Un magma $(G, \cdot)$ es un cuasigrupo si y sólo si para todo $(a, b) \in G \times G$ existe un único $(x, y) \in G \times G$ tal que $a \cdot x = b$ y $y \cdot a = b$.

Demostración. Que $L_a : G \rightarrow G$ sea biyectiva equivale a que la ecuación $a \cdot x = b$ tiene solución única. De manera similar, el hecho que la función $R_a : G \rightarrow G$ sea biyectiva equivale a que la ecuación $y \cdot a = b$ tiene solución única.

□

Ejemplo 1.4. Sea $Q = \{1, 2, 3, 4\}$ y la operación $\cdot$ dada por:

$\cdot$	1	2	3	4
1	4	1	2	3
2	1	4	3	2
3	2	3	1	4
4	3	2	4	1

Observe que $(Q, \cdot)$ es un cuasigrupo pero no un grupo, no hay identidad y la propiedad asociativa no se cumple, como contraejemplo

$$(1 \cdot 2) \cdot 4 \neq 1 \cdot (2 \cdot 4)$$

Definición 1.5. Un magma $(G, \cdot)$ es un lazo si $(G, \cdot)$ es un cuasigrupo con elemento identidad.

Ejemplo 1.6. 1. $C(2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. $\mathbb{S}^1$ es un lazo, con la operación $\cdot$ producto de números complejos. También $\mathbb{S}^1$ es un lazo con la operación $\circ : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida por $(e^{i\alpha}, e^{i\beta}) \mapsto e^{i\alpha} \circ e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta+\alpha\beta)}$.

3. $\mathbb{S}^3$ y $\mathbb{S}^7$ son lazos.

Sea $(G, \cdot)$ un cuasigrupo. Sabemos que todas las traslaciones $L_a : G \rightarrow G$ y $R_a : G \rightarrow G$, para todo $a \in G$, son biyecciones de G por lo cual todas tienen aplicaciones inversas $L_a^{-1} : G \rightarrow G$ y $R_a^{-1} : G \rightarrow G$ que no son necesariamente traslaciones.

Dadas estas aplicaciones inversas, se definen las operaciones binarias $(\backslash)$ y $(/)$ para el conjunto G de la siguiente manera:

$$x \backslash y = L_x^{-1}(y) \quad \text{y} \quad x / y = R_y^{-1}(x)$$

para todo $x, y \in G$. Esto es, $x \backslash y = z$ si y solo si $x \cdot z = y$, y $x / y = z$ si y solo si $z \cdot y = x$. Es fácil ver que $(G, \backslash)$ y $(G, /)$ también son cuasigrupos.

Con lo anterior podemos reescribir la definición de lazo:

Definición 1.7. Un lazo $(G, \cdot, /, \backslash)$ es un conjunto G junto con tres operaciones binarias $(\cdot)$, $(/)$, $(\backslash)$ tales que:

1. $a \cdot (a \backslash b) = b$, $(b / a) \cdot a = b$ para todo $a, b \in G$,

2. $a \backslash (a \cdot b) = b$, $(b \cdot a) / a = b$ para todo $a, b \in G$,

3. $a \backslash a = b / b$ para todo $a, b \in G$.

Subestructuras

Un subconjunto no vacío H de un conjunto G diremos que es un **subcuasigrupo** (sublazo, subgrupo) del cuasigrupo $(G, \cdot)$ si $(H, \cdot)$ es cuasigrupo (lazo, grupo).

Sea $(G, \cdot)$ un lazo y $H \leq G$ (i.e. H es un sublazo de $(G, \cdot)$). Sea $a \in G$, se definen las clases (o clases módulo H) izquierdas y derechas aH y Ha respectivamente, por

$$aH = \{a \cdot h | h \in H\}, \text{ y } Ha = \{h \cdot a | h \in H\}.$$

Sea $(G, \cdot)$ un lazo y $H \leq G$. Diremos que $(G, \cdot)$ tiene una **descomposición izquierda (derecha) de clases módulo H** si el conjunto P de todas las clases izquierdas (derechas) módulo H es una partición de G .

Teorema 1.8. *Sea $(G, \cdot)$ un lazo y $H \leq G$. $(G, \cdot)$ tiene una descomposición izquierda (derecha) de clases módulo H si y sólo si $(a \cdot h)H = aH$ ($H(h \cdot a) = Ha$) para todo $a \in G$ y para todo $h \in H$.*

Definición 1.9. *Sea H un sublazo de un lazo $(G, \cdot)$, y $(G, \cdot)$ con descomposición izquierda (derecha) de clases módulo H . El sublazo H es llamado **normal** si satisface*

$$xH = Hx, (xH)y = x(Hy) \text{ y } x(yH) = (xy)H \text{ para todo } x, y \in G.$$

Teorema 1.10. *Sea α un homomorfismo del lazo $(Q, \cdot)$ sobre el lazo $(H, \circ)$ y N un sublazo normal de $(Q, \cdot)$. Entonces, $\text{Im} \alpha$ es un sublazo normal de $(H, \circ)$ y*

$$G/N \cong H/\text{Im} \alpha$$

Definición 1.11. *Un lazo $(M, \cdot)$ con elemento identidad 1 es llamado lazo de Moufang si satisface la identidad de Moufang*

$$(xy)(zx) = [x(yz)]x, \text{ para todo } x, y, z \in M.$$

Lazos topológicos

Un lazo topológico es un lazo L junto con una topología en L tal que las operaciones binarias $L \times L \rightarrow L$; $(x, y) \rightarrow xy, x/y, x \setminus y$ son todas continuas.

En general, si X un espacio topológico dotado de una operación binaria $(x, y) \mapsto xy$. La operación es continua si y sólo si para cada $x, y \in X$ y para todo entorno abierto U de xy , existen vecindarios U_x de x y U_y de y tales que:

$$\forall x' \in U_x, \forall y' \in U_y \implies x'y' \in U.$$

Un homomorfismo $f : L_1 \rightarrow L_2$ de lazos topológicos es un homomorfismo de lazos que además es continuo.

