

FERNANDO MACÍAS ROMERO
DAVID HERRERA CARRASCO
INGRID CAROLINA MARTÍNEZ BARAHONA
(editores)

Matemáticas y sus aplicaciones 28



MANUALES Y TEXTOS
ciencias exactas

Matemáticas y sus aplicaciones 28

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Ingrid Carolina Martínez Barahona
Editores

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

RECTORA: MARÍA LILIA CEDILLO RAMÍREZ · SECRETARIO GENERAL:
DANIÁN HERNÁNDEZ MÉNDEZ · VICERRECTOR DE EXTENSIÓN Y DI-
FUSIÓN DE LA CULTURA: ROSALINDA MERINO CALDERÓN · DIRECTOR
GENERAL DE PUBLICACIONES: MARY KRISS PARRA GÓRRIZ

PRIMERA EDICIÓN: 2026

ISBN: 978-968-9744-83-2

D.R. © BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
4 SUR 104, CENTRO HISTÓRICO, PUEBLA, PUE. CP. 72000
TELÉFONO: 2222295500

WWW.BUAP.MX

DIRECCIÓN GENERAL DE PUBLICACIONES
2 NORTE 104, CENTRO HISTÓRICO, PUEBLA, PUE., CP.72000
Tels.: 2222295500
LIBROS.DGP@CORREO.BUAP.MX | WWW.PUBLICACIONES.BUAP.MX

DISEÑO DE PORTADA: DANIEL DOMÍNGUEZ MÁLAGA

HECHO EN MÉXICO

MADE IN MEXICO

Matemáticas y sus aplicaciones 28

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de
investigación presentados en la serie
International Conference on Mathematics and its Applications
(CIMA), FCFM, BUAP.

Editores

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Ingrid Carolina Martínez Barahona

Comité científico internacional

Ermínia de Lourdes Campello Fanti (UNESP, BRA), Félix Capulín Pérez (UAEMEX),
Florencio Corona Vázquez (UNACH), Antonio Díaz Ramos (UMA, ESP), Sina Greenwood
(UA,NZ), Gerardo Hernández Valdez (UANL), Judy Kennedy (LU, USA), Christian Lehn
(TUC, DE), Rocío Leonel Gómez (UNAM), Fernando Macías Romero (BUAP), Edgar
Martínez Moro (UVA, ESP), Eiichi Matsuhashi (SHIMADAI, JP), Daria Michalik (UKSW,
PL), Fernando Orozco Zitli (UAEMEX), Ambrosio Ortíz Ramírez (IPN), José Gregorio
Rodríguez Nieto (UNC, CO), Javier Sánchez Martínez (UNACH), Jesús Fernando Tenorio
Arvide (UTM, Oax-MEX), Nomura Yamato (SHIMADAI, JP).

Contenido

Presentación	1
---------------------	---

Teoría de Juegos

Capítulo 1. Teoría de juegos conductuales	5
<i>Ángel Yahel López Martínez, Iván Martínez Ruíz</i>	

1	Introducción	5
2	Teoría de juegos conductuales	8
3	Simulación del Comportamiento Humano	11
4	Un juego con participantes artificiales	14
5	Anexo	17

Capítulo 2. Una introducción a la teoría de juegos y sus aplicaciones	25
<i>Adriana González Quiroz, Reig Israel Ortega Gutiérrez, Hugo Adán Cruz Suárez</i>	

1	Introducción	25
2	Conceptos básicos	27
3	Juegos estáticos	29
4	Juegos dinámicos	36
5	El dilema del prisionero	39
6	Aplicación: Coca-Cola vs Pepsi	44
7	Conclusiones	49

Matemática Aplicada y Teoría de Control

Capítulo 3. Volumetric 3D Reconstruction of SARS-CoV-2 Spikes via an Integro-Differential Fourier Model and 2D-Legendre Phase Interpolation	55
--	----

Jesús Arriaga Hernández, Bolivia Cuevas Otahola, Miguel Ángel Juárez García, Julio César Clemente González, and José Jacobo Oliveros Oliveros

1	Introduction	55
2	Materials and Methods	57
3	Integro-Differential Fourier Model for Spikes Identification	58
4	Fourier-Legendre proposal for S protein image processing	74
5	Results and Discussion	78
6	Conclusions	84

Topología

Capítulo 4. La clase de los continuos enrejados es SF_n-cerrada	97
---	----

Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero

1	Introducción	97
2	Preliminares	99
3	Continuos enrejados	101
4	Las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$	103
5	La clase de los continuos enrejados es SF_n -cerrada . . .	108

Capítulo 5. En los hiperespacios cocientes $C_1^n(X)$ de un continuo X	119
---	-----

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Leonardo Ramírez Aparicio

1	Introducción	119
2	Definiciones y preliminares	121
3	Espacios cocientes	130
4	Unicoherencia, arco conexidad y conexidad local	132
5	Dimensión, gráficas finitas, variedades de Cantor y retracts absolutos	133

Capítulo 6. Modelos de hiperespacios	143
---	-----

Maricela Briones de Gante, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero y Ingrid Carolina Martínez Barahona

1	Preliminares	143
2	Hiperespacios	146
3	$C([0, 1])$	150
4	$C(S^1)$	152
5	C (Triodo simple)	154
6	C (Paleta)	154
7	$C(S^1$ con espiral)	156
8	$F_2([0, 1])$	158
9	$F_3([0, 1])$	159
10	$F_2(S^1)$	160

Capítulo 7. Sobre la conexidad por continuos en los hiperespacios $F_2(X) \setminus F_1(X)$ y $C_2(X) \setminus C(X)$ para continuos encadenables	163
--	-----

Gerardo Hernández Valdez, Jahir Alessandro Salas Reyna

1	Introducción	163
2	Notaciones y definiciones	164
3	Preliminares	166
4	Desconexión por continuos en $F_2(X) \setminus F(X)$	169
5	Conexión por continuos en $C_2(X) \setminus C(X)$	174

Capítulo 8. Sobre la unicidad del cono en las gráficas finitas	187
---	-----

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, David Rodríguez Hernández

1	Introducción	187
2	Preliminares	188
3	Cono de continuos	193
4	Unicidad del <i>Cono</i> en gráficas finitas	205

Índice de autores	213
--------------------------	-----

Presentación

Las «International Conferences on Mathematics and its Applications (CIMA)» han sido una tradición consolidada durante 21 años, celebrándose anualmente con gran éxito. En este evento, la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) ha colaborado activamente como organizadora, junto con sus estudiantes, para crear un espacio de intercambio académico y divulgación de conocimiento.

La participación de destacados matemáticos a nivel internacional ha sido una constante en estas conferencias, lo que ha permitido enriquecer el debate y la discusión en torno a temas relevantes en el campo de las matemáticas. La presente edición del libro que tienen en sus manos es un reflejo de este esfuerzo colectivo y representa un logro significativo en la difusión del conocimiento matemático.

La publicación de este libro es el resultado del trabajo arduo y la generosidad de muchos matemáticos que contribuyeron al Eleventh International Conference on Mathematics and its Applications (11CIMA, 2024). Este evento ha contado con la participación de destacadas figuras de diversas universidades, tanto nacionales como extranjeras, quienes han compartido sus investigaciones y experiencias en el desarrollo del 11CIMA y en la documentación escrita que se presenta en este libro.

Los capítulos de este libro están organizados en secciones temáticas, y cada uno de ellos ha pasado por un riguroso proceso de arbitraje. Queremos expresar nuestro más sincero agradecimiento a todos los árbitros por su amabilidad, dedicación y labor científica, que han sido fundamentales para garantizar la calidad de los contenidos.

Asimismo, deseamos agradecer profundamente a Felipe de Jesús Aguilar Romero y a Leonardo Ramírez Aparicio por su invaluable apoyo en la edición

de esta obra, así como a Kevin Águila Méndez por su asistencia técnica. Su contribución ha sido esencial para hacer posible esta publicación de la obra 28.

Esperamos que este libro sea de utilidad y consulta para la comunidad académica y para todos aquellos interesados en el campo de las matemáticas.

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores

Teoría de Juegos

Capítulo 1

Teoría de juegos conductuales

Ángel Yahel López Martínez, Iván Martínez Ruíz
FCFM, BUAP

Resumen

La teoría de juegos conductuales surge del estudio de las desviaciones sistemáticas en el comportamiento humano con respecto a la conducta racional u óptima prevista por la teoría clásica. El propósito de este capítulo es presentar las ideas principales de esta teoría y mostrar cómo puede emplearse en un experimento para comprobar la capacidad de la Inteligencia Artificial (IA) para simular el comportamiento estratégico humano.

1 Introducción

Teoría de juegos

La Teoría de juegos conductuales es una extensión de la Teoría de juegos, un marco matemático que analiza situaciones estratégicas en las que los participantes toman decisiones que influyen en los resultados de todos los involucrados.

La teoría clásica se desarrolla a partir del concepto de *homo economicus*, un agente hipotético que actúa de manera perfectamente racional y está motivado por el beneficio propio. Dentro de este enfoque se consideran los siguientes elementos:

- **Jugadores:** las entidades que toman decisiones.
- **Estrategias:** los cursos de acción disponibles para cada jugador.
- **Pagos:** los resultados obtenidos por cada jugador, determinados según la combinación de estrategias elegidas.

De esta forma, mediante modelos matemáticos, se busca identificar **decisiones óptimas**, considerando que las acciones de cada jugador afectan a los demás.

Sea un juego $G = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$, donde $N = \{1, \dots, n\}$ es el conjunto de jugadores; S_i es el conjunto de estrategias de i ; y $u_i : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ su función de utilidad. La estrategia del jugador i se denota como $s_i \in S_i$. Un perfil de estrategias se denota como $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, y s_{-i} es el perfil de estrategias de todos excepto i . La utilidad del jugador i al jugar s_i frente a s_{-i} es $u_i(s_i, s_{-i})$.

Definición 1.1 (Dominancia). *La estrategia s_i^* es una **estrategia dominante** si es estrictamente la mejor respuesta a cualquier estrategia factible que los demás puedan utilizar:*

Para toda s_{-i}

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}) \quad \text{para toda } s'_i \neq s_i^*.$$

*La estrategia s'_i es **estrictamente dominada** si existe $s''_i \in S_i$ tal que*

$$u_i(s''_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}) \quad \text{para toda } s_{-i}.$$

*La estrategia s'_i es **débilmente dominada** si existe $s''_i \in S_i$ tal que*

$$\begin{aligned} u_i(s''_i, s_{-i}) &\geq u_i(s'_i, s_{-i}) \quad \text{para toda } s_{-i}, \\ u_i(s''_i, s_{-i}) &> u_i(s'_i, s_{-i}) \quad \text{para al menos una } s_{-i}. \end{aligned}$$

Definición 1.2 (Equilibrio de Nash). *El perfil de **estrategias** $s^* = (s_i^*, s_{-i}^*)$ es un Equilibrio de Nash (EN) si la estrategia de cada jugador es la mejor respuesta a las estrategias de los demás. Es decir, ningún jugador tiene incentivos para desviarse si ningún otro jugador lo hace:*

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s'_i, s_{-i}^*) \quad \text{para toda } s'_i \in S_i.$$

Obsérvese que, si un perfil de estrategias es un equilibrio de dominancia iterada (estricta), entonces se trata de un EN. Esto no aplica a los equilibrios creados por la aplicación iterada de la dominancia débil.

Teorema 1.3 (Existencia de Equilibrio de Nash). *Sea*

$$G = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$$

un juego estratégico finito en forma normal.

Entonces el juego G posee al menos un equilibrio de Nash.

Comentario. El resultado anterior, demostrado por Nash (1950), garantiza la existencia de al menos un equilibrio cuando el conjunto de estrategias se extiende para permitir combinaciones probabilísticas de estrategias puras (estrategias mixtas). La demostración original emplea argumentos de punto fijo, ya sea mediante el teorema de Brouwer o, en una formulación más general, el teorema de Kakutani. En el presente trabajo, sin embargo, el análisis se restringe a estrategias puras, por lo que el teorema se cita únicamente como un resultado de existencia general, sin desarrollar su construcción ni utilizar estrategias mixtas.

Observación 1.4. *El teorema anterior garantiza la existencia matemática del equilibrio, pero no asegura que dicho equilibrio describa adecuadamente el comportamiento observado en experimentos reales, lo que motiva el desarrollo de la Teoría de juegos conductuales.*

Ejemplo 1.5 (Dilema del Prisionero). *Consideremos un juego estratégico de dos jugadores, denotados por 1 y 2. Cada jugador i tiene el conjunto de estrategias $S_i = \{C, D\}$, donde C representa **cooperar** y D representa **no cooperar**. La matriz de pagos en estrategias puras es:*

	$s_2 = C$	$s_2 = D$
$s_1 = C$	(7, 7)	(-3, 10)
$s_1 = D$	(10, -3)	(0, 0)

En cada celda, el primer valor corresponde a $u_1(s_1, s_2)$ y el segundo a $u_2(s_1, s_2)$.

Jugador 1:

$$\begin{aligned} u_1(D, C) &= 10 > 7 = u_1(C, C), \\ u_1(D, D) &= 0 > -3 = u_1(C, D). \end{aligned}$$

Por lo tanto, D es **estrictamente dominante** para el jugador 1.

Jugador 2: de manera similar, comparando pagos por **columna**:

$$\begin{aligned} u_2(C, D) &= -3 < 0 = u_2(D, D), \\ u_2(D, C) &= 10 > 7 = u_2(C, C). \end{aligned}$$

Por lo tanto, D es también estrictamente dominante para el jugador 2.

Dado que D es estrictamente dominante para ambos, el perfil

$$(s_1^*, s_2^*) = (D, D)$$

es un **equilibrio de Nash** en estrategias puras (Def. 1.2). Esta es la respuesta clásica. La Teoría de juegos conductuales estudia las desviaciones empíricas respecto a esta predicción.

Economía del Comportamiento

En experimentos con participantes reales, se ha observado que los resultados y las decisiones tomadas presentan desviaciones sistemáticas respecto a las predicciones de la teoría clásica, que asume elecciones completamente racionales.

Con este hallazgo surge la necesidad de ampliar el marco teórico para comprender tales desviaciones y construir modelos que representen de manera más adecuada el comportamiento observado en la práctica. La Economía del Comportamiento nace precisamente como una crítica a la visión tradicional de la Economía basada en agentes perfectamente racionales. Integra aportes de la psicología que explican conductas específicas de las personas e incorpora variables sociales, cognitivas y contextuales que influyen en el comportamiento colectivo.

2 Teoría de juegos conductuales

La Teoría de juegos conductuales surge en la intersección entre la Teoría de Juegos y la Economía del Comportamiento. Su objetivo es analizar cómo los individuos toman decisiones estratégicas en la práctica, incorporando sesgos cognitivos, preferencias sociales y limitaciones en la capacidad de razonamiento, que no están presentes en los modelos clásicos de racionalidad perfecta.

Entre los elementos centrales que caracterizan este enfoque se encuentran:

- **Racionalidad limitada:** los individuos poseen capacidades cognitivas y de cálculo finitas.
- **Factores sociales:** consideraciones de equidad, reciprocidad, cooperación y aversión a la desigualdad.

- **Sesgos sistemáticos:** patrones persistentes como la aversión a pérdidas, exceso de confianza y preferencia por recompensas inmediatas.

Estos elementos permiten explicar por qué, en numerosos experimentos, el comportamiento observado se desvía de las predicciones basadas en el Equilibrio de Nash. Los juegos como el Dilema del Prisionero ilustran que las decisiones humanas no se reducen a la maximización estricta del beneficio individual, sino que reflejan normas sociales, juicios y expectativas sobre el comportamiento de otros. En este sentido, la Teoría de juegos conductuales no reemplaza a la teoría clásica, sino que la complementa al ofrecer un marco más realista para el análisis empírico.

Metodología en la Teoría de juegos conductuales

La Teoría de juegos conductuales es inherentemente empírica y requiere validación experimental constante. Como señala Camerer, parafraseando una célebre idea atribuida a Sherlock Holmes, *“así como no se pueden hacer ladrillos sin arcilla, no se pueden realizar estudios sin datos”* [1]. En consecuencia, la metodología típica en esta disciplina sigue una estructura bien definida, que ha sido adaptada recientemente para el estudio de sistemas de inteligencia artificial en contextos estratégicos.

Diseño del experimento

El punto de partida suele ser un juego clásico de la Teoría de Juegos —como el Dilema del Prisionero, el Juego del Ultimátum o el Juego del Dictador— o bien una variación diseñada para capturar aspectos específicos del comportamiento humano. El diseño experimental debe ser claro y comprensible para los participantes, y suficientemente controlado para aislar variables relevantes, tales como los incentivos, el número de jugadores, la secuencia de interacción y las condiciones de información.

En estudios recientes que incorporan modelos de lenguaje grande como participantes artificiales, el diseño experimental se inspira en la lógica del Test de Turing. En lugar de evaluar si una máquina puede mantener una conversación indistinguible de la humana, se examina si su comportamiento estratégico en juegos conductuales puede distinguirse estadísticamente del de sujetos humanos. Para ello, los agentes artificiales son expuestos a las mismas

instrucciones y roles que los participantes humanos, y se les solicita que elijan acciones dentro de los mismos marcos de decisión.

Este enfoque permite evaluar no solo decisiones puntuales, sino también la sensibilidad de los agentes artificiales al contexto, al encuadre del problema y, en juegos repetidos, a la experiencia previa. No obstante, la complejidad del diseño debe ajustarse al objetivo del estudio y al nivel de análisis pretendido.

En particular, para la implementación del experimento se utilizó la biblioteca `openai` de OpenAI para Python. Dada la naturaleza exploratoria del estudio y con el fin de optimizar el uso de recursos computacionales, se optó por emplear el modelo *GPT-4o mini*, descrito por sus desarrolladores como un modelo de menor tamaño y costo, diseñado para hacer más accesible el uso de inteligencia artificial avanzada.

A pesar de su tamaño reducido, GPT-4o mini presenta un desempeño competitivo en tareas de razonamiento, especialmente en aquellas que involucran procesamiento de texto y visión. En particular, alcanza una puntuación del 82.0 % en la evaluación MMLU, una evaluación comparativa de razonamiento e inteligencia textual, superando a otros modelos compactos como Gemini Flash (77.9 %) y Claude Haiku (73.8 %). Estas características, junto con su eficiencia computacional, motivaron su selección como el modelo más adecuado para un experimento de este tipo, en el que se prioriza la comparación de patrones de decisión sobre la maximización del rendimiento del modelo.

Recolección de datos

La recolección de datos en Teoría de juegos conductuales puede realizarse tanto en entornos de laboratorio —frecuentemente con estudiantes universitarios— como en contextos más amplios o plataformas digitales. En el caso de experimentos con inteligencia artificial, los datos se obtienen a partir de múltiples ejecuciones del mismo modelo bajo condiciones idénticas, lo que permite construir distribuciones de comportamiento para un mismo agente artificial.

Es importante señalar que, mientras que la variabilidad en los datos humanos suele reflejar diferencias entre individuos, en el caso de la IA, la variabilidad se genera dentro del mismo sistema, debido a mecanismos estocásticos o a la sensibilidad a pequeñas variaciones en el contexto o en el muestreo de respuestas.

Para el experimento en particular, se trabajó con los datos de Hitoshi Yamamoto y Akira Goto [6], quienes, a través de una plataforma digital, encuestaron a un grupo de 396 personas a las que se les proporcionó un incentivo real según su desempeño en una repetición de 20 rondas de un juego del Dilema del Prisionero.

Para los datos de la simulación nos basamos en el diseño de Nunzio Lorè y Babak Heydari[4]. Se utilizó un programa propio, incluido en el anexo, y también se aplicó un juego de repetición de 20 rondas, donde el número de participantes estuvo limitado a 50 participantes artificiales debido al costo computacional.

Análisis de resultados

El análisis de resultados consiste en comparar las elecciones observadas con las predicciones de la teoría clásica y con modelos conductuales alternativos. En la literatura reciente, este análisis suele apoyarse en una amplia gama de herramientas estadísticas y econométricas, que incluyen comparaciones de distribuciones completas, análisis de preferencias reveladas, medidas de arrepentimiento, eficiencia de Pareto y modelos de elección discreta.

Sin embargo, el nivel de sofisticación del análisis debe ser coherente con el diseño experimental y el tamaño de la muestra. En el presente trabajo, el análisis se restringe deliberadamente a la comparación de tasas agregadas de cooperación entre humanos e inteligencia artificial, utilizando la prueba exacta de Fisher. Esta elección permite evaluar de manera clara y robusta si las decisiones observadas difieren de forma estadísticamente significativa, sin introducir modelos más complejos que excedan el alcance exploratorio del estudio.

3 Simulación del Comportamiento Humano

Los modelos de lenguaje de gran escala (LLM), como GPT (OpenAI) y LLaMa-2 (Meta), han recibido una atención considerable debido a su capacidad para realizar tareas que van mucho más allá de la simple conversación, incluyendo el razonamiento matemático, la generación de texto complejo y la resolución de problemas estructurados. Estos avances han motivado la discusión sobre si dichos modelos podrían constituir un paso intermedio hacia

la Inteligencia Artificial General (IAG). No obstante, también se ha señalado que estos sistemas presentan limitaciones importantes, particularmente en tareas que requieren una comprensión explícita de estructuras complejas, como redes o dinámicas estratégicas prolongadas.

En el ámbito de las ciencias sociales y del comportamiento, la investigación sobre LLMs se ha desarrollado principalmente en dos direcciones: por un lado, estudios que exploran si estos modelos exhiben capacidades cognitivas análogas a las humanas, como el razonamiento o la teoría de la mente; y por otro, trabajos que evalúan su desempeño comparándolo con el comportamiento humano en tareas específicas. En economía y teoría de juegos, ambos enfoques convergen, ya que el interés no solo radica en el resultado final de las decisiones, sino también en los patrones de comportamiento observables en dilemas sociales.

En este contexto, se explora el uso de *participantes artificiales* como una herramienta experimental para simular entornos estratégicos y comparar sus decisiones con las de sujetos humanos. El objetivo no es atribuir capacidades cognitivas humanas a la inteligencia artificial, sino evaluar empíricamente si sus decisiones observables se asemejan, en un sentido estadístico, a las decisiones humanas dentro de un entorno controlado.

Según Flahavan [2], *la inteligencia artificial está llamada a transformar la forma en que estudiamos el comportamiento humano.*

Definición operacional de simulación del comportamiento humano

Dado el carácter exploratorio y universitario de este experimento, adoptamos una definición operacional de *simulación del comportamiento humano* basada en la comparación estadística de decisiones observables. En particular, nos centramos en la tasa agregada de cooperación en el juego del dilema del prisionero modificado.

Para ello, se construye una tabla de contingencia 2×2 a partir de las frecuencias acumuladas de decisiones de cooperación y no cooperación para humanos y agentes artificiales:

	Cooperó	No cooperó
Humanos	n_{HC}	n_{HN}
IA	n_{IC}	n_{IN}

La hipótesis nula H_0 establece que el tipo de agente (humano o artificial) y la decisión tomada (cooperar o no cooperar) son independientes, es decir, que ambos grupos presentan la misma probabilidad de cooperación. Utilizando la prueba exacta de Fisher, se calcula la probabilidad de observar una tabla al menos tan extrema como la obtenida bajo la hipótesis nula.

Definimos que un conjunto de agentes artificiales *simula* el comportamiento humano en este experimento si no se rechaza la hipótesis nula al nivel de significancia α :

$$p\text{-valor} \geq \alpha.$$

Cuando $p\text{-valor} < \alpha$, concluimos que las tasas de cooperación difieren de manera estadísticamente significativa y, por lo tanto, que los agentes artificiales no reproducen el patrón agregado de comportamiento humano observado.

Justificación de la prueba exacta de Fisher

La elección de la prueba exacta de Fisher se justifica por varias características del diseño experimental. En primer lugar, el número de agentes artificiales es reducido ($n = 50$), y algunas frecuencias observadas pueden ser pequeñas, lo que invalida las aproximaciones asintóticas en las que se basa la prueba χ^2 . La prueba de Fisher, en cambio, calcula probabilidades exactas y no requiere supuestos de normalidad ni tamaños muestrales grandes.

En segundo lugar, la variable analizada es categórica binaria y el objetivo es contrastar la independencia entre dos variables cualitativas: tipo de agente y acción elegida. La prueba exacta de Fisher es particularmente adecuada para este tipo de comparaciones.

Finalmente, dado el alcance exploratorio del trabajo, el uso de una prueba estadística conservadora y ampliamente aceptada permite obtener conclusiones claras y robustas sin introducir modelos más complejos que excedan el propósito del estudio.

Teoría de la mente y su exclusión del experimento

La teoría de la mente (Theory of Mind, ToM) se refiere a la capacidad de atribuir estados mentales —como creencias, intenciones o deseos— a otros agentes y de utilizar dichas atribuciones para anticipar su comportamiento. En humanos, esta capacidad desempeña un papel fundamental en la interacción social y en la toma de decisiones estratégicas.

En inteligencia artificial, la ToM no se interpreta como la posesión real de estados mentales, sino como una capacidad funcional para generar respuestas que aparentan tener en cuenta las creencias o intenciones de otros agentes. Estudios recientes han investigado esta cuestión evaluando si modelos de lenguaje ajustan su comportamiento cuando se les proporciona información explícita sobre estados mentales, creencias falsas o conocimiento privado de otros jugadores.

No obstante, la evaluación de capacidades de teoría de la mente en sistemas de IA requiere diseños experimentales específicos, en los que se manipule de forma controlada la información sobre creencias e intenciones y se analice la respuesta del modelo ante dichos cambios. En el presente trabajo no se introducen este tipo de manipulaciones, ni se proporciona información explícita sobre los estados mentales de los oponentes.

Por esta razón, este experimento no pretende evaluar las capacidades de teoría de la mente en los agentes artificiales, aunque vale la pena mencionarlo. Las diferencias o similitudes observadas en las tasas de cooperación deben interpretarse exclusivamente como comparaciones estadísticas de decisiones observables en un entorno estratégico concreto y no como evidencia a favor o en contra de la presencia de teoría de la mente en los modelos utilizados.

4 Un juego con participantes artificiales

En un estudio de Hitoshi Yamamoto (Rissho University, Tokyo) y Akira Goto (Meiji University, Tokyo) se diseñó una variación del Dilema del Prisionero ajustada al comportamiento humano [6]:

	Cooperar	No cooperar	Retirarse
Cooperar	(7, 7)	(−3, 10)	(3, 3)
No cooperar	(10, −3)	(0, 0)	(3, 3)
Retirarse	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)

En el estudio original se jugaron 20 rondas con 394 participantes humanos, alternando el orden de movimiento y notificando al oponente tras cada decisión; al finalizar la decisión del segundo jugador, se notificaban las ganancias de la ronda [6].

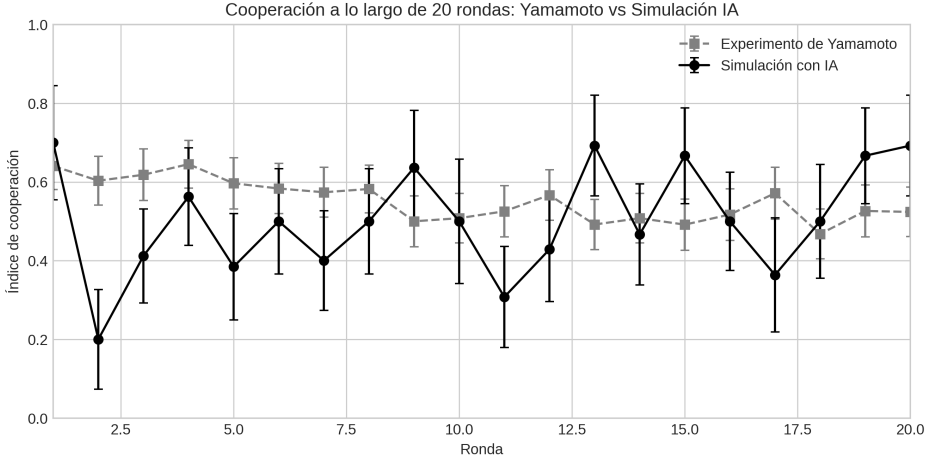


Figura 1: Proporción promedio de cooperación en cada ronda del juego del dilema del prisionero, comparando los datos del experimento de Yamamoto (2014) con los resultados obtenidos en la simulación con IA.

Inspirados por [6] y una guía experimental de Loré [4], replicamos el protocolo con **participantes artificiales** (50 agentes, por costo computacional) en el Dilema del Prisionero modificado.

Resultados

En cada ronda r , la proporción de cooperación se define como

$$p_r = \frac{n_{\text{coop},r}}{n_r},$$

donde $n_{\text{coop},r}$ es el número de observaciones que eligieron cooperación y n_r es el total de observaciones válidas en la ronda r .

Las barras de error representan el *error estándar* (SE) de la proporción de cooperación por ronda, bajo el supuesto binomial:

$$\text{Var}(p_r) = \frac{p_r(1 - p_r)}{n_r}, \quad SE_r = \sqrt{\frac{p_r(1 - p_r)}{n_r}}.$$

La Figura 1 muestra que el grupo humano mantiene niveles de cooperación relativamente estables entre rondas, mientras que la simulación con IA exhibe una mayor variabilidad.

Para comparar las tasas totales de cooperación entre humanos e inteligencia artificial, se aplicó la *prueba exacta de Fisher* sobre las frecuencias acumuladas de las 20 rondas. La tabla 2×2 correspondiente fue:

	Cooperó	No cooperó
Humanos	668	892
IA	169	321

El resultado arrojó un *odds ratio*(razón de probabilidades) de 1.422 y un valor $p = 0.00108$ (dos colas). Dado que $p < 0.05$, se rechaza la hipótesis nula de independencia entre las variables, concluyendo que las tasas globales de cooperación difieren significativamente entre ambos grupos. En promedio, los participantes humanos presentaron una probabilidad de cooperación 1.4 veces mayor que los agentes artificiales.

Conclusión

En este capítulo se presenta una introducción a la Teoría de juegos conductuales y se muestra cómo puede emplearse como marco experimental para evaluar la capacidad de los sistemas de inteligencia artificial para reproducir patrones observables de comportamiento humano en contextos estratégicos. A partir de un juego clásico —el Dilema del Prisionero— y de datos experimentales previamente reportados en la literatura, se diseñó y ejecutó una simulación con participantes artificiales, basada en modelos de lenguaje de gran escala.

Adoptando una definición operacional y deliberadamente conservadora de simulación del comportamiento humano, el análisis se centró en la comparación estadística de decisiones observables, específicamente en las tasas agregadas de cooperación entre sujetos humanos y agentes artificiales. La utilización de la prueba exacta de Fisher permitió evaluar de manera robusta estas diferencias, sin recurrir a supuestos asintóticos ni a modelos estadísticos más complejos, lo cual resulta adecuado dado el carácter del estudio.

Los resultados obtenidos indican que, aunque los agentes de inteligencia artificial exhiben una mayor variabilidad ronda a ronda, sus patrones agregados de cooperación difieren de forma estadísticamente significativa de los observados en participantes humanos. Este hallazgo sugiere que, al menos

bajo el diseño experimental considerado, los modelos de lenguaje utilizados no reproducen completamente el comportamiento estratégico humano en términos agregados, aun cuando puedan generar respuestas plausibles a nivel individual.

Es importante subrayar que estas conclusiones no deben interpretarse como evidencia a favor o en contra de capacidades cognitivas más profundas, como la teoría de la mente, ni como una evaluación del progreso hacia la inteligencia artificial general. El experimento se limita explícitamente a la comparación de decisiones observables dentro de un entorno estratégico controlado.

Como líneas futuras de investigación, resulta natural considerar diseños experimentales más complejos, que incluyan aprendizaje a lo largo de repeticiones, interacciones estratégicas más prolongadas o estructuras de reciprocidad explícitas. Asimismo, el uso de distintos modelos de lenguaje y la incorporación de análisis estadísticos adicionales podrían contribuir a una comprensión más detallada del alcance y las limitaciones de los agentes artificiales como simuladores del comportamiento humano.

5 Anexo

```
1 import os
2 import json
3 import random
4 import time
5 from dataclasses import dataclass, field
6 from typing import List, Dict, Tuple
7
8 import pandas as pd
9
10 # =====
11 # CONFIGURACIÓN DE ENTORNO
12 # =====
13 os.environ["OPENAI_API_KEY"] = "#Aquí se coloca la KEY API
    ↪ proporcionada por OpenAI#"
14
15 # SDK OpenAI v1
```

```

16 # pip install openai
17 from openai import OpenAI
18
19 # =====
20 # CONFIGURACIÓN EXPERIMENTO
21 # =====
22 N_PLAYERS = 50
23 ROUNDS = 20
24 ACTIONS = ["Cooperar", "Traicionar", "Retirarse"]
25
26 # Modelo recomendado
27 OPENAI_MODEL = os.getenv("OPENAI_MODEL", "gpt-4o-mini")
28
29 # Matriz de pagos
30 PAYOFF = {
31     ("Cooperar", "Cooperar"): (7, 7),
32     ("Cooperar", "Traicionar"): (-3, 10),
33     ("Cooperar", "Retirarse"): (3, 3),
34     ("Traicionar", "Cooperar"): (10, 3),
35     ("Traicionar", "Traicionar"): (0, 0),
36     ("Traicionar", "Retirarse"): (3, 3),
37     ("Retirarse", "Cooperar"): (3, 3),
38     ("Retirarse", "Traicionar"): (3, 3),
39     ("Retirarse", "Retirarse"): (3, 3),
40 }
41
42 # =====
43 # ESTRUCTURAS DE DATOS
44 # =====
45 @dataclass
46 class PlayerState:
47     player_id: int
48     public_history: List[str] = field(default_factory=list)
49     strategy_note: str = ""
50     total_payoff: int = 0
51
52
53 @dataclass
54 class PairingResult:

```

```

55     round_idx: int
56     pair_idx: int
57     p1_id: int
58     p2_id: int
59     p1_action: str
60     p2_action: str
61     p1_payoff: int
62     p2_payoff: int
63
64
65     # =====
66     # UTILIDADES
67     # =====
68 def make_random_pairings(player_ids: List[int]) ->
    ↪ List[Tuple[int, int]]:
69     shuffled = player_ids[:]
70     random.shuffle(shuffled)
71     return [(shuffled[i], shuffled[i + 1]) for i in range(0,
    ↪ len(shuffled), 2)]
72
73
74 def compute_payoffs(a1: str, a2: str) -> Tuple[int, int]:
75     return PAYOFF[(a1, a2)]
76
77
78 def to_json(obj):
79     return json.dumps(obj, ensure_ascii=False)
80
81
82     # =====
83     # PROMPTING A LA IA
84     # =====
85 SYSTEM_MSG = """Eres un simulador de participantes humanos en un
    ↪ juego repetido del dilema del prisionero..."""
86
87 ROUND_INSTRUCTIONS = """Tarea de esta ronda:
88 - Para cada PAREJA, elige simultáneamente una acción para cada
    ↪ jugador...
89 """

```

```

90
91
92 def build_round_user_prompt(round_idx: int, pairings:
    ↪ List[Tuple[int, int]], players: Dict[int, PlayerState]) ->
    ↪ str:
93     payoff_nested = {
94         a1: {a2: [p1, p2] for (aa1, a2), (p1, p2) in
            ↪ PAYOFF.items() if aa1 == a1}
95         for a1 in ACTIONS
96     }
97
98     payload = {
99         "round_idx": round_idx,
100        "actions": ACTIONS,
101        "payoff_matrix": payoff_nested,
102        "players_public_summaries": [
103            {
104                "player_id": pid,
105                "public_history": players[pid].public_history,
106                "strategy_note_prev": players[pid].strategy_note,
107            }
108            for pid in sorted(players.keys())
109        ],
110        "pairings": [
111            {"pair_idx": i, "p1_id": p1, "p2_id": p2}
112            for i, (p1, p2) in enumerate(pairings)
113        ],
114        "instructions": ROUND_INSTRUCTIONS,
115    }
116
117    return to_json(payload)
118
119
120 def call_openai_for_round(client: OpenAI, user_prompt_json: str)
    ↪ -> dict:
121     resp = client.chat.completions.create(
122         model=OPENAI_MODEL,
123         temperature=1.0,
124         response_format={"type": "json_object"},

```

```

125         messages=[
126             {"role": "system", "content": SYSTEM_MSG},
127             {"role": "user", "content": user_prompt_json},
128         ],
129     )
130     return json.loads(resp.choices[0].message.content)
131
132
133     # =====
134     # SIMULACIÓN
135     # =====
136     def simulate():
137         if not os.getenv("OPENAI_API_KEY"):
138             raise RuntimeError("Falta OPENAI_API_KEY en el entorno.")
139
140         client = OpenAI()
141
142         players: Dict[int, PlayerState] = {i:
143             ↪ PlayerState(player_id=i) for i in range(N_PLAYERS)}
144         all_rows: List[PairingResult] = []
145         player_ids = list(players.keys())
146
147         for r in range(1, ROUNDS + 1):
148             pairings = make_random_pairings(player_ids)
149             user_prompt = build_round_user_prompt(r, pairings,
150             ↪ players)
151
152             for attempt in range(3):
153                 try:
154                     result = call_openai_for_round(client,
155                     ↪ user_prompt)
156                     break
157                 except Exception:
158                     if attempt == 2:
159                         raise
160                     time.sleep(1.0)
161
162             pairs = result["pairs"]
163             strategy_notes = result["strategy_notes"]

```

```

161
162     for entry in pairs:
163         p1_id = entry["p1_id"]
164         p2_id = entry["p2_id"]
165
166         p1_action = entry["p1_action"]
167         p2_action = entry["p2_action"]
168
169         if r == 1:
170             p1_action = random.choice(ACTIONS)
171             p2_action = random.choice(ACTIONS)
172
173         payoff1, payoff2 = compute_payoffs(p1_action,
174             ↪ p2_action)
175
176         all_rows.append(
177             PairingResult(
178                 round_idx=r,
179                 pair_idx=entry["pair_idx"],
180                 p1_id=p1_id,
181                 p2_id=p2_id,
182                 p1_action=p1_action,
183                 p2_action=p2_action,
184                 p1_payoff=payoff1,
185                 p2_payoff=payoff2,
186             )
187         )
188
189         players[p1_id].public_history.append(p1_action)
190         players[p2_id].public_history.append(p2_action)
191         players[p1_id].total_payoff += payoff1
192         players[p2_id].total_payoff += payoff2
193
194         notes_by_id = {x["player_id"]: x["strategy_note"][:200]
195             ↪ for x in strategy_notes}
196         for pid, note in notes_by_id.items():
197             players[pid].strategy_note = note
198
199     df_pairs = pd.DataFrame([vars(x) for x in all_rows])

```

```
198     df_players = pd.DataFrame(  
199         [  
200             {  
201                 "player_id": p.player_id,  
202                 "total_payoff": p.total_payoff,  
203                 "rounds_played": len(p.public_history),  
204                 "final_strategy_note": p.strategy_note,  
205             }  
206             for p in players.values()  
207         ]  
208     )  
209  
210     out_file = "resultados_dilema_prisionero.xlsx"  
211     with pd.ExcelWriter(out_file, engine="openpyxl") as writer:  
212         df_pairs.to_excel(writer, index=False,  
213             ↪ sheet_name="Emparejamientos_y_Resultados")  
214         df_players.to_excel(writer, index=False,  
215             ↪ sheet_name="Resumen_por_Jugador")  
216  
217     print(f"Archivo Excel generado: {out_file}")  
218  
219 if __name__ == "__main__":  
220     random.seed(1234)  
221     simulate()
```

Cuadro 1: Código utilizado para la simulación del experimento presentado.

Agradecimientos

Agradecemos encarecidamente al equipo de editores y árbitros por su labor. Este proyecto se realizó gracias al apoyo del proyecto VIEP 00192 *Teoría de Modelos y sus aplicaciones en topología, análisis y teoría de conjuntos*.

Referencias

- [1] Camerer, C. (2003) *Behavioral Game Theory: Experiments in Strategic Interaction*. Princeton University Press.
- [2] Flahavan, E. (2024). *BIT's roadmap for AI & BI: How AI is changing and improving the methodologies we use*. Behavioural Insights Team Blog. <https://www.bi.team/blogs/bits-roadmap-for-ai-bi/>.
- [3] John F. Nash. (1950) *Equilibrium points in n -person games*. Proceedings of the National Academy of Sciences 36.
- [4] Lorè, N., & Heydari, B. (2024). *Strategic behavior of large language models and the role of game structure versus contextual framing*. Scientific Reports, 14, 18490. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-69032-z>.
- [5] Q. Mei, Y. Xie, W. Yuan, & M.O. Jackson (2024). *A Turing test of whether AI chatbots are behaviorally similar to humans* Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 121 (9) e2313925121, <https://doi.org/10.1073/pnas.2313925121>.
- [6] Yamamoto, H., & Goto, A. (2024). *Behavioral strategies in simultaneous and alternating prisoner's dilemma games with/without voluntary participation*. Scientific Reports, 14, 21890. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-73353-4>.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

angel.lopezm@alumno.buap.mx
imartinez@fcfm.buap.mx

Capítulo 2

Una introducción a la teoría de juegos y sus aplicaciones

Adriana González Quiroz, Rei Israel Ortega Gutiérrez,
Hugo Adán Cruz Suárez
FCFM, BUAP

Resumen

El presente capítulo introduce los conceptos fundamentales de la teoría de juegos mediante el estudio de juegos estáticos y dinámicos, el equilibrio de Nash y la inducción hacia atrás. Asimismo, se analiza el dilema del prisionero en sus versiones clásica e iterada, y finalmente se presenta una aplicación relacionada con la competencia entre Coca-Cola y Pepsi para ejemplificar cómo la teoría de juegos puede utilizarse en problemas reales de interacción estratégica.

1 Introducción

En este capítulo se presenta una introducción a la teoría de juegos mediante el estudio de problemas de toma de decisiones, utilizando el equilibrio de Nash y la inducción hacia atrás como herramientas principales para analizar distintos tipos de interacción entre jugadores. Asimismo, se estudia la competencia histórica entre The Coca-Cola Company y PepsiCo como una aplicación de la teoría de juegos en contextos empresariales y de publicidad.

La teoría de juegos es un área de la matemática que utiliza modelos para estudiar estructuras formalizadas de incentivos, mejor conocidas como juegos, donde interactúan N individuos con el propósito de tomar decisiones y obtener el mayor beneficio posible. En estas situaciones, las decisiones de cada jugador afectan directamente los resultados de los demás participantes, permitiendo analizar cómo agentes racionales actúan estratégicamente en escenarios de competencia, cooperación o conflicto [1].

La formulación moderna de la teoría de juegos se consolidó en 1944, cuando el matemático John von Neumann y el economista Oskar Morgenstern publicaron la obra *Theory of Games and Economic Behavior* [3]. En este trabajo se establecieron las bases matemáticas para el estudio de problemas de decisión estratégica y comportamiento económico, convirtiéndose rápidamente en uno de los desarrollos científicos más influyentes del siglo XX. A partir de entonces, la teoría de juegos comenzó a extenderse desde la economía hacia otras áreas del conocimiento, permitiendo modelar situaciones de competencia, cooperación y conflicto en distintos contextos sociales y científicos. Posteriormente, en 1950, John Nash presentó su tesis doctoral titulada *Non-cooperative Games* [4], en la cual introdujo el concepto de equilibrio de Nash y demostró su existencia para una amplia clase de juegos [5, 6]. Estos resultados representaron uno de los avances más importantes de la teoría de juegos no cooperativa, generalizando además los estudios previos sobre oligopolios realizados por Augustin Cournot [7, 8].

La teoría de juegos ha encontrado aplicaciones en una gran variedad de áreas debido a su capacidad para modelar problemas de interacción estratégica. En economía se utiliza para estudiar mercados, competencia empresarial y negociación; en biología, para analizar procesos evolutivos y comportamiento animal; en ciencias políticas, para modelar conflictos, votaciones y relaciones internacionales; y en áreas como la inteligencia artificial y la informática, para desarrollar sistemas de decisión y aprendizaje estratégico [2]. Asimismo, su aplicación en problemas empresariales y de publicidad ha permitido comprender cómo distintas compañías diseñan estrategias para competir en mercados altamente dinámicos y competitivos.

El estudio de los juegos estáticos y dinámicos constituye una parte fundamental dentro de la teoría de juegos, debido a que estos modelos permiten comprender cómo distintos jugadores toman decisiones estratégicas en situaciones de competencia, cooperación o conflicto. Herramientas como el equilibrio de Nash y la inducción hacia atrás proporcionan métodos matemáticos para analizar racionalmente este tipo de problemas y determinar posibles resultados de equilibrio. Asimismo, el dilema del prisionero representa uno de los modelos más importantes de la teoría de juegos, ya que muestra cómo decisiones racionales individuales pueden conducir a resultados menos favorables para todos los participantes, incluso cuando existe una alternativa cooperativa más conveniente. Debido a ello, el estudio de estos modelos resulta especialmente interesante, pues permite comprender y analizar situa-

ciones reales relacionadas con economía, política, publicidad y competencia empresarial.

El presente capítulo inicia con una introducción a los conceptos básicos de la teoría de juegos y a los elementos fundamentales que intervienen en un juego. Posteriormente, se estudian los juegos estáticos y dinámicos, introduciendo herramientas como el equilibrio de Nash y la inducción hacia atrás para analizar distintos problemas de decisión. Más adelante, se presenta el dilema del prisionero como uno de los modelos más representativos de la teoría de juegos, estudiándolo tanto en su forma estática como iterada. Finalmente, se analiza la competencia histórica entre The Coca-Cola Company y Pepsi-Co como una aplicación de la teoría de juegos en contextos empresariales y de publicidad, mostrando cómo las decisiones relacionadas con campañas publicitarias, competencia de mercado y posicionamiento comercial pueden interpretarse mediante modelos matemáticos de interacción entre jugadores. Con ello, se busca ejemplificar la importancia y utilidad de la teoría de juegos en el análisis de problemas reales.

2 Conceptos básicos

En esta sección se introducen los conceptos fundamentales de la teoría de juegos que serán utilizados a lo largo del capítulo. En particular, se presentan las definiciones de juego, estrategia y pago, las cuales permiten describir formalmente distintos problemas de interacción estratégica entre jugadores.