Algunas propiedades de homomorfismos de lazos topológicos:

Proposición 1.12. *Sea $f : L_1 \rightarrow L_2$ un homomorfismo de lazos topológicos. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. f es continua;
2. f es continua en cada punto x de L_1 ;
3. f es continua en e_1 .

Recordemos que para un espacio topológico X , una familia de filtros $\mathcal{U}(x)$, $x \in X$ es una colección de filtros de vecindarios con respecto a una topología si y sólo si para cada $x \in X$ y cada $U \in \mathcal{U}(x)$ existe un $V \in \mathcal{U}(x)$ con $V \subseteq U$ y $U \in \mathcal{U}(v)$ para todo $v \in V$. Se deduce de la definición que si T es un homeomorfismo de X , entonces

$$T(\mathcal{U}(x)) = \{T(U) : U \in \mathcal{U}(x)\} = \mathcal{U}(T(x)).$$

Proposición 1.13. *Sea L un lazo topológico y $\mathcal{U} = \mathcal{U}(e)$, un filtro de vecindarios de la identidad. Entonces $\mathcal{U}$ satisface las siguientes condiciones*

1. Para cada $U \in \mathcal{U}$ existe un $V \in \mathcal{U}$ con $VV, V \setminus V$ y $V / V \subseteq U$;
2. para todo $x \in L$, $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}x = x\mathcal{U}$.

Observación 1.14. *Para nuestro estudio sobre el lazo topológico L tendremos la hipótesis general de que L es Hausdorff, compacto y conexo por caminos.*

2 Lazo cubriente

A continuación se estudiarán algunas propiedades de espacios cubrientes para lazos topológicos probadas por Hofmann, K. H. en [1].

La primera propiedad es el levantamiento de la estructura del espacio base al espacio cubriente: si el espacio base es un magma (cuasigrupo, lazo o grupo) su espacio cubriente es también un magma (cuasigrupo, lazo o grupo).

Teorema 2.1. *Sea G una estructura topológica - algebraica con multiplicación continua $\cdot : G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto xy$. Si G es conexo, localmente conexo y localmente simplemente conexo entonces el espacio topológico $(\tilde{G}, p)$ puede ser dotado de una operación continua $+: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto \tilde{x} + \tilde{y}$ y p es un homomorfismo. Además, si G tiene elemento neutro e , $\tilde{G}$ tiene un elemento neutro en $p^{-1}(e)$.*

Corolario 2.2. *Sean L un lazo topológico y Q un espacio topológico. Sea $Q \xrightarrow{p} L$ un espacio cubriente de L . Asuma que Q es conexo y localmente conexo por caminos, entonces Q es un lazo topológico y p es un epimorfismo de lazos.*

Corolario 2.3. *Sea G un grupo topológico y asuma que el espacio subyacente de G admite un cubriente universal $p : \tilde{G} \rightarrow G$. Entonces, para cada $\tilde{e} \in p^{-1}(e)$ existe una única estructura de grupo sobre $\tilde{G}$ con $\tilde{e}$ como elemento identidad y tal que p es un epimorfismo de grupos.*

El siguiente resultado es análogo a la teoría de espacios cubrientes, donde se da la relación del grupo de Poincaré del espacio y la fibra de la aplicación cubriente sobre el punto base.

Proposición 2.4. *Sea $(\tilde{L}, p, \tilde{e})$ el lazo cubriente universal del lazo topológico L . El grupo de Poincaré de L es isomorfo a $\tilde{H} = p^{-1}(e)$.*

Demostración. Sea $\tilde{a} \in \tilde{H}$. Las traslaciones $L_{\tilde{a}}$ y $R_{\tilde{a}}$ son homeomorfismos de $\tilde{L}$ que además satisfacen $p \circ R_{\tilde{a}} = p \circ L_{\tilde{a}} = p$, es decir, ambas son levantamientos de la aplicación $p : \tilde{L} \rightarrow L$ y por tanto son iguales. Se tiene que $L_{\tilde{a}} = R_{\tilde{a}}$, para todo $\tilde{a} \in \tilde{H}$.

Por otra parte, sea T un homeomorfismo del grupo de Poincaré y sean $\tilde{x}$ y $\tilde{y}$ elementos de $\widetilde{L}$ tales que $T(\tilde{x}) = \tilde{y}$. Dado que $\widetilde{L}$ es un lazo, existen únicos $\tilde{a}'$ y $\tilde{a}'' \in \widetilde{L}$ tales que:

$$\tilde{x} + \tilde{a}' = \tilde{y} \quad \text{y} \quad \tilde{a}'' + \tilde{x} = \tilde{y}.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} p(\tilde{x} + \tilde{a}') &= p(\tilde{x})p(\tilde{a}') = p(\tilde{y}) = p(T(\tilde{x})) = p(\tilde{x}), \text{ y} \\ p(\tilde{a}'' + \tilde{x}) &= p(\tilde{a}'')p(\tilde{x}) = p(\tilde{y}) = p(T(\tilde{x})) = p(\tilde{x}). \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que $\tilde{a}'$ y $\tilde{a}''$ pertenecen a $\widetilde{H}$. Además, $R_{\tilde{a}'}$ y $L_{\tilde{a}''}$, elementos del grupo de Poincaré, ambas son iguales a T .

Evaluando en $\tilde{e}$ a T , $R_{\tilde{a}'}$ y $L_{\tilde{a}''}$ se obtiene que $\tilde{a}' = \tilde{a}''$. Por tanto, para cada elemento T en el grupo de Poincaré existe un único $\tilde{a}_T \in \widetilde{H}$, tal que

$$R_{\tilde{a}_T} = L_{\tilde{a}_T} = T.$$

Ahora, sean $\tilde{a}, \tilde{b} \in \widetilde{H}$. Existe un único $\tilde{c} \in \widetilde{H}$ tal que $R_{\tilde{b}} \circ R_{\tilde{a}} = R_{\tilde{c}}$, evaluando en $\tilde{e}$ se tiene:

$$\begin{aligned} R_{\tilde{c}}(\tilde{e}) = \tilde{c} &= R_{\tilde{b}}R_{\tilde{a}}(\tilde{e}) \\ &= \tilde{a} + \tilde{b}. \end{aligned}$$