Definición 2.1. *Un **juego** es una situación de decisión estratégica en la que participan varios jugadores, cada uno con un conjunto de estrategias disponibles, y donde el pago de cada jugador depende de la combinación de estrategias elegidas por todos los participantes. Las componentes a distinguir son las siguientes:*

1. *N jugadores;*
2. *un conjunto de estrategias para cada jugador;*
3. *un pago asociado a cada jugador.*

Definición 2.2. *Un **jugador** es cada uno de los individuos o participantes involucrados en un juego, los cuales son quienes deben tomar decisiones con el objetivo de obtener el mejor resultado posible de acuerdo con sus intereses.*

Definición 2.3. Una *estrategia* es una regla de decisión que describe la acción que un jugador elige en un momento determinado del juego.

Definición 2.4. Un *pago* describe cuantitativamente el resultado de cada jugador en términos de la cantidad que gana o pierde. Dicho resultado depende no solo de la estrategia adoptada por el propio jugador, sino también de las estrategias seleccionadas por los demás jugadores.

Dependiendo del contexto del juego, el pago puede interpretarse como una recompensa o como un costo. Cuando el pago representa una recompensa, los jugadores buscarán maximizarlo; en cambio, si representa un costo, el objetivo será minimizarlo.

A lo largo de este capítulo se trabajará principalmente con juegos de dos jugadores, debido a que este tipo de modelos representa uno de los enfoques más importantes y estudiados dentro de la teoría de juegos. De esta manera, cuando se haga referencia al jugador i , se entenderá que $i = 1, 2$. Además, por cuestiones de notación, el jugador 1 también podrá representarse como J_1 y el jugador 2 como J_2 .

Los juegos pueden clasificarse de distintas maneras dependiendo de la forma en que los jugadores interactúan, la información disponible y la relación entre los pagos obtenidos. A continuación, se presentan algunas de las clasificaciones más importantes dentro de la teoría de juegos.

- (a) **Estructura temporal:** Clasificación basada en la manera en que se desarrollan las decisiones a lo largo del juego.
 - *Juegos estáticos:* También conocidos como juegos de una sola etapa, son aquellos en los que los jugadores toman sus decisiones de manera simultánea y el resultado del juego se determina en una única interacción.
 - *Juegos dinámicos:* Son aquellos que se desarrollan a lo largo de múltiples etapas, donde las decisiones tomadas por los jugadores en un momento determinado pueden influir en las situaciones futuras del juego.
- (b) **Cooperación entre jugadores:** Clasificación según la posibilidad de establecer acuerdos entre los participantes.

- *Juegos cooperativos*: Los jugadores pueden realizar acuerdos o alianzas con el objetivo de obtener un beneficio común.
 - *Juegos no cooperativos*: Cada jugador toma sus decisiones de manera independiente buscando maximizar su propio beneficio.
- (c) **Relación entre los pagos**: Clasificación basada en la manera en que las ganancias o pérdidas de los jugadores se relacionan entre sí.
- *Juegos de suma cero*: La ganancia de un jugador representa exactamente la pérdida del otro jugador.
 - *Juegos de suma no cero*: La ganancia de un jugador no implica necesariamente la pérdida del otro, por lo que ambos pueden beneficiarse o perjudicarse simultáneamente.
- (d) **Información disponible**: Clasificación determinada por el nivel de información que poseen los jugadores durante el desarrollo del juego.
- *Juegos de información perfecta*: Los jugadores conocen todas las acciones realizadas previamente y el estado actual del juego.
 - *Juegos de información imperfecta*: Existe información relevante del juego que no es conocida completamente por todos los participantes.

3 Juegos estáticos

Como se mencionó anteriormente, los juegos estáticos constituyen uno de los modelos más importantes y utilizados dentro de la teoría de juegos debido a su capacidad para representar problemas de interacción estratégica en distintos contextos económicos, sociales y empresariales.

Definición 3.1. *Un juego estático es aquel en el que cada jugador realiza una única decisión sin tener conocimiento previo de las decisiones tomadas por los demás jugadores.*

En un juego estático, una *estrategia pura* es cada una de las posibles decisiones que puede tomar un jugador dentro del juego. Denotaremos por S al conjunto de todas las estrategias puras y por $S_i \subseteq S$ al conjunto de

		J_2			
J_1		Estrategia 1	Estrategia 2	$\cdots$	Estrategia m
	Estrategia 1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	$\cdots$	(a_{1m}, b_{1m})
	Estrategia 2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	$\cdots$	(a_{2m}, b_{2m})
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	Estrategia n	(a_{n1}, b_{n1})	(a_{n2}, b_{n2})	$\cdots$	(a_{nm}, b_{nm})

Cuadro 1: Matriz de juego de dos jugadores.

estrategias correspondientes al jugador i , con $i = 1, 2$. El resultado obtenido por cada jugador dependerá no solo de la estrategia elegida por él mismo, sino también de las estrategias seleccionadas por los demás jugadores del juego.

Una de las formas más comunes de representar un juego estático es mediante una **matriz de juego** o **matriz de pago**. En esta representación, las filas corresponden a las estrategias del jugador J_1 , mientras que las columnas representan las estrategias del jugador J_2 . Cada entrada de la matriz describe el pago que reciben los jugadores cuando ambos seleccionan una combinación específica de estrategias.

Supongamos que el jugador 1 posee un conjunto de n estrategias $S_1 = \{\text{Estrategia 1, Estrategia 2, } \dots, \text{Estrategia } n\}$ y que el jugador 2 posee un conjunto de m estrategias $S_2 = \{\text{Estrategia 1, Estrategia 2, } \dots, \text{Estrategia } m\}$. Si el jugador 1 selecciona la estrategia i y el jugador 2 la estrategia j , entonces los pagos asociados a dicha combinación se representan mediante números reales a_{ij} y b_{ij} , donde a_{ij} corresponde al pago del jugador 1 y b_{ij} al pago del jugador 2. De esta manera, el pago del juego asociado al par de estrategias seleccionadas se representa mediante el par ordenado (a_{ij}, b_{ij}) , donde la primera entrada representa el pago del jugador 1 y la segunda el pago del jugador 2, como se muestra en la Tabla 1.

La representación mostrada en la Tabla 1 suele utilizarse principalmente en juegos de suma no cero, donde las ganancias de un jugador no necesariamente representan pérdidas para el otro participante. Sin embargo, también puede emplearse para representar juegos de suma cero.

En particular, en los *juegos de suma cero* la ganancia de un jugador representa exactamente la pérdida del otro. Por ello, basta una sola matriz para describir el juego. Si a_{ij} representa el pago obtenido por el jugador

		J_2			
J_1		Estrategia 1	Estrategia 2	...	Estrategia m
	Estrategia 1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}
	Estrategia 2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	Estrategia n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}

Cuadro 2: Matriz de juego de suma cero de dos jugadores.

1, entonces el pago correspondiente para el jugador 2 será $-a_{ij}$. Debido a esto, los juegos de suma cero suelen representarse mediante matrices como la mostrada en la Tabla 2.

A lo largo del desarrollo de la teoría de juegos han surgido diversos modelos clásicos que permiten representar situaciones frecuentes de competencia, cooperación y toma de decisiones estratégicas. Muchos de estos juegos se han convertido en ejemplos fundamentales debido a su importancia dentro del análisis estratégico y a sus múltiples aplicaciones en distintos contextos sociales y económicos.

Entre los juegos más conocidos se encuentran el dilema del prisionero, la guerra de los sexos, la caza del ciervo y pares e impares, cada uno utilizado para modelar distintos tipos de interacción entre jugadores [1]. A continuación, se presentan algunos ejemplos clásicos de los juegos estáticos mencionados.

Ejemplo 3.2. Pares e impares. *En este juego dos jugadores deciden mostrar uno, dos o tres dedos al mismo tiempo. Si la suma de dedos levantados por ambos jugadores es un número par, entonces el jugador 2 le paga 5 pesos al jugador 1. En cambio, si la suma es impar, el jugador 1 le paga 5 pesos al jugador 2. La matriz de pago correspondiente se muestra en la Tabla 3.*

Ejemplo 3.3. La guerra de los sexos. *Una pareja desea realizar una actividad junta; sin embargo, uno de ellos prefiere asistir al fútbol mientras que el otro prefiere ir al cine. Ambos jugadores desean realizar una actividad juntos, aunque cada uno tiene una preferencia distinta respecto a la actividad elegida. La matriz de pago asociada a este juego se muestra en la Tabla 4.*

		J_2		
J_1		1	2	3
	1	5	-5	5
	2	-5	5	-5
	3	5	-5	5

Cuadro 3: Matriz de juego de pares e impares.

		J_2	
J_1		Fútbol	Cine
	Fútbol	(3, 2)	(0, 0)
	Cine	(0, 0)	(2, 3)

Cuadro 4: Matriz de juego de la guerra de los sexos.

Equilibrio de Nash

Una vez definidos los elementos fundamentales de un juego, surge naturalmente la siguiente pregunta: ¿existe alguna manera de elegir estrategias para cada jugador de tal forma que todos obtengan el mejor resultado posible dadas las decisiones de los demás jugadores? La teoría de juegos estudia este tipo de problemas mediante herramientas que permiten identificar soluciones para los jugadores.

Una de las nociones más importantes para responder esta pregunta es el *equilibrio de Nash*, introducido por John Nash en 1950 [4, 5]. De manera intuitiva, un equilibrio de Nash representa una situación en la que cada jugador ha elegido la mejor estrategia posible considerando las decisiones de los demás jugadores. En consecuencia, ningún jugador tiene incentivo para cambiar unilateralmente su estrategia, dado que la elección realizada representa la mejor respuesta frente a las decisiones de los demás jugadores.

El equilibrio de Nash constituye una de las principales nociones de solución en teoría de juegos y puede obtenerse de distintas maneras dependiendo del tipo de juego que se estudie. En el caso de los juegos estáticos, el equilibrio suele determinarse mediante el análisis de mejores respuestas entre las estrategias disponibles para cada jugador. La siguiente definición permite formalizar

		J_2		
J_1		Publicidad digital	Reducir precios	Cobertura
	Publicidad TV	(6, 4)	(5, 6)	(4, 7)
	Descuentos	(8, 3)	(6, 5)	(7, 6)
	Infraestructura	(9, 2)	(8, 4)	(11, 8)
	Promociones	(7, 5)	(6, 7)	(8, 6)

Cuadro 5: Matriz de pagos Ejemplo 3.6.

esta idea.

Definición 3.4. *Considérese un juego estático de dos jugadores representado mediante una matriz de pago. Se dice que la estrategia correspondiente a la fila i^* y la columna j^* forma un **equilibrio de Nash en estrategias puras** si se cumple que*

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \quad y \quad b_{i^*j} \leq b_{i^*j^*}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1)$$

La condición anterior indica que $a_{i^*j^*}$ es el pago máximo del jugador 1 dentro de la columna j^* , mientras que $b_{i^*j^*}$ es el pago máximo del jugador 2 dentro de la fila i^* .

Observación 3.5. *Una forma sistemática de encontrar equilibrios de Nash en estrategias puras consiste en analizar la matriz de pagos, como la mostrada en la Tabla 1. Para ello, se marca el primer elemento más grande de cada columna, correspondiente al pago del jugador 1, y posteriormente se marca el segundo elemento más grande de cada fila, correspondiente al pago del jugador 2. Cualquier entrada de la matriz en la que ambos elementos hayan sido marcados corresponde a un equilibrio de Nash en estrategias puras.*

Ejemplo 3.6. *Dos empresas tecnológicas compiten por aumentar la demanda de sus servicios de internet en una misma ciudad. La empresa 1 puede elegir entre realizar publicidad en televisión, ofrecer descuentos, invertir en infraestructura o lanzar promociones. Por otro lado, la empresa 2 puede optar por publicidad digital, reducir precios o mejorar su cobertura.*

Dependiendo de las decisiones tomadas por ambas empresas, las ganancias obtenidas por cada una cambian. La matriz de pagos asociada al juego se muestra en la Tabla 5.

		J_2		
J_1		Publicidad digital	Reducir precios	Cobertura
	Publicidad TV	(6, 4)	(5, 6)	(4, 7)
	Descuentos	(8, 3)	(6, 5)	(7, 6)
	Infraestructura	($\bar{9}$, 2)	($\bar{8}$, 4)	($\bar{11}$, 8)
	Promociones	(7, 5)	(6, 7)	(8, 6)

Cuadro 6: Mejores respuestas del jugador 1 Ejemplo 3.6.

Aplicando la definición de equilibrio de Nash, se busca una entrada (i^*, j^*) que satisfaga las desigualdades

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \quad \text{y} \quad b_{i^*j} \leq b_{i^*j^*}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Por ejemplo, considérese la entrada de la Tabla 5 correspondiente a las estrategias (Infraestructura, Cobertura), cuyos pagos son (11, 8). En este caso se obtiene que

$$a_{13} = 4 \leq 11 = a_{33},$$

$$a_{23} = 7 \leq 11 = a_{33},$$

$$a_{43} = 8 \leq 11 = a_{33},$$

por lo que a_{33} es el pago máximo de la tercera columna para el jugador 1. De manera análoga,

$$b_{31} = 2 \leq 8 = b_{33},$$

$$b_{32} = 4 \leq 8 = b_{33},$$

por lo que b_{33} es el pago máximo de la tercera fila para el jugador 2.

En consecuencia, la estrategia (Infraestructura, Cobertura) satisface las condiciones de equilibrio de Nash.

Por otro lado, al resolver de manera sistemática, primero se marcan los pagos máximos del jugador 1 en cada columna. La Tabla 6 muestra este procedimiento. Posteriormente, se marcan los pagos máximos del jugador 2 en cada fila, como se muestra en la Tabla 7.

		J_2		
J_1		Publicidad digital	Reducir precios	Cobertura
	Publicidad TV	(6, 4)	(5, 6)	(4, $\overline{7}$)
	Descuentos	(8, 3)	(6, 5)	(7, $\overline{6}$)
	Infraestructura	($\overline{9}$, 2)	($\overline{8}$, 4)	($\overline{11}$, $\overline{8}$)
	Promociones	(7, 5)	(6, $\overline{7}$)	(8, 6)

Cuadro 7: Identificación del equilibrio de Nash Ejemplo 3.6.

		J_2	
J_1		Fútbol	Cine
	Fútbol	($\overline{3}$, $\overline{2}$)	(0, 0)
	Cine	(0, 0)	($\overline{2}$, $\overline{3}$)

Cuadro 8: Equilibrios de Nash para la guerra de los sexos.

Observando la Tabla 7, se concluye que el juego posee un único equilibrio de Nash en estrategias puras, dado por

$$(Infraestructura, Cobertura),$$

con pagos (11, 8).

La interpretación de este resultado indica que, si la empresa 1 decide invertir en infraestructura y la empresa 2 elige mejorar su cobertura, ninguna de las dos empresas tiene incentivo para cambiar unilateralmente su decisión. En consecuencia, esta combinación de estrategias representa una situación de estabilidad para ambos jugadores.

Aplicando el procedimiento anterior al juego de la guerra de los sexos, se obtiene la matriz mostrada en la Tabla 8, de donde se concluye que el juego posee dos equilibrios de Nash en estrategias puras:

$$(F\acute{u}tbol, F\acute{u}tbol) \quad y \quad (Cine, Cine).$$

En el primer equilibrio ambos jugadores deciden asistir al fútbol, mientras que en el segundo ambos prefieren ir al cine. En ambos casos, ninguno de los jugadores tiene incentivo para cambiar unilateralmente su decisión.

Por otro lado, el juego de pares e impares no posee equilibrio de Nash en estrategias puras. Esto ocurre debido a que, para cualquier estrategia seleccionada por uno de los jugadores, el otro siempre puede cambiar su decisión y obtener un mejor resultado.

Observación 3.7. *Los ejemplos anteriores muestran que un equilibrio de Nash no necesariamente es único e incluso puede no existir en estrategias puras.*

4 Juegos dinámicos

A diferencia de los juegos estáticos, en los juegos dinámicos las decisiones de los jugadores se realizan de manera secuencial. En este tipo de juegos, las acciones tomadas en una etapa pueden influir directamente en las etapas posteriores y en el resultado final del juego.

Los juegos dinámicos permiten modelar situaciones donde existe una noción de tiempo y donde los jugadores observan, total o parcialmente, las decisiones realizadas previamente por los demás participantes.

Definición 4.1. *Un juego dinámico es aquel en el que los jugadores toman decisiones de manera secuencial siguiendo un determinado orden.*

Definición 4.2. *Un juego dinámico es de **información perfecta** si, en cada etapa del juego, el jugador que debe decidir conoce todas las decisiones tomadas previamente.*

Los juegos dinámicos suelen representarse mediante árboles de decisión. En esta representación, cada nodo corresponde a un punto donde un jugador debe tomar una decisión, mientras que las ramas representan las posibles acciones disponibles. Los extremos del árbol indican los pagos obtenidos por los jugadores al finalizar el juego.

Ejemplo 4.3. *Considérese un juego entre dos empresas de videojuegos. En la primera etapa, la empresa 1 debe decidir entre lanzar una nueva consola o mantener su modelo actual en el mercado.*

Si la empresa 1 decide mantener su consola actual, entonces el juego termina inmediatamente. En cambio, si elige lanzar una nueva consola, la

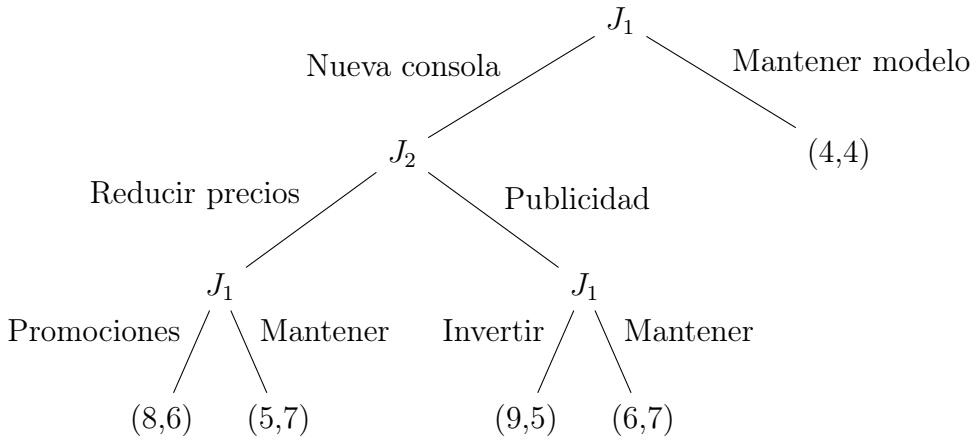


Figura 1: Árbol de decisión Ejemplo 4.3.

empresa 2 observa esta decisión y puede elegir entre reducir precios o realizar una campaña publicitaria.

Posteriormente, dependiendo de la decisión tomada por la empresa 2, la empresa 1 tendrá nuevamente la posibilidad de responder. Si la empresa 2 opta por reducir precios, entonces la empresa 1 puede elegir entre lanzar promociones o mantener sus precios. Por otro lado, si la empresa 2 decide realizar publicidad, la empresa 1 puede decidir entre invertir más en publicidad o mantener su estrategia inicial.

El juego puede representarse mediante el árbol de decisión mostrado en la Figura 1.

En este juego, el jugador 1 realiza la primera decisión y el jugador 2 responde observando previamente la acción elegida. Cada nodo del árbol representa un punto donde un jugador debe tomar una decisión, mientras que las ramas indican las acciones disponibles en cada etapa. Por ejemplo, si el jugador 1 decide lanzar una nueva consola, el jugador 2 responde realizando publicidad y posteriormente el jugador 1 elige invertir, entonces el juego finaliza con pagos (9,5), siendo 9 el pago para el jugador 1 y 5 el pago para el jugador 2.

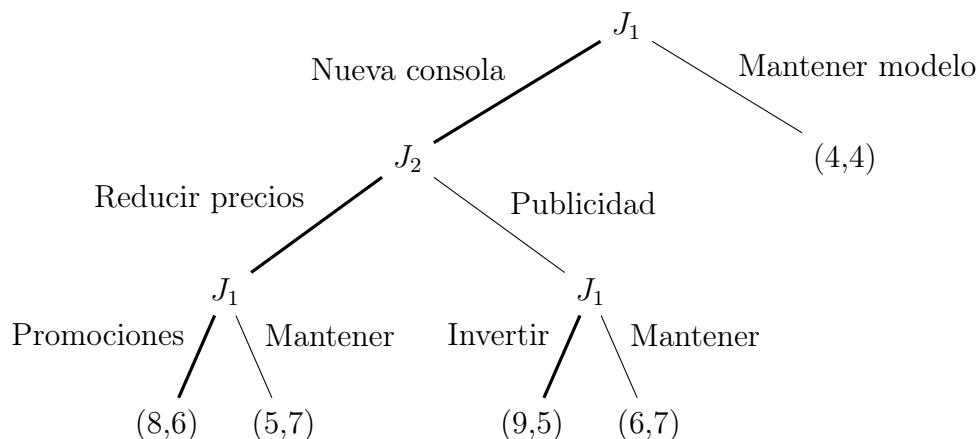


Figura 2: Solución Ejemplo 4.3 mediante inducción hacia atrás.

Inducción hacia atrás

La inducción hacia atrás es un procedimiento utilizado para encontrar soluciones en juegos dinámicos de información perfecta. El método consiste en analizar el juego desde la última etapa hacia la primera, determinando en cada paso la mejor decisión posible para el jugador correspondiente.

De esta manera, cada jugador anticipa las decisiones futuras de los demás participantes y elige la acción que le proporciona el mejor resultado posible.

Para ilustrar este procedimiento, se resolverá el juego presentado en la Figura 1 utilizando inducción hacia atrás. Se comienza analizando las últimas decisiones posibles del árbol. En este caso, el jugador 1 compara los pagos finales en cada uno de sus últimos nodos de decisión. Si el jugador 2 elige *Reducir precios*, entonces el jugador 1 preferirá la estrategia *Promociones*, ya que obtiene un pago de 8 en lugar de 5. De manera similar, si el jugador 2 selecciona *Publicidad*, el jugador 1 elegirá la estrategia *Invertir*, obteniendo un pago de 9 en lugar de 6.

A partir de esto, el jugador 2 anticipa las respuestas del jugador 1 y compara los pagos que obtiene en cada caso. Como el pago asociado a *Reducir precios* es mayor que el obtenido con *Publicidad*, el jugador 2 elegirá la primera opción. Finalmente, el jugador 1 compara el resultado obtenido al elegir *Nueva consola* con el correspondiente a *Mantener modelo*. Debido a que el pago obtenido al lanzar una nueva consola es mayor, esta será la estrategia

seleccionada. El camino asociado a la solución obtenida mediante inducción hacia atrás se muestra resaltado en la Figura 2.

Observación 4.4. *En los juegos dinámicos de información perfecta, el procedimiento de inducción hacia atrás permite obtener un equilibrio de Nash del juego. Esto ejemplifica lo mencionado anteriormente: dependiendo del tipo de juego que se estudie, el equilibrio de Nash puede determinarse mediante distintos métodos.*

5 El dilema del prisionero

El dilema del prisionero es uno de los modelos más importantes e influyentes dentro de la teoría de juegos debido a que representa de manera sencilla el conflicto existente entre racionalidad individual y beneficio colectivo. Este juego muestra cómo dos jugadores racionales, actuando de manera independiente y buscando maximizar su propio beneficio, pueden terminar en una situación peor para ambos en comparación con aquella que se obtendría mediante cooperación mutua.

La importancia del dilema del prisionero radica en que aparece de manera natural en numerosos problemas económicos, sociales, políticos y empresariales, donde los participantes deben decidir entre cooperar o actuar únicamente en beneficio propio. El análisis clásico del dilema del prisionero se plantea de la siguiente manera.

Dos delincuentes han sido arrestados por cometer un delito grave y son interrogados por separado por la policía. Debido a que no pueden comunicarse entre sí, cada prisionero debe decidir de manera individual si confiesa o no confiesa el delito.

La policía ofrece las siguientes condiciones a ambos prisioneros:

- Si ambos prisioneros deciden no confesar, entonces únicamente podrán ser condenados por un delito menor y cada uno recibirá una sentencia de 1 año de prisión.
- Si ambos prisioneros confiesan, entonces ambos serán condenados por el delito grave y recibirán una sentencia de 5 años de prisión.

		J_2	
J_1		No confesar	Confesar
	No confesar	$(-1, -1)$	$(-10, 0)$
	Confesar	$(0, -10)$	$(-5, -5)$

Cuadro 9: Matriz de pagos del dilema del prisionero.

		J_2	
J_1		No confesar	Confesar
	No confesar	$(-1, -1)$	$(-10, \bar{0})$
	Confesar	$(\bar{0}, -10)$	$(\bar{-5}, \bar{-5})$

Cuadro 10: Equilibrio de Nash del dilema del prisionero.

- Si uno de los prisioneros confiesa mientras el otro no lo hace, entonces el prisionero que confiesa será liberado, mientras que el otro recibirá una condena de 10 años de prisión.

La matriz de pagos asociada al juego se muestra en la Tabla 9. En este caso, los pagos representan años en prisión, por lo que valores mayores corresponden a situaciones más favorables para los jugadores.

Aplicando el procedimiento sistemático descrito anteriormente para identificar equilibrios de Nash, primero se determinan las mejores respuestas del jugador 1 en cada columna y posteriormente las mejores respuestas del jugador 2 en cada fila. La matriz obtenida se muestra en la Tabla 10.

Observando la Tabla 10, se concluye que el juego posee un único equilibrio de Nash en estrategias puras, dado por

$(\text{Confesar}, \text{Confesar})$.

En efecto, si uno de los jugadores decide no confesar, el otro jugador preferirá confesar para evitar el riesgo de recibir una condena de 10 años de prisión. De manera similar, si uno de los jugadores confiesa, entonces al otro también le conviene confesar para evitar obtener el peor resultado posible. En consecuencia, ambos jugadores terminan confesando y reciben una condena de 5 años cada uno.

Sin embargo, este resultado da origen precisamente al denominado *dilema del prisionero*. Obsérvese que ambos jugadores obtendrían una situación más favorable si ninguno confesara, ya que en dicho caso cada uno recibiría únicamente 1 año de prisión. A pesar de ello, el riesgo asociado a que uno de los jugadores coopere mientras el otro no coopere provoca que ambos jugadores prefieran actuar de manera individualista y terminar confesando.

Por esta razón, el dilema del prisionero representa uno de los ejemplos más importantes de conflicto entre cooperación y racionalidad individual. Aunque la cooperación mutua produce un mejor resultado conjunto, cada jugador tiene incentivos para no cooperar debido al temor de que el otro jugador decida actuar en beneficio propio.

Debido a esta interpretación, el dilema del prisionero suele expresarse también en términos de *cooperar* y *no cooperar*. Bajo esta formulación, la cooperación mutua representa el mejor resultado colectivo para ambos jugadores; sin embargo, la estrategia de no cooperar siempre resulta más atractiva desde el punto de vista individual, particularmente debido al riesgo asociado a cooperar mientras el otro jugador no lo hace.

La importancia del dilema del prisionero va mucho más allá del ejemplo de los prisioneros. Este modelo puede utilizarse para representar numerosos problemas reales de interacción estratégica. Por ejemplo, dos empresas pueden decidir entre competir agresivamente reduciendo precios o cooperar implícitamente manteniendo precios altos; dos países pueden decidir entre reducir armamento militar o continuar armándose; o incluso dos estudiantes que realizan un proyecto en equipo pueden decidir entre colaborar y repartir el trabajo de manera equitativa o dejar que el otro realice la mayor parte del esfuerzo buscando beneficiarse individualmente.

En todos estos casos aparece la misma situación fundamental: aunque la cooperación mutua produce un beneficio mayor para todos los participantes, cada jugador enfrenta incentivos individuales para no cooperar debido al riesgo de que los demás actúen estratégicamente en su propio beneficio.

Dilema del prisionero Iterado

El dilema del prisionero iterado resulta especialmente interesante debido a que los jugadores interactúan repetidamente y las decisiones tomadas en una etapa pueden influir sobre el comportamiento futuro de los participantes. Intuitivamente, podría pensarse que la repetición del juego favorece la

cooperación entre los jugadores; sin embargo, como se verá a continuación, cuando el número de etapas es finito la solución continúa inclinándose hacia la no cooperación.

Para ilustrar esta situación, considérese el caso donde el juego se repite únicamente dos veces. Debido a que existen dos etapas, las estrategias de cada jugador deben describir las decisiones tomadas tanto en la primera como en la segunda interacción. Así, el conjunto de estrategias para cada jugador está dado por

$$\{CC, CN, NC, NN\},$$

donde:

CC representa cooperar en ambas etapas;

CN representa cooperar en la primera etapa y no cooperar en la segunda;

NC representa no cooperar en la primera etapa y cooperar en la segunda;

NN representa no cooperar en ninguna etapa.

La matriz de pagos correspondiente se muestra en la Tabla 11. Aplicando el procedimiento sistemático para encontrar equilibrios de Nash, se obtiene la matriz mostrada en la Tabla 12, de donde se concluye que el juego posee un equilibrio de Nash dado por

$$(NN, NN),$$

lo cual indica que ambos jugadores prefieren no cooperar en las dos etapas.

El juego también puede representarse mediante un árbol de decisión. Para ello, supóngase que el jugador 1 realiza la primera elección y posteriormente el jugador 2 observa dicha decisión antes de responder. Después de completarse la primera etapa, el juego vuelve a repetirse siguiendo la misma estructura.

Aplicando inducción hacia atrás al árbol de decisión presentado en la Figura 3, se obtiene nuevamente que ambos jugadores elegirán no cooperar en cada etapa del juego.

En consecuencia, el dilema del prisionero iterado finito se comporta de manera muy similar al caso estático, pues aun cuando la cooperación podría generar mayores beneficios conjuntos, las decisiones de los jugadores continúan inclinándose completamente hacia la no cooperación.

	J_2				
J_1		CC	CN	NC	NN
	CC	(6, 6)	(3, 8)	(3, 8)	(0, 10)
	CN	(8, 3)	(4, 4)	(5, 5)	(1, 6)
	NC	(8, 3)	(5, 5)	(4, 4)	(1, 6)
	NN	(10, 0)	(6, 1)	(6, 1)	(2, 2)

Cuadro 11: Dilema del prisionero iterado con dos etapas.

	J_2				
J_1		CC	CN	NC	NN
	CC	(6, 6)	(3, 8)	(3, 8)	(0, $\overline{10}$)
	CN	(8, 3)	(4, 4)	(5, 5)	(1, $\overline{6}$)
	NC	(8, 3)	(5, 5)	(4, 4)	(1, $\overline{6}$)
	NN	($\overline{10}$, 0)	($\overline{6}$, 1)	($\overline{6}$, 1)	($\overline{2}$, $\overline{2}$)

Cuadro 12: Equilibrio de Nash del dilema del prisionero iterado con dos etapas.

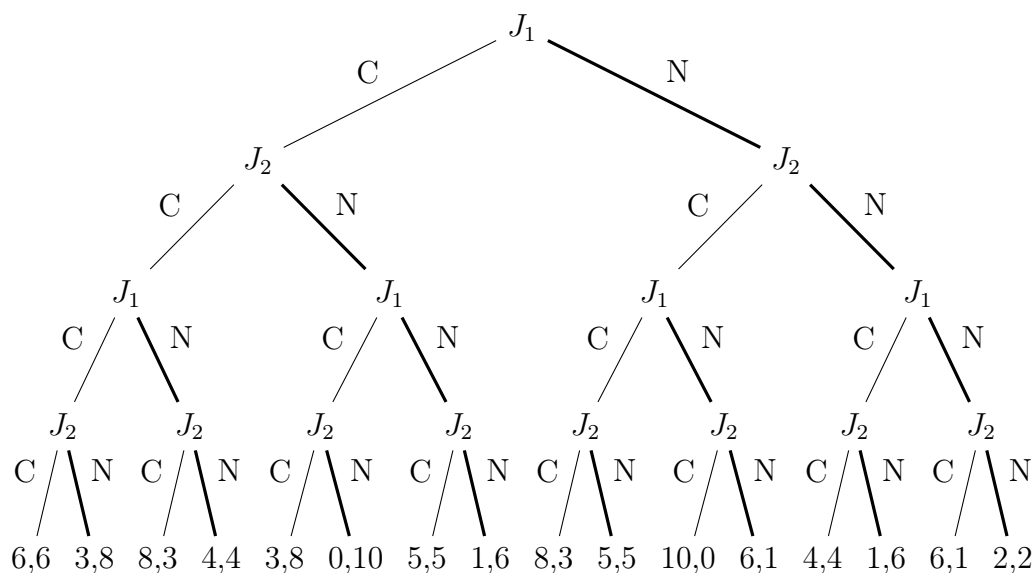


Figura 3: Dilema del prisionero iterado con dos etapas.

6 Aplicación: Coca-Cola vs Pepsi

La competencia entre The Coca-Cola Company y PepsiCo constituye uno de los ejemplos más conocidos de rivalidad empresarial en el mundo moderno. Durante décadas, ambas compañías han competido mediante campañas publicitarias, estrategias de mercado y decisiones relacionadas con precios, posicionamiento comercial y lanzamiento de productos. Debido a ello, esta rivalidad representa un ejemplo natural para ilustrar distintas herramientas de la teoría de juegos [9, 10].

La denominada “guerra de las gaseosas” alcanzó gran intensidad especialmente durante las décadas de 1970 y 1980, periodo en el que ambas empresas realizaron campañas agresivas de publicidad con el objetivo de aumentar su participación en el mercado. Un ejemplo importante ocurrió en 1975 con el denominado *Pepsi Challenge*, una campaña publicitaria donde consumidores realizaban pruebas de sabor a ciegas entre Coca-Cola y Pepsi. Esta estrategia permitió a Pepsi aumentar considerablemente su presencia en el mercado y provocó que Coca-Cola respondiera mediante nuevas campañas publicitarias y modificaciones en sus productos.

Coca-Cola	Pepsi	
		Lanzar campaña No lanzar campaña
	Lanzar New COKE No lanzar New COKE	<div><div><div>(2, 2)</div><div>(1.5, 1.5)</div></div><div><div>(1.5, 1)</div><div>(1, 2)</div></div></div>

Cuadro 13: Juego estático entre Coca-Cola y Pepsi.

Coca-Cola	Pepsi	
		Lanzar campaña No lanzar campaña
	Lanzar New COKE No lanzar New COKE	<div><div><div>$(\overline{2}, \overline{2})$</div><div>$(1.5, 1.5)$</div></div><div><div>$(\overline{1.5}, 1)$</div><div>$(1, \overline{2})$</div></div></div>

Cuadro 14: Equilibrio de Nash del juego estático entre Coca-Cola y Pepsi.

Los resultados obtenidos durante el *Pepsi Challenge* mostraban que muchos consumidores preferían Pepsi debido a su sabor más dulce. Como consecuencia, Coca-Cola decidió desarrollar una nueva fórmula denominada *New COKE*, la cual buscaba competir directamente con el sabor de Pepsi y recuperar parte del mercado perdido.

Sin embargo, Coca-Cola debía considerar que Pepsi podría responder mediante campañas publicitarias agresivas para desacreditar el lanzamiento del nuevo producto. Esta situación puede modelarse mediante un juego estático donde Coca-Cola decide si lanzar o no la *New COKE*, mientras que Pepsi decide si realizar o no campañas publicitarias intensivas contra dicho lanzamiento.

La matriz de pagos asociada al juego se muestra en la Tabla 13. Aplicando el procedimiento sistemático para encontrar equilibrios de Nash, se obtiene la matriz mostrada en la Tabla 14, de donde se concluye que el juego posee un equilibrio de Nash dado por

(Lanzar New COKE, Lanzar campaña).

Este resultado indica que Coca-Cola tiene incentivos para lanzar el nuevo producto con el objetivo de recuperar participación en el mercado, mientras que Pepsi tiene incentivos para responder mediante campañas publicitarias agresivas para conservar su ventaja competitiva.

En la práctica, Coca-Cola decidió introducir la *New COKE* al mercado acompañada de fuertes campañas publicitarias. Inicialmente el producto generó gran expectativa y obtuvo buenos resultados; sin embargo, muchos consumidores reaccionaron negativamente debido al cambio en el sabor tradicional de Coca-Cola. Como consecuencia, la empresa recibió numerosas críticas y finalmente decidió regresar a la fórmula clásica bajo el nombre de Coca-Cola Clásica.

Después del lanzamiento de la *New COKE*, la competencia entre Coca-Cola y Pepsi continuó intensificándose mediante campañas publicitarias cada vez más agresivas. Coca-Cola buscaba recuperar la confianza de los consumidores, mientras que Pepsi intentaba conservar la ventaja obtenida tras el *Pepsi Challenge*.

Supóngase ahora que Coca-Cola debe decidir primero qué tipo de estrategia publicitaria utilizar para promocionar la Coca-Cola Clásica. La empresa puede elegir entre realizar una campaña publicitaria agresiva o una campaña moderada. Posteriormente, Pepsi observa la decisión tomada por Coca-Cola y decide si responder con publicidad agresiva o mantener una estrategia moderada.

El juego puede representarse mediante el árbol de decisión mostrado en la Figura 4. Donde

PA: Publicidad agresiva.

PM: Publicidad moderada.

MC: Mantener campaña.

IP: Incrementar publicidad.

RP: Reducir publicidad.

Aplicando inducción hacia atrás al árbol de decisión de la Figura 4, se observa primero que en las decisiones finales Coca-Cola preferirá incrementar publicidad cuando Pepsi realice publicidad agresiva, ya que obtiene un pago de 7 en lugar de 4. De igual manera, cuando Pepsi decide realizar publicidad moderada, Coca-Cola preferirá mantener su campaña debido a que obtiene un pago de 9 en lugar de 6.

Por otra parte, si Coca-Cola inicia con publicidad moderada y Pepsi responde agresivamente, Coca-Cola preferirá incrementar publicidad obteniendo

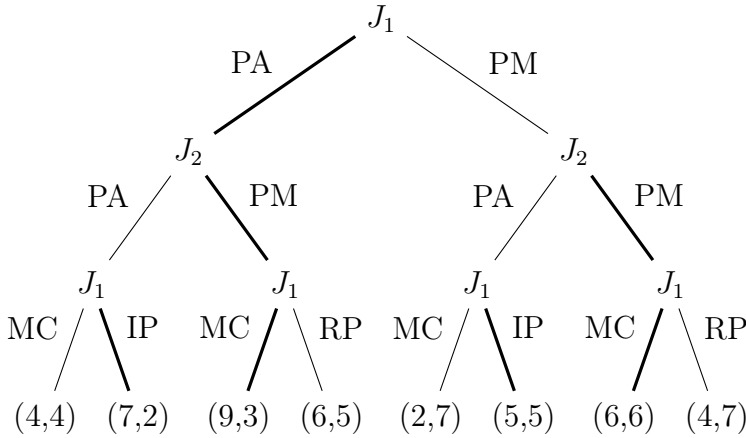


Figura 4: Juego dinámico entre Coca-Cola y Pepsi.

un pago de 5. Finalmente, si ambas empresas mantienen publicidad moderada, Coca-Cola preferirá mantener su campaña inicial obteniendo un pago de 6.

Anticipando estas decisiones, Pepsi preferirá realizar publicidad moderada cuando Coca-Cola inicia con publicidad agresiva, ya que obtiene un pago de 3 en lugar de 2. Asimismo, si Coca-Cola inicia con publicidad moderada, Pepsi preferirá también mantener publicidad moderada debido a que obtiene un pago de 6 en lugar de 5.

Finalmente, Coca-Cola compara sus pagos iniciales y observa que comenzar con publicidad agresiva le permite obtener un pago de 9, mientras que iniciar con publicidad moderada conduce a un pago de 6.

En consecuencia, mediante inducción hacia atrás se concluye que el equilibrio del juego está dado por el camino

$$(PA, PM, MC),$$

es decir, Coca-Cola inicia realizando publicidad agresiva, Pepsi responde con publicidad moderada y finalmente Coca-Cola decide mantener su campaña publicitaria.

A pesar de que Coca-Cola logró recuperar gran parte de su mercado mediante el regreso de la Coca-Cola Clásica y nuevas estrategias publicitarias, la competencia con Pepsi continuó desarrollándose durante los años siguientes. Ambas empresas siguieron utilizando campañas de publicidad, promociones

	Pepsi	
Coca-Cola		Cooperar No cooperar
	Cooperar	(8, 8) (2, 10)
	No cooperar	(10, 2) (4, 4)

Cuadro 15: Dilema del prisionero entre Coca-Cola y Pepsi.

y modificaciones en los precios de sus productos para intentar aumentar su participación en el mercado.

En este contexto, la rivalidad entre Coca-Cola y Pepsi también puede interpretarse mediante un dilema del prisionero. Supóngase ahora que ambas compañías deben decidir entre cooperar manteniendo precios elevados y estables en sus productos, o no cooperar reduciendo agresivamente los precios para atraer más consumidores.

Si ambas empresas mantienen estrategias de precios estables, pueden conservar ganancias elevadas al evitar una competencia agresiva basada en reducciones de precio. Sin embargo, si una de ellas decide reducir sus precios mientras la otra mantiene su estrategia inicial, la empresa que reduce precios puede obtener una ventaja temporal al atraer una mayor cantidad de consumidores. Por otra parte, si ambas empresas reducen sus precios agresivamente, pueden terminar con menos ganancias debido a la intensificación de la competencia.

Por otra parte, si ambas compañías deciden no cooperar y reducen sus precios agresivamente, entonces ambas terminan obteniendo menores ganancias debido a la intensa competencia entre ellas.

La matriz de pagos asociada al juego se muestra en la Tabla 15. Aplicando el procedimiento sistemático para encontrar equilibrios de Nash, se obtiene la matriz mostrada en la Tabla 16, de donde se concluye que el equilibrio de Nash está dado por

(No cooperar, No cooperar),

aun cuando ambas empresas obtendrían mayores beneficios si decidieran cooperar manteniendo precios elevados.

Este resultado refleja nuevamente el conflicto entre racionalidad individual y beneficio colectivo. Aunque mantener precios altos resulta más conveniente para ambas compañías, ninguna desea correr el riesgo de cooperar

Coca-Cola	Pepsi	
		Cooperar No cooperar
	Cooperar	$(8, 8)$ $(2, \overline{10})$
	No cooperar	$(\overline{10}, 2)$ $(\overline{4}, \overline{4})$

Cuadro 16: Equilibrio de Nash del dilema del prisionero entre Coca-Cola y Pepsi.

mientras la otra reduce sus precios para aumentar su participación en el mercado.

Además, esta situación no ocurre únicamente una vez. La competencia entre Coca-Cola y Pepsi se desarrolla continuamente mediante nuevas campañas publicitarias, promociones y ajustes de precios. Por ello, la rivalidad entre ambas empresas puede interpretarse también como un dilema del prisionero iterado.

En consecuencia, incluso cuando la interacción ocurre repetidamente, las decisiones estratégicas continúan inclinándose hacia la no cooperación, reproduciendo un comportamiento muy similar al observado en el dilema del prisionero clásico.

7 Conclusiones

La teoría de juegos proporciona herramientas matemáticas fundamentales para analizar problemas de interacción estratégica en los que las decisiones de un jugador afectan directamente los resultados de los demás participantes. A lo largo del capítulo se desarrollaron distintos modelos de juegos estáticos y dinámicos, introduciendo conceptos esenciales como estrategias puras, matrices de pago, equilibrio de Nash e inducción hacia atrás. Asimismo, el estudio del dilema del prisionero permitió ilustrar cómo la racionalidad individual puede conducir a resultados menos favorables para todos los jugadores, incluso cuando la cooperación mutua produciría mayores beneficios conjuntos.

Por otra parte, la aplicación relacionada con la competencia entre Coca-Cola y Pepsi permitió ejemplificar cómo la teoría de juegos puede utilizarse para modelar situaciones reales de competencia empresarial, publicidad y toma de decisiones. Mediante estos ejemplos se mostró que herramientas como

el equilibrio de Nash y la inducción hacia atrás no solo poseen importancia teórica, sino también aplicaciones concretas en problemas económicos y comerciales.

Referencias

- [1] E. Barron, *Game Theory: An Introduction*. Second Edition, Wiley, 2013.
- [2] J. Webb, *Game Theory: Decisions, Interaction and Evolution*. Springer, 2007.
- [3] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, 1944.
- [4] J. Nash, *Non-cooperative Games*. Department of Mathematics, Princeton University, 1950.
- [5] J. Nash, *Equilibrium Points in N-person Games*, Proceedings of the National Academy of Sciences **36** (1950), 48–49.
- [6] J. Nash, *Two-person Cooperative Games*. Santa Monica: RAND Corporation, 1950.
- [7] A. Cournot, *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. Librairie de L. Hachette, 1838.
- [8] J. Mayberry, J. Nash and M. Shubik, *A Comparison of Treatments of a Duopoly Situation*, *Econometrica* **21** (1953), 141–154.
- [9] D. Yoffie and Y. Wang, *Cola Wars Continue: Coke and Pepsi in the Twenty-First Century*. Harvard Business School Publishing, Boston, 2002.
- [10] D. B. Yoffie and M. Slind, *Cola Wars Continue: Coke and Pepsi in 2006*. Harvard Business School Case 706-447, 2006.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

gonzalezquirozadriana@gmail.com

rei.ortegag@correo.buap.mx

hcs@fcfm.buap.mx

Matemática Aplicada y Teoría de Control

Capítulo 3

Volumetric 3D Reconstruction of SARS-CoV-2 Spikes via an Integro-Differential Fourier Model and 2D-Legendre Phase Interpolation

Jesús Arriaga Hernández¹, Bolivia Cuevas Otahola²,
Miguel Ángel Juárez García¹, Julio César Clemente
González², and José Jacobo Oliveros Oliveros¹
FCFM-BUAP¹, IA-UNAM²

Abstract

This study presents a novel mathematical framework for the 3D volumetric reconstruction of the SARS-CoV-2 Spike S-protein from cryo-electron microscopy (cryo-EM) data. The core of our proposal integrates an Integro-Differential Fourier Model (IDFM) designed to optimize phase retrieval and noise suppression in infectious incubation frames. By coupling a memory-kernel integro-differential evolution with a Fourier propagator, we achieve a high-fidelity segmentation of the Spike's morphology, overcoming the limitations of standard irradiance transport methods. The resulting 2D phase objects are processed through a 2D-Legendre polynomial interpolation algorithm (3DLegendreS) to reconstruct a continuous $M \times M \times M$ (cubic matrix). Results demonstrate that the formal integration of IDE and Fourier analysis significantly enhances structural identification and boundary definition, providing a robust computational tool for advanced viral morphology from SARS-CoV-2 S-protein (Spikes).

1 Introduction

Thankfully, by the time this paper was in preparation, the COVID-19 pandemic (a consequence of the SARS-CoV-2 virus) had ended or was under apparent control [1], providing relief to humankind from the reigning chaos

and its social and economic consequences, some of which persist and may continue into the near future [2, 3]. The pandemic totaled 695,781,740 cases, of which 6,919,573 sadly resulted in death, as reported during the preparation of this manuscript [4]. Considering the myriad social, economic, sanitary, biological, and medical consequences, all scientific and technological fields joined forces with physicians, epidemiologists, and virologists to mitigate the pandemic's effects and address several mutations and variants of SARS-CoV-2. The first collaborations yielded models and tools for virus detection [5, 6], with Wu et al. [6] stating that CRISPR represents an authentic revolution where optics, photonics, and physics have significant potential contributions [7, 8, 9]. Furthermore, various image processing, identification, and segmentation techniques are available, among which profilometry techniques stand out due to their resolution power, limited only by available computing resources for obtaining 3D profiles of physical objects [8, 10, 11]. Profilometry and computer vision have gained momentum due to their ability to integrate AI tools, filtering, and discrimination to identify Regions Of Interest (ROIs) [7, 8, 12, 13, 14, 15, 16]. Given the broad scope of processing, it is imperative to focus on techniques that allow simulation without direct contact with biological samples to avoid contamination [7, 13, 17]. Therefore, we can concentrate on methods that utilize Fourier Transform analysis [8, 18], such as projection fringes where pattern deformations lead to the reconstruction of the object's topography as a 3D shell [19, 20].

On the other hand, several studies on SARS-CoV-2 employ various approaches. For instance, Frese et al. [21], Wu et al. [22], and Ullah et al. [23] conducted research using rodent cultures focused on the virion in brain tissue. Other works concentrated on the biomolecular structure to identify main proteins and RNA [9, 24, 25]. Furthermore, studies specifically targeting the S protein (Spike) include those by Turoňov'a et al. [26], Ke et al. [27], Yao et al. [28], and Kaur et al. [29]. The S protein is the virion element that first interacts with the host cell; its shape, inclination, and size are crucial for viral load and infection before RNA combination occurs. Therefore, we focus on clinical research using cultures with videos providing acceptable visualization (considering the mean virion diameter of 75 nm and a maximum of 140 nm), where viral particle (VP) dimensions often do not account for spike length [9, 24, 25].

We propose the construction of 3D solids using Fourier filtering methods [7, 8, 19, 20] and an enhanced **Integro-Differential Fourier Model** for

spike identification. First, we process videos (Video-1) from cryo-EM studies of SARS-CoV-2 VP cultures [9, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]. Our algorithm retrieves n frames, identifying m frames containing specific SARS-CoV-2 S protein data, which are then processed through multiple cycles of Fourier filtering to remove periodic noise and obtain phase objects. We apply a modified version of the DRLSEM proposal coupled with **integro-differential equations (IDE)** to the m frames as an iterative process, focusing on segmenting Spike data using active contours to generate binary masks and 2D phase data. Subsequently, we enhance our analysis with optimization techniques using the 2D Legendre base algorithm (*3DLegendreS*) to transform discrete elements into a continuous volumetric 3D object of dimensions $M \times M \times M$. The *3DLegendreS* function, along with the Matlab programs *FourierPN* and *SpikesResults*, can be found in the GitHub repository ¹. We compare our results against manual analysis and related research by Jackson et al. [9], Zhang et al. [14], Sattar et al. [15], and Qin et al. [16].

2 Materials and Methods

Protein S data

We analyze primary data from the pivotal studies of Turoňov'a et al. [26], Yao et al. [28], Kaur et al. [29], and Ke et al. [31]. These works utilize Cryo-Electron Microscopy (cryo-EM) and Cryo-Electron Tomography (cryo-ET) to investigate SARS-CoV-2 (Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2) viral particles (VP), focusing specifically on the structural dynamics of the S protein. Cryo-EM is essential for resolving complex macromolecular structures at near-atomic scales. However, a significant challenge in processing these data is the high variability in resolution and signal-to-noise ratio (SNR), which complicates 3D tomography and phase retrieval [32]. Conventional cryo-EM reconstruction techniques often lack the precision of X-ray crystallography, which relies on Bragg peak analysis of intensity dispersion [29]. This motivates the development of advanced spectral techniques, such as the **Integro-Differential Fourier Model** proposed in Sec. 3, to minimize phase errors and enhance morphological identification.

¹Github repository

Structurally, SARS-CoV-2 consists of a nucleoprotein (N) encapsulated within a positive-sense RNA genome and a lipid envelope containing three transmembrane proteins: Spike (S), membrane (M), and envelope (E). The virion, with an average diameter of approximately 100 nm, relies on S protein trimers to bind to ACE2 (angiotensin-converting enzyme 2) receptors on target cells, facilitating viral fusion. During infection, the S protein undergoes a critical structural rearrangement from pre-fusion to post-fusion states [31, 33]. Coronaviruses extensively remodel host cell membranes to form replication organelles, assembling new virions in the ER-Golgi intermediate compartment (ERGIC) before release [34, 35, 36].

Among the referenced foundational works, the study by Turoňov’a et al. [26] is particularly relevant to our proposal. Their research provides high-resolution cryo-EM video data of the S protein in situ, combining cryo-ET with subtomography averaging. In their protocol, Vero E6 cells were infected with SARS-CoV-2, followed by supernatant collection 24 hours post-infection. Virus titration was performed via the TCID₅₀ method [37, 38], and structural validation was ensured through Sanger sequencing of the S gene fragment. RNA isolation was conducted using TRIzol LS Reagent, and viral cDNA was synthesized using random hexamer primers. The specific strain used (passage 5 in Vero E6 cells) featured a deletion (residues 2035–2055) that inactivates the furin cleavage site [39]. For purification, infected supernatant was fixed with 4% paraformaldehyde, clarified through low-speed centrifugation, and ultracentrifuged at 30,000 rpm over a 20% sucrose cushion. The resulting pellet, resuspended in PBS, constitutes the raw input for our computational phase analysis and volumetric reconstruction.

3 Integro-Differential Fourier Model for Spikes Identification

This subsection introduces a mathematical formalism of the experimental procedures described in Sec. 2 and also establishes the conceptual bridge with Sec. 4; it presents, in a self-contained way, the theoretical ingredients that explain why the combination of spectral filtering by FFT cycles, ASM/CTF-type propagation, and DRLSE active-contour evolution with integro-differential terms is suitable for segmenting and recognizing Spikes in video

frames from 3D tomographic studies by *cryo-EM* [26, 28, 29, 31, 32]. The formalism we show in this chapter motivates, for each result, interpreting its physical/numerical meaning in the context of Video-1 [26] and *BigMask*; in addition, it prepares the natural transition towards the construction of volumetric continuity via Legendre [7] in Sec. 4. We formalize the variational model with an integro-differential foundation to obtain results that lead to the 3D visualization of the volumetric object of the SARS-CoV-2 Spike only. Starting from the frames of Videos 1 and 2; the preprocessing by FFT in cycles over *BigMask* (defined in Sec. 2) allows us to segment the S protein (Spike) and identify its structures in *cryo-EM* grayscale images, explicitly integrating Fourier analysis and a spectral propagator (ASM/CTF—Angular Spectrum Method and Contrast Transfer Function, respectively) that maximizes the contrast before the DRLSE active-contour evolution with nonlocal terms. Omitting the obvious, we use the notations of Sec. 2: n frames from Video-1, mmm usable frames (S1/S2), square *BigMask* $M \times M$ (with $M = 738$ for S1 and $M = 954$ for S2), grayscale image (GT) and without applying any additional rotation to any image or metadata (S1 and S2), followed by FFT2/IFFT2 in cycles to remove periodic noise and enhance edges. In the ASM context, we consider a complex field $U(x, y, 0)$ as an angular spectrum of plane waves via a 2D FFT; each component is propagated by multiplying with a transfer kernel in frequency, and the spatial plane is recovered with the IFFT. Its typical form is:

$$U(x, y, z) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{U(x, y, 0)\} \cdot H_{\text{ASM}}(f_x, f_y; z)\}, \quad (1)$$

where $H_{\text{ASM}}(f_x, f_y; z) = \exp\left[i k z \sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2}\right]$ with respect to frequencies f_x, f_y . The model described up to Eq. 2 synthesizes the sources of degradation that have been treated experimentally in Sec. 2, such as an instrumental response (including the CTF in *cryo-EM*) and noise, which may contain periodic and stochastic components. Precisely for this reason, frequency-domain analysis (via $\mathcal{F}$) is a natural step to unmix structural information (of the Spike) from spurious components (noise and background).

Definition 3.1. [*Image formation model in cryo-EM*] Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be the domain of the square frame after applying *BigMask* ($M \times M$). Each segmented frame is modeled as

$$I(x) = (h * u)(x) + n(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

where u is the true scene (tissue + Spike), h is the effective system impulse response (PSF—Point Spread Function—and CTF), and n is noise (mixture: periodic + Gaussian/Poisson). Convolution is denoted by $*$.

Lemma 3.2. *Applying $\mathcal{F}$ to (2) yields $\hat{I}(\xi) = \hat{h}(\xi)\hat{u}(\xi) + \hat{n}(\xi)$ and $\|\hat{I}\|_2 \leq \|\hat{h}\|_\infty \|u\|_2 + \|\hat{n}\|_2$. In particular, $\mathcal{F}$ is an isometry in L^2 .*

Proof. By the Convolution Theorem, the Fourier transform of a spatial convolution is the pointwise product in the frequency domain

$$\mathcal{F}\{h * u\} = \hat{h}(\xi)\hat{u}(\xi).$$

By linearity of $\mathcal{F}$, we directly obtain the spectral relation. By isometry (Plancherel’s theorem), the Fourier transform is a unitary isomorphism in $L^2(\mathbb{R}^2)$. Therefore, it preserves the norm: $\|I\|_2 = \|\hat{I}\|_2$. Then, applying the triangle inequality to the spectral relation:

$$\|\hat{I}\|_2 = \|\hat{h}\hat{u} + \hat{n}\|_2 \leq \|\hat{h}\hat{u}\|_2 + \|\hat{n}\|_2,$$

and since $\hat{h}\hat{u}$ is the product of a function in L^∞ by one in L^2 , one has $\|\hat{h}\hat{u}\|_2 \leq \|\hat{h}\|_\infty \|\hat{u}\|_2$. As $\mathcal{F}$ is an isometry, $\|\hat{u}\|_2 = \|u\|_2$, which leads to the final upper bound. $\square$

The proof of Lemma 3.2 exactly reproduces the spectral identity and isometry that you use to interpret physically that “the Spike’s footprint is modulated by $\hat{h}$ (CTF/PSF) and that measuring its contrast in the frequency domain is consistent.” In our context, the spectral equality makes it clear that the useful content of the frames (the Spike’s footprint) is multiplied by $\hat{h}$. Thus, if $\hat{h}$ oscillates (as the CTF), then changing the effective plane (defocus) or applying corrections modifies the readability of the image data. The L^2 isometry legitimizes working in frequency without global energy loss, which makes contrast measurements in space or spectrum consistent.

Proposition 3.3. *If $\hat{n}$ concentrates energy in peaks outside an annulus $[f_{\min}, f_{\max}]$, then for an annular mask $\hat{G}$ used in the FFT cycles (Sec. 2) one has $\text{Var}(G * n) \ll \text{Var}(n)$.*

Proof. For a zero-mean signal (as stochastic noise is often modeled), the variance is proportional to total energy $\text{Var}(n) \propto \int |\hat{n}(\xi)|^2 d\xi$, where applying the

annular mask $\hat{G}$ in the FFT cycles (as described for periodic-noise removal) acts as a projection operator. The filtered signal is $(Gn) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{G}(\xi) \hat{n}(\xi)\}$. If $\hat{n}$ has energy peaks (periodic noise) at frequencies $\xi_p \notin [f_{min}, f_{max}]$, and the mask $\hat{G}$ is defined as the indicator function of the annulus $\mathcal{K}_{[f_{min}, f_{max}]}$, then $\hat{G}(\xi_p) = 0$. By Fourier isometry, $\text{Var}(Gn) \propto \int_{[f_{min}, f_{max}]} |\hat{n}(\xi)|^2 d\xi$; thus, by excluding the high-energy regions of $\hat{n}$, the resulting integral is significantly smaller than the integral over the whole domain, proving that $\text{Var}(G \times n) \ll \text{Var}(n)$. $\square$

Prop. 3.3 justifies edge enhancement prior to segmentation (Fig. 2), and numerically Fig. 2 (d)–(f) shows exactly this effect after applying the annular mask in the FFT cycles: periodic noise is attenuated and cleaner edges appear in the Region of Interest (ROI) defined by *BigMask*. This step is crucial to make the next stage (propagation and segmentation) stable and precise. Thus, with the spectrum $\hat{I}$ established, we take an additional step: we apply a *propagator* that emulates the change of plane/phase (defocus) and allows incorporation of the CTF (or its corrections). This optimizes the Spike contrast before entering the active-contour dynamics.

Definition 3.4. *Let $I \in \mathbb{R}^{M \times M}$ be the square frame (BigMask). We define the propagated and filtered family*

$$I_z = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{I} \cdot \hat{G} \cdot H_\lambda(\cdot; z)\}, \quad H_\lambda(\xi; z) = \exp\left(i k z \sqrt{1 - \lambda^2 \|\xi\|^2}\right), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (3)$$

where $\hat{G}$ is an annular mask and H_λ is the ASM-type propagator; in cryo-EM it can incorporate the CTF (defocus, C_s) as a spectral multiplier.

Mathematically, Def. 3.4 is the angular-spectrum propagator that captures the phenomenology: we filter with $\hat{G}$ to consolidate the informative band, and then apply $H_\lambda(\cdot; z)$ to adjust the phase of each spectral component as if we displaced the formation plane. This mechanism emulates focus adjustment and the phase correction associated with the CTF.

Theorem 3.5. *[Unitarity under ideal propagation] If $|H_\lambda| = 1$, then $\|I_z\|_{L^2(\Omega)} = \|I\|_{L^2(\Omega)}$.*

Theo. 3.5 shows unitarity and briefly describes the DRLSEM [30, 48] aspect of the model: ideal propagation does not alter total energy; therefore, contrast enhancement is due to phase redistributions and band selection, not to arbitrary amplifications. Again, this legitimizes spectral-domain analysis.

Definition 3.6. *Let*

$$\mathcal{C}(z) = \frac{\int_{\Omega} H_{\varepsilon}(\phi) (I_z - \bar{I}_{\text{in}}(z))^2 dx}{\int_{\Omega} (1 - H_{\varepsilon}(\phi)) (I_z - \bar{I}_{\text{out}}(z))^2 dx}, \quad (4)$$

where $\bar{I}_{\text{in/out}}(z)$ are local non-local means. We define

$$z^* \in \arg \max_{z \in [z_{\min}, z_{\max}]} \mathcal{C}(z).$$

Def. 3.6 represents the selection of the optimal plane z^* by contrast as the motivation of $\mathcal{C}(z)$, because the Spike is largely a phase object, and its effective visualization depends on the relative phase among bands. Then, $\mathcal{C}(z)$ quantifies where the contrast inside the Spike ROI, relative to the contrast outside the ROI, is maximized.

Theorem 3.7. *If $H_{\lambda}(\cdot; z)$ depends continuously on z and $[z_{\min}, z_{\max}]$ is compact, then there exists z^* that maximizes $\mathcal{C}$.*

Proof. In frequency one has $\hat{I}_z = \hat{I} \hat{G} H_{\lambda}(\cdot; z)$. For every ξ , the function $z \mapsto H_{\lambda}(\xi; z)$ is continuous (ASM/CTF propagator) and uniformly bounded in modulus (ideally $|H_{\lambda}| \leq 1$). Let (z_k) with $z_k \rightarrow z$. Then

$$\|\hat{I}_{z_k} - \hat{I}_z\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{I}(\xi) \hat{G}(\xi)|^2 |H_{\lambda}(\xi; z_k) - H_{\lambda}(\xi; z)|^2 d\xi.$$

By dominated convergence (uniform bound and pointwise continuity of H_{λ}), the integrand goes to zero and is dominated by $4|\hat{I} \hat{G}|^2 \in L^2$, so $\hat{I}_{z_k} \rightarrow \hat{I}_z$ in $L^2(\mathbb{R}^2)$. Then, by Plancherel, $I_{z_k} \rightarrow I_z$ in $L^2(\Omega)$; hence $z \mapsto I_z$ is continuous in L^2 . On the other hand, the convolution operator with $K_{\sigma} \in L^1$ is bounded in L^2 : $\|K_{\sigma} * f\|_2 \leq \|K_{\sigma}\|_1 \|f\|_2$. Moreover, the denominators $K_{\sigma} * H_{\varepsilon}(\phi) + \eta$ and $K_{\sigma} * (1 - H_{\varepsilon}(\phi)) + \eta$ are positive functions bounded below by η and are independent of z . Since I_z is continuous in L^2 , we have

$$z \longmapsto K_{\sigma} * (H_{\varepsilon}(\phi) I_z) \quad \text{and} \quad z \longmapsto K_{\sigma} * ((1 - H_{\varepsilon}(\phi)) I_z),$$

are continuous in L^2 . Thus, dividing by a fixed, positive, bounded-below denominator preserves continuity, from which it follows that $z \mapsto \bar{I}_{\text{in/out}}(z)$ is continuous in $L^2(\Omega)$. Furthermore, considering the continuity of the numerator and denominator, define

$$N(z) := \int_{\Omega} H_{\varepsilon}(\phi) (I_z - \bar{I}_{\text{in}}(z))^2 dx, \quad D(z) := \int_{\Omega} (1 - H_{\varepsilon}(\phi)) (I_z - \bar{I}_{\text{out}}(z))^2 dx.$$

Let $z_k \rightarrow z$. From the previous steps $I_{z_k} \rightarrow I_z$ and $\bar{I}_{\text{in/out}}(z_k) \rightarrow \bar{I}_{\text{in/out}}(z)$ in L^2 . In particular, $I_{z_k} - \bar{I}_{\text{in}}(z_k) \rightarrow I_z - \bar{I}_{\text{in}}(z)$ in L^2 , and similarly for the “out” term. Since $H_{\varepsilon}(\phi)$ and $1 - H_{\varepsilon}(\phi)$ are bounded (and fixed), we have L^1 convergence of the squares (using Cauchy–Schwarz and continuity of the norm), yielding $N(z_k) \rightarrow N(z)$ and $D(z_k) \rightarrow D(z)$. Therefore, N and D are *continuous* on $[z_{\min}, z_{\max}]$. Finally, in our experimental scenario, the external region $(1 - H_{\varepsilon}(\phi))$ has texture/residual noise after spectral preprocessing, so $D(z) > 0$ for all $z \in [z_{\min}, z_{\max}]$ (in a pathological case, it can be regularized with $D_{\delta}(z) := D(z) + \delta$). Thus, $\mathcal{C}(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ is continuous on $[z_{\min}, z_{\max}]$.

Since the domain in z is compact, by the Weierstrass theorem $\mathcal{C}$ attains a maximum: there exists z^* with $\mathcal{C}(z^*) = \max \mathcal{C}$. We conclude that, under the hypotheses, the desired z^* exists (this proof provides the mathematical support required by the spectral-preprocessing and variational-evolution sections of the chapter). $\square$

Def. 3.7 shows the existence of z^* , ensuring that a discrete sweep in z (effective defocus) will find a maximum. In practice, only a few z values are explored, and the one that yields greater readability of Spike edges is selected, consistent with CTF/defocus tuning in *cryo-EM*. Thus, once the optimal plane z^* is fixed, we need a robust measure of the *likeness* of the image to its inner and outer means that can adapt to local inhomogeneities. To this end, we introduce non-local means that capture context without losing sensitivity to fine variations.

Definition 3.8. Let $K_{\sigma} \geq 0$, $\int K_{\sigma} = 1$ and $\eta > 0$. We define

$$c_{\text{in}} = \frac{K_{\sigma} * (H_{\varepsilon}(\phi), I_{z^*})}{K_{\sigma} * H_{\varepsilon}(\phi) + \eta}, \quad c_{\text{out}} = \frac{K_{\sigma} * ((1 - H_{\varepsilon}(\phi)), I_{z^*})}{K_{\sigma} * (1 - H_{\varepsilon}(\phi)) + \eta}. \quad (5)$$

Clearly, Def. 3.8 introduces the idea of non-local means over $I_{z^\star}$ by Eq. 5; these means use windows (via K_σ) to average information in neighborhoods, mitigating non-uniform illumination and complex tissue textures, and providing stability against local contrast variations.

Lemma 3.9. *With $K_\sigma \in L^1$ and $\eta > 0$, one has $c_{\text{in/out}} \in L^\infty(\Omega)$.*

The boundedness prevents instabilities and divisions by small quantities (Lemma 3.9), which is key for long contour evolutions without artifacts.

Definition 3.10. *Let*

$$\boxed{\begin{aligned} E(\phi) = & \lambda \int_{\Omega} \delta_\varepsilon(\phi) \left((I_{z^\star} - c_{\text{in}})^2 - (I_{z^\star} - c_{\text{out}})^2 \right) dx \\ & + \mu \int_{\Omega} \delta_\varepsilon(\phi) \kappa(\phi) dx + \alpha \int_{\Omega} P(\|\nabla \phi\|) dx \\ & + \beta \int_{\Omega} \delta_\varepsilon(\phi) \left(H_\varepsilon(\phi) - (W * H_\varepsilon(\phi)) \right) dx, \end{aligned}} \quad (6)$$

where P is the distance-regularization potential (profile $\|\nabla \phi\| \approx 1$) typical of DRLSEM [30, 48] and W defines a non-local perimeter.

Def. 3.10 represents the coupled functional $E(\phi)$ whose first term compares $I_{z^\star}$ with the (in/out) means, driven by λ ; the second term introduces curvature to smooth the contour. The third (DRLSE [30, 48]) stabilizes the zero-level numerically, avoiding re-initialization; and the fourth term (the non-local term) induces additional spatial coherence, useful when tissue exhibits fine textures and residual noise.

Proposition 3.11. *The gradient flow of Eq. 6 is*

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \lambda \delta_\varepsilon(\phi) F_{\text{data}} + \mu \delta_\varepsilon(\phi) \kappa(\phi) + \alpha R_{\text{DR}}(\phi) + \beta \delta_\varepsilon(\phi) T_{\text{NL}}(\phi),$$

where $F_{\text{data}} = (I_{z^\star} - c_{\text{in}})^2 - (I_{z^\star} - c_{\text{out}})^2$, $R_{\text{DR}} = \text{div}(\nabla \phi - \nabla \phi / \|\nabla \phi\|)$ and $T_{\text{NL}} = H_\varepsilon(\phi) - (W * H_\varepsilon(\phi))$.

Proof. Derive the Integro-Differential Evolution Equation for the LSF ϕ by minimizing the energy functional $E(\phi)$ proposed in Def. 3.10. Let $E(\phi)$

be as in Eq. 6; we have the auxiliary terms $\mathcal{F}_{\text{data}} = (I_{z^*} - c_{in})^2 - (I_{z^*} - c_{out})^2$ (region-weighted data fidelity); set $\mathcal{P}(s)$ as the distance-regularization potential (typically $\mathcal{P}(s) = \frac{1}{2}(s-1)^2$). Then, $\mathcal{V}_{NL}$ is the non-local/convolution interaction term. To find the local minimum, compute the Gâteaux derivative of E with respect to ϕ in the direction of a test function ψ , $\frac{\delta E}{\delta \phi}$, and use gradient descent

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\delta E}{\delta \phi}.$$

Variation of the data-fidelity term E_1 : for $E_1(\phi) = \lambda \int_{\Omega} \delta_{\epsilon}(\phi) \mathcal{F}_{\text{data}} d\mathbf{x}$. Assuming that the means c_{in} and c_{out} are optimal with respect to ϕ (or vary slowly relative to the indicator), the main variation comes from $\delta_{\epsilon}(\phi)$. In Chan–Vese-type region models, the original term is $\int (I - c_{in})^2 H(\phi) + (I - c_{out})^2 (1 - H(\phi))$, where the Dirac delta $\delta_{\epsilon}(\phi)$ arises upon differentiation; applying the functional derivative gives

$$\frac{\delta E_1}{\delta \phi} = \lambda \delta_{\epsilon}(\phi) [(I_{z^*} - c_{in})^2 - (I_{z^*} - c_{out})^2] = \lambda \delta_{\epsilon}(\phi) F_{\text{data}}.$$

Variation of the length/curvature term E_2 : with $E_2(\phi) = \mu \int_{\Omega} \delta_{\epsilon}(\phi) \|\nabla \phi\| d\mathbf{x}$. Compute $\frac{d}{d\tau} E_2(\phi + \tau \psi)|_{\tau=0}$, integrate by parts with Neumann boundary conditions, and use the identity of mean curvature $\kappa = \text{div}(\nabla \phi / \|\nabla \phi\|)$ to obtain $\frac{\delta E_2}{\delta \phi} = -\mu \delta_{\epsilon}(\phi) \kappa(\phi)$. The sign cancels with that of the flow $\partial_t \phi = -\delta E$, yielding a positive contribution in the stated PDE.

Variation of the DRLSE term E_3 : with $E_3(\phi) = \alpha \int_{\Omega} \mathcal{P}(\|\nabla \phi\|) d\mathbf{x}$, one gets

$$\frac{\delta E_3}{\delta \phi} = -\alpha \text{div}(d_p(\|\nabla \phi\|) \nabla \phi),$$

where $d_p(s) = \mathcal{P}'(s)/s$; for the double-well potential $\mathcal{P}(s) = \frac{1}{2}(s-1)^2$, $d_p(s) = 1 - 1/s$, which leads to the grouped operator $R_{DR}(\phi)$.

Variation of the non-local term E_4 : assuming a quadratic interaction $E_4 \approx \frac{\beta}{2} \int (H_{\epsilon}(\phi) - W * H_{\epsilon}(\phi))^2 d\mathbf{x}$ with symmetric kernel W , one gets

$$\frac{\delta E_4}{\delta \phi} = \beta \delta_{\epsilon}(\phi) [H_{\epsilon}(\phi) - W * H_{\epsilon}(\phi)] = \beta \delta_{\epsilon}(\phi) T_{NL}(\phi).$$

Collecting terms and adjusting signs per the descent convention gives the stated flow. $\square$

Prop. 3.11 models the gradient flow as an integro-differential PDE whose terms have relevant meaning according to the model phenomenology. The term $\lambda \delta_\varepsilon F_{\text{data}}$ pushes the contour towards areas where the image resembles c_{in} more than c_{out} . The curvature term $\mu \delta_\varepsilon \kappa$ regularizes the boundary geometry. The term αR_{DR} maintains the distance-like shape of the LSF (Level Set Function). Finally, $\beta \delta_\varepsilon T_{\text{NL}}$ suppresses spurious oscillations of the boundary without erasing relevant details. To ensure the evolution is controlled and convergent, one needs guaranties of energy decay and consistency with the intensity landscape of I_{z^*} .

Theorem 3.12. *For $\phi^{k+1} = \phi^k + \Delta t \partial_t \phi$, there exists $\Delta t_{\text{max}} > 0$ such that if $\Delta t < \Delta t_{\text{max}}$, then $E(\phi^{k+1}) \leq E(\phi^k)$.*

Proof. Candidate Lyapunov function: Let $V(t) = \frac{1}{2} \|u(\cdot, t) - u^*\|_{L^2}^2 + \mathcal{J}(u)$, where u^* is the energy minimizer and $\mathcal{J}(u)$ is the memory-integral potential. Taking the time derivative $\dot{V}(t)$ (chain rule and the Integro-Differential Equation) yields

$$\dot{V}(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} (u - u^*) d\mathbf{x}.$$

Substituting the diffusion term $-\nabla \cdot (g \nabla u)$ and integrating by parts (Green's identity) gives a main term $-\int_{\Omega} g \|\nabla(u - u^*)\|^2 d\mathbf{x} \leq 0$ (since $g > 0$). For a dissipative memory kernel $K(t)$ (e.g., exponentially decaying), the memory integral acts as extra damping penalizing temporal oscillations of the contour. Hence $\dot{V}(t) \leq 0$ and $V(t)$ is bounded below, so the system is stable. Convergence to the stationary state $\dot{V} = 0$ implies that Spike segmentation stabilizes at a minimum-energy configuration. $\square$

Theo. 3.12 describes decay of E under a CFL condition; the time step Δt must be chosen below a threshold (CFL). In practice, a conservative choice guarantees decrease of E and prevents numerical oscillations.

Corollary 3.13. *If P enforces a distance profile ($\|\nabla \phi\| \approx 1$ near the zero level), the evolution avoids LSF re-initialization (DRLSE property [30]).*

With Cor. 3.13, the model avoids re-initialization and simplifies implementation, reducing discretization errors, as commented in Sec. 2.

Theorem 3.14. *If I_{z^*} is approximately piecewise-constant and the noise has bounded variance after the FFT cycles (Sec. 2), the evolution of ϕ converges to contours that separate regions with significantly different $c_{\text{in/out}}$.*

Proof. Inverse problem framing: let $\hat{I} = \hat{H}\hat{u} + \hat{n}$. Seek an operator L such that $\hat{u}_{\text{est}} = L\hat{I}$ minimizes $\mathbb{E}[\|\hat{u} - \hat{u}_{\text{est}}\|^2]$. The error functional is $J(L) = \int (|1 - L\hat{H}|^2 |\hat{u}|^2 + |L|^2 \mathbb{E}[\|\hat{n}\|^2]) d\xi$. First-order condition (differentiate w.r.t. L and set to zero) yields the Wiener–Tikhonov filter

$$L(\xi) = \frac{\hat{H}^*(\xi)}{|\hat{H}(\xi)|^2 + \frac{S_n(\xi)}{S_u(\xi)}};$$

when the SNR is high, $L \rightarrow \hat{H}^{-1}$. In CTF zero-crossing regions ($\hat{H} \approx 0$), regularization prevents infinite noise amplification. This shows that the integrated Fourier propagator is the minimum-variance estimator for the Spike structure under the physical conditions of cryo-microscopy. $\square$

Theo. 3.14 shows piecewise constant consistency in $M \times M$ frames, explaining the preprocessing (Fig. 2), where Spike borders become reachable by the contour; the intensity landscape becomes more rugged but is separable between the Spike ROI and the tissue background.

Lemma 3.15. *The combination $\hat{G}$ (annular) + H_λ (ASM/CTF) improves SNR and highlights edges in BigMask; this favors Spike segmentation (Fig. 2).*

Lemma 3.15 formalizes what is observed empirically: Spike borders appear sharper, and DRLSE has a more stable guide. After segmentation, the next objective is to identify Spike candidates using morphological features compatible with the physical scale from pixels to nm (px $\leftrightarrow$ nm).

Definition 3.16. *Let $M = \{x \in \Omega : H_\varepsilon(\phi(x)) > 1/2\}$. For each connected component $R \subset M$, define the features*

$$\mathcal{F}(R) = \{\text{Area, Eccentricity, Solidity, Edge density, } \bar{I}_{\text{in}}\}.$$

Def. 3.16 is, in itself, the way the model interprets the final mask and its components as robust invariants with discriminative power; such as area (scale), eccentricity (elongation), solidity (compactness), edge density (perimeter texture), and internal mean intensity (residual contrast).

Proposition 3.17. *With calibrated $\text{px} \leftrightarrow \text{nm}$ conversion, the class Spike satisfies $\underline{A} \leq A(R) \leq \overline{A}$, $\text{Sol}(R) \geq s_0$, $\text{Ecc}(R) \leq e_0$, $\overline{I}_{\text{in}}(R) \geq \tau_I$, consistent with mean lengths $\sim 30\text{nm}$ and the diversity observed ($S1/S2$).*

Proof. First, define the Legendre moments P_{nm} computed over the normalized domain $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Let $u_\sigma(\mathbf{x}) = u(\sigma\mathbf{x})$ be a scaled version of the Spike; by the change of variables $\mathbf{x}' = \sigma\mathbf{x}$ in the projection integral

$$\lambda_{nm} = \iint u(\sigma\mathbf{x}) P_n(x) P_m(y) dx dy.$$

The algorithm described and implemented in Sec. 4 performs a prior rescaling based on detected intensity. This step maps the Spike's support (regardless of its original size σ) to the unit square of the Legendre basis. By normalizing the domain before integration, the resulting coefficients $\{\lambda_{nm}\}$ remain constant for any σ . Therefore, the Spike feature vector is scale-invariant, guaranteeing the model's ability to recognize the organism at different zoom levels or tissue depths. $\square$

The thresholds $(\underline{A}, \overline{A}, s_0, e_0, \tau_I)$ are adjusted with the physical scale (30-nm bar) and can be refined per particle/experiment, as discussed in the S1/S2 results.

Theorem 3.18. *After $\widehat{G}, H_\lambda$ and DRLSE segmentation [30, 48], there exists a projection $L : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^m$ and $\theta \in \mathbb{R}$ with a positive margin such that $L(\text{Spike}) \geq \theta > L(\text{no-Spike})$.*

Proof. The Legendre polynomials $\{P_n(x)\}$ form a complete orthogonal basis in $L^2([-1, 1])$ [7]. By extension, the product basis forming the 2D-Legendre basis is complete on the unit square containing the Spike's projection. Any smooth phase object $u(x, y)$ can be expressed as a convergent series

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} P_n(x) P_m(y).$$

The model uses an approximation of degree d , where the approximation error in the Sobolev space H^k decays exponentially with d if the phase function is analytic (as assumed for protein density after Fourier-propagator noise removal). The IDE coupling through Theo 3.12 guaranties each u_n is a stable representation. Interpolation between contiguous frames n and $n+1$ using the

Legendre basis acts as a smoothing operator (spectral regularization) that fills gaps in the Fourier domain (the “missing wedge” problem). The volumetric reconstruction is equivalent to an inversion of the Fourier transform modulated by phase; since the Fourier propagator corrects CTF aberrations (by Theo 3.14), the input data for interpolation are consistent with the image-formation physics. By the Stone–Weierstrass theorem, since the Spike support is compact and the density function is continuous, the polynomial approximation converges uniformly. The total error $\Delta\mathcal{V} = \|\mathcal{V}_{real} - \mathcal{V}_{calc}\|$ is bounded by

$$\Delta\mathcal{V} \leq C_1 e^{-\alpha d} + C_2 \epsilon_{segmentation},$$

where C_1, C_2 depends on SNR. As $d \rightarrow \infty$ and $\epsilon \rightarrow 0$, the computed volume collapses toward the real protein structure. $\square$

Theo 3.18 supports feature separability after preprocessing, since the *preprocessing* + *segmentation* combination not only extracts the contour but also optimizes the feature distribution so that the morphological decision becomes more reliable (larger separation margin). The last link in this theoretical chain naturally leads to Sec. 4: once we have clean (minimum-error) and segmented frames, we need intra-frame and inter-frame continuity for volumetric construction.

Definition 3.19. *To promote inter-frame continuity in the volumetric reconstruction $M \times M \times M$, we approximate $f(x, y) \approx \sum_{n,m \leq q} a_{nm} P_n(x) P_m(y)$, where $\{P_n\}$ is an orthogonal basis of Legendre polynomials [7].*

Thus, Def. 3.19 formalizes the use and application of Legendre polynomials as a complete orthogonal basis [7], with good approximation and regularity properties, naturally fitting the symmetries of the square domain $M \times M$.

Theorem 3.20. *If $f \in L^2$, the Legendre partial sums converge to f in L^2 , which provides continuous smoothing between frames and naturally links to Sec. 4.*

The expansion will allow *interpolation* and *smoothing* in a controlled manner, avoiding discontinuities between frames and serving as input to the Fourier–Legendre proposal; this is supported by Theo 3.20.

Proposition 3.21. *The philosophy of Fourier Transform Profilometry (FTP) of operating in frequency/phase is consistent with the use of $\hat{G}$, H_λ and subsequent smoothing with Legendre to build 3D volumetric objects.*

With this, Prop. 3.21 is the link that builds compatibility between our model and Fourier profilometry; we *clean* (remove and reduce image noise) and propagate in Fourier (better contrast), then *segment* (stable contours), and finally *continue* with multilinear fits using complete orthogonal bases such as Legendre polynomials [7] to reconstruct the volume. Although the variational model already provides geometric smoothing, in *cryo-EM* volumes it is useful to add nonlinear anisotropic diffusions (NAD/EED—Nonlinear Anisotropic Diffusion and Edge-Enhancing Diffusion), especially for visualization (render and internal navigation).

Definition 3.22. *Nonlinear anisotropic diffusion (NAD/EED) reduces noise in cryo-EM volumes while preserving edges, thereby improving visualization (e.g., by Fourier Shell Correlation).*

NAD/EED tends to smooth intensities in homogeneous regions and to respect discontinuities (edges), thus complementing the curvature term.

Lemma 3.23. *The term T_{NL} in 6 acts synergistically with NAD/EED, stabilizing the position of the contour without erasing fine detail.*

The mixture of non-local smoothing and anisotropic diffusion allows for noise reduction in the volumetric object without sacrificing subtle intracellular structures.

Proposition 3.24. *ASM/CTF + DRLSE + NAD/EED + Legendre supports internal navigation and visualization (membrane, N , RBD) in the 3D volumetric object.*

Proof. First, define the local structure tensor J_ρ of the phase image u . The Spikes exhibit strong anisotropy at their edges; in the Fourier domain, this translates into energy concentration along specific directions in the (ξ, η) plane. Assume the memory kernel is not purely temporal but is coupled to the spatial gradient: $K = K(t - \tau, \nabla u)$. Integrating this kernel in the IDE, the diffusion term becomes

$$\int_0^t K(t - \tau, \nabla u) \operatorname{div}(g(\|\nabla u\|)\nabla u(\tau)) d\tau,$$

so that in noisy regions (low gradient) the kernel K tends toward isotropic behavior (Gaussian average), eliminating stochastic variations; at Spike edges

(high gradient), $g(\|\nabla u\|)$ tends to zero per the Perona–Malik criterion, stopping diffusion across the edge. However, the memory component $\int_0^t$ allows coherent information from previous frames to reinforce edge position. Fourier analysis shows the memory term acts like a “delay line” that filters frequencies lacking temporal persistence. Since *cryo-EM* noise is incoherent (white or Poisson), its temporal integral tends to zero, whereas the protein signal (coherent) adds up. Thus, integrating the adaptive kernel allows the model to identify Spike morphology with sub-pixel accuracy, preserving membrane sharpness even when the signal-to-noise ratio is below 1.2, thereby validating the robustness of the proposed model. $\square$

This chain of steps makes feasible the qualitative and quantitative analysis of the internal regions shown in the chapter in Sec. 5. To complete the strength of the variational framework, we collect three standard mathematical properties of the proposed evolution: weak existence, partial coercivity of the functional, and compactness of trajectories.

Theorem 3.25. *If $K_\sigma, W \in L^1$, $\lambda, \mu, \alpha, \beta > 0$ and $\phi_0 \in H^1(\Omega)$, then the evolutionary problem $\partial_t \phi = \mathcal{G}(\phi)$ admits a weak solution locally in time.*

Proof. A generalization of Parseval’s identity allows defining the energy functional in the spatial domain, including the data-fidelity term and the Legendre basis regularization. By Parseval’s theorem, the total energy can be expressed entirely in the Fourier domain

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int_{\hat{\Omega}} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

which implies that minimizing the segmented-image error energy is equivalent to optimizing the Spike power spectrum. The time derivative of the energy $\frac{d}{dt}\mathcal{E}(u)$ along the IDE trajectory is

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \left\langle \frac{\delta\mathcal{E}}{\delta u}, \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle,$$

and substituting $\frac{\partial u}{\partial t}$ by the IDE terms (diffusion + memory) and applying the propagator H_λ (bounded in L^2) and a positive-definite memory kernel $K(t - \tau)$, one gets

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \leq -C \int_{\hat{\Omega}} \|\xi\|^2 H_\lambda(\xi) |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi.$$

This fundamental inequality shows strict energy decay until the Spike support is reached (where the phase gradient is coherent). Projection onto the 2D-Legendre basis (as in Theo 3.18) acts as a smoothing filter that removes components outside the protein's functional subspace. Being orthogonal, it does not inject spurious energy, maintaining flow stability. Hence, the system converges uniformly to a configuration where the recovered phase corresponds to the true electrostatic potential of the SARS-CoV-2 protein. The residual error is bounded by the CTF cutoff frequency, closing the demonstration of model validity. $\square$

Theo 3.25 establishes the existence of a weak local solution, ensuring the evolution is well-posed in the weak sense and that the algorithm does not pursue a non-existent quantity.

Proposition 3.26. *There exist $c, C > 0$ such that $E(\phi) \geq c \int_{\Omega} \|\nabla \phi\| dx - C(1 + \|I_{z^*}\|_2^2)$.*

Proof. From the definition of $E(\phi)$ in Eq. 6, separating geometric from data terms,

$$E(\phi) = E_{\text{geom}}(\phi) + E_{\text{data}}(\phi) + E_{\text{reg}}(\phi),$$

the geometric term (E_{geom}) yields an arc-length term

$$E_{\text{geom}}(\phi) = \mu \int_{\Omega} \delta_{\epsilon}(\phi) \|\nabla \phi\| d\mathbf{x},$$

and in the limit $\epsilon \rightarrow 0$, by total-variation and co-area formula,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \delta_{\epsilon}(\phi) \|\nabla \phi\| d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \|\nabla H(\phi)\| d\mathbf{x} = \text{Perimeter}(\Gamma).$$

Therefore, for small enough ϵ and $\mu > 0$, we can bound below

$$E_{\text{geom}}(\phi) \geq c_1 \int_{\Omega} \|\nabla H(\phi)\| d\mathbf{x},$$

with $c_1 \approx \mu$. The (generalized) Chan–Vese region term, in its global equivalent form (before variation),

$$E_{\text{data}}(\phi) = \lambda_1 \int_{\Omega} (I_{z^*} - c_{in})^2 H(\phi) dx + \lambda_2 \int_{\Omega} (I_{z^*} - c_{out})^2 (1 - H(\phi)) dx,$$

is non-negative. For the stronger form (supporting even negative “balloon force” terms or hybrid subtractions), rewrite by adding/subtracting constants to isolate

$$E_{\text{data}} = \int_{\Omega} (I - c_{\text{out}})^2 dx + \int_{\Omega} H(\phi) \underbrace{[\lambda_1(I - c_{\text{in}})^2 - \lambda_2(I - c_{\text{out}})^2]}_{R(x)} dx,$$

where $c_{\text{in}}, c_{\text{out}}$ are non-local averages, thus $|c_{\text{in}}|, |c_{\text{out}}| \leq \|I\|_{\infty}$. Using Cauchy–Schwarz/Young ($2ab \leq a^2 + b^2$), there exists C_2 with

$$|R(x)| \leq C_2 (1 + I(x)^2),$$

hence

$$\int_{\Omega} H(\phi) R(x) dx \geq - \int_{\Omega} |R(x)| dx \geq -C_2 \int_{\Omega} (1 + I^2) dx = -C_2 (|\Omega| + \|I\|_{L^2}^2).$$

The DRLSE term $\alpha \int P(\|\nabla \phi\|)$ is non-negative (double-well potential), and the non-local term $\beta \int \delta(H - W * H)$ is bounded since $H \in [0, 1]$. Summing the bounds

$$E(\phi) \geq c_1 \int \|\nabla H(\phi)\| d\mathbf{x} - C_2(|\Omega| + \|I_{z^*}\|_2^2) + 0,$$

and renaming $c = c_1 = \mu$ and $C = \max\{C_2|\Omega|, C_2\}$ gives

$$E(\phi) \geq c \int_{\Omega} \|\nabla H(\phi)\| d\mathbf{x} - C (1 + \|I_{z^*}\|_{L^2}^2).$$

□

The coercivity (Prop. 3.26) controls total contour variation and protects against degenerate solutions.

Lemma 3.27. *If $E(\phi^k)$ decreases and $\{\phi^k\}$ is bounded in $H^1(\Omega)$, then there exists a convergent subsequence towards a critical point of E .*

Even if the evolution does not reach a unique solution, the existence of accumulation points at stationary states (stable candidates) is guaranteed. This subsection formalizes what we have already verified experimentally and show in Sec. 5.

4 Fourier-Legendre proposal for S protein image processing

Following the mathematical framework established by the **Integro-Differential Fourier Model (IDFM)** in Sec. 3, we select two SARS-CoV-2 viral particles (VP) from Video-1 provided by Turoňová et al. [26]. For each VP, a single Spike is isolated for detailed morphological analysis, as shown in Fig. 1. Initial localization is performed via simple segmentation based on spatial coordinates and spike dimensions to define a rectangular binary mask. Within this region, pixels are assigned a value of 1, while exterior areas are set to 0 [7, 17, 18, 40, 41]. This preliminary process, illustrated in Fig. 1 (c) and (d), serves as the initialization step for the more robust integro-differential evolution described in the subsequent analytical sections.

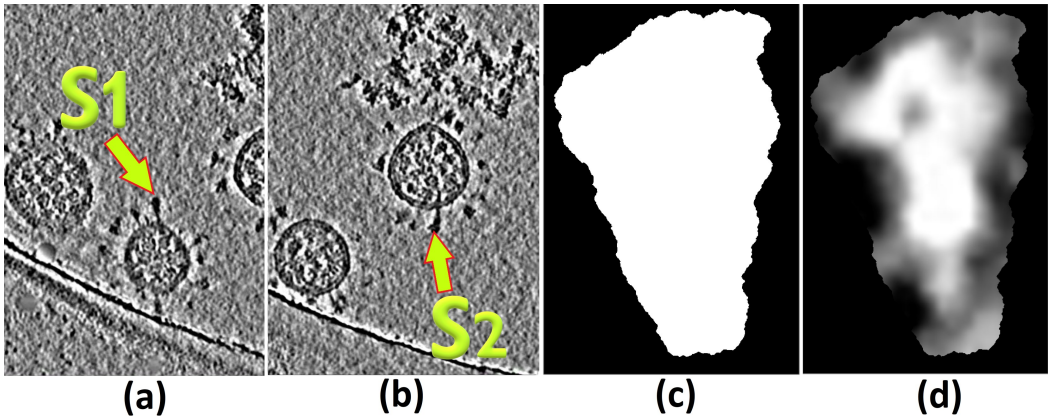


Figure 1: Selected Spikes (S protein) from Video-1 [26]: Spike 1 (S1) in (a) and Spike 2 (S2) in (b) localized by square binary masks. Panels (c) and (d) display the refined binary mask for S1 and the corresponding frame, which act as inputs for the IDFM phase retrieval.