Definimos la aplicación $\Psi : \widetilde{H} \longrightarrow \Gamma$, $\tilde{a} \longmapsto R_{\tilde{a}}$. Ψ es un homomorfismo de grupos ya que:

$$\begin{aligned} \Psi(\tilde{a} + \tilde{b}) &= R_{\tilde{a} + \tilde{b}} \\ &= R_{\tilde{a}} \circ R_{\tilde{b}} \\ &= \Psi(\tilde{a}) \circ \Psi(\tilde{b}) \end{aligned}$$

Dado que para todo $T \in \Gamma$ existe un único $\tilde{a}_T \in \widetilde{H}$ tal que $T = R_{\tilde{a}_T}$, el homomorfismo Ψ es un isomorfismo. $\square$

Observación 2.5. *El papel de $\widetilde{H}$ para el resto del trabajo es muy importante, $\widetilde{H}$ es un subgrupo central discreto de $\widetilde{L}$ ([1, Propositiones 1.2 y 5.12]), esto es otra forma de deducir que el grupo fundamental de un lazo topológico es abeliano. Este hecho junto con el siguiente teorema y los subgrupos de $\widetilde{H}$ nos permitirá construir lo que más adelante definiremos como el lazo solenoidal.*

Teorema 2.6. *Sea L un lazo topológico, conexo y localmente conexo. Sea H un subgrupo normal discreto de L . Sea $\mathfrak{h}$ el homomorfismo asociado con H como núcleo. Entonces $(L, \mathfrak{h})$ es un lazo cubriente para L/H . Si L es simplemente conexo, $(L, \mathfrak{h})$ es el lazo cubriente universal de L/H y H es isomorfo al grupo de Poincaré de L/H .*

Demostración. Nótese que $\mathfrak{h}$ es continua ya que en L/H estamos tomando la topología cociente. Además, al ser H normal, H está contenido en el centro de L ([1, Proposición 5.12]).

Ahora, sea $x' \in L/H$, entonces $x' = xH$ con $x \in L$. Al ser H discreto, el conjunto xH es también discreto.

Sea $U \in \mathcal{U}(e)$ elegido tal que $(U \setminus U) \cap H = \{e\}$, esto implica que $U \cap H = \{e\}$ ya que de lo contrario si $a \in U \cap H$, $a \neq e$, entonces de la igualdad $ea = a$ se deduce que $a \in U \setminus U$ y $(U \setminus U) \cap H \neq \{e\}$. Se tiene que $U' = \mathfrak{h}(U)$ es homeomorfo a U ya que si para $x, y \in U$ si $\mathfrak{h}(x) = \mathfrak{h}(y)$ implica que $x = yt$ con $t \in H$, por lo que $t \in (U \setminus U) \cap H = \{e\}$ y $x = y$.

Sean x_1 y x_2 puntos distintos en xH , $x_n = xh_n$ con $h_n \in H$ para $n = 1, 2$. Probaremos que $Ux_1 \cap Ux_2 = \emptyset$. Por contradicción, supongamos que $Ux_1 \cap Ux_2 \neq \emptyset$. Como H está contenido en el centro de L se tiene

$$U(xh_1) \cap U(xh_2) = (Ux)h_1 \cap (Ux)h_2 \neq \emptyset,$$

o equivalentemente,

$$Ux \cap (Ux)h_3 = Ux \cap (Uh_3)x \neq \emptyset,$$

donde $h_3 = h_2h_1^{-1} \in H$. Es decir, existe $a, b \in U$ tales que $ax = (bh_3)x$, simplificando $a = bh_3$, entonces $h_3 \in (U \setminus U) \cap H = \{e\}$. Esto último implica que $h_1 = h_2$.

Entonces, para $xH \in L/H$ existe el abierto $V = \bigcup_{x_i \in xH} U' \mathfrak{h}(x_i)$ y tal que $\mathfrak{h}^{-1}(V) = \bigcup Ux_i$ y $\mathfrak{h}$ es un homomorfismo cubriente. $\square$

Propiedades de levantamiento y cubrientes de lazos

A continuación enunciaremos y demostraremos propiedades de levantamiento que también se verifican para lazos topológicos que serán de utilidad para las siguientes secciones.

Dado $(L, e, \cdot)$ un lazo topológico con operación continua $\cdot : L \times L \longrightarrow L$. La operación $\cdot$ induce una operación sobre las clases de homotopía de lazos basados en e :

$$\begin{aligned} \bullet : \pi_1(L, e) \times \pi_1(L, e) &\longrightarrow \pi_1(L, e) \\ ([\gamma_1], [\gamma_2]) &\longmapsto [\gamma_1 \cdot \gamma_2], \end{aligned}$$

donde $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ es el lazo definido por $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) := \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)$, para $0 \leq t \leq 1$. La operación está bien definida, en efecto, si $\gamma_1 \simeq_F \gamma'_1$ y $\gamma_2 \simeq_G \gamma'_2$ entonces $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \simeq_H \gamma'_1 \cdot \gamma'_2$ donde $H(x, t) = F(x, t) \cdot G(x, t)$. Además, con esta operación las clases de homotopía de lazos basados en e tiene estructura de lazo.

Esta observación nos permite demostrar la primera propiedad de levantamiento de homomorfismos de lazos:

Proposición 2.7 (Levantamiento de homomorfismos de lazos). *Sean L, L' lazos topológicos y $Q \xrightarrow{p} L$ un lazo cubriente para L . Si $f : (L', e') \rightarrow (L, e)$ es un homomorfismo de lazos, entonces existe un único homomorfismo $\tilde{f}$ de levantamiento si y sólo si:*

$$f_*(\pi_1(L', e')) \subset p_*(\pi_1(Q, \tilde{e})).$$

Corolario 2.8. *Si $(\tilde{L}, p)$ es el lazo cubriente universal para el lazo topológico L y (Q, q) es un lazo cubriente para L , entonces existe un homomorfismo de lazos topológicos*

$$\tilde{p} : \tilde{L} \longrightarrow Q,$$

tal que $(\tilde{L}, \tilde{p})$ es un lazo cubriente para el lazo topológico Q .

Demostración. Como $\tilde{L}$ es el lazo cubriente universal, se tiene $\pi_1(\tilde{L}, \tilde{e}) = 0$. En el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & Q \\ & \nearrow \tilde{p} & \downarrow q \\ \tilde{L} & \xrightarrow{p} & L \end{array}$$

desde que $p_*(\pi_1(\tilde{L}, \tilde{e})) = 0 \in q_*(\pi_1(Q, e'))$, por la Proposición 2.7 tenemos que existe un único homomorfismo de lazos $\tilde{p} : (\tilde{L}, \tilde{e}) \longrightarrow (Q, e')$ tal que $q \circ \tilde{p} = p$ y por tanto $\tilde{p}$ es un homomorfismo cubriente de lazos y $(\tilde{L}, \tilde{p})$ es un lazo cubriente para Q . $\square$

Proposición 2.9. Sean (Q_1, p_1) y (Q_2, p_2) lazos cubrientes para el lazo topológico (L, e) . Todo homomorfismo cubriente h de (Q_1, p_1) a (Q_2, p_2) es un homomorfismo de lazos topológicos.

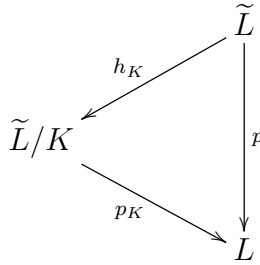
Demostración. Si h es un homomorfismo cubriente de (Q_1, p_1) a (Q_2, p_2) , entonces (Q_1, h) es un espacio cubriente para Q_2 de donde se sigue que h es un homomorfismo de lazos. $\square$

Construcción de torres de lazos cubrientes

Los siguientes resultados son clásicos en la teoría de espacios cubrientes. Probaremos que también se cumplen cuando el cubriente tiene estructura de lazo topológico.

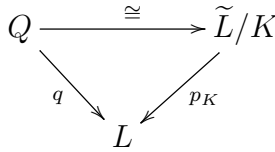
Proposición 2.10. Sea $(\tilde{L}, p)$ el lazo cubriente universal del lazo topológico (L, e) . Si K es subgrupo de $\tilde{H} = p^{-1}(e)$, entonces el lazo cociente $\tilde{L}/K$ es un lazo cubriente de L . Además, todo lazo cubriente de L es isomorfo al lazo cociente $\tilde{L}/K$, con K un subgrupo de $\tilde{H}$.

Demostración. Si K es subgrupo de $\tilde{H} \cong \pi_1(L, e)$, entonces K es un subgrupo central discreto de $\tilde{L}$ y por el Teorema 2.6, $(\tilde{L}, h_K)$ es un lazo cubriente de $\tilde{L}/K$ y $\pi_1(\tilde{L}/K, K) \cong K$. Ahora, definimos $p_K : \tilde{L}/K \longrightarrow L$, por $p_K(\tilde{x}K) = p(\tilde{x})$. La aplicación p_K está bien definida, en efecto, si $\tilde{x}K = \tilde{y}K$ entonces $\tilde{x} = \tilde{y}k$ con $k \in K$ por lo que $p(\tilde{x}) = p(\tilde{y})p(k) = p(\tilde{y})$. La sobreyectividad de p_K se deduce de la sobreyectividad de p . Además, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:



Que p_K sea una aplicación cubriente se deduce del hecho que p y h_K lo son y que h_K es abierta. Por tanto, $(\tilde{L}/K, p_K)$ es un lazo cubriente de L .

Sea (Q, q) un lazo cubriente para L . Tomamos $K = q_*(\pi_1(Q, e'))$, entonces (Q, q) es isomorfo a $(\tilde{L}/K, p_K)$ ya que $q_*(\pi_1(Q, e')) = K = p_{K*}(\pi_1(\tilde{L}/K, K))$.



□

Para cada lazo cubriente $(\tilde{L}/K, p_K)$ podemos establecer un resultado similar a la Proposición 2.4:

Proposición 2.11. *Sea K un subgrupo central discreto de $\tilde{H}$ y $(\tilde{L}/K, p_K)$ el respectivo lazo cubriente. Sea $\Gamma_{\tilde{K}}$ el grupo de transformaciones cubrientes de $p_K : \tilde{L}/K \rightarrow L$ entonces $\Gamma_K \cong \tilde{H}/K$.*

Demostración. Sea $\tilde{a}K \in \tilde{H}/K$, las traslaciones $L_{\tilde{a}K}$ y $R_{\tilde{a}K}$ son homeomorfismos de $\tilde{L}/K$. Nótese que $p_K \circ L_{\tilde{a}K} = p_K = R_{\tilde{a}K} \circ p_K$, en efecto

$$\begin{aligned}
 p_K \circ L_{\tilde{a}K}(\tilde{x}K) &= p_K(\tilde{a}\tilde{x}K) & p_K \circ R_{\tilde{a}K}(\tilde{x}K) &= p_K(\tilde{x}\tilde{a}K) \\
 &= p(\tilde{a}\tilde{x}) & &= p(\tilde{x}\tilde{a}) \\
 &= p(\tilde{a})p(\tilde{x}) & &= p(\tilde{x})p(\tilde{a}) \\
 &= p(\tilde{x}) & &= p(\tilde{x}) \\
 &= p_K(\tilde{x}K) & &= p_K(\tilde{x}K)
 \end{aligned}$$

Ambas, $L_{\tilde{a}K}$ y $R_{\tilde{a}K}$, son levantamientos de p_K y por la unicidad de este se tiene $L_{\tilde{a}K} = R_{\tilde{a}K}$, para todo $\tilde{a}K \in \tilde{L}/K$.

Ahora, sea $\sigma \in \Gamma_K$ y $\tilde{x}K, \tilde{y}K$ elementos de $\tilde{L}/K$ tales que $\sigma(\tilde{x}K) = \tilde{y}K$. Luego, $p_K(\tilde{y}K) = p_K(\sigma(\tilde{x}K)) = p_K(\tilde{x}K) = p(\tilde{x})$.