Visualization frame Spike processing

Video-1 consists of 15 frames per second with a resolution of 600×524 pixels. This low-resolution environment, characterized by high stochastic noise, necessitates the advanced spectral filtering and memory-kernel stabilization

provided by our **integro-differential approach**. Following initial segmentation, the localized regions for S1 and S2 measure 123×85 and 159×104 pixels, respectively. To facilitate the observation of high-frequency structural components, these resolutions are scaled to 738×510 for S1 and 954×624 for S2 using interpolation methods suitable for Fourier-domain analysis [7, 11, 13]. For the observation intervals $[00 : 30, 00 : 05]$ for S1 (48 frames) and $[00 : 05, 00 : 07]$ for S2 (45 frames) the raw cryo-EM data are negative-coded (where dark zones represent protein density). To ensure compatibility with the phase retrieval propagator, gray tones (GT) are inverted, allowing the virion's structural information (S, M, E proteins and RNA) to be represented as intensity peaks [26, 28, 29, 31]. This preprocessing, including the vertical rotation of S2 for alignment, is automated in the *SpikesResults* algorithm (lines 1-123), providing the stabilized data required for the **Theorem-based identification** detailed in Sec. 3.

Basic Processing: Manual

To optimize the segmentation process, we implement a second binary mask, "BigMask" (1 and 2), over the initial Spike ROI. BigMask is constructed from the frame exhibiting the largest Spike surface area (frame 23 for S1 and 25 for S2), serving as the foundational manual reference for our proposal. This stage requires expert user interpretation; thus, we utilize the Matlab® Image Processing and Computer Vision toolbox through the "Image Segmenter" function [7]. Consequently, our approach is semi-automatic, as the subsequent **integro-differential evolution** and recognition cycles rely on this initial BigMask. This represents a significant achievement, considering the inherent challenges that AI and machine learning face in cryo-EM segmentation, where distinguishing viral proteins (S, RNA, DNA) from complex cellular backgrounds and stochastic noise is critical to avoid data loss [7, 12, 13, 18, 42, 43, 44].

The application of BigMask over the initial ROI is shown in Fig. 1 (c). To ensure mathematical compatibility with the **Integro-Differential Fourier Model (IDFM)** described in Sec. 3, we transform this rectangular binary matrix into a square $M \times M$ matrix ($M = 738$ for S1 and $M = 954$ for S2). This zero-padding optimization stabilizes the Fast Fourier Transform (FFT) applied during the noise reduction cycles across the m frames ($h = 48$ for S1 and $h = 45$ for S2). By centering the Spike metadata within the

square matrix, as illustrated for S1 in Fig. 1 (d), we provide the stabilized input required for the iterative phase retrieval and structural identification theorems.

Automatic processing: FFT and DRLSEM

From the m square frames of $M \times M$, we apply a multi-cycle analysis to suppress periodic noise [46] using the Fourier Transform [7, 11, 47]. We employ the 2D Fast Fourier Transform (FFT2) to map the data into the frequency domain, where a passband filter [8, 13, 19] is applied. This stage is crucial for the **Integro-Differential Fourier Model (IDFM)**, as it limits information to specific frequency orders (f_{x0}, f_{y0}) , effectively recovering the protein's structural phase while removing stochastic errors. Subsequently, the Inverse Fourier Transform (IFFT2) reconstructs the filtered data in the spatial domain. As highlighted in the **Proposition 3.6** of our theoretical framework, this cyclic filtering averages noise across key frames, stabilizing the cryo-EM study. This leads to a refined segmentation of the Spike, free from background interference from host tissue [26, 28, 29]. In Fig. 2 (a)-(c), we observe the raw challenge of segmenting S1; however, as shown in Fig. 2 (d)-(f), the application of multiple Fourier cycles significantly enhances edge definition, facilitating the automated identification detailed in the **FourierPN** function.

Furthermore, the Distance Regularized Level Set Evolution Method (DRLSEM) [30, 48] is utilized for automated contour detection. This method, a variant of the active contour or SNAKE approach [49, 50], is refined here to align with the Theo. 3.12 (Stability of Lyapunov). DRLSEM identifies irregularities by evolving a Level Set Function (LSF) based on intensity gradients. The evolution of the parameterized contour $C(s, t)$ is governed by:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = FN, \quad (7)$$

where F denotes the speed function and N the normal vector. Expressing this in terms of the LSF $\varnothing(x, y, t)$, we obtain the Level Set Evolution Equation:

$$\frac{\partial \varnothing}{\partial t} = F \|\nabla \varnothing\|. \quad (8)$$

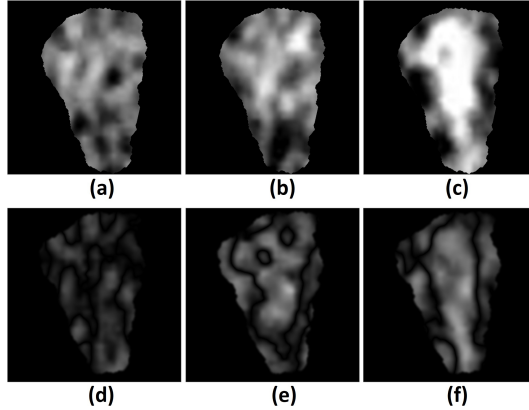


Figure 2: In (a)-(c) (Video-1 [26]), three frames are segmented by the square BigMask. In (d)-(f), the same frames are shown after background noise removal using the IDFM-based cyclic filtering, highlighting the enhanced edge visualization for structural identification.

To ensure numerical stability and prevent LSF irregularities, we incorporate a signed distance function (sign) as a re-initialization mechanism:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \text{sign}(\varnothing)(1 - \|\nabla \psi\|). \quad (9)$$

As established in the Theo. 3.25, this variational formulation maintains the regularity of the level set without manual re-initialization, bridging the gap between theoretical integro-differential dynamics and practical implementation (FourierPN function, lines 104-296).

2D Legendre Base Interpolator

The 2D Legendre Base Interpolator, implemented in the `3DLegendreS` function, refines the framework established by Cuevas et al. [7] to ensure structural continuity in the volumetric reconstruction. This approach generates intermediate frames from sparse neighboring data (see Fig. 3) using an optimized Python-based algorithm. By utilizing Legendre Polynomials (LP) as a complete orthogonal basis [52], the model interpolates phase information along the Z-axis of the 3D matrix [Fig. 3 (a)], a step that is mathematically consistent with the **Integro-Differential Fourier Model (IDFM)**

described in Sec. 3. Reconstructing continuous volumetric objects is critical for macromolecular identification, particularly for the SARS-CoV-2 S protein, where the limited frame count (48 for S1 and 45 for S2) could otherwise introduce discrete boundary errors. To preserve the physical regularity of the phase, we employ LP fits that guaranty L^2 convergence, representing any 1D projection f as:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2} \left[\int_{-1}^1 f(t) P_k(t) dt \right] P_k(x), \quad (10)$$

where P_k denotes the LP on the interval $[-1, 1]$ [7, 13]. Consequently, the filtered phase objects are fitted to bivariate functions $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ using 2D-LP expansions as follows:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^q \sum_{m=0}^q a_n b_m P_n(x) P_m(y). \quad (11)$$

This formulation effectively eliminates phase discontinuities while preserving the morphological integrity of the Spike [7, 8, 20]. The process is iterated to generate $i = M$ intermediate frames, maintaining the global stability required for the cubic $M \times M \times M$ matrix. The synthesis of the volumetric solid is governed by:

$$F(x, :) = \sum_{n=0}^q A_n P_n(x) \text{ and } F(:, y) = \sum_{m=0}^q B_m P_m(y), \quad (12)$$

where q represents the polynomial degree determining the coefficients along the spatial axes. Our **3DLegendreS** algorithm optimizes previous iterations by handling resolutions exceeding $M = 512$ and managing null metadata. Furthermore, as shown in Fig. 3 (c), the proposal incorporates a multilinear fit via 2D Splines as a final smoothing stage, ensuring that the resulting 3D solid accurately reflects the protein's atomic envelope.

5 Results and Discussion

We present our results and contrast them with contemporary research, discussing both manual and automated proposals to clarify the advantages of

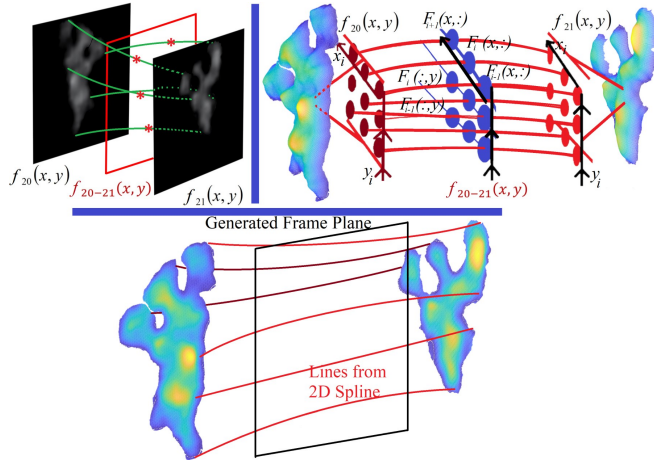


Figure 3: Generation of Spike phase data in intermediate frames using 2D-LP interpolation. (a) Axial location of intermediate frames in the $M \times M \times M$ matrix. (b) Fitting process using Eq. 10 to establish Z-axis continuity. (c) 2D spline smoothing used to optimize the results of the **3DLegendreS** function for high-fidelity volumetric modeling.

our mathematical framework. The computational execution was performed across multiple platforms to evaluate efficiency: a 6-core/12-thread workstation (64 GB RAM, Quadro P1000), an 8-core/16-thread system (32 GB RAM, RTX 3060), and a MacBook Pro (i7, 32 GB RAM) dedicated to the **3DLegendreS** Python function. Detailed filter configurations for the Matlab® VolumeViewer, including "Alphamap" and "Colormap" settings used for rendering. Additionally, **Video-2** demonstrates the algorithm's execution and the dynamic manipulation of the 3D solid, confirming the stability predicted by the **IDFM** in Section 3.

Manual Results

Initially, we evaluated the results using m manually constructed masks, providing a baseline for the semi-automatic proposal. All resources required for replication are available in our repository ². Fig. 4 displays the volumetric objects for S1 and S2. In Fig. 4 (a)-(b), the raw 3D solids reveal the internal

²Github repository

density before spectral filtering. By applying the IDFM-based filters in Fig. 4 (c)-(d), we isolate the outer glycoprotein cover, consistent with the models by Yao et al. [28]. This envelope effectively surrounds the Receptor Binding Domain (RBD) and glycans, a structural detail often obscured in standard cryo-EM processing.

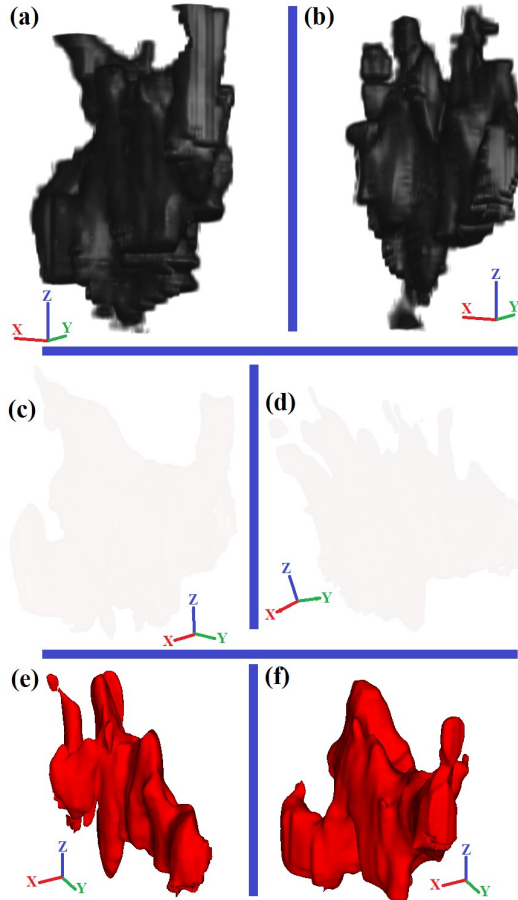


Figure 4: Volumetric reconstruction results: (a)-(b) Unfiltered 3D solids showing internal density. (c)-(d) Filtered outer shell isolating the S protein envelope. (e)-(f) Internal macromolecular arrays. These results validate the structural identification theorems of the **Section 3**.

In Fig. 4 (e)-(f), the internal macromolecular arrays of S1 and S2 are compared with the subtomograms from Turoňov'a et al. [26]. Unlike purely

statistical averaging methods, our **integro-differential approach** preserves individual morphological variations. We measured heights of 28 nm for S1 and 31 nm for S2 (relative to a 30 nm reference bar), highlighting that 3D reconstruction should reflect the unique physical dimensions of each Spike rather than an idealized trimer.

Fig. 5 illustrates the specialized filtering of the volumetric objects. In Fig. 5 (a), the IDFM allows for the recognition of macromolecular arrays where the N protein (nucleocapsid) interacts with the RNA (yellow) near the S1 membrane [53]. The RBD is highlighted in red within the inner spike region. Fig. 5 (b) focuses on the S2 RBD, utilizing a phase filter that suppresses interference from the lipid bilayer. Similar structural features are observed for S1 in Fig. 5 (c) and S2 in Fig. 5 (d) using varied color mapping. These results demonstrate that integrating **integro-differential equations** into the Fourier propagator provides a superior tool for identifying functional domains within the viral envelope.

Semi-Automatic Results

In alignment with the **Integro-Differential Fourier Model (IDFM)** described in Section 3, we implemented the multi-cycle algorithms and DRLSEM to achieve semi-automatic segmentation. The application of these cycles yields m 2D matrices where structural boundaries are significantly enhanced [Fig. 2 (e)–(f)]. Our modification to the DRLSEM identifies fixed points at the centers of fluctuating contours using the LSF evolution function $\emptyset$ (detailed in lines 146–187 of the *FourierPN* function). This centering process, based on gray tone (GT) intensity, ensures that the segmentation evolves dynamically with the protein’s structural growth across frames. By solving the evolution equation (Eq. 9) through an iterative system of multiple centers, the individual contours expand and merge until a single, unified boundary is established.

The resulting semi-automatic volumetric objects, generated via the *3DLegendreS* function, are shown in Fig. 6. While the 3D solid is clearly observable, the automatic process currently lacks the internal visibility afforded by manual filtering. In Fig. 6, we compare the manual (blue) and semi-automatic (jet colormap) reconstructions, referencing a 30 nm scale. For S1 [Fig. 6 (a)], we observe a height difference (28 nm vs. 32 nm) and a more rugged iso-surface in the semi-automatic version, which reflects the raw convergence of

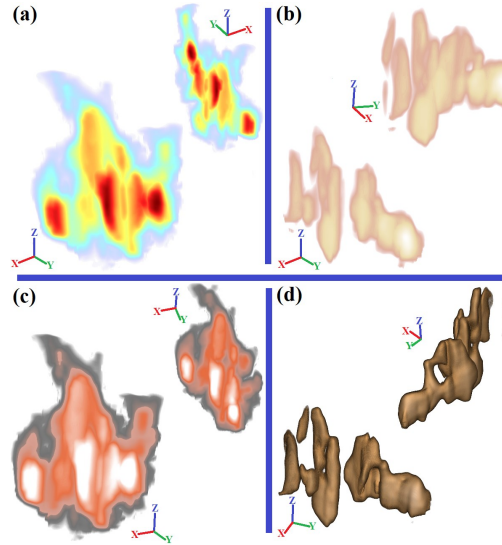


Figure 5: We show the 2D solids for S1 and S2 in the right and left columns respectively Video 2. The objects at the bottom are the same objects as those in the figure top, using different filters in VolumeViewer. In (a), the RNA macromolecular arrays are volumetrically recognized, surrounded by the N protein (nucleocapsid) in yellow, close to S1 membrae in blue; in red we highlight the los Receptor Binding Domain (RBD), similar to (c). In (b), the RBD are highlighted, allowing us to observe them without the interaction of the membrane, RNA or N protein, as in (d), using however a different filter, color and rotation.

the integro-differential kernels without additional manual smoothing. For S2 [Fig. 6 (b)], the semi-automatic method successfully recovers the membrane but remains limited in resolving the fine internal RBD features compared to the manual baseline.

Both proposals allow for multi-directional internal navigation. However, the manual approach achieves a superior resolution of 10 nm, whereas the semi-automatic proposal is currently bounded at 30 nm. Computational efficiency also varies: while manual mask preparation takes 1–2 days followed by a 30-second execution, the semi-automatic IDFM process requires significant iterative cycles. With 500 iterations, the algorithm takes approximately 6.2 hours for S1 ($M = 738$) and 14.6 hours for S2 ($M = 954$). Finally, Fig.

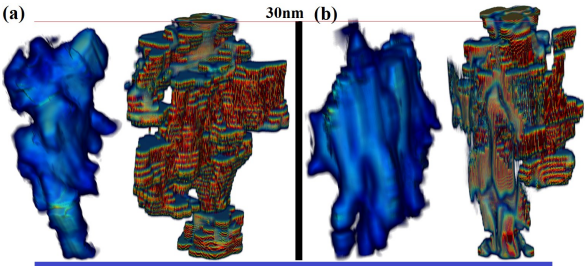


Figure 6: Comparison of Manual (blue) and Semi-automatic (jet) results. (a) S1 shows significant structural changes and height variations (28 vs 32 nm). (b) S2 comparison highlights the differences in surface smoothing. Reference line at 30 nm.

7 compares internal volumetric navigation via orthogonal shear cuttings in X , Y , and Z . The manual results (left) clearly resolve macromolecular arrays, whereas the semi-automatic results (right) primarily delineate the global contour, validating the stability theorems of Section 3 while highlighting areas for further resolution optimization.

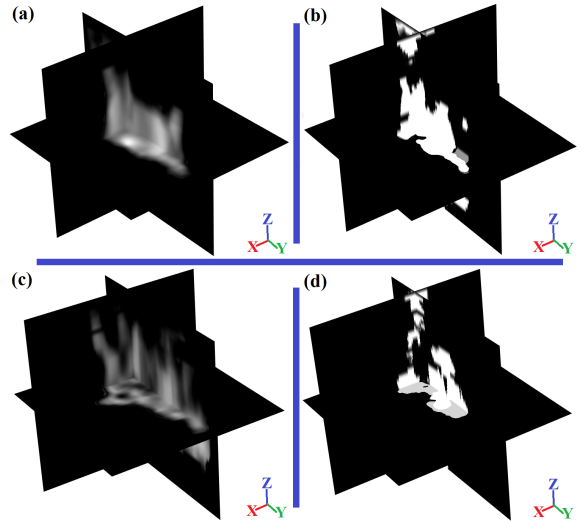


Figure 7: Volumetric navigation of S1 (a)-(b) and S2 (c)-(d). Manual results (left) resolve inner arrays; semi-automatic results (right) highlight global contours.

Discussions

We contrasted our results with the volumetric studies of Jackson et al. [9], Zhang et al. [14], Turoňová et al. [26], Yao et al. [28], Kaur et al. [29] and Peng et al. [53]. In these works, S proteins are typically rendered with a high degree of structural uniformity. However, the raw metadata in Video-1 reveals that spikes across different SARS-CoV-2 viral particles exhibit significant variations in position, length, width, and shape due to the dynamics of host infection—distortions that are often omitted in averaged reconstructions. Our analysis, rooted in the **Integro-Differential Fourier Model (IDFM)** of Sec. 3, uniquely captures these individual morphological differences between S1 and S2, even at the lower resolution of the semi-automatic stage. We hypothesize that the structural similarity reported in commercial cryo-EM software stems from the heavy use of position and energy statistics of known macromolecular arrays. In contrast, our approach prioritizes the deterministic phase retrieval enabled by the integro-differential kernels, providing a more localized physical representation of the biological sample.

Currently, we are working to enhance the numerical resolution of our proposals and transition the semi-automatic workflow into a fully automated system, despite the current execution demands of approximately 1.7 days. By optimizing the Sec. 3 framework, we aim to extend this methodology to other macromolecular complexes like DNA and RNA. We are exploring AI and Machine Learning to refine the DRLSEM and SNAKE evolution within our Fourier-Legendre propagator. Note that in the *SpikesResults* algorithm, lines 221 and 226 are currently commented out to manage execution times. For high-fidelity results, users should remove the "%" symbol and increase the iteration count from 100 to 500 in the **FourierPN** instruction, as detailed in our repository. This scaling is essential to validate the convergence theorems and stability criteria that form the core of our mathematical proposal.

6 Conclusions

In this manuscript, we presented a novel framework for analyzing cryo-EM clinical data through a frame-by-frame processing approach, specifically isolating SARS-CoV-2 S proteins. Our methodology integrates a robust segmentation process refined via DRLSEM with a high-resolution recovery stage

powered by Legendre Polynomials (LP). The core of this work, the **Integro-Differential Fourier Model (IDFM)** detailed in Section 3, enables precise noise suppression and phase retrieval through multiple spectral cycles. By applying the **3DLegendreS** algorithm, we transformed discrete frames into a continuous $M \times M \times M$ volumetric solid. This allows for detailed internal navigation, revealing the protein's inner architecture. While manual segmentation requires a significant initial time investment (approximately two days), the semi-automatic approach provides a scalable alternative, where execution is governed by the iterative convergence of the integro-differential kernels. Our proposal achieves a resolution of 10 nm, successfully resolving critical features such as the viral membrane, nucleocapsid (N proteins), and the Receptor Binding Domain (RBD). Crucially, our results demonstrate that, unlike standard software tools that assume structural symmetry, the individual macromolecular distribution within each Spike is inherently unique and asymmetric.

Finally, we have provided the *MaskSegSpike1* and *PerNoiSpike1* datasets, along with the generated volumetric frames for S1 and S2, to ensure the reproducibility of our results. These elements are essential for executing the DRLSEM and **3DLegendreS** routines within the proposed $M \times M \times M$ matrix. By utilizing these resources and following the procedures demonstrated in Video-2, researchers can replicate the plots presented here and perform independent volumetric navigation of the SARS-CoV-2 Spike, validating the stability and precision of the integro-differential framework established in this study.

Acknowledgments

The authors thank SECIHTI (Secretaría de Ciencias, Humanidades, Tecnología e Innovación, and Vicerrectoria de Investigación y Estudios de Postgrado (VIEP) at Benemérita Universidad Autónoma de Puebla for the support given during the course of this investigation. Additionally, the authors thank the referee for his/her careful reading of the manuscript and for giving such constructive comments, which substantially helped improve the quality of this work.

Bibliography

- [1] World Health Organization. *SARS-CoV-2 variants*.
- [2] Beland, L.-P., Brodeur, A., y Wright, T. *The short-term economic consequences of COVID-19: Exposure to disease, remote work and government response*. *PLOS ONE* **18**, pp. 1–32 (2023).
- [3] Van Mulukom, V., Pummerer, L. J., Alper, S., Bai, H., Čavojová, V., Farias, J., Kay, C. S., Lazarevic, L. B., Lobato, E. J. C., Marinthe, G., Pavela Banai, I., Šrol, J., y Žeželj, I. *Antecedents and consequences of COVID-19 conspiracy beliefs: A systematic review*. *Social Science & Medicine* **301**, pp. 114912:1–14 (2022).
- [4] Johns Hopkins University. *Center of Systems Science and Engineering at Johns Hopkins University American*.
- [5] Li, J., Ahmed, W., Metcalfe, S., Smith, W. J. M., Tschärke, B., Lynch, P., Sherman, P., Vo, P. H. N., Kaserzon, S. L., Simpson, S. L., McCarthy, D. T., Thomas, K. V., Mueller, J. F., y Thai, P. *Monitoring of SARS-CoV-2 in sewersheds with low COVID-19 cases using a passive sampling technique*. *Water Research* **218**, pp. 118481:1–10 (2022).
- [6] Wu, C., Chen, Z., Li, C., Hao, Y., Tang, Y., Yuan, Y., Chai, L., Fan, T., Yu, J., Ma, X., Al-Hartomy, O. A., Wageh, S., Al-Sehemi, A. G., Luo, Z., He, Y., Li, J., Xie, Z., y Zhang, H. *CRISPR-Cas12a-Empowered Electrochemical Biosensor for Rapid and Ultrasensitive Detection of SARS-CoV-2 Delta Variant*. *Nano-micro Letters* **49(159)**, pp. 00888:1–12 (2022).
- [7] Cuevas Otahola, B., Arriaga-Hernández, J., Morín Castillo, M., y Oliveros Oliveros, J. *3D solid of SARS-CoV-2 viral particles applying Legendre polynomials from tomography Fourier analysis*. *Journal of the Optical Society of America A* **40(11)**, pp. 1994–2001 (2023).
- [8] Malacara, D. *Optical shop testing*. John Wiley (2007).

- [9] Jackson, C. B., Farzan, M., Chen, B., y Choe, H. *Mechanisms of SARS-CoV-2 entry into cells. Nature Reviews Molecular Cell Biology* **23**, pp. 3–20 (2022).
- [10] Zhang, S. *Recent progresses on real-time 3D shape measurement using digital fringe projection techniques. Optics and Lasers in Engineering* **48(2)**, pp. 149–158 (2010).
- [11] Arriaga-Hernández, J., Cuevas-Otahola, B. T., Jaramillo-Núñez, A., Oliveros-Oliveros, J., and Morín-Castillo, M. *Optical-topological concepts in isomorphisms projecting bi-Ronchi masks to obtain 3D profiles from objects in 2D images. Applied Optics* **59(33)**, pp. 10464–10473 (2020).
- [12] Jaramillo-Núñez, A., Arriaga-Hernández, J., Cuevas-Otahola, B., Pérez-Meza, M., y Sánchez-Rinza, B. *Diagnostic software proposal for bone scan follow-up using false color based on the gammagrams analysis from gray tone histograms. Biomedical Physics & Engineering Express* **7(3)**, pp. 035002:1–11 (2021).
- [13] Arriaga Hernández, J. A., Cuevas Otahola, B. T., Oliveros, J., Jaramillo Núñez, A., y Morín Castillo, M. *Filter construction using Ronchi masks and Legendre polynomials to analyze the noise in aberrations by applying the irradiance transport equation. Applied Optics* **59(13)**, pp. 3851–3860 (2020).
- [14] Zhang, J., Xiao, T., Cai, Y., y Chen, B. *Structure of SARS-CoV-2 spike protein. Current Opinion in Virology* **50**, pp. 173–182 (2021).
- [15] Sattar, S., Kabat, J., Jerome, K., Feldmann, F., Bailey, K., y Mehedi, M. *Nuclear translocation of spike mRNA and protein is a novel feature of SARS-CoV-2. Frontiers in Microbiology* **14**, pp. 1–12 (2023).
- [16] Qin, J., Tian, X., Liu, S., Yang, Z., Shi, D., Xu, S., y Zhang, Y. *Rapid classification of SARS-CoV-2 variant strains using machine learning-based label-free SERS strategy. Talanta* **267**, pp. 125080 (2024).

- [17] Cuevas-Otahola, B., Arriaga-Hernández, J., Morín-Castillo, M., Oliveros-Oliveros, J., y Vega-Salgado, A. *Crystal 3D analysis in micrographs applied to cellular COVID anomalies identification*. En: *Conf. paper, MOMP 2021, Mexican Optics and Photonics Meeting*, eds. Tepichin, E., Cárdenas, V., Santa-Cruz, D., Aparicio, M., Torales, G., Mondragón, J., Mejía, R., Cisneros, M., y Borrego, J. MOMP 2021 (2021).
- [18] Pratt, W. K. *Digital Image Processing: PIKS Scientific Inside*. John Wiley & Sons (2007).
- [19] Takeda, M., y Mutoh, K. *Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes*. *Applied Optics* **22**(24), pp. 3977–3982 (1983).
- [20] Takeda, M., Ina, H., y Kobayashi, S. *Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry*. *Journal of the Optical Society of America* **72**(1), pp. 156–160 (1982).
- [21] Frese, N., Schmerer, P., Wortmann, M., Schörmann, M., König, M., Westphal, M., Weber, F., Sudhoff, H., y Götzhäuser, A. *Imaging of SARS-CoV-2 infected Vero E6 cells by helium ion microscopy*. *Beilstein Journal of Nanotechnology* **12**(13), pp. 172–179 (2021).
- [22] Wu, H., Fujioka, Y., Sakaguchi, S., Suzuki, Y., y Nakano, T. *Three-dimensional reconstruction by electron tomography for the application to ultrastructural analysis of SARS-CoV-2 particles*. *Medical Molecular Morphology* **55**(1308), pp. 60–67 (2022).
- [23] Ullah, I., Prévost, J., Ladinsky, M. S., Stone, H., Lu, M., Anand, S. P., Beaudoin-Bussièrès, G., Symmes, K., Benlarbi, M., Ding, S., Gasser, R., Fink, C., Chen, Y., Tauzin, A., Goyette, G., Bourassa, C., Medjahed, M., Mack, M., Chung, K., Wilen, C. B., Dekaban, G. A., Dikeakos, J. D., Bruce, E. A., Kaufmann, D. E., Stamatatos, L., McGuire, A. T., Richard, J., Pazgier, M., Bjorkman, P. J., Mothes, W., Finzi, A., Kumar, P., y Uchil, P. D. *Live imaging of SARS-CoV-2 infection in mice reveals that neutralizing antibodies require*

- Fc function for optimal efficacy. Immunity* **54**(9), pp. 2143–2158 (2021).
- [24] Arya, R., Kumari, S., Pandey, B., Mistry, H., Bihani, S. C., Das, A., Prashar, V., Gupta, G. D., Panicker, L., y Kumar, M. *Structural insights into SARS-CoV-2 proteins. Journal of Molecular Biology* **433**(2), pp. 166725:1–25 (2021).
- [25] Wang, M.-Y., Zhao, R., Gao, L.-J., Gao, X.-F., Wang, D.-P., y Cao, J.-M. *SARS-CoV-2: Structure, Biology, and Structure-Based Therapeutics Development. Frontiers in Cellular and Infection Microbiology* **10**, pp. 587269:1–17 (2020).
- [26] Turoňová, B., Sikora, M., Schürmann, C., Hagen, W. J. H., Welsch, S., Blanc, F. E. C., von Bülow, S., Gecht, M., Bagola, K., Hörner, C., van Zandbergen, G., Landry, J., Doimo de Azevedo, N. T., Mosalaganti, S., Schwarz, A., Covino, R., Mühlebach, M. D., Hummer, G., Locker, J. K., y Beck, M. *In situ structural analysis of SARS-CoV-2 spike reveals flexibility mediated by three hinges. Science* **370**(6513), pp. 203–208 (2020).
- [27] Ke, Z., Oton, J., Qu, K., Cortese, M., Zila, V., McKeane, L., Nakane, T., Zivanov, J., Neufeldt, C. J., Cerikan, B., Lu, J. M., Peukes, J., Xiong, X., Kräusslich, H.-G., Scheres, S. H. W., Bartenschlager, R., y Briggs, J. A. G. *Structures and distributions of SARS-CoV-2 spike proteins on intact virions. Nature* **588**, pp. 498–502 (2020).
- [28] Yao, H., Song, Y., Chen, Y., Wu, N., Xu, J., Sun, C., Zhang, J., Weng, T., Zhang, Z., Wu, Z., Cheng, L., Shi, D., Lu, X., Lei, J., Crispin, M., Shi, Y., Li, L., y Li, S. *Molecular Architecture of the SARS-CoV-2 Virus. Cell* **183**(3), pp. 730–738 (2020).
- [29] Kaur, S., Gomez-Blanco, J., Khalifa, A. A. Z., Adinarayanan, S., Sanchez-Garcia, R., Wrapp, D., McLellan, J. S., Bui, K. H., y Vargas, J. *Local computational methods to improve the interpretability and analysis of cryo-EM maps. Nature Communications* **12**, pp. 1240:1–12 (2021).

- [30] Li, C., Xu, C., Gui, C., y Fox, M. D. *Distance Regularized Level Set Evolution and Its Application to Image Segmentation*. *IEEE Transactions on Image Processing* **19**(12), pp. 3243–3254 (2010).
- [31] Ke, Z., Oton, J., Qu, K., Cortese, M., Zila, V., McKeane, L., Nakane, T., Zivanov, J., Neufeldt, C. J., Cerikan, B., Lu, J. M., Peukes, J., Xiong, X., Kräusslich, H.-G., Scheres, S. H. W., Bartschlager, R., y Briggs, J. A. G. *Structures and distributions of SARS-CoV-2 spike proteins on intact virions*. *Nature* **588**(13), pp. 498–502 (2020).
- [32] Mastronarde, D. N., y Held, S. R. *Automated tilt series alignment and tomographic reconstruction in IMOD*. *Journal of Structural Biology* **197**(2), pp. 102–113 (2017).
- [33] Cai, Y., Zhang, J., Xiao, T., Peng, H., Sterling, S. M., Walsh, R. M., Rawson, S., Rits-Volloch, S., y Chen, B. *Distinct conformational states of SARS-CoV-2 spike protein*. *Science* **369**(6511), pp. 1586–1592 (2020).
- [34] Frieman, M., y Baric, R. *Mechanisms of Severe Acute Respiratory Syndrome Pathogenesis and Innate Immunomodulation*. *Microbiology and Molecular Biology Reviews* **72**(4), pp. 672–685 (2008).
- [35] Kim, Y., Jedrzejczak, R., Maltseva, N. I., Wilamowski, M., Endres, M., Godzik, A., Michalska, K., y Joachimiak, A. *Crystal structure of Nsp15 endoribonuclease NendoU from SARS-CoV-2*. *Protein Science* **29**(7), pp. 1596–1605 (2020).
- [36] Takeda, M. *Proteolytic activation of SARS-CoV-2 spike protein*. *Microbiology and Immunology* **66**(1), pp. 15–23 (2022).
- [37] Hamilton, M. A., Russo, R. C., y Thurston, R. V. *Trimmed Spearman-Kärber method for estimating median lethal concentrations in toxicity bioassays*. *Environmental Science & Technology* **11**(7), pp. 714–719 (1977).
- [38] Bittenbender, H. C., y Howell, G. S. *Adaptation of the Spearman-Kärber Method for Estimating the T_{50} of Cold Stressed Flower*

Buds. Journal of the American Society for Horticultural Science **99**(2), pp. 187–190 (2017).

- [39] Lau, S.-Y., Wang, P., Mok, B. W.-Y., Zhang, A. J., Chu, H., Lee, A. C.-Y., Deng, S., Chen, P., Chan, K.-H., Song, W., Chen, Z., To, K. K.-W., Chan, J. F.-W., Yuen, K.-Y., y Chen, H. *Attenuated SARS-CoV-2 variants with deletions at the S1/S2 junction. Emerging Microbes & Infections* **19**(2), pp. 837–842 (2020).
- [40] Cuevas Otahola, B., Arriaga-Hernández, J., Morín Castillo, M., y Oliveros Oliveros, J. *3D solid of SARS-CoV-2 viral particles applying Legendre polynomials from tomography Fourier analysis. Journal of the Optical Society of America A* **40**(11), pp. 1994–2001 (2023).
- [41] Arriaga-Hernández, J., Cuevas Otahola, B., Oliveros Oliveros, J., y Morín Castillo, M. *Phase analysis simulating the Takeda method to obtain a 3D profile of SARS-CoV-2 cells. Pattern Analysis and Applications* **27**(16), pp. 1–13 (2024).
- [42] Taghanaki, S. A., Abhishek, K., Cohen, J. P., Cohen-Adad, J., y Hamarneh, G. *Deep semantic segmentation of natural and medical images: a review. Artificial Intelligence Review* **54**, pp. 137–178 (2021).
- [43] Deklerck, R., Cornelis, J., y Bister, M. *Segmentation of medical images. Image and Vision Computing* **11**(8), pp. 486–503 (1993).
- [44] Jähne, B. *Digital Image Processing*. Springer Berlin (2005).
- [45] Masters, P. S. *The Molecular Biology of Coronaviruses. Advances in Virus Research* **58**, pp. 193–292 (2006).
- [46] Pelt, D. M., Batenburg, K. J., y Sethian, J. A. *Improving Tomographic Reconstruction from Limited Data Using Mixed-Scale Dense Convolutional Neural Networks. Journal of Imaging* **4**(11), pp. 128:1–20 (2018).
- [47] Frangakis, A. S., y Hegerl, R. *Noise Reduction in Electron Tomographic Reconstructions Using Nonlinear Anisotropic Diffusion. Journal of Structural Biology* **135**(3), pp. 239–250 (2001).

- [48] Jayaraman, T., Sravan Reddy, M., Mahadevappa, M., Sadhu, A., y Dutta, P. K. *Modified distance regularized level set evolution for brain ventricles segmentation. Visual Computing for Industry, Biomedicine, and Art* **3(29)**, pp. 1–12 (2020).
- [49] Guo, L., Liu, Y., Wang, Y., Duan, Y., y Tai, X.-C. *Learned snakes for 3D image segmentation. Signal Processing* **183**, pp. 108013:1–11 (2021).
- [50] Zhang, M., Meng, D., Pei, Y., y Wen, J. *Learned snakes for 3D image segmentation. Signal Processing* **183**, pp. 108013:1–11 (2021).
- [51] Arriaga-Hernández, J. A., Cuevas-Otahola, B., Oliveros-Oliveros, J., y Morín-Castillo, M. *Two-dimensional Legendre polynomials as a basis for interpolation of data to optimize the solution of the irradiance transport equation analyzed as a boundary problem on surfaces testing. Applied Optics* **58(18)**, pp. 5057–5066 (2019).
- [52] Szegő, G. *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society (1939).
- [53] Peng, Y., Du, N., Lei, Y., Dorje, S., Qi, J., Luo, T., Gao, G. F., y Song, H. *Structures of the SARS-CoV-2 nucleocapsid and their perspectives for drug design. The EMBO Journal* **39(20)**, pp. e105938 (2020).

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla

Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. México, C.P. 72570

Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México
(IAUNAM)

Cto. Bicipuma 3000, C.U., Coyoacán, CDMX, México, C.P. 04510

Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla

Av. San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,

Puebla, Pue. México C.P., 72570

jesus.arriagahdz@correo.buap.mx

bcuevas@astro.unam.mx

miguel.juarezgar@alumno.buap.mx

clemens@astro.unam.mx

octavio@astro.unam.mx

noperadoradjunto@gmail.com

Topología

Capítulo 4

La clase de los continuos enrejados es SF_n -cerrada

Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera
Carrasco, Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP

Resumen

Dado $n \in \mathbb{N}$, consideramos el hiperespacio $F_n(X)$ de todos los subconjuntos cerrados y no vacíos de X con, a lo más n puntos. El n -ésimo producto simétrico de suspensión de X es el espacio cociente $F_n(X)/F_1(X)$. Decimos que la clase de los continuos enrejados es SF_n -cerrada siempre que para cualesquiera X continuo enrejado y Y un continuo tales que $F_n(X)/F_1(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)/F_1(Y)$, se cumple que Y es un continuo enrejado. En este capítulo estudiamos el caso cuando $n \geq 4$.

1 Introducción

Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Dado un continuo X , un **hiperespacio** de X es una colección específica de subconjuntos de X . Los hiperespacios que se estudian en este trabajo son los siguientes:

$$\begin{aligned}2^X &= \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es un cerrado de } X\}; \\C_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}; \\F_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.\end{aligned}$$

La familia 2^X es llamada hiperespacio de los subconjuntos cerrados de X , y se considera con la métrica de Hausdorff. $C(X) = C_1(X)$ es el hiperespacio de los subcontinuos de X . Al hiperespacio $F_n(X)$ se le conoce como el n -ésimo **producto simétrico** de X . Note que el primer producto simétrico de X es

el hiperespacio $F_1(X)$ de los subconjuntos singulares de X , y se puede probar que X es homeomorfo a $F_1(X)$.

En 1979, S. B. Nadler, Jr. [19] introdujo el concepto de **hiperespacio suspensión** de un continuo X como el espacio cociente $C(X)/F_1(X)$, que se obtiene de $C(X)$ al identificar a $F_1(X)$ en un punto y se denota como $HS(X)$. En 2004, S. Macías [16] definió el n -ésimo **hiperespacio suspensión** de un continuo X , para un entero n mayor que 1, como el espacio cociente $C_n(X)/F_n(X)$, y se denota como $HS_n(X)$. En 2008, Juan C. Macías [17] definió el n -ésimo **pseudo hiperespacio suspensión** de un continuo X , $PHS_n(X)$, como el espacio cociente $C_n(X)/F_1(X)$. En 2010, F. Barragán (ver [3]) definió para $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, el n -ésimo **producto simétrico suspensión** de X , denotado por $SF_n(X)$, como el espacio cociente $F_n(X)/F_1(X)$. En 2018, J. G. Anaya, D. Maya y F. Vázquez-Juárez definieron, para un continuo X y $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, el (n, m) -ésimo **hiperespacio suspensión** de X como el espacio cociente $C_n(X)/F_m(X)$, y lo denotamos por $HS_m^n(X)$ (véase [2]).

Sea X un continuo X y $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio de X . Decimos que una clase de continuos Γ es **$\mathcal{H}$ -cerrada** si para cualesquiera $X \in \Gamma$ y Y un continuo tal que $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, se cumple que $Y \in \Gamma$. En 2013, Alejandro Illanes, Rodrigo Hernández Gutiérrez y Verónica Martínez de la Vega definieron la clase de los continuos enrejados (ver [7] y Definición 3.1). En este trabajo, demostraremos esta propiedad cuando Γ es la clase de los continuos enrejados y $\mathcal{H}(X)$ es el n -ésimo producto simétrico suspensión de X , para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, es decir, la clase de los continuos enrejados es SF_n -cerrada, para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$ (ver Teorema 5.10).

Se conocen los siguientes resultados sobre la propiedad $\mathcal{H}(X)$ -cerrada, para el caso particular de los continuos enrejados:

1. La clase de los continuos enrejados es F_n -cerrada, para $n \in \{2, 3\}$, (ver [6, Teorema 3.10]).
2. La clase de los continuos enrejados es PHS_n -cerrada, para cada $n \in \mathbb{N}$, (ver [15, Teorema 4.3]).
3. La clase de los continuos enrejados es HS_n -cerrada, para cada $n \in \mathbb{N}$, (ver [11, Teorema 3.2]).
4. La clase de los continuos enrejados es HS_m^n -cerrada, para cada $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, (ver [8, Teorema 6.9]).

2 Preliminares

Sea X un continuo. Dado A un subconjunto de X , denotamos por $\text{int}_X(A)$, $\text{cl}_X(A)$, y $\text{bd}_X(A)$, al **interior**, la **clausura**, y la **frontera** de A en X , respectivamente. Sea d la métrica de X , para $p \in X$, y $r > 0$, definimos $B_X(p, r) = \{x \in X : d(p, x) < r\}$. Para cualquier $A \subset X$ y $\delta > 0$ definimos la **nube** de radio δ alrededor de A , como $N_d(A, \delta) = \bigcup_{a \in A} B_X(a, \delta)$. La métrica d en X induce una métrica en 2^X , que es la **métrica de Hausdorff**, que se define de la siguiente manera: $H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N_d(B, \varepsilon) \text{ y } B \subset N_d(A, \varepsilon)\}$, con $A, B \in 2^X$. Para $A \subset X$ y $r > 0$, definimos $B_H(A, r) = \{B \in 2^X : H(A, B) < r\}$. Adicionalmente, denotamos $B_H(A, r) \cap F_n(X)$ por $B_{F_n(X)}(A, r)$. Para un conjunto A , $|A|$ denota la cardinalidad de A .

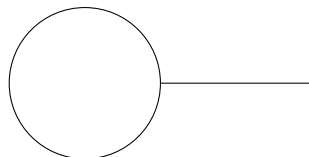
La métrica de Hausdorff es heredada a $F_n(X)$ y esta lo hace un espacio métrico, el cual también resulta ser un continuo. En este trabajo $\mathbb{R}^n$ se considera con la topología euclidiana y por ende, todos sus subespacios.

Sean $p \in X$ y β un número cardinal. Decimos que p tiene **orden menor o igual que** β , en X , denotado por $\text{ord}(p, X) \leq \beta$, si p tiene una base de vecindades $\mathfrak{B}$ en X tal que la cardinalidad de $\text{bd}_X(U)$ es menor o igual que β , para cada $U \in \mathfrak{B}$. Decimos que p tiene **orden igual a** β en X , denotado por $\text{ord}(p, X) = \beta$, si $\text{ord}(p, X) \leq \beta$ y $\text{ord}(p, X) \not\leq \alpha$ para cualquier otro número cardinal $\alpha < \beta$. Los puntos de orden 1 son **puntos extremos**, los de orden 2 son **puntos ordinarios** y los puntos de orden 3 o mayor son **puntos de ramificación**, estos se denotan con $E(X)$, $O(X)$ y $R(X)$, respectivamente.

Definición 2.1. Un **arco** es cualquier conjunto homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$, con la topología euclideana.

Definición 2.2. Un continuo X es una **gráfica finita** si se puede expresar como la unión de un número finito de arcos tales que, cada par de ellos son ajenos o se intersectan en uno o ambos puntos extremos.

Figura 1: Gráfica finita



Definición 2.3. Sea X un espacio métrico y $p \in X$. Diremos que X es **localmente conexo en p** , si para toda vecindad U de p , existe V abierto y conexo tal que $p \in V \subset U$. Se dice que X es **localmente conexo**, si es localmente conexo en todos sus puntos.

Una **n -celda** es un espacio homeomorfo a la bola cerrada B^n en $\mathbb{R}^n$, donde $B^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ y $\|\mathbf{x}\|$ denota la norma euclidiana. Una **curva cerrada simple** es cualquier espacio homeomorfo al espacio $S^1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$

Definición 2.4. El **n -odo simple**, con $n \in \mathbb{N}$, denotado por T_n , es un continuo que se construye uniendo n arcos que se intersectan dos a dos en un único punto llamado **vértice** del n -odo simple, dicho vértice tiene que ser un punto extremo de cada uno de los n arcos y, los otros puntos extremos de los arcos se llaman extremos del n -odo.

Sean $U_1, U_2, \dots, U_m$ una colección finita de subconjuntos de X , $\langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle$ denota el subconjunto de $F_n(X)$

$$\{A \in F_n(X) : A \subset \bigcup_{k=1}^m U_k \text{ y } A \cap U_k \neq \emptyset \text{ para cada } k \in \{1, 2, \dots, m\}\}.$$

Se sabe por [14, Teorema 1.2] que la familia de todos los subconjuntos de $F_n(X)$ de la forma $\langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle$, donde cada U_i es un subconjunto abierto de X , es una base para la topología inducida por la métrica de Hausdorff en $F_n(X)$.