Por ser $\tilde{L}/K$ un lazo existen únicos $\tilde{a}K$ y $\tilde{a}'K$ en $\tilde{L}/K$ tales que

$$(\tilde{x}K)(\tilde{a}K) = \tilde{y}K \quad \text{y} \quad (\tilde{a}'K)(\tilde{x}K) = \tilde{y}K.$$

Se sigue que $p_K(\tilde{x}K \cdot \tilde{a}K) = p_K(\tilde{x}\tilde{a}K) = p_K(\tilde{y}K)$, de donde se deduce que

$$p(\tilde{x})p(\tilde{a}) = p(\tilde{x}).$$

Así, $\tilde{a} \in \tilde{H}$ por lo que $\tilde{a}K \in \tilde{H}/K$. De manera similar se prueba que $\tilde{a}'K \in \tilde{H}/K$. Como $L_{\tilde{a}K}$ y $R_{\tilde{a}'K}$ son elementos de Γ_K y además satisfacen $R_{\tilde{a}K}(\tilde{x}K) = \tilde{y}K$ y $L_{\tilde{a}'K}(\tilde{x}K) = \tilde{y}K$,

$$\sigma = R_{\tilde{a}K} = L_{\tilde{a}'K}.$$

Evalutando en $\tilde{e}K$ a σ , se deduce que $\tilde{a}K = \tilde{a}'K$. Por tanto, para cada $\sigma \in \Gamma_K$ existe un único $\tilde{a}K \in \tilde{H}/K$ tal que $\sigma = L_{\tilde{a}K}$.

Definimos la aplicación $\phi_K : \tilde{H}/K \rightarrow \Gamma_K$, $\tilde{a}K \mapsto L_{\tilde{a}K}$. Desde que $L_{\tilde{a}K} \circ L_{\tilde{b}K} = L_{\tilde{a}\tilde{b}K}$, para todo $\tilde{a}K, \tilde{b}K \in \tilde{H}/K$, ϕ_K es un homomorfismo de grupos. Y dado que para todo $\sigma \in \Gamma_K$ existe un único $\tilde{a}K \in \tilde{H}/K$ con $\sigma = L_{\tilde{a}K}$, se concluye que ϕ_K es un isomorfismo de grupos. $\square$

Bajo la hipótesis general dada en la Observación 2.5 y las hipótesis del Teorema 2.1, $\pi_1(L, e)$ es un grupo abeliano finitamente generado (ver [2, Lema 10.1.9 (b)]) y por consecuencia $\tilde{H}$ es también un grupo abeliano finitamente generado. Entonces todo subgrupo K de $\tilde{H}$ es también finitamente generado. Además, $\tilde{H}/K$ es finito si y sólo si $\tilde{H}$ y K son de igual rango.

Proposición 2.12. *Sea K subgrupo central discreto de $\tilde{H} = p^{-1}(e)$ y $p_K : \tilde{L}/K \rightarrow L$. Se tiene que:*

1. $\tilde{H}/K$ es finito si y sólo si el rango de K es igual al rango de $\tilde{H}$.
2. $p_K^{-1}(e) = \tilde{H}/K$.

Bajo la hipótesis general dada en la Observación 2.5 y las hipótesis del Teorema 2.1, $\pi_1(L, e)$ es un grupo abeliano finitamente generado (ver [2, Lema 10.1.9 (b)]) y por consecuencia $\widetilde{H}$ es también un grupo abeliano finitamente generado. Entonces todo subgrupo $\widetilde{K}$ de $\widetilde{H}$ es también finitamente generado. Además, $\widetilde{H}/K$ es finito si y sólo si $\widetilde{H}$ y K son de igual rango.

Proposición 2.13. *Sea K subgrupo central discreto de $\widetilde{H} = p^{-1}(e)$ y $p_K : \widetilde{L}/K \rightarrow L$. Se tiene que:*

1. $\widetilde{H}/K$ es finito si y sólo si el rango de K es igual al rango de $\widetilde{H}$.
2. $p_K^{-1}(e) = \widetilde{H}/K$.

3 Completaciones profinitas

Sea $(\widetilde{L}, p)$ el lazo cubriente universal del lazo topológico L , $\widetilde{H} = p^{-1}(e)$ y Γ el grupo de transformaciones cubrientes de $p : \widetilde{L} \rightarrow L$. Recordemos que $\widetilde{H}$ es un grupo central discreto de $\widetilde{L}$, esto es, todos los elementos de $\widetilde{H}$ conmutan y asocian con todos los elementos de $\widetilde{L}$. Además, por la Proposición 2.4 $\widetilde{H} \cong \Gamma$ y por tanto $\widetilde{H} \cong \pi_1(L, e)$. Sobre el conjunto $\mathcal{S}$ de los subgrupos centrales discretos de $\widetilde{H}$ y de igual rango que $\widetilde{H}$, definimos la relación $H \leq K$ si y sólo si $K \subset H$. Resulta que $(\mathcal{S}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Además, suponemos que $\bigcap_{H \in \mathcal{S}} H = \{\tilde{e}\}$.

La completación profinita del grupo fundamental

Como $\widetilde{H}$ es un subgrupo abeliano de $\widetilde{L}$, $\widetilde{H}$ es un grupo topológico abeliano con la topología subespacio. También, para H subgrupo de $\widetilde{H}$, $\widetilde{H}/H$ es un grupo topológico abeliano respecto a la topología cociente. Además, $\widetilde{H}/H$ es compacto por ser finito. Finalmente, desde que los grupos cocientes $\widetilde{H}/H$ son finitos, podemos dotar a cada $\widetilde{H}/H$ con la topología discreta. En resumen, los grupos $\widetilde{H}/H$ son grupos topológicos abelianos, totalmente desconexos y compactos.

Para $H, K \in \mathcal{S}$, con $H \leq K$, definimos la aplicación $\nu_{HK} : \widetilde{H}/K \rightarrow \widetilde{H}/H$, $\tilde{x}K \mapsto \tilde{x}H$. Claramente las aplicaciones ν_{HK} son homomorfismos de grupos. Además, si $H \leq K \leq J$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{H}/J & \\ \nu_{KJ} \swarrow & & \searrow \nu_{HJ} \\ \widetilde{H}/K & \xrightarrow{\nu_{HK}} & \widetilde{H}/H \end{array}$$

Se tiene que $\{\widetilde{H}/K; \nu_{HK}\}$ es un sistema proyectivo de grupos abelianos compactos.

De acuerdo con [4, Proposición 1.1.4], sea $C_{\widetilde{H}} = \prod_{H \in \mathcal{S}} \widetilde{H}/H$ entonces $(\widehat{H}, \mu_K)$ es el límite proyectivo de $\{\widetilde{H}/K; \nu_{HK}\}$ con $\widehat{H} := \{c \in C_{\widetilde{H}} | \nu_{HK}\pi_K(c) = \pi_H(c)\}$, donde π_H es la proyección $C \rightarrow \widetilde{H}/H$, y $\nu_H = \pi_H|_{\widehat{H}}$.

A continuación se enuncian algunas de las propiedades topológicas de $\widehat{H}$.

Proposición 3.1. *Sea $\nu_H : \widehat{H} \rightarrow \widetilde{H}/H$ la respectiva proyección para cada $H \in \mathcal{S}$. Los conjuntos $\nu_H^{-1}(V_H)$, con V_H abierto de $\widetilde{H}/H$, forman una subbase para la topología de $\widehat{H}$.*

Proposición 3.2. *$\tilde{i}(\widetilde{H})$ es denso en $\widehat{H}$.*

Teorema 3.3. *$\widehat{H}$ un grupo topológico compacto, perfecto y totalmente disconexo.*

La completación profinita de Γ

Sea $K \in \mathcal{S}$, para la aplicación cubriente $p_K : \widetilde{L}/K \rightarrow L$ denotamos por Γ_K su grupo de transformaciones cubriente, es decir:

$$\Gamma_K = \{\sigma : \widetilde{L}/K \rightarrow \widetilde{L}/K, \text{ homeomorfismo } | p_K\sigma = p_K\}.$$

Por la Proposición 2.11 el grupo Γ_K es isomorfo a $\widetilde{H}/K$. Denotamos por $Q_K = \widetilde{H}/K$ y sea ϕ_K el isomorfismo de Q_K sobre el grupo de transformación

Γ_K .

Recordemos que Γ_K es subgrupo del grupo de homeomorfismos de $\tilde{L}/K$, el cual es un grupo topológico con la topología compacto abierta. Por tanto Γ_K es un grupo topológico. Pero además, Γ_K es abeliano y finito así que Γ_K es compacto. Podemos considerar en cada Γ_K la topología discreta.

Ahora, para $H \leq K$, definimos la aplicación $\mu_{HK} : \Gamma_K \rightarrow \Gamma_H$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_H & \xleftarrow{\mu_{HK}} & \Gamma_K \\ \uparrow \phi_H & & \uparrow \phi_K \\ Q_H & \xleftarrow{\nu_{HK}} & Q_K \end{array}$$

esto es, $\phi_H \nu_{HK} = \mu_{HK} \phi_K$.

Nótese que si $\sigma \in \Gamma_K$, existe un único $\tilde{a}K \in \tilde{H}/K$ tal que $\sigma = L_{\tilde{a}K}$. De la conmutatividad del diagrama se deduce que para todo H, K con $H \leq K$:

$$\begin{aligned} \mu_{HK}(\sigma) &= \mu_{HK}(L_{\tilde{a}K}) \\ &= \phi_H \nu_{HK} \phi_K^{-1}(L_{\tilde{a}K}) \\ &= L_{\tilde{a}H}. \end{aligned}$$

Por lo que $\mu_{HK} : \Gamma_K \longrightarrow \Gamma_H$, $L_{\tilde{a}K} \longmapsto L_{\tilde{a}H}$.

Para $H \leq K \leq J$ se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma_J & \\ \mu_{KJ} \swarrow & & \searrow \mu_{HJ} \\ \Gamma_K & \xrightarrow{\mu_{HK}} & \Gamma_H \end{array}$$

Así, $\{\Gamma_H, \mu_{HK}\}_{H \in \mathcal{S}}$ es un sistema proyectivo. Escribimos $\hat{\Gamma} = \varprojlim \{\Gamma_H, \mu_{HK}\}_{H \in \mathcal{S}}$.

Denotando por $C_\Gamma = \prod_{H \in \mathcal{S}} \Gamma_H$ se tiene que $\widehat{\Gamma} = \{c \in C_\Gamma \mid \mu_{HK} \pi_K(c) = \pi_H(c)\}$, donde π_H es la proyección $C_\Gamma \rightarrow \Gamma_H$, y $\mu_H = \pi_H|_{\widehat{\Gamma}}$.

Análoga a la Proposición 3.1 tenemos la siguiente proposición:

Proposición 3.4. *Los conjuntos $\mu_H^{-1}(W_H)$ con $H \in \mathcal{S}$ y W_H abierto de Γ_H forman una base para la topología de $\widehat{\Gamma}$.*

En el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longleftarrow & \Gamma_H & \xleftarrow{\mu_{HK}} & \Gamma_K & \longleftarrow & \dots, \\ & & \uparrow \phi_H & & \uparrow \phi_K & & \\ \dots & \longleftarrow & Q_H & \xleftarrow{\nu_{HK}} & Q_K & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

las aplicaciones ϕ_K son isomorfismos, estos inducen un isomorfismo de límites proyectivos $\phi : \widehat{H} \rightarrow \widehat{\Gamma}$. Del hecho que los límites $\widehat{H}$ y $\widehat{\Gamma}$ sean isomorfos $\widehat{\Gamma}$ cumple las mismas propiedades demostradas anteriormente para $\widehat{H}$.

4 El lazo solenoidal universal

En esta sección haremos la construcción de los dos objetos importantes de este trabajo: el lazo solenoidal universal y el grupo multiplicativo solenoidal. Cabe recalcar que a pesar de no tener asociatividad en general éstas construcciones son posibles por el hecho que $\widetilde{H}$ es un subgrupo central discreto de $\widetilde{L}$. Además, la relación entre los grupos multiplicativos de cada lazo subcubriente de L y los grupos subcubrientes de $G = L \text{Mult} L$ nos permite deducir la relación entre los dos objetos universales construidos.