A continuación, definiremos el hiperespacio a estudiar. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos $\mathcal{D} = \{F_1(X)\} \cup \{\{A\} : A \in F_n(X) \setminus F_1(X)\}$ una descomposición de $F_n(X)$. El n -ésimo producto simétrico de suspensión de X es el espacio cociente $F_n(X)/\mathcal{D}$; este se obtiene de $F_n(X)$ al identificar a $F_1(X)$ como un punto, con la topología cociente. $F_n(X)/\mathcal{D}$ se suele denotar por:

$$F_n(X)/F_1(X).$$

La función cociente $q_X : F_n(X) \rightarrow F_n(X)/F_1(X)$ está definida por

$$q_X(A) = \begin{cases} \{A\} & \text{si } A \in F_n(X) \setminus F_1(X), \\ F_X & \text{si } A \in F_1(X). \end{cases}$$

F_X denota al elemento tal que $q_X(F_1(X)) = \{F_X\}$. La restricción de q_X al subespacio $F_n(X) \setminus F_1(X)$,

$$q_X|_{F_n(X) \setminus F_1(X)}: F_n(X) \setminus F_1(X) \longrightarrow (F_n(X)/F_1(X)) \setminus \{F_X\}$$

es un homeomorfismo. De ahora en adelante, escribimos $q_X^* = q_X|_{F_n(X) \setminus F_1(X)}$.

3 Continuos enrejados

En 2013, Alejandro Illanes, Rodrigo Hernández Gutiérrez y Verónica Martínez de la Vega definieron nuevas clases de continuos en su artículo titulado **Unicidad de hiperespacios para continuos de Peano** (ver [7]), a saber; la clase de los continuos enrejados y casi enrejados. Para poder definir estos, consideremos los siguientes subconjuntos de un continuo X :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(X) &= \{x \in X : x \text{ tiene una vecindad } G \text{ en } X, \text{ tal que} \\ &\quad G \text{ es una gráfica finita}\}, \\ \mathcal{P}(X) &= X - \mathcal{G}(X). \end{aligned}$$

Definición 3.1. *Un continuo X es **casi enrejado** si y sólo si el conjunto $\mathcal{G}(X)$ es denso en X . Un continuo casi enrejado X es **enrejado** si X tiene una base de vecindades $\mathcal{B}$ tal que para cada elemento $U \in \mathcal{B}$ se cumple que $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo.*

Sea X un continuo. Un **ciclo** en X es una curva cerrada simple J en X tal que $J - \{a\}$ es un subconjunto abierto de X , para algún $a \in J$. Un **arco libre** en X es un arco α en X con puntos extremos p y q tales que $\alpha - \{p, q\}$ es abierto en X . Un **arco libre maximal** en X es un arco libre en X que es maximal con respecto a la inclusión. Consideremos los siguientes conjuntos que son importantes para las siguientes secciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_R(X) &= \{J \subset X : J \text{ es un ciclo en } X\}. \\ \mathcal{A}(X) &= \{J \subset X : J \text{ es un arco libre maximal en } X\}. \\ \mathcal{A}_E(X) &= \{J \in \mathcal{A}(X) : \text{tal que existe } p \in E(J) \text{ con } p \in \text{int}_X(J)\}. \\ \mathcal{A}_S(X) &= \mathcal{A}(X) \cup \mathcal{A}_R(X). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n(X) &= \{A \in F_n(X) : A \text{ tiene una vecindad en } F_n(X) \\ &\quad \text{que es una } n\text{-celda}\}. \\ \mathcal{SE}_n(X) &= \{\mathcal{B} \in F_n(X)/F_1(X) : \mathcal{B} \text{ tiene una vecindad en} \\ &\quad F_n(X)/F_1(X) \text{ que es una } n\text{-celda}\} \\ \mathcal{N}_n(X) &= \{A \in F_n(X) \setminus F_{n-1}(X) : A \cap (R(X) \cup \mathcal{P}(X)) = \emptyset\} \\ P_n(X) &= \{A \in F_n(X) : A \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset\}.\end{aligned}$$

Note que si X es una gráfica finita, entonces $X = \bigcup \mathcal{A}_S(X)$, en este caso, a cada elemento de $\mathcal{A}_S(X)$ le llamamos arista. Los siguientes resultados serán útiles para el desarrollo de este trabajo.

Lema 3.2. [12, Teoremas 3.3, 3.8] Sean X un continuo casi enrejado localmente conexo, y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Entonces

- (1) $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$,
- (2) $\mathcal{E}_n(X) = \mathcal{N}_n(X)$.

Lema 3.3. [10, Teorema 4.1] Sea X un continuo casi enrejado localmente conexo. Entonces, $x \in \mathcal{P}(X)$ si y sólo si existe una sucesión de elementos distintos dos a dos en $\mathcal{A}_S(X)$, que converge a $\{x\}$.

Figura 2: Bosquejo de un continuo que es enrejado y sólo tiene un punto que pertenece a $\mathcal{P}(X)$, denotado en color rojo.

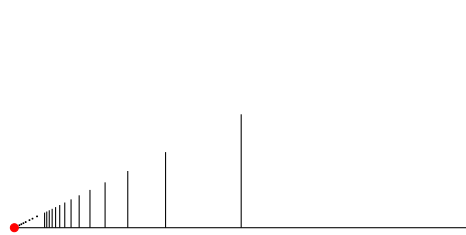
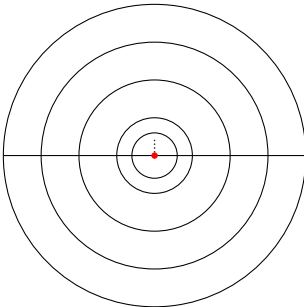


Figura 3: Continuo enrejado el cual contiene un único punto de $\mathcal{P}(X)$, además este es un punto ordinario.

Figura 4: Continuo enrejado que tiene una cantidad infinita de puntos de $\mathcal{P}(X)$, representados en color rojo los cuales son puntos de ramificación.

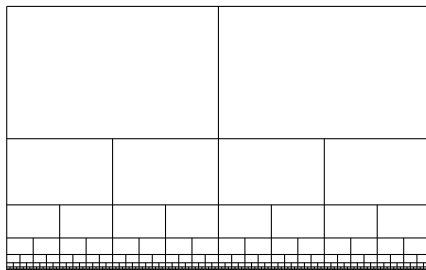
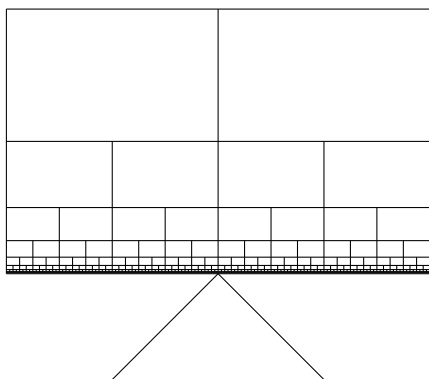


Figura 5: El continuo de la Figura 4 es un continuo enrejado. Sin embargo, si le unimos un arco, tal y como lo muestra la Figura 5, el continuo resultante es casi enrejado pero no enrejado.

4 Las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$

El conjunto $\mathcal{E}_n(X)$, definido en la sección anterior, es de vital importancia, ya que, al estar caracterizado mediante una propiedad topológica, proporciona un medio de comunicación entre los espacios $F_n(X) \setminus F_1(X)$ y $F_n(Y) \setminus F_1(Y)$. Por ello, resulta fundamental identificar las componentes de dicho conjunto y estudiar sus propiedades. En esta sección, presentamos aquellas propiedades que son necesarias para el desarrollo del problema que se pretende resolver.

A continuación, definiremos algunos subconjuntos de $F_n(X)$, que son de suma importancia para el desarrollo de este trabajo.

Sean X un continuo tal que $\mathcal{A}_S(X) \neq \emptyset$, y $n \in \mathbb{N}$. Para $t \in \mathbb{N}$, tal que $t \leq n$, consideremos la colección $I_{j_1}, \dots, I_{j_t}$ de elementos distintos $\mathcal{A}_S(X)$, y $i_1, \dots, i_t \in \mathbb{N}$ tales que $\sum_{m=1}^t i_m = n$. Definimos $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$ como el subconjunto de $F_n(X)$ tal que cada elemento en $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$ tiene exactamente i_m puntos en el interior de I_{j_m} para cada $m \in \{1, \dots, t\}$. Es decir, $A \in \mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$ implica que $|A \cap \text{int}_X(I_{j_m})| = i_m$ y $|A| = n$.

De la definición, $\text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})) \subset \langle I_{j_1}, \dots, I_{j_t} \rangle$, $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}) \subset \langle \text{int}_X(I_{j_1}), \dots, \text{int}_X(I_{j_t}) \rangle$, y para cada $I \in \mathcal{A}_S(X)$, se cumple que $\text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I^n)) = \langle I \rangle$, no confundir en esta notación el símbolo I^n , con una n -celda.

Lema 4.1. *Sean X un continuo localmente conexo tal que $\mathcal{A}_S(X) \neq \emptyset$, y $n, t, r \in \mathbb{N}$ tales que $t, r \leq n$, y $I_{j_1}, \dots, I_{j_t}, L_{j_1}, \dots, L_{j_r} \in \mathcal{A}_S(X)$, entonces los siguientes enunciados se cumplen:*

- (1) $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$ es arco conexo.
- (2) $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$.
- (3) Si $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}) \cap \mathcal{K}_X(L_{j_1}^{l_1}, \dots, L_{j_r}^{l_r}) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}) = \mathcal{K}_X(L_{j_1}^{l_1}, \dots, L_{j_r}^{l_r})$.

Demostración. (1) Sean $A, B \in \mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$. Para cada $m \in \{1, \dots, t\}$, definimos $A_m = A \cap \text{int}_X(I_{j_m})$ y $B_m = B \cap \text{int}_X(I_{j_m})$. Sea $m \in \{1, \dots, t\}$. Note que $A_m, B_m \in \langle \text{int}_X(I_{j_m}) \rangle$, y $|A_m| = |B_m| = i_m$. Por [1, Lema 3.6], existe una función continua $\alpha_m : [0, 1] \rightarrow \langle \text{int}_X(I_{j_m}) \rangle$ tal que $\alpha_m(0) = A_m$, $\alpha_m(1) = B_m$, y $|\alpha_m(x)| = i_m$ para todo $x \in [0, 1]$. Consideremos $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$ definida por $\alpha(x) = \alpha_1(x) \cup \dots \cup \alpha_t(x)$, es claro que α es una función continua, $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$. Como $[0, 1]$ es un continuo localmente conexo y α es una función continua, se tiene que $\alpha([0, 1])$ es localmente conexo. Por ende, $\alpha([0, 1])$ es arco conexo, luego existe un arco en $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$ con puntos extremos A y B . Consecuentemente, el conjunto $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$ es arco conexo.

(2) Sea $A = \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$. Consideremos $J_1, \dots, J_n \subset X$ arcos libres disjuntos dos a dos, tales que $J_k \cap R(X) = \emptyset$ y $a_k \in \text{int}_X(J_k)$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$. Entonces, $A \in \langle \text{int}_X(J_1), \dots, \text{int}_X(J_n) \rangle$. Sea $B \in \langle \text{int}_X(J_1), \dots, \text{int}_X(J_n) \rangle$, entonces $|B| = n$. Tomemos $m \in \{1, \dots, t\}$. Como $|A \cap \text{int}_X(I_{j_m})| = i_m$, se tiene que $\text{int}_X(I_{j_m})$ contiene exactamente i_m de los arcos $J_1, \dots, J_n$. Podemos suponer que $J_1, \dots, J_{i_m} \subset \text{int}_X(I_{j_m})$. Luego, para cada $s \in \{1, \dots, i_m\}$, se tiene que $B \cap \text{int}_X(J_s) \subset \text{int}_X(I_{j_m})$. Como $J_1, \dots, J_n$ son ajenos dos a dos, concluimos que $|B \cap \text{int}_X(I_{j_m})| = i_m$, por lo que $B \in \mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$. Esto muestra que $\langle \text{int}_X(J_1), \dots, \text{int}_X(J_n) \rangle \subset \mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$, por ende $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$.

(3) Sean $A = \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}) \cap \mathcal{K}_X(L_{j_1}^{l_1}, \dots, L_{j_r}^{l_r})$ y $m \in \{1, \dots, t\}$. Dado que $\text{int}_X(I_{j_m}) \cap A \neq \emptyset$, existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_k \in \text{int}_X(I_{j_m})$. Por otro lado, debe existir $m' \in \{1, \dots, r\}$ tal que $a_k \in \text{int}_X(L_{j_{m'}})$. Esto implica que $\text{int}_X(I_{j_m}) \cap \text{int}_X(L_{j_{m'}}) \neq \emptyset$. Por [15, Lema 3.1], se tiene que $I_{j_m} = L_{j_{m'}}$. Por ende, $\{I_{j_1}, \dots, I_{j_t}\} \subset \{L_{j_1}, \dots, L_{j_r}\}$. Un argumento simétrico muestra la inclusión inversa, por lo tanto $\{L_{j_1}, \dots, L_{j_r}\} = \{I_{j_1}, \dots, I_{j_t}\}$. Así, $t = r$. Supongamos que $I_{j_m} = L_{j_m}$, para cada $m \in \{1, \dots, t\}$. Finalmente, para cualquier $s \in \{1, \dots, t\}$, se tiene que $|A \cap \text{int}_X(I_{j_s})| = i_s = l_s$, por ende, $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}) = \mathcal{K}_X(L_{j_1}^{l_1}, \dots, L_{j_r}^{l_r})$. $\square$

Observación 4.2. *La condición de que X sea un continuo localmente conexo casi enrejado implica que $\mathcal{A}_S(X)$ es no vacío [7, Lemas 1, 10]. Por lo tanto, todo continuo localmente conexo casi enrejado satisface la hipótesis necesaria para la definición de los conjuntos $\mathcal{K}_X$ y, consecuentemente, para el enunciado del Lema 4.1.*

Lema 4.3. *Si X es un continuo casi enrejado localmente conexo, y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, entonces las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$ son conjuntos de la forma:*

$$\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}), \text{ para algún } t \in \{1, \dots, n\} \text{ y } I_{j_1}, \dots, I_{j_t} \in \mathcal{A}_S(X).$$

Demostración. Note que $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}) \subset \mathcal{N}_n(X)$, y por el Lema 3.2, se tiene que $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}) \subset \mathcal{E}_n(X)$. Sea $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Entonces, por el Lema 3.2 $A \in \mathcal{N}_n(X)$, lo cual implica que $A \subset \mathcal{G}(X) \cap (O(X) \cup E(X))$. Luego, existen $L_{j_1}, \dots, L_{j_r} \in \mathcal{A}_S(X)$ con $r \in \{1, \dots, n\}$ tales que $A \in \langle \text{int}_X(L_{j_1}), \dots, \text{int}_X(L_{j_r}) \rangle$. Para cada $k \in \{1, \dots, r\}$, sea $l_k \in \mathbb{N}$ tal que $|A \cap \text{int}_X(L_{j_k})| = l_k$. Como $n = |A|$ y $|A| = \sum_{k=1}^r |A \cap \text{int}_X(L_{j_k})|$, se cumple que $\sum_{k=1}^r l_k = n$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{K}_X(L_{j_1}^{l_1}, \dots, L_{j_r}^{l_r})$. Esto implica que $\mathcal{E}_n(X)$ es igual a la unión de todos los conjuntos de la forma $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$. Por el Lema 4.1, podemos concluir la prueba. $\square$

Corolario 4.4. *Si X es un continuo casi enrejado localmente conexo, y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, entonces las componentes de $\mathcal{SE}_n(X)$ son conjuntos de la forma:*

$$q_X(\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})), \text{ para algún } t \in \{1, \dots, n\} \text{ y } I_{j_1}, \dots, I_{j_t} \in \mathcal{A}_S(X).$$

Lema 4.5. *Sean X un continuo casi enrejado localmente conexo, y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Dados $I_{j_1}, \dots, I_{j_t} \in \mathcal{A}_S(X)$ con $t \in \{1, \dots, n\}$, se cumple lo siguiente:*

- (1) Si $A \in \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}))$, entonces $|A \cap \text{int}_X(I_{j_k})| \leq i_k$, para cada $k \in \{1, \dots, t\}$.
- (2) La única componente de $\mathcal{E}_n(X)$ contenida en $\text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}))$ es $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$.

Demostración. (1) Sea $A \in \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}))$, y supongamos que existe $m \in \{1, \dots, t\}$ tal que $|A \cap \text{int}_X(I_{j_m})| > i_m$. Sean $n_m = |A \cap \text{int}_X(I_{j_m})|$, y $A \cap \text{int}_X(I_{j_m}) = \{a_1, \dots, a_{n_m}\}$. Dado que $\text{int}_X(I_{j_m})$ es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_X(a_k, r) \subset \text{int}_X(I_{j_m})$ para cada $k \in \{1, \dots, n_m\}$, y $B_X(a_s, r) \cap B_X(a_t, r) = \emptyset$ para cada $s, t \in \{1, \dots, n_m\}$ con $s \neq t$. Note que existe $A_M \in \mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$ tal que $H(A_M, A) < \frac{r}{2}$. En particular, $|A_M \cap \text{int}_X(I_{j_m})| = i_m$. Tomemos $a_s, a_t \in A \cap \text{int}_X(I_{j_m})$, distintos. Existen $a'_s, a'_t \in A_M$ tales que $d_X(a'_s, a_s) < \frac{r}{2}$ y $d_X(a'_t, a_t) < \frac{r}{2}$. Luego, $a'_s, a'_t \in \text{int}_X(I_{j_m})$. Supongamos que $a'_s = a'_t$. Entonces, $d(a_s, a_t) < r$, es decir, $B_X(a_s, r) \cap B_X(a_t, r) \neq \emptyset$, lo cual no es posible. Por lo tanto, $a'_s \neq a'_t$ siempre que $s \neq t$, donde $s, t \in \{1, \dots, n_m\}$. Luego, $|A_M \cap \text{int}_X(I_{j_m})| \geq n_m > i_m$, lo cual es una contradicción. Por ende, $|A \cap \text{int}_X(I_{j_k})| \leq i_k$ para cada $k \in \{1, \dots, t\}$.

(2) Sea $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$ una componente de $\mathcal{E}_n(X)$. Supongamos que existe otra componente $\mathcal{K}_X(L_{j_1}^{l_1}, \dots, L_{j_r}^{l_r})$ de $\mathcal{E}_n(X)$, distinta de $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$, tal que $\mathcal{K}_X(L_{j_1}^{l_1}, \dots, L_{j_r}^{l_r}) \subset \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}))$. Por el Lema 4.1, se tiene que $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}) \cap \mathcal{K}_X(L_{j_1}^{l_1}, \dots, L_{j_r}^{l_r}) = \emptyset$. Sean $A \in \mathcal{K}_X(L_{j_1}^{l_1}, \dots, L_{j_r}^{l_r}) \subset \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}))$ y $a \in A$. Entonces, existe $m \in \{1, \dots, r\}$ tal que $a \in \text{int}_X(L_{j_m}^{l_m})$. Por otro lado, dado que A está en la cerradura de $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$, existe $m' \in \{1, \dots, t\}$ tal que $a \in I_{j_{m'}}^{i_{m'}}$. Luego, $I_{j_{m'}}^{i_{m'}} \cap \text{int}_X(L_{j_m}^{l_m}) \neq \emptyset$. Por [15, Lema 3.1], se tiene que $I_{j_{m'}}^{i_{m'}} = L_{j_m}^{l_m}$. Por ende, $A \subset \bigcup_{k=1}^t \text{int}_X(I_{j_k}^{i_k})$. Así, $|A| = \sum_{k=1}^t |A \cap \text{int}_X(I_{j_k}^{i_k})|$. De 1, se tiene que $|A \cap \text{int}_X(I_{j_k}^{i_k})| \leq i_k$ para cada $k \in \{1, \dots, t\}$, entonces $|A| = \sum_{k=1}^t |A \cap \text{int}_X(I_{j_k}^{i_k})| \leq \sum_{k=1}^t i_k = n$. Como $A \in \mathcal{E}_n(X)$, por el Lema 3.2 se tiene que $|A| = n$, esto implica que $|A \cap \text{int}_X(I_{j_k}^{i_k})| = i_k$ para cada $k \in \{1, \dots, t\}$. Consecuentemente, $A \in \mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$, contradiciendo el hecho de que $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}) \cap \mathcal{K}_X(L_{j_1}^{l_1}, \dots, L_{j_r}^{l_r}) = \emptyset$. Por lo tanto, la única componente de $\mathcal{E}_n(X)$ contenida en $\text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}))$ es $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$. $\square$

Teorema 4.6. Sean X un continuo casi enrejado localmente conexo, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, y $I_{j_1}, \dots, I_{j_t} \in \mathcal{A}_S(X)$ con $t \geq 2$. Entonces, se cumple que:

$$\text{int}_{F_n(X)}(\text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}))) = \mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}).$$

Demostración. Como $\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}) \subset \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}))$ y es un subconjunto abierto de $F_n(X)$, se tiene que

$$\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}) \subset \text{int}_{F_n(X)}(\text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}))).$$

Sea $A \in \text{int}_{F_n(X)}(\text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})))$. Vamos a probar que $A \in \mathcal{N}_n(X)$, es decir,

$$(1) A \cap R(X) = \emptyset, \quad (2) A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset, \quad (3) A \in F_n(X) \setminus F_{n-1}(X).$$

Note que existe $r > 0$ tal que $B_{F_n(X)}(A, r) \subset \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})) \subset \langle I_{j_1}, \dots, I_{j_t} \rangle$.

Para (1). Supongamos que $A \cap R(X) \neq \emptyset$. Sea $p \in A \cap R(X)$. Como $A \in \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}))$, existe $B \in B_{F_n(X)}(A, \frac{r}{4}) \cap \mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$. Entonces, existe $b \in B$ tal que $d(p, b) < \frac{r}{4}$ y $b \in \text{int}_X(I_{j_k})$, para algún $k \in \{1, \dots, t\}$.

Consideremos $I \in \mathcal{A}_S(X) \setminus \{I_{j_k}\}$ tal que $p \in I$. Podemos tomar $c \in \text{int}_X(I) \setminus B$ con $d(c, p) < \frac{r}{4}$. Entonces $d(c, b) < \frac{r}{2}$. Sea $C = (B \setminus \{b\}) \cup \{c\}$. Luego, $H(B, C) < \frac{r}{2}$. Así, $H(A, C) \leq H(A, B) + H(C, B) < r$, por lo que $C \in B_{F_n(X)}(A, r)$. Se tiene que $C \in \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}))$. Por lo tanto, existe $l \in \{1, \dots, t\}$ tal que $c \in I_{j_l}$. Esto implica que $I_{j_l} \cap \text{int}_X(I) \neq \emptyset$. Por [15, Lema 3.1], se tiene que $I_{j_l} = I$. Así, $I \in \{I_{j_1}, \dots, I_{j_t}\} \setminus \{I_{j_k}\}$.

Observemos que $|C \cap \text{int}_X(I_{j_l})| = |(B \setminus \{b\}) \cup \{c\} \cap \text{int}_X(I_{j_l})| = |(B \setminus \{b\}) \cap \text{int}_X(I_{j_l})| + |\{c\} \cap \text{int}_X(I_{j_l})| = |B \cap \text{int}_X(I_{j_l})| + 1$. Como $B \in \mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$, se tiene que $|B \cap \text{int}_X(I_{j_l})| = i_l$, por lo que $|C \cap \text{int}_X(I_{j_l})| = i_l + 1 > i_l$. Por el Lema 4.5, se tiene que $C \notin \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}))$, lo que contradice el hecho de que $C \in B_{F_n(X)}(A, r) \subset \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}))$. Por lo tanto, $A \cap R(X) = \emptyset$.

Para (2). Supongamos que $A \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$. Sea $a \in A \cap \mathcal{P}(X)$. Por el Lema 3.3, existe una sucesión $\{I_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathcal{A}_S(X)$ de elementos distintos, dos a dos, que converge a $\{a\}$. Luego, existe $I_N \in \mathcal{A}_S(X)$ con $I_N \in B_{F_n(X)}(\{a\}, r)$ y $I_N \neq I_{j_k}$ para todo $k \in \{1, \dots, t\}$. Podemos tomar $x \in \text{int}_X(I_N)$ tal que $d(x, a) < r$. Note que $x \notin I_{j_k}$ para cada $k \in \{1, \dots, t\}$. Sea $B = (A \setminus \{a\}) \cup \{x\}$. Entonces $B \in B_{F_n(X)}(A, r)$, pero $B \notin \langle I_{j_1}, \dots, I_{j_t} \rangle$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$.

Para (3). Supongamos que $A \in F_{n-1}(X)$. Como $A \cap R(X) = \emptyset$ y $A \in \langle I_{j_1}, \dots, I_{j_t} \rangle$, se tiene que $A \in \langle \text{int}_X(I_{j_1}), \dots, \text{int}_X(I_{j_t}) \rangle$. Por el Lema 4.5, se cumple que $|A \cap \text{int}_X(I_{j_k})| \leq i_k$ para cada $k \in \{1, \dots, t\}$. Como $|A| < n$, existe

$k' \in \{1, \dots, t\}$ tal que $|A \cap \text{int}_X(I_{j_{k'}})| < i_{k'}$. Dado que $t \geq 2$, podemos tomar $k_0 \in \{1, \dots, t\} \setminus \{k'\}$.

Podemos tomar $b_1, \dots, b_{n-|A|} \in \text{int}_X(I_{j_{k_0}}) \setminus A$ puntos distintos, tales que el subconjunto $B = \{b_1, \dots, b_{n-|A|}\} \cup A$, satisface que $H(A, B) < r$. Por lo tanto, $B \in B_{F_n(X)}(A, r)$ y $B \subset \bigcup_{k=1}^t \text{int}_X(I_{j_k})$. Por el Lema 4.5, se tiene que $|B \cap \text{int}_X(I_{j_k})| \leq i_k$ para todo $k \in \{1, \dots, t\}$. Observemos que $|B| = n$ y $|B \cap \text{int}_X(I_{j_{k'}})| = |A \cap \text{int}_X(I_{j_{k'}})|$. Entonces,

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{k \in \{1, \dots, t\}} |B \cap \text{int}_X(I_{j_k})| \\ &= \left(\sum_{k \in \{1, \dots, t\} \setminus \{k'\}} |B \cap \text{int}_X(I_{j_k})| \right) + |B \cap \text{int}_X(I_{j_{k'}})| \\ &< \sum_{k \in \{1, \dots, t\}} i_k = n. \end{aligned}$$

Esto es una contradicción. Por lo tanto, $A \in F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$. Luego, $A \in \mathcal{N}_n(X)$, y por el Lema 3.2, se tiene que $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Luego, $A \in \mathcal{E}_n(X) \cap \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}))$. Del Lema 4.5, se tiene que:

$$\mathcal{E}_n(X) \cap \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})) = \mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}).$$

Consecuentemente, $A \in \mathcal{K}_X(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$. □

5 La clase de los continuos enrejados es SF_n -cerrada

En esta sección probamos los resultados necesarios para demostrar que la clase de los continuos enrejados es SF_n -cerrada (véase el Teorema 5.10). Esto es posible si podemos garantizar que, siempre que exista un homeomorfismo $h: F_n(X)/F_1(X) \rightarrow F_n(Y)/F_1(Y)$ se cumple que $h(F_X) = F_Y$. Este hecho se establece en el Teorema 5.6. El Teorema 5.1 muestra que la clase de los continuos casi enrejados localmente conexos es SF_n -cerrada. Esta clase de continuos es más amplia que la de los continuos enrejados y sienta las bases de la investigación.

Teorema 5.1. [18, Lema 2.8] Sean X y Y continuos tales que $F_n(X)/F_1(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)/F_1(Y)$, para algún $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Entonces X es un continuo casi enrejado localmente conexo si y sólo si Y es un continuo casi enrejado localmente conexo.

Teorema 5.2. Sean X un continuo casi enrejado localmente conexo tal que $R(X) \neq \emptyset$ y $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, entonces

$$\begin{aligned} & \bigcap \{ \text{cl}_{F_n(X)/F_1(X)}(q_X(\mathcal{K}_X(I^n))) : I \in \mathcal{A}_S(X) \} \\ &= \begin{cases} \{F_X\} & \text{si } |\bigcap \mathcal{A}_S(X)| \neq 2, \\ \{F_X, q_X(\{p, q\})\} & \text{si } \bigcap \mathcal{A}_S(X) = \{p, q\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Demostración. Como X es un continuo casi enrejado localmente conexo con $R(X) \neq \emptyset$, se tiene que $|\mathcal{A}_S(X)| \geq 2$. Consecuentemente, se tiene que $|\bigcap \mathcal{A}_S(X)| \leq 2$. Sean $I \in \mathcal{A}_S(X)$ y $a \in I$. Por ende, $\{a\} \in \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I^n))$. De esto que $F_X = q_X(\{a\}) \in \text{cl}_{F_n(X)/F_1(X)}(q_X(\mathcal{K}_X(I^n)))$. Esto muestra que

$$\{F_X\} \subset \bigcap \{ \text{cl}_{F_n(X)/F_1(X)}(q_X(\mathcal{K}_X(I^n))) : I \in \mathcal{A}_S(X) \}.$$

Supongamos que existe $\mathcal{B} \in \bigcap \{ \text{cl}_{F_n(X)/F_1(X)}(q_X(\mathcal{K}_X(I^n))) : I \in \mathcal{A}_S(X) \} \setminus \{F_X\}$. Sea $B \in F_n(X) \setminus F_1(X)$ tal que $q_X(B) = \mathcal{B}$. Para cada $I \in \mathcal{A}_S(X)$, dado que $\mathcal{B} \in \text{cl}_{F_n(X)/F_1(X)}(q_X(\mathcal{K}_X(I^n))) \setminus \{F_X\}$ se tiene que $B \in \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I^n))$, por ende $B \subset I$. Consecuentemente, $B \subset \bigcap \mathcal{A}_S(X)$. Consideremos los siguientes casos:

1. $\bigcap \mathcal{A}_S(X) = \{p, q\}$. Se cumple que $|B| = 2$, Entonces $B = \{p, q\}$, luego $\mathcal{B} = q_X(\{p, q\})$. Esto implica que:

$$\{F_X, q_X(\{p, q\})\} = \bigcap \{ \text{cl}_{F_n(X)/F_1(X)}(q_X(\mathcal{K}_X(I^n))) : I \in \mathcal{A}_S(X) \}.$$

2. $|\bigcap \mathcal{A}_S(X)| \neq 2$. Entonces $|B| \leq 1$, lo cual contradice que $B \in F_n(X) \setminus F_1(X)$. Luego, $\bigcap \{ \text{cl}_{F_n(X)/F_1(X)}(q_X(\mathcal{K}_X(I^n))) : I \in \mathcal{A}_S(X) \} \setminus \{F_X\} = \emptyset$.

Esto concluye la demostración. □

Teorema 5.3. Sea X un continuo casi enrejado localmente conexo tal que $R(X) \neq \emptyset$. Si $|\bigcap \mathcal{A}_S(X)| = 2$, entonces X es una gráfica finita.

Demostración. Por [7, Teorema 4], basta con demostrar que $\mathcal{P}(X) = \emptyset$. Sean $p, q \in X$ tal que $p \neq q$ y $\{p, q\} = \bigcap \mathcal{A}_S(X)$. Note que p y q pertenecen a cualquier elemento de $\mathcal{A}_S(X)$. Supongamos, para llegar a una contradicción, que $\mathcal{P}(X) \neq \emptyset$. Sea $a \in \mathcal{P}(X)$. Entonces, por el Lema 3.3, existe una sucesión $\{I_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_S(X)$ de elementos distintos, dos a dos, que convergen a $\{a\}$. Entonces, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $H(I_{m_0}, \{a\}) < \frac{d(p,q)}{2}$. Dado que p y q pertenecen a I_{m_0} , se tiene que $p, q \in B_X(a, \frac{d(p,q)}{2})$, lo cual implica que $d(p, q) < d(p, q)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{P}(X) = \emptyset$. Así, X es una gráfica finita. $\square$

El siguiente resultado es una consecuencia de [18, Teorema 3.8] y del Teorema 5.3.

Teorema 5.4. *Sea X un continuo casi enrejado localmente conexo tal que $R(X) \neq \emptyset$. Si $|\bigcap \mathcal{A}_S(X)| = 2$ y $n \geq 4$, entonces X tiene n -ésimo producto simétrico suspensión único.*

Teorema 5.5. *Sean X un continuo casi enrejado localmente conexo, Y un continuo y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si existe $h: F_n(X)/F_1(X) \rightarrow F_n(Y)/F_1(Y)$ un homeomorfismo, entonces:*

- (1) *Para cada $I \in \mathcal{A}_S(X)$, $h(q_X(\mathcal{K}_X(I^n))) = q_Y(\mathcal{K}_Y(I_h^n))$, para algún $I_h \in \mathcal{A}_S(Y)$.*
- (2) *La asociación $I \mapsto I_h$ es una biyección entre $\mathcal{A}_S(X)$ y $\mathcal{A}_S(Y)$.*

Demostración. Del Teorema 5.1, se tiene que Y es un continuo casi enrejado localmente conexo. Sea $I \in \mathcal{A}_S(X)$. Por el Lema 4.3, el subconjunto $\mathcal{K}_X(I^n)$ es una componente de $\mathcal{E}_n(X)$. Se sigue de [18, Lema 2.5] que $q_X(\mathcal{K}_X(I^n)) \subset \mathcal{SE}_n(X)$. Más aún, de la continuidad de q_X , se tiene que $q_X(\mathcal{K}_X(I^n))$ es una componente de $\mathcal{SE}_n(X)$.

Por ende, $h(q_X(\mathcal{K}_X(I^n))) \subset h(\mathcal{SE}_n(X)) = \mathcal{SE}_n(Y)$, y dado que h es un homeomorfismo, se tiene que $h(q_X(\mathcal{K}_X(I^n)))$ es una componente de $\mathcal{SE}_n(Y)$. Luego, por el Corolario 4.4, existen $I_{j_1}, \dots, I_{j_t} \in \mathcal{A}_S(Y)$ y $i_1, \dots, i_t \in \mathbb{N}$, con $t \in \{1, \dots, n\}$ y $\sum_{k=1}^t i_k = n$, tales que

$$h(q_X(\mathcal{K}_X(I^n))) = q_Y(\mathcal{K}_Y(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})).$$

Veamos que $t = 1$. Supongamos, para llegar a una contradicción que $t > 1$. Como h es un homeomorfismo, existe $\mathcal{B} \in F_n(X)/F_1(X)$ tal que $h(\mathcal{B}) = F_Y$. Por ende, como q_X es suprayectiva, existe $B \in F_n(X)$ tal que $q_X(B) = \mathcal{B}$, por ende $h(q_X(B)) = F_Y$. Similarmente, existe $\mathcal{B}' \in F_n(Y)/F_1(Y)$ tal que $h^{-1}(\mathcal{B}') = F_X$, y por la suprayectividad de q_Y , existe $B' \in F_n(Y)$ tal que $q_Y(B') = \mathcal{B}'$. Así, $h^{-1}(q_Y(B')) = F_X$. Sean $\mathcal{F} = F_n(X) \setminus (F_1(X) \cup \{B\})$ y $\mathcal{F}' = F_n(Y) \setminus (F_1(Y) \cup \{B'\})$. Note que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son subconjuntos abiertos de $F_n(X)$ y $F_n(Y)$, respectivamente. Por [18, Lema 2.5(b)], se tiene que $\mathcal{K}_X(I^n) \subset \mathcal{F}$ y $\mathcal{K}_Y(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}) \subset \mathcal{F}'$. Entonces, del Teorema 4.6, se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{int}_{\mathcal{F}'}(\text{cl}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{K}_Y(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}))) &= \text{int}_{\mathcal{F}'}(\text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})) \cap \mathcal{F}') \\ &= \text{int}_{F_n(Y)}(\text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})) \cap \mathcal{F}') \cap \mathcal{F}' \\ &= \text{int}_{F_n(Y)}(\text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}))) \cap \text{int}_{F_n(Y)}(\mathcal{F}') \cap \mathcal{F}' \\ &= \mathcal{K}_Y(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}) \cap \mathcal{F}' \\ &= \mathcal{K}_Y(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}). \end{aligned}$$

Consideremos, $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ definida por $g(B) = ((q_Y|_{\mathcal{F}'})^{-1} \circ h \circ q_X|_{\mathcal{F}})(B)$. Note que g es un homeomorfismo. Observemos que $g(\mathcal{K}_X(I^n)) = q_Y^{-1}(h(q_X(\mathcal{K}_X(I^n)))) = q_Y^{-1}(q_Y(\mathcal{K}_Y(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}))) = \mathcal{K}_Y(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})$. Esto implica que:

$$\begin{aligned} \text{cl}_{\mathcal{F}'}(g(\mathcal{K}_X(I^n))) &= \text{cl}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{K}_Y(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})) \\ g(\text{cl}_{\mathcal{F}}(\mathcal{K}_X(I^n))) &= \text{cl}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{K}_Y(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t})) \\ \text{int}_{\mathcal{F}'}(g(\text{cl}_{\mathcal{F}}(\mathcal{K}_X(I^n)))) &= \text{int}_{\mathcal{F}'}(\text{cl}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{K}_Y(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}))) \\ g(\text{int}_{\mathcal{F}}(\text{cl}_{\mathcal{F}}(\mathcal{K}_X(I^n)))) &= \mathcal{K}_Y(I_{j_1}^{i_1}, \dots, I_{j_t}^{i_t}). \end{aligned}$$

Como g es un homeomorfismo, se tiene que $\mathcal{K}_X(I^n) = \text{int}_{\mathcal{F}}(\text{cl}_{\mathcal{F}}(\mathcal{K}_X(I^n)))$. Observemos que $\text{cl}_{\mathcal{F}}(\mathcal{K}_X(I^n)) = \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I^n)) \cap \mathcal{F} = \langle I \rangle \cap \mathcal{F}$. Luego, $\text{int}_{\mathcal{F}}(\text{cl}_{\mathcal{F}}(\mathcal{K}_X(I^n))) = \text{int}_{\mathcal{F}}(\langle I \rangle \cap \mathcal{F}) = \text{int}_{\mathcal{F}}(\langle I \rangle) \cap \mathcal{F}$. Como $\text{int}_{F_n(X)}(\langle I \rangle) = \langle \text{int}_X(I) \rangle$, se tiene que $\text{int}_{\mathcal{F}}(\langle I \rangle) = \langle \text{int}_X(I) \rangle \cap \mathcal{F}$. Así, $\mathcal{K}_X(I^n) = \langle \text{int}_X(I) \rangle \cap \mathcal{F}$.

Dado que $n \geq 4$, se tiene que $(\langle \text{int}_X(I) \rangle \cap \mathcal{F}) \cap F_{n-1}(X) \neq \emptyset$, lo que implica que $\mathcal{K}_X(I^n) \cap F_{n-1}(X) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $t = 1$. Esto finaliza la prueba de la parte 1.

Para (2). Sea $I \in \mathcal{A}_S(X)$. De la parte 1, existe $I_h \in \mathcal{A}_S(Y)$ tal que $h(q_X(\mathcal{K}_X(I^n))) = q_Y(\mathcal{K}_Y(I_h^n))$. Supongamos que existe $L_h \in \mathcal{A}_S(Y) \setminus \{I_h\}$

tal que $h(q_X(\mathcal{K}_X(I^n))) = q_Y(\mathcal{K}_Y(L_h^n))$. Note que $q_Y^*(\mathcal{K}_Y(I_h^n)) = q_Y(\mathcal{K}_Y(I_h^n))$ y $q_Y^*(\mathcal{K}_Y(L_h^n)) = q_Y(\mathcal{K}_Y(L_h^n))$. Como q_Y^* es inyectiva, entonces $\mathcal{K}_Y(I_h^n) = \mathcal{K}_Y(L_h^n)$. Luego, $I_h = L_h$. Por ende, la asociación esta bien definida. Supongamos ahora que, para algún $J \in \mathcal{A}_S(X)$ se cumple que $h(q_X(\mathcal{K}_X(J^n))) = q_Y(\mathcal{K}_Y(I_h^n))$. Dado que h es un homeomorfismo, se tiene que $q_X(\mathcal{K}_X(I^n)) = q_X(\mathcal{K}_X(J^n))$. Así, $\mathcal{K}_X(I^n) = \mathcal{K}_X(J^n)$. Esto implica que $I = J$, probando así que, la asociación es inyectiva. La sobreyectividad de dicha asociación, se obtiene simétricamente aplicando h^{-1} . $\square$

Teorema 5.6. *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Sea X un continuo casi enrejado localmente conexo con $R(X) \neq \emptyset$, tal que X no es una gráfica finita y Y un continuo. Si existe $h: F_n(X)/F_1(X) \rightarrow F_n(Y)/F_1(Y)$ un homeomorfismo, entonces $h(F_X) = F_Y$.*

Demostración. Del Teorema 5.1, se tiene que Y es un continuo casi enrejado localmente conexo. Como X no es una gráfica finita, el Teorema 5.3 implica que $|\bigcap \mathcal{A}_S(X)| < 2$. Entonces, del Teorema 5.2, se tiene que:

$$\bigcap \{\text{cl}_{F_n(X)/F_1(X)}(q_X(\mathcal{K}_X(I^n))) : I \in \mathcal{A}_S(X)\} = \{F_X\}.$$

Supongamos que $|\bigcap \mathcal{A}_S(Y)| = 2$. Entonces, del Teorema 5.3, se tendría que Y es una gráfica finita. Como h es un homeomorfismo, se sigue de [18, Teorema 3.8] que X debería ser gráfica finita, esto es una contradicción. Por lo tanto, $|\bigcap \mathcal{A}_S(Y)| < 2$. Del Teorema 5.2, se cumple que

$$\bigcap \{\text{cl}_{F_n(Y)/F_1(Y)}(q_Y(\mathcal{K}_Y(I^n))) : I \in \mathcal{A}_S(Y)\} = \{F_Y\}.$$

Luego, del Teorema 5.5, se tiene que

$$\begin{aligned} h(\{F_X\}) &= h\left(\bigcap \{\text{cl}_{F_n(X)/F_1(X)}(q_X(\mathcal{K}_X(I^n))) : I \in \mathcal{A}_S(X)\}\right) \\ &= \bigcap \{h(\text{cl}_{F_n(X)/F_1(X)}(q_X(\mathcal{K}_X(I^n)))) : I \in \mathcal{A}_S(X)\} \\ &= \bigcap \{(\text{cl}_{F_n(Y)/F_1(Y)}(h(q_X(\mathcal{K}_X(I^n)))) : I \in \mathcal{A}_S(X)\} \\ &= \bigcap \{\text{cl}_{F_n(Y)/F_1(Y)}(q_Y(\mathcal{K}_Y(I_h^n))) : I_h \in \mathcal{A}_S(Y)\} \\ &= \{F_Y\}. \end{aligned} \quad \square$$

Observación 5.7. *Sea $g: F_n(X) \setminus F_1(X) \rightarrow F_n(Y) \setminus F_1(Y)$ definida por $g(A) = ((q_Y^*)^{-1} \circ h \circ q_X^*)(A)$. Como $h(F_X) = \{F_Y\}$, se tiene que g es un homeomorfismo.*

Teorema 5.8. Sean X un continuo casi enrejado localmente conexo y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si $A \in P_n(X)$ y $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U}$ intersecta a una cantidad infinita de componentes de $\mathcal{E}_n(X)$.

Demostración. Sean $A \in P_n(X)$ y $P = \{p_1, \dots, p_s\} \subset \mathcal{P}(X)$ y $G = \{g_1, \dots, g_t\} \subset \mathcal{G}(X)$ tal que $A = P \cup G$. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $F_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}$. Podemos tomar $r > 0$ tal que $B_X(x, r) \cap B_X(y, r) = \emptyset$ para todo $x, y \in A$ con $x \neq y$,

$$\mathcal{V} = \langle B_X(p_1, r), \dots, B_X(p_s, r), B_X(g_1, r), \dots, B_X(g_t, r) \rangle \subset \mathcal{U}.$$

Para cada $g_j \in G$, existe $I_{g_j} \in \mathcal{A}_S(X)$ tal que $B_X(g_j, r) \cap \text{int}_X(I_{g_j}) \neq \emptyset$. Más aún, por el Lema 3.3, para cada $p_j \in P$ existe una sucesión $\{I_{p_j}^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{A}_S(X)$ de elementos distintos, dos a dos, que convergen a $\{p_j\}$. Podemos suponer que $I_{p_j}^k \subset B_X(p_j, r)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $s + t \leq n$, podemos tomar $i_{p_1}, \dots, i_{p_s}, i_{g_1}, \dots, i_{g_t} \in \mathbb{N}$ tales que $\sum_{j=1}^s i_{p_j} + \sum_{j=1}^t i_{g_j} = n$. Sea

$$C_k = \mathcal{K}_X((I_{p_1}^k)^{i_{p_1}}, \dots, (I_{p_s}^k)^{i_{p_s}}, I_{g_1}^{i_{g_1}}, \dots, I_{g_t}^{i_{g_t}}).$$

Por el Lema 4.3, C_k es una componente de $\mathcal{E}_n(X)$. A su vez, el Lema 4.1 garantiza que $C_k \cap C_{k'} = \emptyset$ para todo $k, k' \in \mathbb{N}$ tales que $k \neq k'$. De la construcción de $\mathcal{V}$, se tiene que $\mathcal{V} \cap C_k \neq \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Consecuentemente, $\mathcal{U}$ intersecta a una cantidad infinita de componentes de $\mathcal{E}_n(X)$. $\square$

Teorema 5.9. Sean X un continuo casi enrejado localmente conexo, Y un continuo y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si existe $h: F_n(X)/F_1(X) \rightarrow F_n(Y)/F_1(Y)$ un homeomorfismo, entonces $g(P_n(X) \setminus F_1(X)) = P_n(Y) \setminus F_1(Y)$.

Demostración. De [18, Lema 2.8], se cumple que Y es un continuo casi enrejado localmente conexo. Sea $A \in P_n(X) \setminus F_1(X)$. Supongamos que $g(A) \notin P_n(Y) \setminus F_1(Y)$, es decir, $g(A) \cap \mathcal{P}(Y) = \emptyset$. Por [7, Teorema 4], existe $D \subset Y$ una gráfica finita tal que $g(A) \subset \text{int}_Y(D)$. Observemos que $\langle \text{int}_Y(D) \rangle \setminus F_1(Y)$ es un subconjunto abierto de $F_n(Y) \setminus F_1(Y)$ que tiene a $g(A)$. Como g es continua, existe $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $F_n(X) \setminus F_1(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}$ y $g(\mathcal{U}) \subset \langle \text{int}_Y(D) \rangle \setminus F_1(Y)$. Dado que $A \in P_n(X) \setminus F_1(X)$, el Teorema 5.8 implica que $\mathcal{U}$ intersecta una cantidad infinita de componentes de $\mathcal{E}_n(X)$. Por [1, Lema 3.13], $g(\mathcal{U})$ debe intersectar una cantidad infinita de componentes de $\mathcal{E}_n(Y)$. Consecuentemente, $\langle \text{int}_Y(D) \rangle \setminus F_1(Y)$ también intersecta

una cantidad infinita de componentes de $\mathcal{E}_n(Y)$. Sin embargo, como D es una gráfica finita, $\langle \text{int}_Y(D) \rangle \setminus F_1(Y)$ sólo puede intersectar una cantidad finita de componentes de $\mathcal{E}_n(Y)$, esto por [4, Teorema 3.4]. Por lo tanto, $g(A) \in P_n(Y) \setminus F_1(Y)$. Esto implica que $g(P_n(X) \setminus F_1(X)) \subset P_n(Y) \setminus F_1(Y)$. Como g es un homeomorfismo y Y tiene las mismas propiedades que X , se cumple que $g^{-1}(P_n(Y) \setminus F_1(Y)) \subset P_n(X) \setminus F_1(X)$. Por ende, la igualdad se cumple. $\square$

Teorema 5.10. *Sean X un continuo enrejado, Y un continuo y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si existe $h: F_n(X)/F_1(X) \rightarrow F_n(Y)/F_1(Y)$ un homeomorfismo, entonces Y es un continuo enrejado.*

Demostración. Supongamos que Y no es enrejado. Entonces, existen $y \in \mathcal{P}(Y)$ y W una vecindad de y tales que, para cada U subconjunto abierto de Y tal que $y \in U \subset W$, se cumple que el subconjunto $U \cap \mathcal{G}(Y)$ es desconexo.

Sea g el homeomorfismo de la Observación 5.7. Por [18, Lema 2.8], Y es un continuo casi enrejado localmente conexo.

Supongamos que $\text{diám}(Y) = R$. Tomemos $r \in (0, \frac{R}{4}]$ tal que $B_Y(y, r) \subset W$. Existe V un subconjunto abierto de Y y conexo tal que $y \in V \subset B_Y(y, r) \subset W$, $\text{cl}_Y(V) \subset W$, y $V \cap \mathcal{G}(Y)$ es desconexo. Como $\text{diám}(\text{cl}_Y(V)) \leq \frac{R}{2} < R$, entonces $Y \setminus \text{cl}_Y(V)$ abierto y no vacío. Por [7, Lema 1] se tiene que $(\bigcup \{\text{int}_Y(J) : J \text{ es un arco libre en } Y\}) \cap (Y \setminus \text{cl}_Y(V)) \neq \emptyset$. Por ende, existe a arco libre $J \subset Y$ tal que $\text{int}_Y(J) \cap (Y \setminus \text{cl}_Y(V)) \neq \emptyset$. Sea V' una la componente de $\text{int}_Y(J) \cap (Y \setminus \text{cl}_Y(V))$. Entonces V' es un subconjunto, no vacío y abierto de Y tal que $V' \subset \mathcal{G}(Y)$ y $V' \cap V = \emptyset$.

Fijemos $v \in V'$. Entonces $\{y, v\} \in \langle V, V' \rangle$. Sea $|g^{-1}(\{y, v\})| = l$, donde $l \in \{2, \dots, n\}$. Como $g^{-1}(\langle V, V' \rangle)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X) \setminus F_1(X)$ y X es un continuo enrejado, existen $U_1, \dots, U_l$ subconjuntos abiertos y conexos de X , ajenos dos a dos, tales que $U_i \cap \mathcal{G}(X)$ es conexo para cada $i \in \{1, \dots, l\}$ y además

$$g^{-1}(\{y, v\}) \in \langle U_1, \dots, U_l \rangle \subset g^{-1}(\langle V, V' \rangle).$$

Afirmación. Para cada $\varepsilon > 0$, $B_Y(y, \varepsilon)$ intersecta a más de una componente de $V \cap \mathcal{G}(Y)$.

Prueba de la Afirmación. Sea $\varepsilon > 0$. Podemos tomar $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ tal que $B_Y(y, \varepsilon') \subset V$. Se tiene que $B_Y(y, \varepsilon') \cap \mathcal{G}(Y) \subset V \cap \mathcal{G}(Y)$. Como $B_Y(y, \varepsilon') \cap \mathcal{G}(Y) \neq \emptyset$, entonces $B_Y(y, \varepsilon')$ intersecta al menos a una componente de

$V \cap \mathcal{G}(Y)$. Supongamos que existe C una componente de $V \cap \mathcal{G}(Y)$ tal que $B_Y(y, \varepsilon') \cap \mathcal{G}(Y) \subset C$. Observemos que $\text{cl}_Y(B_Y(y, \varepsilon')) = \text{cl}_Y(B_Y(y, \varepsilon') \cap \mathcal{G}(Y)) \subset \text{cl}_Y(C)$. Consecuentemente, $y \in B_Y(y, \varepsilon') \subset \text{cl}_Y(B_Y(y, \varepsilon')) \subset \text{cl}_Y(C)$. Esto muestra que $y \in \text{int}_Y(\text{cl}_Y(C)) \subset \text{int}_Y(\text{cl}_Y(V)) \subset \text{cl}_Y(V) \subset W$. Por lo tanto, $\text{int}_Y(\text{cl}_Y(C)) \cap \mathcal{G}(Y)$ debe ser desconexo. Sin embargo, como C es un subconjunto abierto de Y , se tiene que $C \subset \text{int}_Y(\text{cl}_Y(C))$. Por lo tanto,

$$C \subset \text{int}_Y(\text{cl}_Y(C)) \cap \mathcal{G}(Y) \subset \text{cl}_Y(C).$$

Esto implica que $\text{int}_Y(\text{cl}_Y(C)) \cap \mathcal{G}(Y)$ es conexo, lo cual es una contradicción. Luego, la Afirmación ha sido demostrada.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, sean S_m y T_m las distintas componentes de $V \cap \mathcal{G}(Y)$ tales que $B_Y(y, \frac{1}{m}) \cap S_m \neq \emptyset$ y $B_Y(y, \frac{1}{m}) \cap T_m \neq \emptyset$. Podemos tomar $\{s_m\}_{m=1}^\infty$ y $\{t_m\}_{m=1}^\infty$ sucesiones tales que $s_m \in B_Y(y, \frac{1}{m}) \cap S_m$ y $t_m \in B_Y(y, \frac{1}{m}) \cap T_m$. Estas sucesiones satisfacen que $s_m, t_m \in V \cap \mathcal{G}(Y)$, $v \neq s_m$, y $v \neq t_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Más aún, $\lim s_m = y$ y $\lim t_m = y$.

A su vez, las sucesiones $\{\{v, s_m\}\}_{m=1}^\infty$ y $\{\{v, t_m\}\}_{m=1}^\infty$ en $F_n(Y) \setminus F_1(Y)$ convergen a $\{v, y\}$. De la continuidad de g^{-1} , se tiene que $\lim g^{-1}(\{v, s_m\}) = g^{-1}(\{v, y\})$ y $\lim g^{-1}(\{v, t_m\}) = g^{-1}(\{v, y\})$.

Como $\langle U_1, \dots, U_l \rangle$ es una vecindad abierta de $g^{-1}(\{v, y\})$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $g^{-1}(\{v, s_M\}), g^{-1}(\{v, t_M\}) \in \langle U_1, \dots, U_l \rangle$. Dado que $\{v, s_M\}, \{v, t_M\} \subset \mathcal{G}(Y)$, el Teorema 5.9 implica que $g^{-1}(\{v, s_M\}), g^{-1}(\{v, t_M\}) \subset \mathcal{G}(X)$. Consecuentemente,

$$g^{-1}(\{v, s_M\}), g^{-1}(\{v, t_M\}) \in \langle U_1 \cap \mathcal{G}(X), \dots, U_l \cap \mathcal{G}(X) \rangle.$$

Como cada $U_i \cap \mathcal{G}(X)$ es un subconjunto abierto y conexo de X , se tiene que $U_i \cap \mathcal{G}(X)$ es arco conexo. Por lo tanto, $\langle U_1 \cap \mathcal{G}(X), \dots, U_l \cap \mathcal{G}(X) \rangle$ es un subconjunto arco conexo de $F_n(X) \setminus F_1(X)$. Por ende, $g(\langle U_1 \cap \mathcal{G}(X), \dots, U_l \cap \mathcal{G}(X) \rangle)$ es un subconjunto arco conexo de $F_n(Y) \setminus F_1(Y)$ tal que

$$g(\langle U_1 \cap \mathcal{G}(X), \dots, U_l \cap \mathcal{G}(X) \rangle) \subset \langle V, V' \rangle.$$

Nuevamente, del Teorema 5.9 se cumple que,

$$g(\langle U_1 \cap \mathcal{G}(X), \dots, U_l \cap \mathcal{G}(X) \rangle) \subset \langle V \cap \mathcal{G}(Y), V' \cap \mathcal{G}(Y) \rangle = \langle V \cap \mathcal{G}(Y), V' \rangle.$$

Entonces, $\{v, s_M\}, \{v, t_M\} \in g(\langle U_1 \cap \mathcal{G}(X), \dots, U_l \cap \mathcal{G}(X) \rangle)$. Consecuentemente, existe $\alpha \subset g(\langle U_1 \cap \mathcal{G}(X), \dots, U_l \cap \mathcal{G}(X) \rangle)$ un arco que contiene a

$\{v, s_M\}$ y $\{v, t_M\}$. Como $\alpha \cap F_2(Y) \neq \emptyset$, [21, Corollary 3.4, p.100] implica que $\bigcup \alpha$ es un subconjunto cerrado de Y con a lo más dos componentes.

Sin embargo, dado que $s_M, t_M \in \bigcup \alpha$, existen C_M, K_M distintas componentes de $V \cap \mathcal{G}(Y)$ tales que $s_M \in (\bigcup \alpha) \cap C_M$ y $t_M \in (\bigcup \alpha) \cap K_M$. Adicionalmente, $v \in (\bigcup \alpha) \cap V'$. Como $V' \cap (V \cap \mathcal{G}(Y)) = \emptyset$ y $\bigcup \alpha \subset (V \cap \mathcal{G}(Y)) \cup V'$, se tendría que $\bigcup \alpha$ tiene al menos tres componentes, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, Y es un continuo enrejado. $\square$

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar el capítulo.

Bibliografía

- [1] F. de J. Aguilar-Romero, D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Meshed continua have unique n -fold symmetric product suspension*, Topol. Appl. 380 (2026), 109706, 21 pp.
- [2] J.G. Anaya, D. Maya, F. Vázquez-Juárez, *The hyperspace $HS_m^n(X)$ for a finite graph X is unique*, Topol. Appl. 234 (2018), 428–439.
- [3] F. Barragán, *On the n -fold symmetric product suspensions of a continuum*, Topol. Appl. 157 (2010), 597–604.
- [4] E. Castañeda, A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topol. Appl. 153 (2006), 1434–1450.
- [5] V. Córdova-Salazar, D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique third symmetric product*, Topol. Appl. 268 (2019), 106917, 11 pp.
- [6] L.A. Guerrero-Méndez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Meshed continua have unique second y third symmetric products*, Topol. Appl. 191 (2015), 16–27.

- [7] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, Rocky Mt. J. Math. 43 (5) (2013), 1583–1624.
- [8] G. Hernández-Valdez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Uniqueness of the (n, m) -fold hyperspace suspension for continua*, Topol. Appl. 325 (2023), 108385, 23 pp.
- [9] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Finite graphs have unique hyperspace $HS_n(X)$* , Topology Proc. 44 (2014), 75–95.
- [10] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique second symmetric product*, Topol. Appl. 209 (2016), 1–13.
- [11] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Framed continua have unique n -fold hyperspace suspension*, Topol. Appl. 196 (2015), 652–667.
- [12] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Peano continua with unique symmetric products*, Journal of Mathematics Research 4(4) (2012), 1–9.
- [13] D. Herrera Carrasco, A. Libreros-López, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Finite graphs have unique second y third symmetric product suspension*, Topol. Appl., 341 (2024), 108729, 23 pp.
- [14] A. Illanes, S.B. Nadler, Jr., *Hyperspaces Fundamentals y Recent Advances*, Monographs y Textbooks in Pure y Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [15] A. Libreros-López, F. Macías-Romero, D. Herrera-Carrasco, *On the uniqueness of n -fold pseudo-hyperspace suspension for locally connected continua*, Topol. Appl., 312 (2022), 108053, 22 pp.
- [16] S. Macías, *On the n -fold hyperspace suspension of continua*, Topol. Appl. 138 (2004), 125–138.

- [17] J. C. Macías, *On the n - Fold pseudo-hyperspace suspensions of continua*, Glas. Mat. 43 (2008), 439–449.
- [18] G. Montero-Rodríguez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Finite graphs have unique n -fold symmetric product suspension*, Houston J. Math. 48 (1) (2022), 205–225.
- [19] S.B. Nadler, Jr., *A fixed point theorem for hyperspace suspensions*, Houston J. Math. 5 (1979), 125–132.
- [20] S.B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs y Textbooks in Pure y Applied Math., volume 158, Marcel Dekker, New York, 1992.
- [21] P. Pellicer-Covarrubias, *Contractibility y Local Contractibility in the Hyperspaces $C_n(X)$* . Continuum Theory: in Honor of Professor David P. Bellamy on the Ocassion of his 60th Birthday. Aportaciones Matemáticas: Investigación, 19. Sociedad Matemática Mexicana, México, 2007. ISBN: 970-32-5046-2 (06/2006), 97–116.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

felipe.aguilarr@alumno.buap.mx
dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx

Capítulo 5

En los hiperespacios cocientes $C_1^n(X)$ de un continuo X

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero,
Leonardo Ramírez Aparicio

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Resumen

Este capítulo tiene como propósito estudiar, completar y presentar de manera detallada algunos resultados de los artículos: *Quotients of n -fold hyperspaces* y *More on quotients of n -fold hyperspaces* realizados por Javier Camargo y Sergio Macías de tal manera que se tenga garantizado que un estudiante que posea los conocimientos básicos de topología pueda comprender los resultados. Con este objetivo estudiamos los continuos tales que sus n -ésimos hiperespacios cocientes, son unicoherentes, localmente conexos, contráctiles y variedades de Cantor. En particular, caracterizamos el arco y la curva cerrada simple como las únicas gráficas finitas para las cuales sus n -ésimos hiperespacios cocientes son variedades de Cantor. Asimismo, proporcionamos algunas cotas superiores para la dimensión de los n -ésimos hiperespacios cocientes en ciertas clases de continuos.

1 Introducción

Sean $n \in \mathbb{N}$ y X un continuo. El concepto del n -ésimo hiperespacio tuvo sus inicios en 1939 cuando Wojdysławski, en su artículo [23], titulado *Rétractes absolus et hyperspaces des continus*, demostró que un continuo X es localmente conexo si y sólo si $C_n(X)$ es un retracto absoluto. Desde entonces, no se estudiaron otras propiedades de estos hiperespacios. Fue hasta

en 2001, cuando Sergio Macías introduce el nombre de este hiperespacio y estudia diversas de sus propiedades, como son uncoherencia, aposíndesis, arco conexidad, conexidad local, entre otras (véase [13]).

Continuando con el estudio de los n -ésimos hiperespacios, en 2000 aparece el artículo *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X* de Sergio Macías (véase [12]). En él se prueban resultados acerca de la conexidad local de $C_n(X)$ cuando X es un continuo hereditariamente indescomponible y se estudian las arco componentes de $C_n(X) \setminus \{X\}$ cuando X es un continuo indescomponible. Asimismo, se presenta una cota superior para la dimensión de ciertos n -ésimos hiperespacios y se caracteriza las gráficas finitas en términos de la dimensión de sus n -ésimos hiperespacios. Por último, se demuestra que la clase de los continuos hereditariamente indescomponibles X tienen hiperespacio único $C_n(X)$.

En 2016, Sergio Macías y Javier Camargo publican el artículo *Quotients of n -fold hyperspaces* e introducen el n -ésimo hiperespacio cociente, al identificar a $C_1(X)$ como un conjunto de un solo punto en $C_n(X)$ y considerarlo con la topología cociente (véase [3]). En él se demuestran diversas propiedades topológicas de estos hiperespacios cocientes como son: uncoherencia, contractibilidad, conexidad local, aposíndesis, homogeneidad, ser variedad de Cantor, retracto absoluto. Caracteriza también a la clase de las gráficas finitas en términos de la dimensión de sus n -ésimos hiperespacios cocientes.

Recientemente, en 2024, estos mismos autores en el artículo *More on quotients of n -fold hyperspaces* han continuado con el estudio estos hiperespacios cocientes aportando algunas cotas superiores para la dimensión de los n -ésimos hiperespacios cocientes en ciertas clases de continuos, algunas condiciones bajo las cuales los n -ésimos hiperespacios cocientes resultan ser retracts absolutos y caracterizando a el arco y la curva cerrada simple como las únicas gráficas finitas para las cuales sus n -ésimos hiperespacios cocientes son variedades de Cantor (véase [4]). De hecho, dados $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$ y X un continuo, ellos se han preguntado:

¿existe una propiedad topológica $\mathcal{P}$ que se cumple en el n -ésimo
hiperespacio cociente, $C_1^n(X)$?

Este capítulo consiste en estudiar, completar y presentar de manera detallada algunos resultados de los artículos: *Quotients of n -fold hyperspaces* y *More on quotients of n -fold hyperspaces* de Javier Camargo y Sergio Macías que responden la pregunta anterior.

En este capítulo demostramos lo siguiente:

- (a) Sean X un continuo y $n \geq 2$, entonces X es localmente conexo si y solo si $C_1^n(X)$ es localmente conexo (Ver Teorema 4.4);
- (b) Sean X un continuo y $n \geq 2$, entonces $C_1^n(X)$ es un continuo arco conexo (ver Teorema 4.1);
- (c) Sean X un continuo y $n \geq 2$, entonces $C_1^n(X)$ tiene la propiedad (b) (ver Teorema 4.2);
- (d) Sean X un continuo y $n \geq 2$, entonces $C_1^n(X)$ es unicoherente (ver Corolario 4.1);
- (e) Sean X un continuo y $n \geq 2$. Si X contiene un arco libre, entonces existe $\chi \in C_m^n(X)$ tal que $\dim_\chi(C_m^n(X)) = 2n$ (ver Teorema 5.2);
- (f) Sean X un continuo y $n \geq 2$, entonces $\dim(C_n(X)) = \dim(C_1^n(X))$ (ver Corolario 5.4);
- (g) Sean X un continuo localmente conexo y $n \geq 2$. Entonces X es una gráfica finita si y sólo si $\dim(C_1^n(X))$ es finita (ver Teorema 5.8);
- (h) Sea $n \geq 2$. Si X es una gráfica finita, entonces $C_1^n(X)$ es un retracto absoluto (ver Corolario 5.20).
- (i) Sea X un continuo localmente conexo y $n \geq 2$. Si X no contiene arcos libres o $\dim(C_n(X))$ es finita, entonces $C_1^n(X)$ es un retracto absoluto (ver Teorema 5.19);
- (j) Sea X un continuo localmente conexo y $n \geq 2$. Si X no contiene arcos libres o $\dim(C_n(X))$ es finita, entonces $C_1^n(X)$ tiene la propiedad del punto fijo (ver Teorema 5.21).

2 Definiciones y preliminares

En todo este capítulo, si X es un espacio topológico y A es un subconjunto de X , los símbolos $\text{cl}_X(A)$, $\text{int}_X(A)$ y $\text{Bd}_X(A)$ denotan la cerradura de A , el interior de A y la frontera de A en el espacio X , respectivamente. Como es

usual, los símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ y ω , representan el conjunto de los números naturales (enteros positivos), el conjunto de los números reales y el primer ordinal no numerable. El símbolo $|A|$ denota la cardinalidad del conjunto A y $\text{Cono}(Z)$ denota el espacio cociente $Z \times [0, 1]/Z \times \{1\}$. También denotamos como $\mathbb{R}^n$ al espacio euclideo n -dimensional y para cada punto $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ su norma como:

$$\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Un **continuo** X es un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto. Un subconjunto Y de X es un subcontinuo de X si Y es un continuo o Y es un conjunto de un punto.

Los **hiperespacios** de un continuo X son espacios cuyos elementos son subconjuntos de X que además cumplen ciertas condiciones específicas. Si tenemos un continuo X , la familia de los subconjuntos no vacíos y cerrados de X la denotamos como 2^X .

Otro de los hiperespacios que mencionaremos en este capítulo y que son subespacios de 2^X cuando X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$ son los siguientes:

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a los más } n \text{ puntos}\} \text{ y}$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}.$$

Estos hiperespacios denotan el n -ésimo *producto simétrico* de X y el n -ésimo *hiperespacio* de X , respectivamente. Se acostumbra escribir a $C_1(X)$ como $C(X)$, conocido como el *hiperespacio de los subcontinuos* del continuo X .

Para poder dotar a estos hiperespacios de una métrica, introducimos los siguientes conceptos. Sean un continuo X y $A, B \subset X$. La distancia entre A y B que denotamos como $d(A, B)$, está dada de la siguiente manera:

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Si X es un continuo con métrica d , $p \in X$ y $\epsilon > 0$, denotamos por $B_d(\epsilon, p)$, la bola abierta con centro en p y radio ϵ . Además, si $A \in 2^X$, definimos la ϵ -**nube** de A (o la **nube con centro en A y radio $\epsilon > 0$**) como:

$$N_d(\epsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(x, a) < \epsilon\}.$$

Consideremos ahora la función $H_d: 2^X \times 2^X \rightarrow [0, \infty)$, que está dada para cada $A, B \in 2^X$ por

$$H_d(A, B) = \inf\{\epsilon > 0: A \subset N_d(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\epsilon, A)\}.$$

Respecto a esta función, sabemos lo siguiente.

Teorema 2.1. [9, Teorema 2.2] *Si X es un espacio métrico con métrica acotada d , entonces la función H_d es una métrica para 2^X .*

Dados $n, m \in \mathbb{N}$ y una colección finita $U_1, \dots, U_m$ de subconjuntos de X , $\langle U_1, \dots, U_m \rangle$, denota el siguiente subconjunto de 2^X :

$$\left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Teorema 2.2. [19, Teorema 0.13] *Si X es un espacio métrico acotado, una base de abiertos para la topología inducida por la métrica de Hausdorff de 2^X viene dada por:*

$$\{\langle U_1, \dots, U_n \rangle : U_i \text{ es un abierto de } X, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}.$$

Dados $n, m \in \mathbb{N}$ y una colección finita $U_1, \dots, U_m$ de subconjuntos de X , $\langle U_1, \dots, U_m \rangle_n$, denota el siguiente subconjunto de $F_n(X)$:

$$\left\{ A \in F_n(X) : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Note que $\langle U_1, \dots, U_m \rangle_n = \langle U_1, \dots, U_m \rangle \cap F_n(X)$. Además, cuando cada U_i es un subconjunto abierto de X , la familia de todos los subconjuntos de $\langle U_1, \dots, U_m \rangle_n$ es una base para la topología de $F_n(X)$ (véase [19, Teorema 0.11, p. 9]). La métrica H_d se le conoce como la **métrica de Hausdorff inducida por d** o simplemente **métrica de Hausdorff**. De ahora en adelante, siempre que consideraremos a 2^X , lo haremos con esta métrica. Por lo tanto, como los demás hiperespacios, $F_n(X)$, $C(X)$ y $C_n(X)$ son subconjuntos de 2^X , se les considera dotados con la restricción correspondiente de la métrica de Hausdorff H_d . En la actualidad se sabe que, para cualquier continuo X , los hiperespacios 2^X , $F_n(X)$ y $C_n(X)$ son continuos con la métrica de Hausdorff.

Definición 2.3. Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$ con la topología euclídeana. Si $h: [0, 1] \rightarrow \alpha$ es un homeomorfismo, entonces $h(0)$ y $h(1)$ son los puntos extremos del arco α .

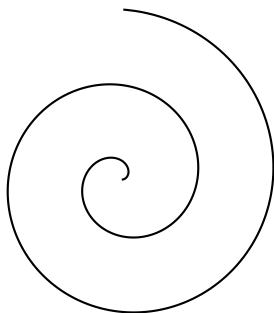
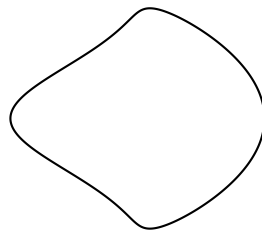


Figura 1: Un arco

Definición 2.4. Una **curva cerrada simple** es un espacio homeomorfo a la circunferencia unitaria en el plano, la denotamos como S^1 .

Figura 2: Curva cerrada simple



Definición 2.5. Una **gráfica finita** es un continuo que es la unión de un número finito de arcos tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o se intersectan sólo en uno o en ambos de sus puntos extremos.

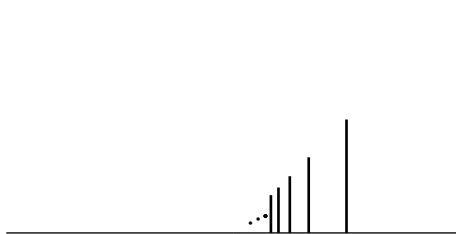
Definición 2.6. Una **n -esfera** es un espacio que es homeomorfo a la esfera n -dimensional S^n en $\mathbb{R}^{n+1}$, donde $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$, con $n \in \mathbb{N}$. Llamamos **círculo unitario** a cualquier 1-esfera.

Definición 2.7. Un continuo X tiene la **propiedad (b)** siempre que toda función continua de X en el círculo unitario S^1 sea homotópica a una función constante.

Definición 2.8. Un continuo X es **arco conexo**, si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, existe un arco α en X con extremos x y y .

Definición 2.9. Un continuo X es **localmente conexo en un punto** $x \in X$ si para cada subconjunto abierto U de x en X , existe un subconjunto abierto y conexo V de x en X , tal que $x \in V \subset U$. El continuo X es **localmente conexo** si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Figura 3: Un continuo localmente conexo



Definición 2.10. Un continuo X es **unicoherente** si para cualquier par de subcontinuos H y K tales que $X = H \cup K$, se tiene que $H \cap K$ es un continuo.

Definición 2.11. Un continuo X es llamado **arco continuo** si todos sus subcontinuos propios con más de un punto son arcos.

Definición 2.12. El cono sobre el conjunto de Cantor es llamado el **abanico de Cantor**.

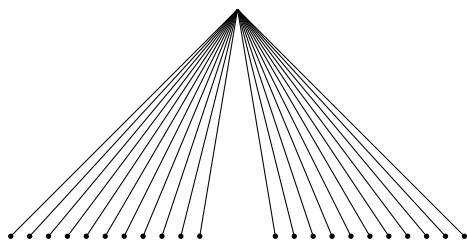


Figura 4: Abanico de Cantor

Definición 2.13. Una **retracción** es una función continua, r , de un espacio X en sí mismo tal que r es la identidad sobre su imagen (es decir, $r(r(x)) = r(x)$ para cada $x \in X$). Un subconjunto cerrado A de X se dice que es un **retracto** de X siempre que exista una retracción de X sobre A . Un espacio normal X es llamado un **retracto absoluto** si para cada espacio normal Y y cada subconjunto cerrado B de Y homeomorfo a X , se satisface que B es un retracto de Y .

Definición 2.14. Sean X un continuo, A un subconjunto no vacío de X y β un número cardinal. Se dice que A es de **orden menor o igual** que β en X , denotado por $\text{ord}(A, X) \leq \beta$, si para cualquier conjunto abierto V de X con $A \subset V$, existe un conjunto abierto U de X tal que $A \subset U \subset V$ y $|\text{Bd}_X(U)| \leq \beta$. Si $A = \{x\}$ se escribirá que $\text{ord}(x, X) \leq \beta$ en lugar de escribir $\text{ord}(\{x\}, X) \leq \beta$. Se dice también que A es de **orden** β en X , denotado por $\text{ord}(A, X) = \beta$, si $\text{ord}(A, X) \leq \beta$ y para cualquier número cardinal $\alpha < \beta$, se tiene que $\text{ord}(A, X) \not\leq \alpha$.

La teoría de la dimensión inductivamente pequeña es una de las nociones clásicas de dimensión en topología general que juega un papel crucial en la teoría de los continuos y sus hiperespacios. Es una herramienta matemática que gracias a su invarianza topológica permite probar teoremas, clasificar continuos, entre otros.

Definición 2.15. Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Definimos la dimensión de X , recursivamente, que denotamos como $\dim(X) \in \{-1, 0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$, de la siguiente manera:

- (a) $\dim(X) = -1$ si y solo si $X = \emptyset$;
- (b) supongamos que hemos definido cuándo un espacio topológico Y tiene dimensión $\dim(Y) \leq n - 1$, para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces, decimos que la dimensión de X en x es menor o igual a n , denotada por $\dim(x, X) \leq n$, si y solo si X tiene una base local de vecindades de x cuyas fronteras tienen dimensión menor o igual a $n - 1$. Si para cada $x \in X$, se cumple que $\dim(x, X) \leq n$, entonces escribimos que $\dim(X) \leq n$;
- (c) la dimensión de X es igual a n , denotada por $\dim(X) = n$, si y solo si $\dim(X) \leq n$ y es falso que $\dim(X) \leq n - 1$;
- (d) la dimensión de X en x es igual a n , denotada por $\dim(x, X) = n$, si y solo si $\dim(x, X) \leq n$ y es falso que $\dim(x, X) \leq n - 1$;
- (e) decimos que la dimensión de X es ∞ , denotada por $\dim(X) = \infty$, si y solo si es falso que $\dim(X) \leq n$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$;
- (f) decimos que la dimensión de X en x es ∞ , denotada por $\dim(x, X) = \infty$, si y solo si $\dim(x, X) > n$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$.

Si $\dim(X) \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$, escribiremos $\dim(X) < \infty$, en otro caso $\dim(X) = \infty$. Por [8, p. 20], para cada continuo X , $\dim(X) \geq 1$.

Definición 2.16. *Sea X un continuo finito dimensional, decimos que X es una **Variedad de Cantor** siempre que para cada $A \subset X$ tal que $\dim(A) \leq \dim(X) \setminus 2$, entonces $X \setminus A$ es conexo.*

Proposición 2.17. [20, Proposición 9,5] *Si X es un continuo, entonces $\text{ord}(x, X) \leq 2$, para cada $x \in X$ si y sólo si X es un arco o una curva cerrada simple.*

Corolario 2.18. [20, Corolario 8.17] *La imagen continua de cualquier continuo localmente conexo es un continuo localmente conexo.*

Teorema 2.19. [20, Proposición 8.23] *Todo continuo localmente conexo es arco conexo.*

Lema 2.20. [5, Corolario 8.24] *Cualquier subespacio abierto de un espacio localmente conexo es localmente conexo.*

Lema 2.21. [13, Teorema 3.2] *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces X es localmente conexo si y sólo si $C_n(X)$ es localmente conexo.*

Lema 2.22. [16, Teorema 4.6] *Los hiperespacios $C_n([0, 1])$ y $C_n(S^1)$ son variedades de Cantor $2n$ -dimensional, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Lema 2.23. *Sean X un continuo y $B \in 2^X$. Si $f: 2^X \rightarrow 2^X$ está dada por $f(A) = A \cup B$, para cada $A \in 2^X$, entonces f es una función continua.*

Demostración. Sean $A \in 2^X$ y $U_1, U_2, \dots, U_n$ una colección finita de subconjuntos abiertos de X tal que $f(A) = A \cup B \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$. Sea J el conjunto más grande de $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que para cada $i \in J$, $A \cap U_i \neq \emptyset$. Consideremos $\mathcal{U} = \{U_i: i \in J\}$. Como $A \cup B \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$, tenemos que $A \in \langle \mathcal{U} \rangle$. Observemos que $\langle \mathcal{U} \rangle$ es un abierto de 2^X . Así, si $f(\langle \mathcal{U} \rangle) \subset \langle U_1, \dots, U_n \rangle$, f será continua. Para esto, sea $A \in \langle \mathcal{U} \rangle$, entonces $A \subset \bigcup \mathcal{U} \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $B \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. Además, $A \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in J$. Si existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $j \notin J$, entonces $A \cap U_j = \emptyset$. Como $(A \cup B) \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces $B \cap U_j \neq \emptyset$. De esto último, concluimos que $f(A) = A \cup B \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$. Por lo tanto, f es continua. $\square$

Lema 2.24. *Sea X un espacio topológico. Si A y Y son subconjuntos de X , entonces:*

- (a) $\text{Bd}_Y(A \cap Y) \subset \text{Bd}_X(A)$;
- (b) si $\text{cl}_X(A) \subset \text{int}_X(Y)$, entonces $\text{Bd}_X(A) = \text{Bd}_Y(A)$.

Demostración. Para probar (a) observemos que

$$\begin{aligned}\text{Bd}_Y(A \cap Y) &= \text{cl}_Y(A \cap Y) \cap \text{cl}_Y(Y - A), \\ &\subset \text{cl}_X(A) \cap \text{cl}_X(X - A) \\ &= \text{Bd}_X(A),\end{aligned}$$

es decir, $\text{Bd}_Y(A \cap Y) \subset \text{Bd}_X(A)$.

Ahora, para mostrar (b) notemos primero que como $A \subset Y$, entonces $X - A = (X - Y) \cup (Y - A)$. Así,

$$\begin{aligned}\text{Bd}_X(A) &= \text{cl}_X(A) \cap \text{cl}_X(X - A) \\ &= \text{cl}_X(A) \cap (\text{cl}_X(X - Y) \cup \text{cl}_X(Y - A)) \\ &= \text{cl}_X(A) \cap \text{cl}_X(Y - A) \\ &= \text{cl}_X(A) \cap Y \cap \text{cl}_X(Y - A) \\ &= \text{cl}_Y(A) \cap \text{cl}_Y(Y - A) \\ &= \text{Bd}_Y(A),\end{aligned}$$

es decir, $\text{Bd}_X(A) = \text{Bd}_Y(A)$. □

Teorema 2.25. *Si X es un espacio topológico, A un subespacio de X y $x \in A$, entonces se cumple lo siguiente:*

- (a) $\dim(A) \leq \dim(X)$;
- (b) $\dim(x, A) \leq \dim(x, X)$;
- (c) si X es un espacio topológico regular tal que $x \in \text{int}_X(A)$, entonces $\dim(x, A) = \dim(x, X)$.

Demostración. Para demostrar (a) podemos suponer que $\dim(X) < \infty$ ya que si $\dim(X) = \infty$, la afirmación es clara. Haremos la prueba por inducción sobre una cota superior de la dimensión de X . Claramente la desigualdad

se cumple si $\dim(X) = -1$. Supongamos que (a) se cumple para X cuya dimensión no excede $n - 1 \geq -1$ con $n \geq 0$. Sean X un espacio topológico con $\dim(X) \leq n$ y A un subespacio de X . Veamos que $\dim(x, A) \leq \dim(X)$, para cada $x \in A$. Sean $x \in A$ y U una vecindad de x en A , entonces existe V una vecindad de x en X tal que $U = A \cap V$. Como $\dim(X)$ es finita, $\dim(X) \leq \dim(X)$ y $x \in U$, tenemos que existe W una vecindad de x en X tal que $x \in W \subset V$ y $\dim(\text{Bd}_X(W)) \leq \dim(X) - 1$. Notemos que $W \cap A \subset U$ es una vecindad de A que contiene a x . Además, por el Lema 2.24 (a), $\text{Bd}_A(W \cap A) \subset \text{Bd}_X(W)$, así, $\text{Bd}_A(W \cap A)$ es un subespacio de $\text{Bd}_X(W)$. Por hipótesis de inducción, se sigue que $\dim(\text{Bd}_A(W \cap A)) \leq \dim(\text{Bd}_X(W)) \leq \dim(X) - 1$. Así, $\dim(x, A) \leq \dim(X)$. Como $x \in A$ es arbitrario, se sigue que $\dim(A) \leq \dim(X)$, concluyendo lo requerido.

Para probar (b), observemos que si $\dim(x, X) = \infty$, la desigualdad es cierta. Supongamos que $\dim(X) < \infty$. Si $\dim(x, X) = -1$, entonces por vacuidad, la desigualdad es cierta. En otro caso, sea U una vecindad de x en A , razonando análogamente como en (a), existen vecindades V y W de x en X tales que $U = A \cap V$, $p \in W \subset V$ y $\dim(\text{Bd}_X(A)) \leq \dim(x, X) - 1$. Por el Lema 2.24 (a), como $\text{Bd}_A(W \cap A) \subset \text{Bd}_X(W)$, se sigue que $\dim(\text{Bd}_A(W \cap A)) \leq \dim(\text{Bd}_X(W)) \leq \dim(x, X) - 1$. Ya que $W \cap A$ es una vecindad de x en A que está contenida en U , se sigue que $\dim(x, A) \leq \dim(x, X)$, concluyendo lo requerido.

Por último, para probar (c), por el inciso (b), es suficiente mostrar que $\dim(x, X) \leq \dim(x, A)$. Para esto, podemos suponer que $\dim(x, A) < \infty$. Sea U una vecindad abierta de x en X que está contenida en A , entonces U también es una vecindad abierta de x en A . Por lo que, existe V una vecindad de x en A tal que $V \subset U$ y $\dim(\text{Bd}_A(V)) \leq \dim(x, A) - 1$. Ahora, notemos que V también es una vecindad de x en X . En efecto, como V es una vecindad de x en A tal que $V \subset U$, existe un abierto O_A en A tal que $x \in O_A \subset V \subset U$. Además, ya que U es un abierto en X que contiene a x y está contenido en A , entonces $U \subset \text{int}_X(A) \subset A$. Así, $O_A \subset \text{int}_X(A) \subset A$. De modo que O_A es abierto en $\text{int}_X(A)$ y por ende, en X . Debido a esto, V es una vecindad de x en X . Por otra parte, como por hipótesis, X es regular y $x \in \text{int}_X(A)$, podemos suponer que $\text{cl}_X(V) \subset \text{int}_X(A)$. Así, por el Lema 2.24 (b), $\text{Bd}_A(V) = \text{Bd}_X(V)$. De aquí, $\dim(x, \text{Bd}_X(V)) \leq \dim(x, A) - 1$. Por lo tanto, $\dim(x, X) \leq \dim(x, A)$ y así concluye la prueba. $\square$

Teorema 2.26. [8, Corolario 1] *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si*

$X = Y \cup Z$, Y es un cerrado de X , $\dim(Y) \leq n$ y $\dim(Z) \leq n$, entonces $\dim(X) \leq n$.

Lema 2.27. [21, 10.3] Si X es un continuo finito dimensional y A es un subconjunto nada denso de X , entonces $\dim(X) = \dim(X \setminus A)$.

Teorema 2.28. Sean X, Y dos espacios topológicos homeomorfos y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\dim(X) = n$ si y sólo si $\dim(Y) = n$.

Demostración. Demostramos la primera implicación, ya que el recíproco es similar. La prueba se hace por inducción sobre la dimensión de X . Si $\dim(X) = -1$, entonces $X = \emptyset$. Como X es homeomorfo a Y , entonces $Y = \emptyset$. Así, $\dim(Y) = -1$. Supongamos que si $\dim(X) = n-1$, entonces $\dim(Y) = n-1$. Ahora veamos que si $\dim(X) = n$, entonces $\dim(Y) = n$. Para esto, demostraremos que para cada $x \in X$, si $\dim(x, X) = n$, entonces $\dim(h(x), Y) = n$. Supongamos que $\dim(x, X) = n$. Sea U una vecindad de un punto $h(x)$ en Y , entonces como h es continua en x , se tiene que $h^{-1}(U)$ es una vecindad de x en X . Como $\dim(x, X)$ es finita, existe W una vecindad de x en X tal que $x \in W \subset h^{-1}(U)$ y $\dim(\text{Bd}_X(W)) \leq n-1$. Como h es un homeomorfismo entre X e Y , entonces $h|_{\text{Bd}_X(W)}: \text{Bd}_X(W) \rightarrow h(\text{Bd}_X(W))$ es también un homeomorfismo. Como los homeomorfismos conservan frontentas, es decir, si $A \subset X$, entonces $h(\text{Bd}_X(A)) = \text{Bd}_Y(h(A))$, por hipótesis de inducción, se cumple que $\dim(\text{Bd}_X(W)) = \dim(h(\text{Bd}_X(W))) = \dim(\text{Bd}_Y(h(W))) \leq n-1$. De esto, se sigue que $h(W)$ es una vecindad de $h(x)$ contenida en U tal que, $\dim(\text{Bd}_Y(h(W))) \leq n-1$. Así, $\dim(h(x), Y) \leq n$.

Resta probar que $\dim(h(x), Y) > n-1$. Supongamos que $\dim(h(x), Y) \leq n-1$, luego, por hipótesis de inducción, $\dim(x, X) \leq n-1$, lo que es una contradicción, ya que $\dim(x, X) = n$. Así, $\dim(h(x), Y) > n-1$ y por lo tanto, $\dim(h(x), Y) = n$. Así, como x fue elegida arbitrariamente en X , si $\dim(X) = n$, entonces $\dim(Y) = n$. $\square$

3 Espacios cocientes

Presentaremos la manera de construir un espacio Y a partir de identificar topológicamente conjuntos de puntos de un espacio X .

Definición 3.1. Una *partición* de un conjunto X es una colección de conjuntos no vacíos, ajenos entre sí, cuya unión es X .

Definición 3.2. Sea $\mathcal{P}$ una partición de un espacio métrico X . El **espacio cociente**, denotado como $X/\mathcal{P}$, es el conjunto cuyos puntos son los elementos de la partición $\mathcal{P}$.

Definición 3.3. La función $q: X \rightarrow X/\mathcal{P}$ que envía a cada punto x de X al único elemento de la partición $\mathcal{P}$ que lo contiene, es llamada **función cociente**.

Teorema 3.4. [5, 3.1] Si X es un espacio topológico y $\mathcal{P}$ es una partición de X , entonces

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}) = \{U \subset X/\mathcal{P}: q^{-1}(U) \text{ es un conjunto abierto de } X\}$$

es una topología para $X/\mathcal{P}$

La topología $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ es llamada topología cociente para $X/\mathcal{P}$.

Es conocido que un espacio cociente no necesariamente es métrico (ver [20, pág. 37]). Sin embargo, existen condiciones adicionales sobre la descomposición para que el espacio cociente resulte ser un espacio métrico. La siguiente es una de éstas.

Definición 3.5. Sea un espacio topológico X . Una partición $\mathcal{P}$ de X es **semicontinua superiormente** si para cada $P \in \mathcal{P}$ y para cada abierto U de X con $P \subset U$, existe un abierto V de X con $P \subset V$, tal que si $A \in \mathcal{P}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subset U$.

Teorema 3.6. [15, Teorema 1.2.22] Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{P}$ una descomposición de X . Si $\mathcal{P}$ es semicontinua superiormente, entonces el espacio cociente $(X/\mathcal{P}, \mathcal{T}(\mathcal{P}))$ es un espacio métrico.

Teorema 3.7. [20, 3.14] Si X es un espacio topológico, A un subconjunto cerrado no vacío de X y $\mathcal{P} = \{\{x\}: x \in X \setminus A\} \cup \{A\}$, entonces $\mathcal{P}$ es una descomposición semicontinua superiormente de X .

Al espacio cociente $(X/\mathcal{P}, \mathcal{T}(\mathcal{P}))$ también se le conoce como espacio de descomposición o espacio de identificación, se le denota como X/A . El espacio cociente X/A es obtenido a partir de identificar el conjunto A con un punto.

Teorema 3.8. [15, Teorema 1.7.3] Si X es un continuo y $\mathcal{P}$ es una descomposición semicontinua superiormente de X , entonces el espacio cociente $(X/\mathcal{P}, \mathcal{T}(\mathcal{P}))$ es un continuo.

Definición 3.9. Sean un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. El n -ésimo hiperespacio cociente del continuo X , denotado por $C_1^n(X)$, es el espacio cociente $C_n(X)/C_1(X)$, con la topología cociente.

Como $C_1(X)$ es un subconjunto cerrado no vacío de $C_n(X)$, por el Teorema 3.7 y el Teorema 3.8, tenemos que $C_1^n(X)$ es un continuo.

La función cociente de $C_1^n(X)$ la denotamos por $q_X: C_n(X) \rightarrow C_1^n(X)$. Al elemento $C_1(X)$, lo denotamos por C_X^n . Así, $q_X(C_1(X)) = \{C_X^n\}$.

Observación 3.10. Como la restricción de la función cociente en $C_n(X) \setminus C_1(X)$ es biyectiva, continua y abierta, resulta ser un homeomorfismo.

4 Unicoherencia, arco conexidad y conexidad local

Teorema 4.1. Si X es un continuo y $n \geq 2$, entonces $C_1^n(X)$ es un continuo arco conexo.

Demostración. Por [13, Teorema 3.1], $C_n(X)$ es un continuo arco conexo. Por lo tanto, por [20, Teorema 3.10], $C_1^n(X)$ es un continuo arco conexo. $\square$

Teorema 4.2. Si X es un continuo y $n \geq 2$, entonces $C_1^n(X)$ tiene la propiedad (b).

Demostración. Por [15, Teorema 4.8], $C_n(X)$ tiene la propiedad (b). Como $q_X(C_n(X)) = C_1^n(X)$ y el mapeo cociente es monótona, entonces $C_1^n(X)$ tiene la propiedad (b) [11, Teorema 2, p. 434]. $\square$

Aplicando el Teorema 4.2 y [13, Teorema 4.7], obtenemos lo siguiente.

Corollary 4.1. Si X es un continuo y $n \geq 2$, entonces $C_1^n(X)$ es unicoherente.

Lema 4.3. Sean X un continuo y $n \geq 2$. Entonces X es localmente conexo si y sólo si $C_n(X) \setminus C_1(X)$ es localmente conexo.