El lazo solenoidal universal $\mathcal{L}$

Sean H y K en $\mathcal{S}$ tal que $H \leq K$. Como H y K son subgrupos centrales discretos de $\widetilde{H}$, $\widetilde{L}/H$ y $\widetilde{L}/K$ son lazos cubrientes para L . Definimos la aplicación

$p_{HK} : \tilde{L}/K \rightarrow \tilde{L}/H$ tal que el siguiente diagrama conmuta (existe y es única por la propiedad de levantamiento de funciones).

$$\begin{array}{ccc} \tilde{L}/K & \xrightarrow{p_{HK}} & \tilde{L}/H \\ & \searrow p_K \quad \swarrow p_H & \\ & L & \end{array}$$

es decir $p_K = p_H \circ p_{HK}$. Por la unicidad de p_{HK} se deduce que $p_{HK}(\tilde{x}K) = \tilde{x}H$, para todo $\tilde{x}K \in \tilde{L}/K$.

Para $H \leq K \leq J$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{L}/J & \\ & \swarrow p_{KJ} \quad \searrow p_{HJ} & \\ \tilde{L}/K & \xrightarrow{p_{HK}} & \tilde{L}/H \end{array}$$

En efecto, los homomorfismos p_{HJ} , p_{HK} , p_{KJ} satisfacen por definición

$$p_J = p_H \circ p_{HJ} \quad (1)$$

$$p_K = p_H \circ p_{HK} \quad (2)$$

$$p_J = p_K \circ p_{KJ}. \quad (3)$$

Sustituyendo (2) en (3): $p_J = (p_H \circ p_{HK}) \circ p_{KJ} = p_H \circ (p_{HK} \circ p_{KJ})$, comparando este último resultado con (1) y por la unicidad de p_{HJ} se deduce que $p_{HJ} = p_{HK} \circ p_{KJ}$.

Por tanto, $\{\tilde{L}/H, p_{HK}\}_{H \in \mathcal{S}}$ es un sistema proyectivo. Ahora, sea $C = \prod_{H \in \mathcal{S}} \tilde{L}/H$.

Definición 4.1. Definimos el lazo solenoidal como

$$\mathcal{L} = \lim_{\leftarrow} \{\tilde{L}/H, p_{HK}\}_{H \in \mathcal{S}} := \{c \in C \mid p_{HK}\pi_K(c) = \pi_H(c) \text{ para todo } H \leq K\},$$

donde π_H es la proyección $C \rightarrow \tilde{L}/H$.

La topología en C es la topología producto, sus abiertos son uniones de elementos de la forma

$$\pi_{H_{i_1}}^{-1}(U_{H_{i_1}}) \cap \pi_{H_{i_2}}^{-1}(U_{H_{i_2}}) \cap \cdots \cap \pi_{H_{i_n}}^{-1}(U_{H_{i_n}}),$$

con $H_{i_j} \in \mathcal{S}$. La topología de $\mathcal{L}$ es la topología de subespacio. Para cada $H \in \mathcal{S}$ denotamos por $\rho_H : \mathcal{L} \rightarrow \tilde{L}/H$ a la proyección canónica.

Proposición 4.2. Los conjuntos $\rho_H^{-1}(U_H)$, con U_H abierto de $\tilde{L}/H$, forman una subbase para la topología de $\mathcal{L}$.

Demostración. Sea $(x_H H)_{H \in \mathcal{S}} \in W$, debemos encontrar un abierto U_K de $\tilde{L}/K$ tal que $(x_H H)_{H \in \mathcal{S}} \in \rho_K^{-1}(U_K)$ y $\rho_K^{-1}(U_K) \subset W$.

Sea m tal que $H_m \geq H_{i_1}, H_{i_2}, \dots, H_{i_n}$. Dado que las aplicaciones $p_{H_{i_j}H_m}$ son continuas, $p_{H_{i_j}H_m}^{-1}(U_{H_{i_j}})$ es abierto de $\tilde{L}/H_m$. Además, $x_{H_m}H_m \in p_{H_{i_j}H_m}^{-1}(U_{H_{i_j}})$ ya que

$$\begin{aligned} p_{H_{i_j}H_m}(x_{H_m}H_m) &= p_{H_{i_j}H_m}\pi_{H_m}((x_H H)) \\ &= \pi_{H_{i_j}}((x_H H)) \in U_{H_{i_j}} \\ &= x_{H_{i_j}}H_{i_j} \end{aligned}$$

para $j = 1, \dots, n$.

Definimos $U := \bigcap_{j=1}^n p_{H_{i_j}H_m}^{-1}(U_{H_{i_j}})$, U contiene a $x_{H_m}H_m$ por lo que $\rho_{H_m}^{-1}(U)$ es una vecindad abierta de $(x_H H)_{H \in \mathcal{S}}$ en $\mathcal{L}$.

Si $(y_H H)_{H \in \mathcal{S}} \in \rho_{H_m}^{-1}(U)$ entonces $y_{H_m}H_m \in U$, por lo que $y_{H_{i_r}}H_{i_r} = p_{H_{i_r}H_m}(y_{H_m}H_m)$ para $r = 1, \dots, n$. Así, $\rho_{H_m}^{-1}(U) \subset W$. $\square$

Teorema 4.3. $\mathcal{L}$ es un lazo topológico.

Demostración. Sean $(x_H H), (y_H H) \in \mathcal{L}$. Definimos la operación en $\mathcal{L}$ componente a componente, esto es, $(x_H H) * (y_H H) = (x_H y_H H)$. $\mathcal{L}$ es cerrado bajo esta operación ya que:

$$\begin{aligned}
 p_{HK}\pi_K((x_H y_H H)) &= p_{HK}(x_K y_K K) \\
 &= p_{HK}(x_K K y_K K) \\
 &= p_{HK}(x_K K) p_{HK}(y_K K) \\
 &= x_H H y_H H \\
 &= x_H y_H H \\
 &= \pi_H((x_H y_H H))
 \end{aligned}$$

Ahora, mostraremos que $m : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$, $((x_H H), (y_H H)) \longmapsto (x_H y_H H)$ es continua.