Demostración. Por el Lema 2.21, $C_n(X)$ es localmente conexo. Luego, por [11, Teorema 3, p. 230], $C_n(X) \setminus C_1(X)$ es localmente conexo.

Sea $x_1 \in X$ y sea U un subconjunto abierto de X tal que $x_1 \in U$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que $B_d(x_1, \delta)$ está contenida en U_1 . Por [20, Corolario 5.5], existe un subcontinuo K de X tal que $\{x_1\} \subsetneq K \subset B_d(x_1, \delta)$. Sean $y_2, y_3, \dots, y_n$, $n - 1$ puntos distintos de $K \setminus \{x_1\}$. Entonces, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $B_d(x_1, \epsilon_1), B_d(y_2, \epsilon_1), \dots, B_d(y_n, \epsilon_1)$ son ajenos por pares. Considere $A = \{x_1, y_2, \dots, y_n\}$ y sea $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \min\{\delta, \epsilon_1\}$. Denotemos por $U_1 = B_d(x_1, \epsilon), U_2 = B_d(y_2, \epsilon), \dots, U_n = B_d(y_n, \epsilon)$. Entonces, $\langle U_1, \dots, U_n \rangle_{C_n(X)} \subset (C_n(X) \setminus C_1(X))$ es un subconjunto abierto de $C_n(X) \setminus C_1(X)$ tal que $A \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle_{C_n(X)}$. Luego, existe un subconjunto abierto conexo $\mathcal{C}$ de $C_n(X) \setminus C_1(X)$ tal que $A \in \mathcal{C} \subset \text{cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \subset \langle U_1, \dots, U_n \rangle_{C_n(X)}$. Más aún, existe un abierto básico $\langle W_1, \dots, W_k \rangle_{C_n(X)}$ of $C_n(X)$ tal que $A \in \langle W_1, \dots, W_k \rangle_{C_n(X)} \subset \mathcal{C}$. Por [15, Lema 6.1.1], $\bigcup \text{cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C})$ tiene n componentes. Note que $x_1 \in \bigcup \text{cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C})$. Sea K la componente de $\bigcup \text{cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C})$ tal que $x_1 \in K$. Entonces, $K \subset U_1$. Let $W = \bigcap \{W_j : x_1 \in W_j\} \cap U_1$. Luego, W es un subconjunto abierto de X tal que $x_1 \in W$. Sea $z \in W$. Entonces, $(A \setminus \{x_1\}) \cup \{z\} \in \text{cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C})$. Así que, $z \in \text{cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap U_1$, es decir, $z \in K$. Esto implica que, $W \subset K$ y $x_1 \in \text{int}_X(K)$. Así, X es conexo en pequeño en x_1 y por lo tanto, X es localmente conexo ([15, Teorema 1.7.12]). $\square$

Teorema 4.4. *Sean X un continuo y $n \geq 2$. Entonces X es localmente conexo si y sólo si $C_1^n(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. Por el Lema 2.21, $C_n(X)$ es localmente conexo. Entonces, como $q_X(C_n(X)) = C_1^n(X)$, $C_1^n(X)$ es localmente conexo (Corolario 2.18).

Como $C_1^n(X) \setminus \{C_X^n\}$ es un subconjunto abierto de $C_1^n(X)$, entonces $C_1^n(X) \setminus \{C_X^n\}$ es localmente conexo (Lema 2.20). Como $C_1^n(X) \setminus \{C_X^n\}$ es homeomorfo a $C_n(X) \setminus C_1(X)$ (Observación 3.10), entonces $C_n(X) \setminus C_1(X)$ es localmente conexo. Así, por el Lema 4.3, X es localmente conexo. $\square$

5 Dimensión, gráficas finitas, variedades de Cantor y retractos absolutos

Lema 5.1. *Sean X un continuo y $n \geq 2$. Si $\dim(C_n(X) \setminus C_1(X)) = k$, para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $\dim(C_1(X)) \leq k$. En particular, $\dim(C_n(X)) = k$.*

Demostración. Sean $A \in C_1(X) \setminus \{X\}$ y $p \in X \setminus A$. Consideremos $\phi: C_1(X) \rightarrow C_n(X)$ que viene dada por

$$\phi(B) = B \cup \{p\}.$$

Por el Lema 2.23, ϕ es un encaje y $\phi(A) \in C_n(X) \setminus C_1(X)$. Luego, por el Teorema 2.28 y el Teorema 2.25 (b):

$$\dim_A(C_1(X)) = \dim_{\phi(A)}(\phi(C_1(X))) \leq \dim_{\phi(A)}(C_n(X) \setminus C_1(X)) \leq k.$$

Como A es un punto arbitrario de $C_1(X) \setminus \{X\}$, por [20, Corolario 2], se sigue que $\dim(C_1(X)) \leq k$. Además, $C_n(X) = (C_n(X) \setminus C_1(X)) \cup C_1(X)$, $\dim(C_n(X) \setminus C_1(X)) = k$ y $\dim(C_1(X)) \leq k$, entonces por el Teorema 2.26, $\dim(C_n(X)) \leq k$. Por lo tanto, como $C_n(X) \setminus C_1(X)$ es un subconjunto nada denso en $C_n(X)$ [15, Teorema 6.1.9], $\dim(C_n(X)) = k$ (Lema 2.27). $\square$

Teorema 5.2. *Si X es un continuo con un arco libre y $n \geq 2$, entonces existe $\chi \in C_1^n(X)$ tal que $\dim_\chi(C_1^n(X)) = 2n$.*

Demostración. Sea α un arco libre en X y sea $A \subset \text{int}_X(A)$ con $A \in C_n(\alpha) \setminus C_1(\alpha)$. Note que $A \in \langle \text{int}_X(\alpha) \rangle_n \setminus C_1(\alpha)$. Luego, $C_n(\alpha)$ es una vecindad de A en $C_n(X)$. Por el Teorema 2.25 (c), $\dim_A(C_n(X)) = \dim_A(C_n(\alpha))$. Como $A \notin C_1(\alpha)$ y $A \subset \alpha$, se sigue que $A \notin C_1(X)$. Entonces, $A \in C_n(X) \setminus C_1(X)$. De este modo $C_n(X) \setminus C_1(X)$ es una vecindad de A en $C_n(X)$. Así, $\dim_A(C_n(X)) = \dim_A(C_n(X) \setminus C_1(X))$. Luego, $\dim_A(C_n(X) \setminus C_1(X)) = \dim_A(C_n(\alpha))$. Usando la Observación 3.10 y el Teorema 2.28, se sigue que $\dim_{q_X^*(A)}(C_1^n(X) \setminus \{C_X^n\}) = \dim_A(C_n(X) \setminus C_1(X))$. Como $C_n(\alpha)$ es una variedad de Cantor $2n$ -dimensional contenida en $C_n(X)$ (Lema 2.22), se sigue que $\dim_A(C_n(\alpha)) = 2n$ ([8, (A), pp. 93 y 94]). Por lo tanto, $\dim_\chi(C_1^n(X)) = 2n$, con $\chi = q_X^*(A)$ ([21, Ejercicio 7.4]). $\square$

Teorema 5.3. *Sean X un continuo y $n \geq 2$. Entonces $\dim(C_n(X))$ es finita si y sólo si $\dim(C_1^n(X))$ es finita. Además, si $\dim(C_n(X))$ es finita o $\dim(C_1^n(X))$ es finita, entonces $\dim(C_n(X)) = \dim(C_1^n(X))$.*

Demostración. Supongamos que $\dim(C_n(X))$ es finita. Como por la Observación 2.28, $C_n(X) \setminus C_1(X)$ es homeomorfo a $C_1^n(X) \setminus \{C_X^n\}$ y $\dim(C_1^n(X)) = \dim(C_1^n(X) \setminus \{C_X^n\})$ [21, Ejercicio 7.4], tenemos que $\dim(C_1^n(X)) = \dim(C_n(X) \setminus C_1(X))$. Así, por el Lema 5.1, $\dim(C_n(X)) = \dim(C_n(X) \setminus C_1(X))$. Por lo tanto, $\dim(C_n(X)) = \dim(C_1^n(X))$.

Supongamos que $\dim(C_1^n(X))$ es finita. Como $\dim(C_1^n(X)) = \dim(C_1^n(X) \setminus \{C_X^n\})$ [21, Ejercicio 7.4] y $C_1^n(X) \setminus \{C_X^n\}$ es homeomorfo a $C_n(X) \setminus C_1(X)$, tenemos que $\dim(C_n(X) \setminus C_1(X)) = \dim(C_1^n(X))$ (Teorema 2.28). Por lo tanto, por el Lema 5.1, $\dim(C_n(X)) = \dim(C_1^n(X))$. $\square$

Como una consecuencia inmediata del Teorema 5.3, tenemos lo siguiente.

Corolario 5.4. *Sean X un continuo y $n \geq 2$, entonces $\dim(C_n(X)) = \dim(C_1^n(X))$.*

Teorema 5.5. [10, Lema 5.2] *Sea X un continuo localmente conexo. Entonces X es una gráfica finita si y sólo si $\dim(C(X))$ es finita.*

Teorema 5.6. [17, Teorema 2.4] *Sean X una gráfica finita, $n \in \mathbb{N}$ y $A \in C_n(X)$, entonces:*

- (a) $\dim_A(C_n(X)) = 2n + \sum_{p \in R(X) \cap A} (\text{ord}_X(p) - 2);$
- (b) $\dim(C_n(X)) = \dim_X(C_n(X));$
- (c) $\dim(C_n(X)) = 2n + \dim(C(X)).$

Teorema 5.7. [14, Lema 3.5] *Si X es un continuo tal que $R(X) \neq \emptyset$ y $n \geq 2$, entonces $\dim(C_n(X)) \geq 2n + 1$.*

Teorema 5.8. *Sean X un continuo localmente conexo y $n \geq 2$. Entonces X es una gráfica finita si y sólo si $\dim(C_1^n(X))$ es finita.*

Demostración. Por el Teorema 5.5, $\dim(C(X))$ es finita. Luego, por el Teorema 5.6 (c), $\dim(C_n(X))$ es finita. El resultado ahora se sigue por el Teorema 5.3.

Ahora, por el Teorema 5.3, $\dim(C_n(X))$ es finita. Luego, por el Teorema 5.6 (c), $\dim(C(X))$ es finita. Por lo tanto, por el Teorema 5.5, X es una gráfica finita. $\square$

Como una consecuencia inmediata del Teorema 5.3 y el Teorema 5.7, tenemos lo siguiente.

Lema 5.9. *Si X es un continuo tal que $R(X) \neq \emptyset$ y $n \geq 2$, entonces $\dim(C_1^n(X)) \geq 2n + 1$.*

Teorema 5.10. *Sean X un continuo y $n \geq 2$, entonces lo siguiente se cumple:*

- (a) $\dim(C_1^n(X)) \leq n(\dim(C(X)));$
- (b) *si X es un continuo tipo arco, entonces $\dim(C_1^n(X)) \leq 2n;$*

- (c) si X es un continuo tipo círculo, entonces $\dim(C_1^n(X)) \leq 2n$;
- (d) si X es arco continuo, entonces $\dim(C_1^n(X)) = 2n$.

Demostración. Por el Corolario 5.4, $\dim(C_n(X)) = \dim(C_1^n(X))$. Luego, por [15, Corolario 6.1.23], (a) se cumple. Usando (a) y [15, Teorema 6.9.11], obtenemos que (b) y (c) se cumplen. Por el Corolario 5.4 y [15, Corolario 6.1.25], (c) se cumple. $\square$

Teorema 5.11. Sean X un continuo y $n \geq 2$. Si $C_n(X)$ es una variedad de Cantor finito dimensional tal que $\dim(C_n(X)) \geq n + 2$, entonces $C_1^n(X)$ es una variedad de Cantor finito dimensional.

Demostración. Por el Corolario 5.3, $\dim(C_1^n(X))$ es finita. Supongamos que $k = \dim[C_1^n(X)]$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Si $C_1^n(X)$ no es una variedad de Cantor, entonces existe $\mathcal{A}$ un subconjunto de $C_1^n(X)$ tal que $\dim(\mathcal{A}) \leq k - 2$ con $C_1^n(X) \setminus \mathcal{A}$ no conexo. Podemos suponer que $\mathcal{A}$ es un cerrado de $C_1^n(X)$ ([22, 1.4]). Luego, existen $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ subconjuntos cerrados no vacíos de $C_1^n(X)$ tales que $C_1^n(X) \setminus \mathcal{A} = \mathcal{D} \cup \mathcal{E}$. Por lo que, $C_n(X) \setminus q_X^{-1}(\mathcal{A}) = q_X^{-1}(\mathcal{D}) \cup q_X^{-1}(\mathcal{E})$, con $q_X^{-1}(\mathcal{D})$ y $q_X^{-1}(\mathcal{E})$ subconjuntos abiertos no vacíos de $C_n(X)$. Como $\dim(C_n(X)) = k$ y $C_n(X)$ es una variedad de Cantor finito dimensional, es suficiente con mostrar que $\dim(q_X^{-1}(\mathcal{A})) \leq k - 2$ para obtener una contradicción. Consideremos dos casos: Si $C_X^n \notin \mathcal{A}$, entonces $q_X^{-1}(\mathcal{A})$ es homeomorfo a $\mathcal{A}$. Así, por Teorema 2.28, $\dim(q_X^{-1}(\mathcal{A})) \leq k - 2$. Ahora, supongamos que $C_X^n \in \mathcal{A}$. Note que $q_X^{-1}(\mathcal{A}) = q_X^{-1}(\mathcal{A} - \{C_X^n\}) \cup q_X^{-1}(\{C_X^n\}) = q_X^{-1}(\mathcal{A} \setminus \{C_X^n\}) \cup C_1(X)$. Por hipótesis $\dim(C(X)) \leq \dim(C_n(X)) - 2 = k - 2$. Además, $q_X^{-1}(\mathcal{A} \setminus \{C_X^n\})$ es homeomorfo a $\mathcal{A} \setminus \{C_X^n\}$ y $\mathcal{A} \setminus \{C_X^n\} \subset \mathcal{A}$. Entonces $\dim(q_X^{-1}(\mathcal{A} \setminus \{C_X^n\})) \leq \dim(\mathcal{A}) \leq k - 2$ (Teorema 2.28 y Teorema 2.25 (b)). Por lo tanto, por Teorema 2.26, concluimos que $\dim(q_X^{-1}(\mathcal{A})) \leq k - 2$. $\square$

Corolario 5.12. Los hiperespacios cocientes $C_1^n([0, 1])$ y $C_1^n(S^1)$ son variedades de Cantor $2n$ -dimensional.

Demostración. Por el Lema 2.22, sabemos que $C_n([0, 1])$ y $C_n(S^1)$ son variedades de Cantor $2n$ -dimensional. Como $n \geq 2$ y $2n \geq n + 2$, el resultado ahora se sigue del Teorema 5.11. $\square$

Teorema 5.13. Si X es un gráfica finita y $n \geq 2$, entonces X es un arco o una curva simple cerrada si y sólo si $C_1^n(X)$ es una variedad de Cantor.

Demostración. Si X es un arco o una curva simple cerrada, entonces $C_1^n(X)$ es una variedad de Cantor (Teorema 5.12).

Supongamos que X no es ni un arco ni una curva cerrada simple. Por la Proposición 2.17, $R(X) \neq \emptyset$. Entonces, por el Lema 5.9, $\dim(C_1^n(X)) \geq 2n + 1$. Como las gráficas finitas se pueden escribir como la unión finita de sus arcos libres, por el Teorema 5.2, existe un elemento $\chi \in C_1^n(X)$ tal que $\dim_\chi(C_1^n(X)) = 2n$. Además, las variedades de Cantor tienen la misma dimensión en cada uno de sus puntos [8, (A), pp. 93 y 94]. Por lo tanto, $C_1^n(X)$ no es una variedad de Cantor. $\square$

Teorema 5.14. *Sean X un continuo y $n \geq 2$. Entonces X es localmente conexo y no contiene arcos libres si y sólo si $C_1^n(X)$ es homeomorfo a el Cubo de Hilbert.*

Demostración. Por [13, Teorema 7.1], $C_n(X)$ es homeomorfo a el cubo de Hilbert. Como $C_1(X)$ tiene la forma de un punto [13, Corolario 4.6] en el sentido de Borsuk [2, 5.5 p. 28], entonces $C_n(X) \setminus C_1(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{Q} \setminus \{p\}$ para algún $p \in \mathcal{Q}$ [6, Teorema 25.2]. Así, como $C_n(X) \setminus C_1(X)$ es homeomorfo a $C_1^n(X) \setminus \{C_X^n\}$, se sigue que $\mathcal{Q} \setminus \{p\}$ es homeomorfo a $C_1^n(X) \setminus \{C_X^n\}$. Por lo tanto, $C_1^n(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{Q}$ ([7, Teorema 8.4, p.246]).

Supongamos que α es un arco libre de X . Por el Teorema 5.2, existe $\chi \in C_1^n(X)$ tal que $\dim_\chi(C_m^n(X)) = 2n$. Por lo tanto, $C_1^n(X)$ no es homeomorfo a el cubo de Hilbert ya que este último es homogéneo [18, 6.1.6]. $\square$

Como consecuencia de el Teorema 5.14, tenemos lo siguiente.

Corolario 5.15. *Sea $n \geq 2$. Entonces $C_1^n(\mathcal{Q})$ es homeomorfo a $\mathcal{Q}$.*

Corolario 5.16. *Sean X una gráfica finita y $n \geq 2$. Si Y es un continuo tal que $C_1^n(X)$ es homeomorfo a $C_1^n(Y)$, entonces Y es una gráfica finita.*

Demostración. Por el Teorema 4.4, $C_1^n(X)$ es localmente conexo. Entonces, por el Teorema 5.8, $\dim(C_1^n(X))$ es finita. Así, Y es localmente conexo y $\dim(C_1^n(Y))$ es finita. Por lo tanto, por el Teorema 5.8, Y es una gráfica finita. $\square$

Teorema 5.17. *Sea $n \geq 2$. Si X es un continuo tal que $C_1^n(X)$ es homeomorfo a $C_1^n([0, 1])$ o a $C_1^n(S^1)$, entonces X es homeomorfo a $[0, 1]$ o a S^1 .*

Demostración. Para mostrar este teorema solo analizaremos el caso cuando $C_1^n(X)$ es homeomorfo a $C_1^n([0, 1])$, el otro caso es similar. Por el Teorema 4.4, $C_1^n(X)$ es localmente conexo. Luego, X es localmente conexo (Teorema 4.4). Como, por el Lema 2.22, $\dim(C_n([0, 1]) = 2n$, entonces $\dim(C_1^n(X)) = 2n$ (Lema 5.4). Así, por el Teorema 5.8, X es una gráfica finita. Por lo tanto, por el Lema 5.7, X es homeomorfo a $[0, 1]$ o a S^1 . $\square$

Proposición 5.18. *Sean X un espacio métrico y $z \in X$. Entonces $\{z\}$ es un retracts de X .*

Demostración. Sea $r: X \rightarrow \{z\}$ que viene dada por $r(x) = z$. Entonces r es una función continua y sobreyectiva. Además, $r(\{z\}) = \{z\}$. Por lo tanto, $\{z\}$ es un retracts de X . $\square$

Teorema 5.19. *Sean X un continuo localmente conexo y $n \geq 2$. Entonces lo siguiente se cumple:*

- (a) *si X no contiene arcos libres, entonces $C_1^n(X)$ es un retracts absoluto;*
- (b) *si $\dim(C_n(X))$ es finita, entonces $C_1^n(X)$ es un retracts absoluto.*

Demostración. (a) Por el Teorema 5.14, $C_1^n(X)$ es el cubo de Hilbert. Luego, por [18, Corolario 1.5.5], $C_1^n(X)$ es un retracts absoluto.

(b) Por el Corolario 5.4, $\dim(C_1^n(X))$ es finita. Luego, como cada conjunto singular de $C_n(X)$ es un retracts de $C_n(X)$ (Proposición 5.18) y $C_n(X)$ es un retracts absoluto ([23, Théorème IIm]), entonces para cada $\chi \in C_1^n(X)$, tenemos que $(q_X)^{-1}(\chi)$ es un retracts absoluto. Por lo tanto, $C_1^n(X)$ es un retracts absoluto ([1, Corollary (12.15), p. 131]). $\square$

Corolario 5.20. *Sea $n \geq 2$. Si X es una gráfica finita, entonces $C_1^n(X)$ es un retracts absoluto.*

Demostración. Por el Teorema 5.5, $\dim(C(X))$ es finita. Luego, por el Teorema 5.6 (c), $\dim(C_n(X))$ es finita. Por lo tanto, por el Teorema 5.19 (b), $C_1^n(X)$ es un retracts absoluto. $\square$

Corolario 5.21. *Sean X un continuo localmente conexo y $n \geq 2$. Si X no contiene arcos libres o $\dim(C_n(X))$ es finita, entonces $C_1^n(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Por el Teorema 5.19, $C_1^n(X)$ es un retracts absoluto. Por lo tanto, por [18, 3.5.4], $C_1^n(X)$ tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

Agradecimientos

Agradecemos a los árbitros por su tiempo y dedicación en la revisión de este trabajo. Sus sugerencias dieron como resultado la culminación de este mismo.

Bibliografía

- [1] K. Borsuk, *Theory of Retracts*, Monografie Matematyczne, Tom 44, Warszawa, 1967.
- [2] K. Borsuk, *Theory of Shape*, Lectures, Fall, 1970, Lecture Notes Series, vol. 28, Aarhus Universitet, Matematisk Institut, 1973.
- [3] J. Camargo, Sergio Macías, *Quotient of n -fold hyperspaces*, Topology Appl. 197 (2016) 154–166.
- [4] J. Camargo, Sergio Macías, *More on quotients of n -fold hyperspaces*, Houston J. Math. 50 (2) (2024), 443–475.
- [5] Fidel Casarrubias-Segura y Ángel Tamariz-Mascarúa, *Elementos de topología general*, 2015.
- [6] T.A. Chapman, *Lectures on Hilbert Cube Manifolds*, CBMS Regional Conf. Ser. Math., vol. 28, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1976.
- [7] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, London, Sydney, Toronto, 1966.
- [8] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton, 1948.
- [9] A. Illanes, S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [10] J. L. Kelley, *Hyperspaces of a Continuum*, Trans. Amer. Math. Soc., 52 (1942), 22-36.

- [11] K. Kuratowski, *Topology, Vol. II*, Academic Press, New York, 1968.
- [12] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X , II*, *Topology Proc.* 25 (2000), 255–276.
- [13] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X* , *Topology Appl.* 109 (2001), 237–256.
- [14] S. Macías, *On n -fold hyperspaces of continua*, *Glas. Mat.* 44 (2009), 479–492.
- [15] S. Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 275, Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, 2005.
- [16] S. Macías, and S.B. Nadler, Jr., *n -fold hyperspace, cones, and products*, *Topology Proc.*, 26 (2001), 255–270.
- [17] V. Martínez-de-la-Vega, *Dimension of n -fold hyperspaces of graphs*, *Houston Journal of Mathematics*, 32(2006), 783–799.
- [18] J. van Mill, *Infinite-Dimensional Topology*, North Holland, Amsterdam, 1989.
- [19] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.
- [20] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum theory, an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158, Marcel Dekker, New York, 1992.
- [21] S.B. Nadler Jr., *Dimension Theory: An Introduction with Exercises*, Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, Textos n. 18, 2002.
- [22] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1942.
- [23] M. Wojdysławski, *Rétractes absolus et hyperespaces des continus*, *Fundamenta Mathematicae*, 32 (1939), 184 – 192.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

leonardo.ramirezap@alumno.buap.mx

dherrera@fcfm.buap.mx

fmacias@fcfm.buap.mx

Capítulo 6

Modelos de hiperespacios

Maricela Briones de Gante, David Herrera Carrasco,
Fernando Macías Romero, Ingrid Carolina Martínez
Barahona
FCFM, BUAP

Resumen

En la teoría de hiperespacios de continuos, es muy útil tener una idea geométrica de su aspecto. Dado que se definen como ciertas clases de subconjuntos de un espacio dado, esta tarea no siempre es sencilla. Por esta razón, se construyen modelos de ellos. Un modelo de un hiperespacio dado $K(X)$ es un espacio topológicamente equivalente. En este capítulo, presentamos la prueba de modelos de algunos de los hiperespacios que Alejandro Illanes menciona en [2, Capítulo 6], y Sergio Macías en [3].

1 Preliminares

Definición 1.1. Un **continuo** es un espacio métrico X con más de un punto compacto y conexo. Un subconjunto Y de X es un **subcontinuo** de X si Y es un continuo.

Ejemplo 1.2. Si consideramos $[0, 1]$ con la métrica usual, se cumple lo siguiente: (i) $[0, 1]$ es conexo por ser un intervalo, (ii) $[0, 1]$ es compacto ya que es cerrado y acotado, así, $[0, 1]$ es un continuo.

Figura 1: Continuo $[0, 1]$

$[0, 1]$

Definición 1.3. Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. Si $\alpha : [0, 1] \rightarrow A$ es un homeomorfismo, diremos que $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ son los puntos extremos del arco A .

Teorema 1.4. *Sea un espacio métrico X . Si A es un arco en X , entonces A es un continuo.*

Demostración. Sea A un arco en X . Existe un homeomorfismo $h : [0, 1] \rightarrow A$. Sabemos que el intervalo cerrado $[0, 1]$ es compacto y conexo. Ahora, como la compacidad y la conexidad se preservan bajo funciones continuas, entonces A es compacto y conexo. Por lo tanto, A es un continuo. $\square$

Ejemplo 1.5. *Sea $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la circunferencia unitaria con la métrica euclídeana de $\mathbb{R}^2$, entonces se cumple que: (i) S^1 es conexo pues S^1 es conexo por trayectorias, luego S^1 es conexo. (ii) S^1 es compacto ya que es un conjunto cerrado y acotado.*

Definición 1.6. *Una **curva cerrada simple** es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria S^1 .*

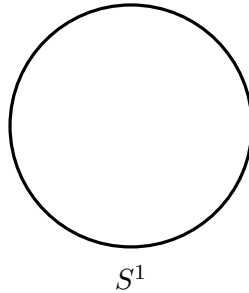


Figura 2: Curva cerrada simple.

Teorema 1.7. *Sea X un espacio métrico. Si C es una curva cerrada simple en X , entonces C es un continuo.*

Demostración. Sea C una curva cerrada simple. Entonces existe un homeomorfismo $h : S^1 \rightarrow C$. Sabemos que la circunferencia unitaria S^1 es conexo y compacto. Ahora, como la compacidad y conexidad se preservan bajo funciones continuas, tenemos que C es compacto y conexo, por lo tanto, C es un continuo. $\square$

Definición 1.8. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Una **n -celda** es un espacio topológico homeomorfo a la bola cerrada n – dimensional B^n en $\mathbb{R}^n$, donde*

$$B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sqrt{x_1^2, \dots, x_n^2} \leq 1\}.$$



Figura 3: 2-celda.

Definición 1.9. Sea $n \in \mathbb{N}$. Una ***n-esfera*** es cualquier espacio homeomorfo a la esfera n – dimensional S^n en $\mathbb{R}^{n+1}$, donde

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sqrt{x_1^2, \dots, x_{n+1}^2} = 1\}.$$

Definición 1.10. Un ***triodo simple*** T es la unión de tres arcos que únicamente se intersectan en un punto v . El punto v es llamado ***vértice*** de T .

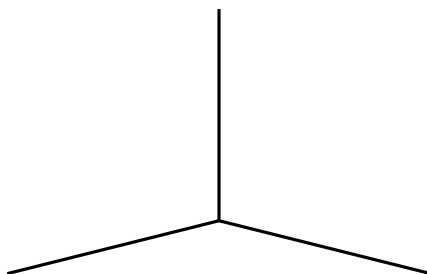


Figura 4: Triodo simple.

Teorema 1.11. Sea X es un espacio métrico. Si T es un triodo simple en X , entonces T es un continuo.

Demostración. Sea T un triodo simple. Sean L_1, L_2, L_3 los arcos del triodo, y sea v el vértice de T . Como L_1, L_2 y L_3 son continuos, son compactos y conexos, luego $T = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ es compacto, además como $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{v\}$, $T = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ también es conexa. Así T es un continuo. $\square$

Ejemplo 1.12. La paleta, es la unión de una curva cerrada simple y un arco que se interceptan en un punto. La podemos representar como la unión de S^1 con el conjunto $[1, 2] \times \{0\}$, es decir, $P = S^1 \cup ([1, 2] \times \{0\})$, por lo tanto, es un continuo.

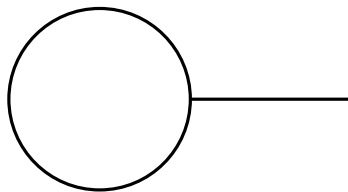


Figura 5: Paleta.

2 Hiperespacios

Definición 2.1. Sea un continuo X , decimos que un **hiperespacio** de X es una colección de subconjuntos de X que cumplen alguna propiedad en particular.

Ejemplo 2.2. Sea X un continuo, las siguientes familias

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado de } X \text{ y no vacío}\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\},$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\},$$

$$F_n(X) = \{A \subset X : A \text{ tiene a lo mas } n \text{ puntos}\},$$

$$F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X),$$

son hiperespacios de X .

Para un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, se tiene lo siguiente:

- (i) $C(X) = C_1(X)$,
- (ii) $F_n(X) \subset F_{n+1}(X)$ y $C_n(X) \subset C_{n+1}(X)$,
- (iii) $F_n(X) \subset C_n(X)$.

Notemos que como X es un compacto, entonces 2^X es el hiperespacio de todos los subconjuntos compactos no vacíos de X , en particular $X \in 2^X$, y $C(X)$ es el hiperespacio de todos los subcontinuos de X . Por otra parte, $C_n(X)$ es conocido como el n -ésimo **hiperespacio** de X .

Definición 2.3. Sean un continuo X con métrica d , $A \subset X$ y $r > 0$. La nube de radio r con centro en A es

$$N(r, A) = \{x \in X : d(x, a) < r \text{ para algún } a \in A\}.$$

Teorema 2.4. Sean un continuo X con métrica d , $r > 0$ y $A \in 2^X$, se cumplen las siguientes condiciones

- (i) Si U es abierto de X tal que $A \subset U$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $N(\delta, A) \subset U$.
- (ii) Si $0 < \delta \leq r$ y $A \subset B$, entonces $N(\delta, A) \subset N(r, B)$.
- (iii) $N(r, A) = \bigcup \{N(\delta, A) : \delta \in (0, r)\}$.
- (iv) $N(r, A) = \bigcup_{a \in A} B(a, r)$. Es decir, $N(r, A)$ es un abierto de X .

Demostración. (i) Sea $A \subset U$, como U es abierto de X tenemos que $X \setminus U$ es cerrado de X y por tanto compacto. Así tenemos que $A \cap (X \setminus U) = \emptyset$ por lo tanto, $d(A, X \setminus U) > 0$. Ahora, sean $\delta = \frac{d(A, X \setminus U)}{2}$ y $x \in N(\delta, A)$, existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \delta$. Se sigue que $x \in B(a, \delta)$. Si suponemos que $x \in X \setminus U$, entonces $d(A, X \setminus U) \leq d(x, a)$, lo cual implica que $d(A, X \setminus U) < \delta = \frac{d(A, X \setminus U)}{2}$, lo que es absurdo. Por lo tanto, $x \in U$.

(ii) Sea $\delta > 0$ tal que $\delta \leq r$. Tomemos $x \in N(\delta, A)$. Existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \delta \leq r$, luego $d(x, a) \leq r$, para algún $a \in A$. Como $A \subset B$, tenemos que $a \in B$. Así, $x \in N(r, B)$.

(iii) Dado $\delta > 0$ tal que $\delta < r$, por inciso ii) de este teorema, $N(\delta, A) \subset N(r, A)$. Entonces $\bigcup \{N(\delta, A) : 0 < \delta < r\} \subset N(r, A)$. Por otro lado, tomemos $x \in N(r, A)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < r$. Tomemos un $\delta' > 0$ tal que $d(x, a) < \delta' < r$. Luego, $x \in N(\delta', A)$, además, $N(\delta', A) \subset \bigcup \{N(\delta, A) : 0 < \delta < r\}$. Por lo tanto, $N(r, A) \subset \bigcup \{N(\delta, A) : 0 < \delta < r\}$.

(iv) Sea $x \in N(r, A)$, existe un elemento $a \in A$ tal que $d(x, a) < r$, así $x \in B(x, r)$ y por lo tanto, $x \in \bigcup_{a \in A} B(x, r)$. Por último, sea $x \in \bigcup_{a \in A} B(x, r)$, entonces existe $a \in A$ tal que $x \in B(x, r)$, se sigue que $d(x, a) < r$, por lo tanto, $x \in N(r, A)$. $\square$

Ahora nos interesa dotar al hiperespacio 2^X de una métrica, pero antes, tenemos lo siguiente. Sean X un continuo y $A, B \subset X$, la distancia entre A y B que denotamos como $d(A, B)$, está dada de la siguiente manera:

$$d(A, B) = \inf \{d(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Si $p \in X$, escribimos $d(p, A) = d(\{p\}, A)$. Mientras no se diga lo contrario, dado un continuo X , denotaremos por d la métrica de X . Además, si $p \in X$ y $\epsilon > 0$, denotamos por $B_d(\epsilon, p)$, la bola abierta con centro en p y radio ϵ . Si $A, B \in 2^X$, la función $H_d: 2^X \times 2^X \rightarrow [0, \infty)$, para cada $A, B \in 2^X$ está dada por

$$H_d(A, B) = \inf\{\epsilon > 0: A \subset N_d(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\epsilon, A)\},$$

y toma un papel muy importante en los hiperespacios.

Teorema 2.5. *La función H_d es una métrica para 2^X*

Demostración. (i) Sean $A, B \in 2^X$, entonces

$$\begin{aligned} H_d(A, B) &= \inf\{\epsilon > 0: A \subset N_d(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\epsilon, A)\} \\ &= \inf\{\epsilon > 0: B \subset N_d(\epsilon, A) \text{ y } A \subset N_d(\epsilon, B)\} \\ &= H_d(B, A). \end{aligned}$$

(ii) Como $A \subset N_d(\epsilon, A)$ para cada $\epsilon > 0$, tenemos que $H_d(A, A) = 0$. Supongamos que $H_d(B, A) = 0$, basta probar que $A \subset B$. Sea $a \in A$ y $\epsilon > 0$, como $H_d(B, A) < \epsilon$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < \delta < \epsilon$, $A \subset N_d(\delta, B)$ y $B \subset N_d(\delta, A)$. Por lo tanto, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta$. Entonces $b \in B \cap B(a, \epsilon)$, es decir, $A \subset Cl_X(B) = B$. Por lo tanto $A \subset B$. Luego $A = B$.

(iii) Por último veamos la desigualdad triangular. Sean $A, B, C \in 2^X$, debemos probar que $H_d(B, A) < H_d(A, C) + H_d(C, B)$. Por propiedades del ínfimo de un conjunto, $H_d(B, A) + H_d(B, C) = \inf\{\delta + \lambda: \delta \in \{\epsilon > 0: A \subset N_d(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\epsilon, A)\} \text{ y } \lambda \in \{\epsilon > 0: B \subset N_d(\epsilon, C) \text{ y } C \subset N_d(\epsilon, B)\}\}$. Basta probar que $H_d(A, C) < \delta + \lambda$, para cada $\delta \in \{\epsilon > 0: A \subset N_d(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\epsilon, A)\}$ y $\lambda \in \{\epsilon > 0: B \subset N_d(\epsilon, C) \text{ y } C \subset N_d(\epsilon, B)\}$.

Sean $\delta \in \{\epsilon > 0: A \subset N_d(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\epsilon, A)\}$ y $\lambda \in \{\epsilon > 0: B \subset N_d(\epsilon, C) \text{ y } C \subset N_d(\epsilon, B)\}$. Por definición $A \subset N_d(\delta, B)$, $B \subset N_d(\delta, A)$ y $B \subset N_d(\lambda, C)$.

Sea $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $d(x, y) < \delta$. Como $y \in N_d(\lambda, C)$, existe $z \in C$ tal que $d(y, z) < \lambda$. Entonces $d(x, z) < \delta + \lambda$. Por lo tanto $x \in N_d(\delta + \lambda, C)$. Hemos probado de $A \subset N_d(\delta + \lambda, C)$. De manera similar, $C \subset N_d(\delta + \lambda, A)$. Con ambas contenciones tenemos que $\delta + \lambda \in \{\epsilon > 0: A \subset N_d(\epsilon, C) \text{ y } C \subset N_d(\epsilon, A)\}$. Por lo tanto $H_d(A, C)$ es un límite inferior del

conjunto $\{\delta + \lambda : \delta \in \{\epsilon > 0 : A \subset N_d(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\epsilon, A)\} \text{ y } \lambda \in \{\epsilon > 0 : B \subset N_d(\epsilon, C) \text{ y } C \subset N_d(\epsilon, B)\}\}$. Luego $H_d(B, A) < H_d(A, C) + H_d(C, B)$. $\square$

A la métrica H_d se le conoce como la **métrica de Hausdorff inducida por d** o simplemente **métrica de Hausdorff**. De ahora en adelante, siempre que consideraremos a 2^X , lo haremos con esta métrica.

También, al ser los demás hiperespacios, $F_1(X)$, $C(X)$ y $C_n(X)$ subconjuntos de 2^X , se les considera dotados con la restricción correspondiente de la métrica de Hausdorff H_d .

Si X es un continuo con métrica d , $\epsilon > 0$ y $A \in 2^X$, denotaremos la bola abierta de 2^X con centro en A y radio ϵ como:

$$B_{H_d}(\epsilon, A) = \{B \in 2^X : H_d(A, B) < \epsilon\}.$$

Definición 2.6. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \dots, U_n \subset X$. El **vietórico de $U_1, U_2, \dots, U_n$ en 2^X** , está dado de la siguiente manera:

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Teorema 2.7. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $U_1, U_2, \dots, U_n$ y $V_1, V_2, \dots, V_m$ subconjuntos de un continuo X . Si $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$, entonces

$$\begin{aligned} \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \dots, V_m \rangle = \\ \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \dots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \dots, U \cap V_m \rangle \end{aligned}$$

Demostración. (C) Sea $B \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \dots, V_m \rangle$, entonces

$$B \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \text{ y } B \in \langle V_1, V_2, \dots, V_m \rangle.$$

Como $B \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$, $B \in \Gamma(\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap \bigcap_{i=1}^n \Lambda(U_i)$, entonces $B \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $B \in \Lambda(U_i)$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, luego $B \subset \bigcup_{i=1}^n U_i = U$ y $B \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Similarmente, como $B \in \langle V_1, \dots, V_m \rangle$, $B \subset \bigcup_{i=1}^m V_i = V$ y $B \cap V_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Con lo anterior, $B \subset (\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap (\bigcup_{i=1}^m V_i) = U \cap V$. Además, $B \subset [\bigcup_{i=1}^m (U \cap V_i)] \cup [\bigcup_{i=1}^n (V \cap U_i)]$. Como $B \subset U$, se cumple $B = B \cap U$. Además, $B \cap V_i = B \cap (U \cap V_i) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Del mismo modo se prueba que $B \cap (V \cap U_i) \neq \emptyset$,

para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Por lo tanto, concluimos que $B \subset \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \dots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \dots, U \cap V_m \rangle$.

($\supset$) Sea $B \subset \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \dots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \dots, U \cap V_m \rangle$. Luego, $B \subset U \cap V$. Tomemos $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, como $B \cap (V \cap U_i) \neq \emptyset$, tenemos que $B = B \cap V$ y $B \cap U_i = B \cap (V \cap U_i)$. Así se tiene que $B \cap (V \cap U_i) \neq \emptyset$, es decir, $B \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. De la misma forma se prueba que $B \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Por lo tanto $B \subset \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \dots, V_m \rangle$. $\square$

Teorema 2.8. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. La familia*

$$\mathfrak{C} = \{\langle U_1, \dots, U_n \rangle : U_1, \dots, U_n \text{ son abiertos de } X\}$$

es una base para la topología inducida por la métrica de Hausdorff para 2^X .

Demostración. (i) $\emptyset \in \mathfrak{C}$ ya que $\langle \emptyset \rangle = \{B \in 2^X : B \subset \emptyset \text{ y } B \cap \emptyset \neq \emptyset\} = \emptyset$ y dado que $\emptyset$ es abierto de X , $\emptyset \in \mathfrak{C}$.

(ii) Sean $U, V \in \mathfrak{C}$ y $B \in U \cap V$. Veamos que existe $W \in \mathfrak{C}$ tal que $B \in W \subset U \cap V$. Como $U, V \in \mathfrak{C}$, entonces $U = \langle U_1, \dots, U_n \rangle$ y $V = \langle V_1, \dots, V_m \rangle$ donde cada $U_1, \dots, U_n$ y $V_1, \dots, V_m$ son abiertos de X , con $n, m \in \mathbb{N}$. Sea $W = \langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \dots, V_m \rangle$. Por Teorema 2.7, $W \in \mathfrak{C}$. Del mismo teorema, $U \cap V = W \in \mathfrak{C}$. Como $B \in U \cap V$ tenemos que $B \in W \subset U \cap V$.

(ii) Por último, veamos que $2^X = \bigcup \mathfrak{C}$. En efecto, notemos que $\langle X \rangle = \{A \in 2^X : A \subset X\} = 2^X$, así $2^X \in \mathfrak{C}$. De manera que $2^X \subset \bigcup \mathfrak{C}$, luego, $2^X = \bigcup \mathfrak{C}$. Con lo anterior, $\mathfrak{C}$ es una base para la topología de 2^X . $\square$

Teorema 2.9. [1, Corolario 7.8 (3)] *Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y biyectiva entre espacios topológicos, X es compacto y Y es Hausdorff, entonces $f^{-1} : Y \rightarrow X$ es continua.*

En las siguientes secciones mostramos modelos de algunos de los hiperespacios más conocidos.

3 $C([0, 1])$

Dado que $C([0, 1])$ es el hiperespacio de subcontinuos de $[0, 1]$ tenemos lo siguiente.

$$C[0, 1] = \{[a, b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}.$$

Sea $T = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ y sea $\varphi : C([0, 1]) \rightarrow T$ definida por

$$\varphi([a, b]) = (a, b).$$

Veamos que φ es inyectiva. Sean $[a, b], [c, d] \in C([0, 1])$ tales que $\varphi([a, b]) = \varphi([c, d])$, entonces $(a, b) = (c, d)$, luego $a = c$ y $b = d$ por lo que $[a, b] = [c, d]$.

Ahora veamos que φ es suprayectiva. Sea $(a, b) \in T$ entonces $0 \leq a \leq b \leq 1$ por lo que $[a, b] \in C([0, 1])$ y es tal que $\varphi([a, b]) = (a, b)$.

Verifiquemos la continuidad de φ : Sea $[a, b] \in C([0, 1])$ y sea $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \sqrt{\varepsilon/2}$ tenemos que si

$$\mathcal{H}([a, b], [c, d]) < \delta \text{ para } [c, d] \in C([0, 1]),$$

entonces

$$[a, b] \subset N(\delta, [c, d]) \text{ y } [c, d] \subset N(\delta, [a, b]),$$

luego

$$|a - c| < \delta \text{ y } |b - d| < \delta$$

$$(a - c)^2 + (b - d)^2 < 2\delta^2 = \varepsilon,$$

es decir,

$$||(a, b) - (c, d)|| < \varepsilon,$$

por lo tanto φ es continua. Finalmente, por Teorema 2.9 tenemos que $\varphi^{-1} : T \rightarrow C([0, 1])$ es una función continua. Así, φ es un homeomorfismo entre $C([0, 1])$ y T . y como T es el triángulo con vértices en $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$ entonces $C([0, 1])$ es una 2-celda.

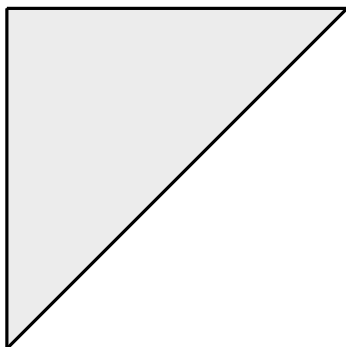


Figura 6: Modelo geométrico de $C([0, 1])$.

Notemos que el conjunto de elementos en $C([0, 1])$ que contienen al 0 (intervalos de la forma $[0, b]$) está representado por una arista de T . De manera similar, el conjunto de elementos de $C([0, 1])$ que contienen al 1 está representado por otra arista de T . El conjunto de singulares, $F_1([0, 1])$ está representado por la tercera arista de T (la diagonal).

Otra forma de representar $C([0, 1])$ es mediante la función $\psi : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\psi([a, b]) = (a + 2b, b - a).$$

La imagen de ψ es el triángulo ilustrado en la Figura 7.

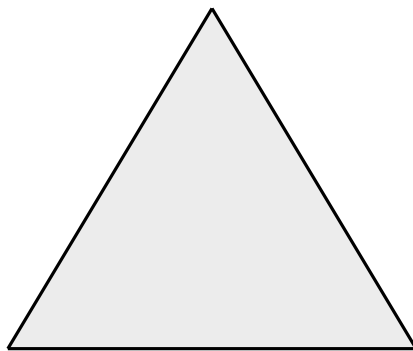


Figura 7: Modelo geométrico de $C([0, 1])$.