Sea $\rho_H^{-1}(U_H)$ un abierto básico de $\mathcal{L}$ con U_H abierto de $\tilde{L}/H$. Desde que $\tilde{L}/H$ es un lazo topológico existen abiertos $\{V_H^\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\{W_H^\alpha\}_{\alpha \in A}$ tales que

$$m_H^{-1}(U_H) = \bigcup V_H^\alpha \times W_H^\alpha,$$

donde m_H es la multiplicación continua del lazo $\tilde{L}/H$, $m_H : \tilde{L}/H \times \tilde{L}/H \longrightarrow \tilde{L}/H$. Ahora, definimos

$$\begin{aligned}
 V^\alpha &= \rho_H^{-1}(V_H^\alpha), \\
 W^\alpha &= \rho_H^{-1}(W_H^\alpha).
 \end{aligned}$$

Luego, $m^{-1}(\rho_H^{-1}(U_H)) = \bigcup V^\alpha \times W^\alpha$. En efecto, sea $((x_H H), (y_H H)) \in \bigcup V^\alpha \times W^\alpha$, por lo que $((x_H H), (y_H H)) \in V^\alpha \times W^\alpha$, para algún $\alpha \in A$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \rho_H(m((x_H H), (y_H H))) &= m_H(\rho_H((x_H H)), \rho_H((y_H H))) \\
 &= m_H(x_H H, y_H H) \in U_H
 \end{aligned}$$

Por tanto, la operación m es continua. De manera similar, las operaciones $\diagup : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ y $\diagdown : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ son continuas. $\square$

Sea $i : \tilde{L} \rightarrow C$, $\tilde{x} \mapsto (\tilde{x}H)_{H \in \mathcal{S}}$ inducida por la proyección $\tilde{L} \rightarrow \tilde{L}/H$ en cada componente. Se tiene que $i(\tilde{L}) \subset \mathcal{L}$, en efecto, para $\tilde{x} \in \tilde{L}$ se tiene

$$\begin{aligned} p_{HK}\pi_k((\tilde{x}H)_{H \in \mathcal{S}}) &= p_{HK}(\tilde{x}K) \\ &= \tilde{x}H \\ &= \pi_H((\tilde{x}H)_{H \in \mathcal{S}}) \end{aligned}$$

Denotamos $\tilde{i} : \tilde{L} \rightarrow \mathcal{L}$, la aplicación inducida por i . El homomorfismo $\tilde{i}$ es continua desde que la composición $\rho_H \circ \tilde{i}$ es una proyección, y por tanto continua, y ρ_H es también continua.

Verifiquemos que $\tilde{i}$ es inyectiva. Si $\tilde{x} \in \ker \tilde{i}$ entonces $\tilde{x} \in H$ para todo $H \in \mathcal{S}$. Por lo que $\tilde{x} \in \bigcap_{H \in \mathcal{S}} H = \{\tilde{e}\}$. Por lo tanto $\ker \tilde{i} = \{\tilde{e}\}$.

Finalmente, si $H \in \mathcal{S}$ entonces $\rho_H(\tilde{i}(\tilde{L})) = \tilde{L}/H$, y por lo tanto para cualquier abierto U_H de $\tilde{L}/H$

$$\rho_H(\tilde{i}(\tilde{L})) \cap U_H \neq \emptyset.$$

Por lo tanto $\tilde{i}(\tilde{L}) \cap \rho_H^{-1}(U_H) \neq \emptyset$. Se ha probado que:

Proposición 4.4. $\tilde{i}(\tilde{L})$ es densa en $\mathcal{L}$.

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar el capítulo.

Bibliografía

- [1] Hofmann, K.H. *Topologische Loops*. Math. Zeitschr Bd. 70 , (1958), 13–37.
- [2] Napier, T., Ramachandran, M. *An Introduction to Riemann Surfaces*. Birkhauser (2002).

- [3] Sabinin, L. *Smooth quasigroups and loops: forty - five of incredible growth* . Comment. Math (2) **41** (2000), 377–400.
- [4] Wilson, J. *Profinite Groups*. London Mathematical Society (1998).

Facultad de Ciencias Naturales y Matemática , UES
Final Avenida "Mártires Estudiantes del 30 de julio"
San Salvador, El Salvador

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

ingrid.martinez@ues.edu.sv
dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx

Índice de autores

Aguilar Romero, Felipe de Jesús, 99

Avella Alaminos, Diana, 5

Bravo García, Yolanda Elinor, 31

Briones de Gante, Maricela, 128

Cuaya Simbro, Diana, 99

Domínguez Málaga, Daniel, 168

Dávila Pintle, José Antonio, 31

Guillén Galván, Carlos, 57

Herrera Carrasco, David, 99, 128, 149, 168,
192

Leonel Gómez, Rocío, 5

López Andrade, Carlos Alberto, 57

Macías Romero, Fernando, 99, 128, 149, 168,
192

Martínez Barahona, Ingrid Carolina, 192

Mendoza Gómez, Octavio, 31

Mendoza Torres, Gustavo, 31

Navarro Flores, Sonia, 57

Ortega Becerril, José Alberto, 149

Reynoso Lara, Edmundo, 31

Matemáticas y sus aplicaciones 29

Fernando Macías Romero, David Herrera Carrasco e Ingrid Carolina
Martínez Barahona

25 de septiembre de 2026

pdf

6 MB

Matemáticas y sus aplicaciones 29

FERNANDO MACIAS ROMERO

DAVID HERRERA CARRASCO

INGRID CAROLINA MARTINEZ BARAHONA

editores

El libro Matemáticas y sus aplicaciones 29 es una obra científica que compila artículos de investigación estrictamente arbitrados.

El libro se estructura en tres áreas temáticas principales: Álgebra, donde se expone el teorema fundamental de los grupos abelianos finitamente generados; Matemática Aplicada y Teoría de Control, que aborda el uso de la integral de Lebesgue en algoritmos difusos y el diseño de códigos de ADN mediante teoría de grafos; y Topología, la sección más extensa, que profundiza en la teoría de continuos, hiperespacios, abanicos suaves, funciones especiales y lazos solenoidales.

El propósito principal de la obra es difundir los avances teóricos y aplicados generados por la comunidad matemática.



BUAP



Dirección
General de
Publicaciones