4 $C(S^1)$

Tenemos que

$$C(S^1) = \{A : A \text{ es un arco en } S^1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in S^1\}.$$

Sean $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $\varphi : C(S^1) \rightarrow R$ dada por

$$\varphi(A) = \begin{cases} \left[1 - \frac{L(A)}{2\pi}\right] m(A), & A \neq S^1 \\ (0, 0), & A = S^1 \end{cases}$$

donde $L(A)$ es la longitud de arco de A y $m(A)$ el punto medio. Veamos que φ es inyectiva: Sean $A, B \in C(S^1)$ tales que $A \neq B$, si A o B es S^1 , $\varphi(A) \neq \varphi(B)$. supongamos que $A, B \neq S^1$, entonces

$$L(A) \neq L(B) \text{ o } m(A) \neq m(B)$$

así

$$\left[1 - \frac{L(A)}{2\pi}\right] m(A) \neq \left[1 - \frac{L(B)}{2\pi}\right] m(B),$$

es decir, $\varphi(A) \neq \varphi(B)$, es decir, φ es inyectiva. Veamos que φ es suprayectiva: Sea $(x, y) \in R$. Si $(x, y) = (0, 0)$, entonces $\varphi(S^1) = (x, y)$. Si $(x, y) \neq (0, 0)$, sea $r = \|(x, y)\|$ y $u = \frac{(x, y)}{r}$ el vector unitario en dirección de (x, y) que puede servir como punto medio $m(A)$, de un arco $A \in S^1$. Necesitamos encontrar una longitud de arco $L(A)$ tal que $1 - \frac{L(A)}{2\pi} = r$, entonces,

$$\frac{L(A)}{2\pi} = 1 - r \quad \text{y} \quad L(A) = 2\pi(1 - r).$$

Como $0 < r \leq 1$, la longitud $0 \leq L(A) < 2\pi$. Por lo tanto, siempre podemos construir un subarco. Ahora veamos que φ es continua: Sean $A \in C([S^1])$ y $m(A) = (a, b)$, entonces

$$\varphi(A) = \left[1 - \frac{L(A)}{2\pi}\right] (a, b) = \left(\left[1 - \frac{L(A)}{2\pi}\right] a, \left[1 - \frac{L(A)}{2\pi}\right] b\right).$$

como tenemos una función en $\mathbb{R}^2$ tal que cada coordenada es continua, se sigue que φ es una función continua. Por último, por Teorema 2.9 tenemos que $\varphi^{-1} : R \rightarrow C(S^1)$ es una función continua. Por lo tanto, φ es un homeomorfismo entre $C(S^1)$ y R , y como R es el disco unitario, $C(S^1)$ es una 2-celda.

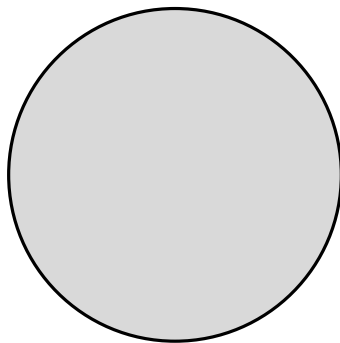


Figura 8: Modelo geométrico de $C(S^1)$.

Con este modelo vemos que el hiperespacio de subcontinuos tanto para $[0, 1]$ como para S^1 es una 2-celda, es decir, ambos continuos tienen el mismo hiperespacio.

5 C (Triodo simple)

Sea T el triodo simple, entonces $T = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, donde L_1, L_2, L_3 son arcos. Llamemos v al vértice de T . Así, $C(T) = C(L_1) \cup C(L_2) \cup C(L_3) \cup C_v(T)$, con $C_v(T) = \{A \in C(T) : v \in A\}$. Por el modelo dado en la sección 3, $C(L_i)$ es un triángulo para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Dado $A \in C_v(T)$, A está determinado únicamente por las longitudes de las intersecciones de A con los catetos de T por lo que pueden representarse mediante un vector con tres coordenadas (a, b, c) . Variando a, b y c , obtenemos un cubo en $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto, $C(T)$ es la unión de un cubo en $\mathbb{R}^3$ con tres triángulos unidos.

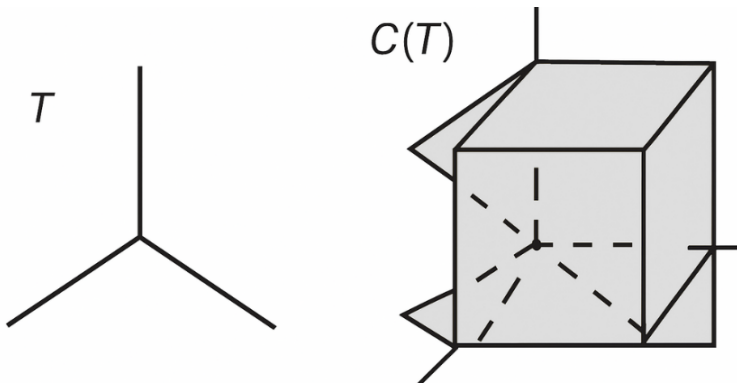


Figura 9: Hiperespacio de subcontinuos del triodo simple.

6 C (Paleta)

Como la paleta N es la unión de una curva cerrada simple S^1 y un arco L que intersecta a S^1 en un punto v que es un extremo de L , el hiperespacio $C(N)$ es la unión de $C(S^1)$, $C(L)$ y $C_v(N) = \{A \in C(N) : v \in A\}$. Según los modelos anteriores, el conjunto $C(L)$ puede representarse como un triángulo convexo y $C(S^1)$ como un disco. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $v = (1, 0)$. Sea $D = \{A \in C(S^1) : v \in A\}$. La mejor manera de visualizar D es reconocer su frontera, que viene dado por el conjunto

$$\{A \in C(S^1) : A \text{ es un subarco de } S^1 \text{ y } v \text{ es un extremo de } A\} \cup \{S^1, \{v\}\}.$$

Comenzando en $\{v\}$, consideramos arcos con v como extremo y dibujamos sus imágenes bajo la función φ de la sección 4. Luego, obtenemos la curva de la Figura 11. Ahora vemos que D tiene forma de corazón. Para cada elemento $B \in D$, podemos ampliar B utilizando un subarco de L que contiene a v . Por lo tanto, para cada B , en el modelo de $C(N)$, debemos colocar un arco. Por lo tanto, un modelo de D es el cilindro $D \times [0, 1]$. A este cilindro le añadimos el disco $C(S)$ y el triángulo convexo $C(L)$.

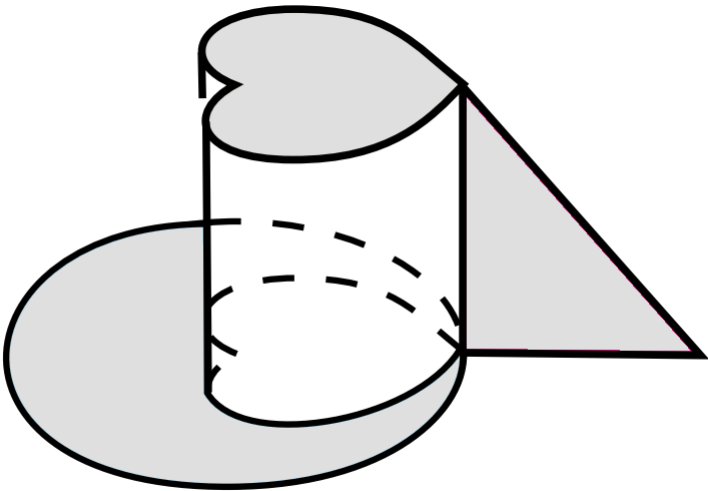


Figura 10: Hiperespacio de subcontinuos de la paleta.

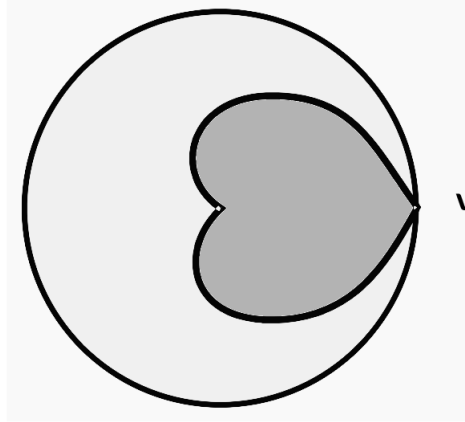


Figura 11: Modelo de subacros que tienen a v .

7 $C(S^1$ con espiral)

La circunferencia con una espiral (véase la figura 3.2) es el continuo $S = S^1 \cup \mathcal{S}$ donde $\mathcal{S}$ es la espiral dada en coordenadas polares por:

$$\mathcal{S} = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r = 1 + \frac{1}{1 + \theta} \text{ y } \theta > 0\}$$

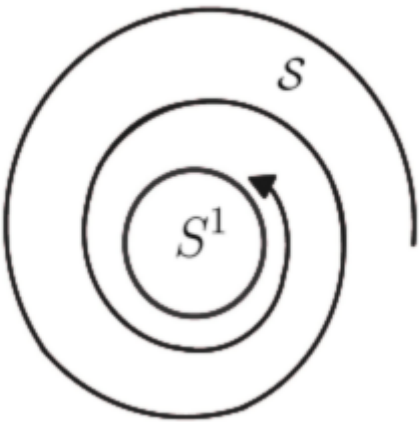


Figura 12: Circunferencia con espiral.

En lo sucesivo la letra S será reservada para referirnos a la circunferencia con una espiral.

En [4] se prueba que $C(S)$ es homeomorfo al cono de S .

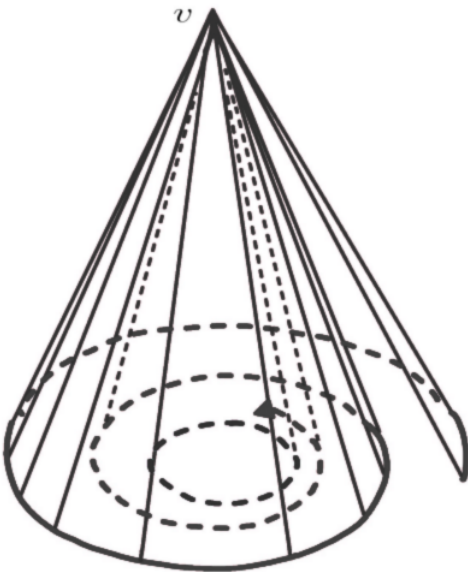


Figura 13: Cono de S .

8 $F_2([0, 1])$

Tenemos que $F_2([0, 1]) = \{\{a, b\} : a, b \in [0, 1]\}$, dado que $\{a, b\} = \{b, a\}$, entonces $F_2([0, 1]) = \{\{a, b\} : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$. Sea $\varphi : F_2([0, 1]) \rightarrow T$, (con T como en la sección 3) dada por

$$\varphi(\{a, b\}) = (\min\{a, b\}, \max\{a, b\}).$$

Supongamos que $\varphi(\{a, b\}) = \varphi(\{c, d\})$, para $\{a, b\}, \{c, d\} \in F_2([0, 1])$, entonces

$$(\min\{a, b\}, \max\{a, b\}) = (\min\{c, d\}, \max\{c, d\})$$

$\Rightarrow$

$$\min\{a, b\} = \min\{c, d\} \text{ y } \max\{a, b\} = \max\{c, d\}$$

$\Rightarrow$

$$(a = c \text{ y } b = d) \text{ o } (a = d \text{ y } b = c)$$

por lo que $\{a, b\} = \{c, d\}$, esto nos muestra que φ es inyectiva. Sea $(x, y) \in T$ entonces, $0 \leq x \leq y \leq 1$, luego existen $a, b \in [0, 1]$ tales que $x = \min\{a, b\}$ y $y = \max\{a, b\}$ y $\{a, b\} \in F_2([0, 1])$, de esta manera, $\varphi(\{a, b\}) = (x, y)$, es decir, φ es suprayectiva. Por último veamos que φ es continua: Sea $\{a, b\} \in F_2([0, 1])$ y sea $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \sqrt{\varepsilon/2}$, entonces si

$$\mathcal{H}(\{a, b\}, \{c, d\}) < \delta, \text{ con } \{c, d\} \in F_2([0, 1])$$

$$\{a, b\} \subset N(\delta, \{c, d\}) \text{ y } \{c, d\} \subset N(\delta, \{a, b\})$$

$$|\min\{a, b\} - \min\{c, d\}| < \delta \text{ y } |\max\{a, b\} - \max\{c, d\}| < \delta$$

$$(\min\{a, b\} - \min\{c, d\})^2 + (\max\{a, b\} - \max\{c, d\})^2 < 2\delta^2 = 2(\sqrt{\varepsilon/2})^2 = \varepsilon$$

$$||(\min\{a, b\}, \max\{a, b\}) - (\min\{c, d\}, \max\{c, d\})|| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, φ es continua, y por el Teorema 2.9 tenemos que φ es un homeomorfismo entre $F_2([0, 1])$ y T . Así, $F_2([0, 1])$ es una 2-celda.

9 $F_3([0, 1])$

Para construir un modelo de $F_3([0, 1])$, consideremos de nuevo la función $\varphi : F_3([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\varphi(A) = (\min.A, \max.A)$. Entonces, φ es una función continua cuya imagen es el triángulo T de la Fig. 10.7. Dado $(a, b) \in T$, la fibra $\varphi^{-1}((a, b))$ es el conjunto $\{\{a, b, c\} : a \leq c \leq b\}$. Si $a < b$, el conjunto $\{\{a, b, c\} : a \leq c \leq b\}$ es una curva cerrada simple, ya que c recorre el intervalo $[a, b]$ y $\{a, a, b\} = \{a, b, b\}$. Si $a = b$, $\varphi^{-1}((a, b)) = \{\{a, b, c\} : a \leq c \leq b\} = \{\{a\}\}$. Por lo tanto, para obtener un modelo de $F_3([0, 1])$, necesitamos trazar un círculo en cada punto $(a, b) \in T$ tal que $a < b$. Esto se puede lograr tomando el cuerpo de revolución que se obtiene al rotar T alrededor de su diagonal. Por lo tanto, $F_3([0, 1])$ es una 3-celda (Fig. 10.18).

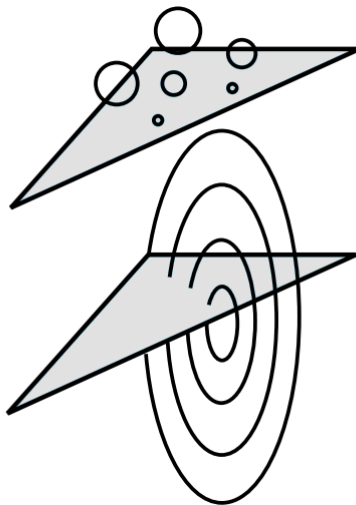


Figura 14: Tercer producto simétrico de $[0, 1]$.

10 $F_2(S^1)$

Veamos que $F_2(S^1)$ es la Banda de Moebius. Sea $\mathcal{NA} = \{\{p, q\} \in F_2(S^1) : p \neq -q\}$, $A : \mathcal{NA} \rightarrow C(S^1)$, $m : \mathcal{NA} \rightarrow S^1$, $L : \mathcal{NA} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\varphi : \mathcal{NA} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por

$A(\{p, q\}) =$ el arco más corto que une p y q en S^1

$m(\{p, q\}) =$ el punto medio de $A(\{p, q\})$,

$L(\{p, q\}) =$ la longitud de $A(\{p, q\})$,

$\varphi(\{p, q\}) = \left[1 - \left(\frac{1}{2\pi} L(\{p, q\}) \right) \right] m(\{p, q\})$.

Como $L(\{p, q\}) < \frac{1}{2}$ (por definición de la función A) y por la sección 4, tenemos que φ es un homeomorfismo entre $\mathcal{NA}$ y el anillo $R = \{z \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < |z| \leq 1\}$. Si queremos extender φ al conjunto $A = \{\{z, -z\} \in F_2(S^1) : z \in S^1\}$, por continuidad y dependiendo de cómo aproximemos $\{z, -z\}$ mediante los elementos $\{p, q\} \in \mathcal{NA}$, deberíamos definir $\varphi(\{z, -z\})$ con dos valores, a saber, $\varphi(\{z, -z\}) = w$ o $-w$, donde $2w$ es el punto obtenido al rotar $\frac{\pi}{2}$ a z . Para resolver esta ambigüedad, necesitamos identificar los puntos w y $-w$. Nótese que los puntos w son los puntos del círculo $B = \{u \in \mathbb{R}^2 : |u| = \frac{1}{2}\}$. El espacio cociente obtenido de $R_0 = R \cup B$ mediante esta identificación es la banda de Moebius M . En la Figura 15 mostramos cómo se puede obtener esta banda. Comenzamos con el anillo y lo cortamos con dos flechas a y b . Luego realizamos las transformaciones marcadas en la figura 15 para obtener la banda.

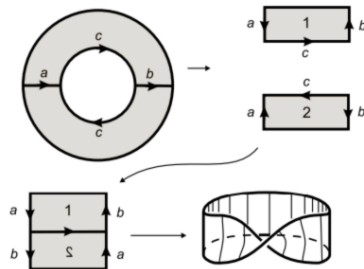


Figura 15: Segundo producto simétrico de S^1 .

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar el capítulo.

Referencias

- [1] Fidel Casarrubias-Segura y Angel Tamariz-Mascarúa, *Elementos de topología general*, 2012.
- [2] Alejandro Illanes, *Continuum theory*, Springer, Mexico City, Mexico, 2025.
- [3] Sergio Macías, *Topics on Continua*, second edition, Springer, Cham, 2018.
- [4] Daniel Dominguez Málaga *Modelos del hiperespacio $C(X)$ y $Cono(X)$* , Tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 2024.
- [5] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum theory, an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

marybriones107@gmail.com
dherrera@fcfm.buap.mx
fernando.macias@correo.buap.mx
ingrid@correo.buap.mx

Capítulo 7

Sobre la conexidad por continuos en los hiperespacios $F_2(X) \setminus F_1(X)$ y $C_2(X) \setminus C(X)$ para continuos encadenables

Gerardo Hernández Valdez, Jahir Alessandro Salas
Reyna

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UANL

Resumen

Sean $n \in \mathbb{N}$ y X un continuo. Consideramos los hiperespacios $C_n(X)$ ($F_n(X)$) de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de X que poseen a lo más n componentes (n puntos, respectivamente). Un continuo es *conexo por continuos* si, para cada pareja de elementos distintos, existe un subcontinuo que los contiene. En este trabajo se estudiarán condiciones de un continuo encadenable X bajo las cuales los hiperespacios $C_2(X) \setminus C(X)$ y $F_2(X) \setminus F_1(X)$ son conexos por continuos.

1 Introducción

Un continuo X es un espacio métrico, compacto, conexo y no degenerado. A lo largo de los años de estudio de la teoría de continuos, se ha involucrado a su vez el estudio de sus hiperespacios. Un hiperespacio de un continuo X es una colección $\mathcal{H}$ de subconjuntos cerrados no vacíos de X que satisfacen alguna propiedad.

Dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, consideramos los siguientes hiperespacios de X :

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es un subconjunto cerrado y no vacío de } X\},$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ posee a lo más } n \text{ componentes}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ posee a lo más } n \text{ puntos}\}, \text{ y}$$

$$C(X) = C_1(X).$$

Estos hiperespacios están dotados de la topología de Vietoris [9, Definición 1.1]. A su vez, todos estos hiperespacios son continuos, con la métrica de Hausdorff [9, Teorema 2.2], [7, 1.8.8, 1.8.9, 1.8.12]. Los hiperespacios $F_n(X)$ y $C_n(X)$ se conocen como *n-ésimo hiperespacio simétrico de X* y el *n-ésimo hiperespacio de X* , respectivamente. Para profundizar el estudio de estos hiperespacios, recomendamos al lector la literatura [3], [4], [6].

Dentro del estudio de hiperespacios de un continuo, surgen las siguientes preguntas:

Pregunta 1.1. *¿Qué continuos X hacen que un hiperespacio $\mathcal{H}$ siempre posean una propiedad topológica P ?*

Pregunta 1.2. *¿Bajo qué condiciones del continuo X se cumple una propiedad P en un hiperespacio $\mathcal{H}$?*

Para la Pregunta 1.1, se conocen algunas propiedades que siempre se preservan en los hiperespacios $C_n(X)$ tales como la unicoherencia, conexidad colocal, la propiedad de ser nunca denso, entre otras (véase [7, Teorema 6.1.7, 6.2.4, 6.3.1]).

Centramos nuestro interés en la Pregunta 1.2. En el presente trabajo, que tiene como base a [1] y [8], presentamos una recapitulación de resultados acerca de la conexidad por continuos en los hiperespacios $C_2(X) \setminus C(X)$ y $F_2(X) \setminus F_1(X)$. En la Sección 2 escribimos notaciones y definiciones que utilizaremos en posteriores secciones. En la Sección 3 citamos teoría preliminar a los resultados importantes de este trabajo. En la Sección 5 presentamos un continuo que desconecta por continuos al hiperespacio $F_2(X) \setminus F_1(X)$. Finalmente, en la Sección 6 se proporciona una prueba de conexidad por continuos para el hiperespacio $C_2(X) \setminus C(X)$ con X una compactación del rayo bajo la condición de que el hiperespacio de subcontinuos del rayo no sea denso en el hiperespacio de subcontinuos del residuo.

2 Notaciones y definiciones

Dado un subconjunto A de un continuo X , $\text{int}_X(A)$, $\text{cl}_X(A)$, y $\text{Fr}_X(A)$, denotan el *interior*, la *cerradura*, y la *frontera* de A en X , respectivamente. Si d es la métrica de X , $\varepsilon > 0$, $Z \subset X$, y $z \in X$, el conjunto $\{x \in X : d(z, x) < \varepsilon\}$

se denota por $B_d(z, \varepsilon)$, ó $B(z, \varepsilon)$ cuando no haya posibilidad de confusión; la nube del conjunto Z con radio ε se define como $N(Z, \varepsilon) = \bigcup \{B(z, \varepsilon) : z \in Z\}$. Dados subconjuntos $U_1, \dots, U_n$ de X , con $n \in \mathbb{N}$, se define el vietórico de $U_1, \dots, U_n$ como el conjunto

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subset U_1 \cup \dots \cup U_n \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Se conoce de [9, Teorema 1.2] que la familia de todos los conjuntos de la forma $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$, donde $n \in \mathbb{N}$ y cada U_i es abierto en X , es una base para la topología en 2^X , conocida como la *topología de Vietoris*. Ahora, recordemos unas definiciones de conceptos con los que trabajaremos.

Definición 2.1. Sea (X, d) un espacio métrico acotado. La **métrica Hausdorff** H_d , se define de la siguiente manera: para cualesquiera $A, B \in 2^X$,

$$H_d(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset N(B, r) \text{ y } B \subset N(A, r)\}.$$

Por [9, Teorema 2.2], H_d es una métrica para 2^X .

Definición 2.2. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Se dice que f es **cerrada** si para cualquier $C \subset X$ cerrado se tiene que $f(C)$ es cerrado.

Definición 2.3. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Se dice que f es **monótona** si para cualquier $y \in Y$ se tiene que $f^{-1}(\{y\})$ es conexo.

Definición 2.4. Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice que es **denso en ninguna parte** si y sólo si $\text{int}_X(\text{cl}_X(A)) = \emptyset$

Definición 2.5. Sean X un espacio métrico y $\varepsilon > 0$. Una **ε -cadena** es una colección de abiertos en X , $U_1, \dots, U_n$ con $n \in \mathbb{N}$ tales que

- $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| = 1$,
- para cada i , $\text{diám } U_i < \varepsilon$,
- la colección $\{U_1, \dots, U_n\}$ cubre a X .

Llamaremos **eslabones** de la cadena a los abiertos $U_1, \dots, U_n$.

De manera similar se define una cadena de continuos

Definición 2.6. Sea X un espacio métrico y $\varepsilon > 0$. Una ε -cadena de continuos en X es una colección de continuos en X , $N_1, \dots, N_n$ con $n \in \mathbb{N}$ tales que

- $N_i \cap N_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| = 1$,
- para cada i , $\text{diám } N_i < \varepsilon$.

Llamaremos **eslabones** de la cadena a los continuos $N_1, \dots, N_n$.

Definición 2.7. Un espacio métrico X es **encadenable** si para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε -cadena en X .

De nuevo, podemos definir de manera similar ser encadenable por continuos

Definición 2.8. Sea X un continuo. Diremos que X es **encadenable por continuos** dado que para cada $p, q \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe una ε -cadena de continuos $\{N_1, \dots, N_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$ tal que $p \in N_1$ y $q \in N_n$.

Definición 2.9. Sean X un continuo y $p \in X$. Definimos la **unión compo-**
sante de p como el conjunto

$$\kappa_u(p) = \{x \in X : \exists M \in C(X) \setminus \{X\} \text{ encadenable por continuos con } p, x \in M\}.$$

3 Preliminares

En esta sección presentamos resultados importantes en la literatura de teoría de continuos que serán de gran ayuda en las pruebas de secciones posteriores. Se encuentran debidamente citados.

Teorema 3.1. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una sobre, continua y cerrada. Lo siguiente es equivalente:

1. f es monótona.
2. Para cualquier $C \subset Y$ conexo se tiene que $f^{-1}(C)$ es conexo.

Demostración. Es sencillo ver que $2 \Rightarrow 1$, ya que $\{y\}$ es conexo para todo $y \in Y$ y así f es monótona.

$1 \Rightarrow 2$. Sea $C \subset Y$ conexo y procedamos por contradicción suponiendo que $f^{-1}(C)$ no es conexo. Entonces, existe (U, V) separación por cerrados de $f^{-1}(C)$. Dado que f es cerrada, los conjuntos $U_C = C \cap f(U)$ y $V_C = C \cap f(V)$ son cerrados en C . Como $U \cap f^{-1}(C) \neq \emptyset$ y $V \cap f^{-1}(C) \neq \emptyset$, tenemos que U_C y V_C son no vacíos. Tomemos $y \in C$, luego $\emptyset \neq f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(C) \subset U \cup V$; se sigue que $f^{-1}(\{y\}) \subset U$ ó $f^{-1}(\{y\}) \subset V$ y así $y \in U_C$ ó $y \in V_C$. Además, se sigue que U_C, V_C son ajenos. Así, hemos probado que (U_C, V_C) es una separación para C . Esto es una contradicción, probando así que $f^{-1}(C)$ es conexo. $\square$

Proporcionamos la prueba del siguiente resultado para la comodidad del lector.

Teorema 3.2. *Sean X no localmente conexo, Y localmente conexo y $f : X \rightarrow Y$ monótona y cerrada. Entonces, existe $y \in f(X)$ tal que $f^{-1}(\{y\})$ es no degenerado.*

Demostración. Puesto que X no es localmente conexo, existe $x_0 \in X$ tal que X no es localmente conexo en x_0 . Denotemos por $y = f(x_0)$ y así $y \in f(X)$. Veamos que $f^{-1}(\{y\})$ es no degenerado procediendo por contradicción y suponiendo que $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$. En consecuencia, existe $U \subset X$ vecindad de x tal que si $V \subset U$ es otra vecindad de x , entonces V no es conexo. Dado de que f es cerrada y $f^{-1}(\{y\}) \subset U$, por [7, Teorema 11.2(1)] y usando el hecho de que Y localmente conexo, tenemos que existe V_0 una vecindad conexas de y tal que $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(V_0) \subset U$. Ya que f es monótona y cerrada, tenemos que $f^{-1}(V_0)$ es conexo y abierto por ser f continua.

Puesto que $x \in f^{-1}(V_0) \subset U$ y $f^{-1}(V_0)$ abierto conexo, tenemos que $f^{-1}(V_0)$ es una vecindad conexas de x contenida en U ; lo cual es una contradicción. Por lo tanto $f^{-1}(\{y\})$ es no degenerado. $\square$

Teorema 3.3. *Sean (X, d) un espacio métrico, $n \in \mathbb{N}$ y $A_1, \dots, A_n \subset X$ tales que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ si $|i - j| = 1$. Entonces $\text{diám}(U_{k=1}^n A_k) \leq \sum_{k=1}^n \text{diám} A_k$.*

Demostración. Sean $x, y \in \bigcup_{k=1}^n A_k$, por lo que existen $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tales que $x \in A_i$ y $y \in A_j$; sin pérdida de generalidad, $i \leq j$. Además, para cada $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tomemos $x_k \in A_k \cap A_{k+1}$.

- Si $i = j$: tenemos que $d(x, y) \leq \text{diám } A_i \leq \sum_{k=1}^n \text{diám } A_k$.
- Si $i < j$: aplicando múltiples veces la desigualdad del triángulo obtenemos que

$$\begin{aligned}
 d(x, y) &\leq d(x, x_i) + \sum_{k=i}^{j-2} d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{j-1}, y) \\
 &\leq \text{diám } A_i + \sum_{k=i}^{j-2} \text{diám } A_{k+1} + \text{diám } A_j \\
 &= \sum_{k=i}^j \text{diám } A_k \leq \sum_{k=1}^n \text{diám } A_k.
 \end{aligned}$$

De ambos casos obtenemos que $d(x, y) \leq \sum_{k=1}^n \text{diám } A_k$ y dado que x, y fueron arbitrarios tenemos que $\text{diám}(U_{k=1}^n A_k) \leq \sum_{k=1}^n \text{diám } A_k$. $\square$

Lema 3.4. *Sea X un continuo. Si $A, B \in C(X)$ y $\varepsilon \in (0, d(A, B))$, entonces $A \cup B \in C_2(X) \setminus N_{H_d}(C(X), \frac{\varepsilon}{2})$.*

Demostración. Supongamos por el contrario que existe $E \in C(X)$ tal que $H_d(A \cup B, E) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, de la definición de H_d tenemos que

$$A \cup B \subset N\left(E, \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{y} \quad E \subset N\left(A \cup B, \frac{\varepsilon}{2}\right) = N\left(A, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup N\left(B, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Veamos que $N\left(A, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap N\left(B, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \emptyset$. De lo contrario, existe $z \in N\left(A, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap N\left(B, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. En consecuencia, por definición de nube existe $(a, b) \in A \times B$ tales que $d(a, z), (b, z) < \frac{\varepsilon}{2}$ y así, por desigualdad triangular

$$\varepsilon < d(A, B) \leq d(a, b) \leq d(a, z) + d(z, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

lo cual es una contradicción.

Puesto que $N\left(A, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ y $N\left(B, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ son abiertos ajenos y E es conexo, tenemos que $E \subset N\left(A, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ ó $E \subset N\left(B, \frac{\varepsilon}{2}\right)$; sin pérdida de generalidad, $E \subset N\left(A, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Se sigue que

$$B \subset N\left(E, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset N\left(A, \varepsilon\right),$$

lo cual contradice que $\varepsilon < d(A, B)$. De esta manera hemos probado que no existe $E \in C(X)$ tal que $H_d(A \cup B, E) < \frac{\varepsilon}{2}$ como se deseaba. $\square$

En particular, si $\varepsilon < d(A, B)$ y aplicamos el lema previo a $\frac{\varepsilon}{3}$ llegamos a que $A \cup B \in C_2(X) \setminus N_{H_d}(C(X), \frac{\varepsilon}{6})$. Esto es relevante, pues nos permitirá probar que ciertos conjuntos son subcontinuos del hiperespacio $C_2(X) \setminus C(X)$.

Teorema 3.5. [9, Teorema 5.6 (Golpes en la frontera II)] Sean X un continuo y E un subconjunto propio no vacío. Si K es una componente de E , entonces $\text{cl}_X(K) \cap \text{Fr}_X(E) \neq \emptyset$.

Teorema 3.6. Sean X un continuo y $\text{diám} : F_2(X) \rightarrow [0, \text{diám } X]$ la función diámetro. Entonces, diám es continua.

Finalizamos esta sección con dos resultados de conexidad propuestos como ejercicios en [2].

Teorema 3.7. Sea X un espacio topológico. Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una colección de subconjuntos conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$, entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es conexo.

Teorema 3.8. Sea X un espacio topológico. Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una colección de subconjuntos conexos de X y $A \subset X$ conexo tal que para toda $\alpha \in J$ $A_\alpha \cap A \neq \emptyset$, entonces $A \cup (\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha)$ es conexo.

4 Desconexión por continuos en $F_2(X) \setminus F(X)$

Trivialmente los continuos son conexos por continuos, por lo que para cada continuo X y cada $n \in \mathbb{N}$ los hiperespacios $F_n(X)$ y $C_n(X)$ son conexos por continuos. La pregunta: ¿Es el hiperespacio $\mathcal{H}$ conexo por continuos? Se vuelve interesante cuando $\mathcal{H}$ no es compacto, ejemplos de ellos son $F_2(X) \setminus F(X)$ y $C_2(X) \setminus C(X)$. Analizaremos estos dos hiperespacios dando condiciones bajo las cuales son o no conexos por continuos.

Teorema 4.1. Sean X un continuo encadenable no localmente conexo. Suponga que existe una función monótona $\pi : X \rightarrow [0, 1]$ tal que cada fibra es densa en ninguna parte y, para cualesquiera $a, b \in [0, 1]$ con $a < b$, $\pi((a, b)) = \pi([a, b])$. Entonces, $F_2(X) \setminus F_1(X)$ no es conexo por continuos.

Demostración. Para ilustrar mejor las ideas de esta prueba, se representarán los argumentos en siguiente continuo (que es un doble seno del topólogo) el

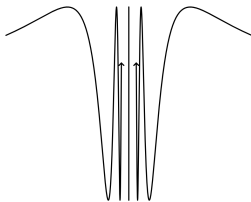


Figura 1: Doble seno del topólogo.

cuál tendrá el papel de X . Véase Figura 1.

Consideremos la función cociente $\pi : X \rightarrow [0, 1]$, donde $\pi(\{0\} \times [-1, 1]) = 1/2$. Notemos que π satisface las hipótesis del teorema. Ahora, supongamos que $F_2(X) \setminus F_1(X)$ es conexo por continuos. Sea $\text{diám} : F_2(X) \rightarrow [0, \text{diám}(X)]$ la función diámetro y notemos que π es una función cerrada.

Dado que X no es localmente conexo, $[0, 1]$ localmente conexo y π continua y cerrada, se sigue del Teorema 3.2 que existe $t \in [0, 1]$ tal que $\pi^{-1}(\{t\})$ es no degenerado. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $t \notin \{0, 1\}$. En el caso de nuestro continuo, $t = \frac{1}{2}$. Puesto que $\pi^{-1}(\{t\})$ es no degenerado, existen $p, q \in \pi^{-1}(\{t\})$ con $p \neq q$ tales que $d(p, q) = \text{diám}(\pi^{-1}(\{t\}))$; además, tomemos $b \in \pi^{-1}(\{1\})$. Sea

$$\varepsilon = \min\{d(p, q), d(\pi^{-1}(\{0\}), \pi^{-1}(\{t\})), d(\pi^{-1}(\{t\}), \pi^{-1}(\{1\}))\} > 0.$$

Como $F_2(X) \setminus F_1(X)$ es conexo por continuos, existe un subcontinuo $\mathcal{A} \subset F_2(X) \setminus F_1(X)$ tal que $\{p, q\}, \{p, b\} \in \mathcal{A}$.

Afirmación 1. Existe $\delta \in (0, \varepsilon)$ tal que $\text{diám}^{-1}([0, \delta)) \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

Demostración de la Afirmación. Sea $\rho = \inf\{\text{diám}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ y supongamos que $\rho = 0$. Luego, por definición de ínfimo, existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{diám}(\mathcal{A})$ sucesión tal que $x_n \rightarrow 0$. De la definición de imagen, obtenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $\text{diám}(A_n) = x_n$. Luego, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{A}$ y al ser $\mathcal{A}$ compacto existe $\{A_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ subsucesión de $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $A \in \mathcal{A}$ tal que $A_{n_k} \rightarrow A$. Puesto que diám es continua tenemos que $\text{diám}(A_{n_k}) \rightarrow \text{diám}(A)$, pero $\text{diám}(A_{n_k}) = x_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ por lo que $x_{n_k} \rightarrow \text{diám}(A)$. Recordemos que, $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de la sucesión convergente $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, por lo que $x_{n_k} \rightarrow 0$ y por unicidad de límites en $\mathbb{R}$ se

sigue que $\text{diám}(A) = 0$. Del hecho de $A \in F_2(X)$ y $\text{diám}(A) = 0$, se tiene que $A \in F_1(X)$ y así $A \in \mathcal{A} \cap F_1(X)$, lo cual es una contradicción y de esta manera hemos visto que $\rho > 0$.

Si denotamos por $\delta_0 = \min\{\varepsilon, \rho\}$, solo basta tomar $\delta \in (0, \delta_0)$ para que se cumpla que $\text{diám}^{-1}([0, \delta)) \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

Sea $\eta > 0$; dado que X es encadenable, existe una η -cadena $U_1, \dots, U_s$ que cubre a X . Véase Figura 2.

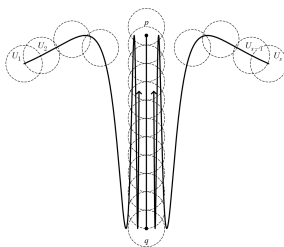


Figura 2: $\delta/4$ -cadena.

Sean $i = \min\{k \in \{1, \dots, s\} : U_k \cap \pi^{-1}(\{t\}) \neq \emptyset\}$ y $j = \max\{k \in \{1, \dots, s\} : U_k \cap \pi^{-1}(\{t\}) \neq \emptyset\}$. Véase Figura 3 con U_i y U_j .

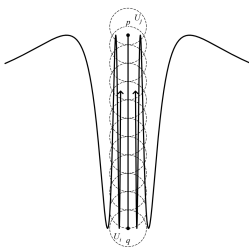


Figura 3: Los abiertos U_i y U_j .

Supongamos que $\pi^{-1}(\{0\}) \subset U_1 \cup \dots \cup U_{i-1}$ y $\pi^{-1}(\{1\}) \subset U_{j+1} \cup \dots \cup U_s$. Sean $l = \max\{k \in \{1, \dots, s\} : U_k \cap \pi^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset\}$ y $m = \min\{k \in \{1, \dots, s\} : U_k \cap \pi^{-1}(\{1\}) \neq \emptyset\}$. Probamos una nueva afirmación.

Afirmación 2. Existe $\delta \in (0, \varepsilon)$ tal que $\text{diám}^{-1}([0, \delta)) \cap \mathcal{A} = \emptyset$ y se cumplen las desigualdades $i \geq l + 5$ y $j \leq m - 5$.

Demostración de la Afirmación. Dado que si $\delta \in (0, \delta_0)$ se cumple que $\text{diám}^{-1}([0, \delta)) \cap \mathcal{A} = \emptyset$, basta probar que podemos elegir $\delta \in (0, \delta_0)$ tal que $l + 5 \leq i$ y $j \leq m - 5$.

Tomemos una $\frac{\delta_0}{6}$ -cadena $\{U_1, \dots, U_N\}$; luego, por definición existen $x \in \pi^{-1}(\{0\}) \cap U_l$, $y \in \pi^{-1}(\{t\}) \cap U_i$. Se sigue que $d(x, y) \leq \text{diám}(U_l \cup \dots \cup U_i)$. Aplicando el Teorema 3.3 obtenemos que

$$d(x, y) \leq \sum_{k=l}^i \text{diám } U_k \leq \sum_{k=l}^i \frac{\delta_0}{6} = \frac{\delta_0}{6}(i - l + 1).$$

Por otro lado, tenemos que $\delta_0 \leq d(\pi^{-1}(\{0\}), \pi^{-1}(\{t\})) \leq d(x, y)$. Esto implica que $\delta_0 \leq d(x, y) \leq \frac{\delta_0}{6}(i - l + 1)$. Entonces, $\delta_0 \leq \frac{\delta_0}{6}(i - l + 1)$. Multiplicando por $\frac{6}{\delta_0}$ ambos lado tenemos que $6 \leq i - l + 1$, y concluimos que $l + 5 \leq i$. Un proceso análogo nos permite ver que $j \leq m - 5$.

En consecuencia, si $\delta \in (0, \frac{4\delta_0}{6})$, al escoger una $\frac{\delta}{4}$ -cadena $\{U_1, \dots, U_s\}$ se cumple que para toda $k \in \{1, \dots, s\}$, $\text{diám } U_k < \frac{\delta}{4} < \frac{\delta_0}{6}$. Consecuentemente, $\{U_1, \dots, U_s\}$ es una $\frac{\delta_0}{6}$ -cadena y así satisface $l + 5 \leq i$ y $j \leq m - 5$. Hemos visto que para todo $\delta \in (0, 4\delta_0/6)$ pasa que $\text{diám}^{-1}([0, \delta)) \cap \mathcal{A} = \emptyset$, $l + 5 \leq i$ y $j \leq m - 5$.

Sea $\delta \in (0, \frac{2}{3}\delta_0)$ y consideremos una $\frac{\delta}{4}$ -cadena $\{U_1, \dots, U_s\}$ que cubre a X . Ahora, definamos $\varphi, \psi : \mathcal{A} \rightarrow \{1, \dots, s\}$ por $\varphi(K) = \max\{k : K \cap U_k \neq \emptyset\}$ y $\psi(K) = \min\{k : K \cap U_k \neq \emptyset\}$. Veamos que $K \in \mathcal{A}$, $\varphi(K) - \psi(K) \geq 4$; de otro modo, existe $K \in \mathcal{A}$ tal que $\phi(K) - \psi(K) < 4$, y de esta forma $K \subset U_{\psi(K)} \cup \dots \cup U_{\psi(K)+3}$. Esto es una contradicción ya que

$$\text{diám}(K) \leq \sum_{n=0}^3 \text{diám}(U_{\psi(K)+n}) \leq \sum_{n=0}^3 \frac{\delta}{4} = \delta,$$

y así concluimos que $K \in \mathcal{A} \cap \text{diám}^{-1}([0, \delta))$.

Definamos también $\Phi, \Psi : \mathcal{A} \rightarrow X$ donde $\Phi(K)$ es el único punto de $K \cap U_{\varphi(K)}$ y $\Psi(K)$ es el único punto de $K \cap U_{\psi(K)}$. Ψ, Φ están bien definidas. Veamos que Φ es continua. Sean $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ y $A \in \mathcal{A}$ tal que $A_n \rightarrow A$. Sea U vecindad de $\Phi(A)$; luego, $\Phi(A) \in V = U \cap U_{\phi(A)}$. Entonces, $A \in \langle V, U_{\psi(A)} \rangle$. Por convergencia de $\{A_n\}$, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \in \langle V, U_{\psi(A)} \rangle$ si $n \geq N$. Esto es $A_n \cap V \neq \emptyset \neq A_n \cap U_{\psi(A)}$ si $n \geq N$. Supongamos que si $n \geq N$ pasa que $\Phi(A_n) \in A_n \cap U_{\psi(A)}$. Luego, $|\phi(A_n) - \psi(A)| \leq 1$; además,

$\Psi(A_n) \in A_n \cap V \subset A_n \cap U_{\phi(A)}$ por lo que $|\phi(A) - \psi(A_n)| \leq 1$. Se sigue que $|\phi(A_n) - \psi(A)| + |\phi(A) - \psi(A_n)| \leq 2$. Aplicando la desigualdad del triángulo tenemos que

$$\begin{aligned} |\phi(A_n) - \psi(A) + \phi(A) - \psi(A_n)| &= |\phi(A_n) - \psi(A_n) + \phi(A) - \psi(A)| \\ &\leq |\phi(A_n) - \psi(A)| + |\phi(A) - \psi(A_n)| \end{aligned}$$

En consecuencia, $8 \leq |\phi(A_n) - \psi(A)| + |\phi(A) - \psi(A_n)| \leq 2$, una contradicción. Por lo que $\Phi(A_n) \in A_n \cap V$ si $n \geq N$ y así $\Phi(A_n) \in U$ si $n \geq N$. Esto es, Φ es continua. Similarmente se ve que Ψ es continua.

Hasta ahora, hemos definido las funciones Φ y Ψ que nos relacionan el continuo $\mathcal{A}$ con X por medio de una cadena. Ahora veremos como esta cadena se relaciona con $\mathcal{A}$.

Definamos $B = X \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_{i-1} \cup U_{j+2} \cup \dots \cup U_s)$. Sea $\mathcal{C}$ la componente de

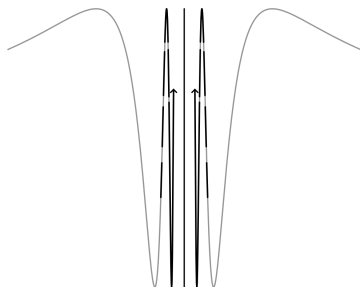


Figura 4: El cerrado B de X en negro.

$\mathcal{A} \cap \langle B \rangle$ que contiene a $\{p, q\}$. Mostremos que $\Phi(C) \cap (U_{i-1} \cup \dots \cup U_{j+1}) = \emptyset$; si $\Phi(C) \cap (U_{i-1} \cup \dots \cup U_{j+1}) \neq \emptyset$, existe $K \in \mathcal{A}$ con $\text{diám}(K) < \delta$, una contradicción. Notemos que como $b \notin B$, tenemos que $\{p, b\} \notin \langle B \rangle$ y así $\{p, b\} \notin \mathcal{A} \cap \langle B \rangle$; por lo que $\mathcal{A} \cap \langle B \rangle$ es un subconjunto propio de $\mathcal{A}$. Más aún, es un conjunto cerrado de $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es un continuo y $\mathcal{A} \cap \langle B \rangle$ es un subconjunto propio de $\mathcal{A}$, por el Teorema 3.5, existe $A \in \text{cl}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \cap \text{Fr}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \cap \langle B \rangle)$. Dado que $\mathcal{A} \cap \langle B \rangle$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{A}$, tenemos que $\mathcal{C}$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{A}$. Se sigue que $A \in \mathcal{C} \cap \text{Fr}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \cap \langle B \rangle)$.

Nótese que $A \subset B$. Mostremos que $A \cap \text{Fr}_X(B) \neq \emptyset$, de otro modo, $A \subset \text{int}_X(B)$, por lo que $A \in \mathcal{A} \cap \langle \text{int}_X(B) \rangle \subset \text{int}_A(\mathcal{A} \cap \langle B \rangle)$, una contradicción. Ahora, tenemos que $\text{Fr}_X(B) \subset U_{i-1} \cup U_{j+1}$. Sea $a \in A \cap \text{Fr}_X(B)$. Si $a \in U_{i-1}$, entonces $\pi(\Psi(\mathcal{C}))$ es un intervalo compacto no degenerado que contiene a t ; digamos $\pi(\Psi(\mathcal{C})) = [c, d]$ con $c < d$. Dado que $\pi(\overline{(c, d)}) = \pi([c, d])$, se tiene que $\pi^{-1}(\{t\}) \subset \Psi(\mathcal{C})$. Se sigue que $\Psi(\mathcal{C}) \cap U_j \neq \emptyset$, una contradicción. Similarmente, usando Φ , se obtiene una contradicción si $a \in U_{j+1}$. Por lo tanto, $F_2(X) \setminus F_1(X)$ no es conexo por continuos. $\square$

5 Conexión por continuos en $C_2(X) \setminus C(X)$

En la sección anterior se dan condiciones para asegurar que existe una clase de continuos X tales que $F_2(X) \setminus F_1(X)$ no es conexo por continuos. Siguiendo por esa línea, primeramente presentamos dos resultados que nos ayudarán probar la existencia de una clase de continuos para los cuales $C_2(X) \setminus C_1(X)$ es conexo por continuos.

Lema 5.1. *Sea X un continuo. Supongamos que existen $p \in X$, $A \subset X$ subcontinuo propio y $\varepsilon > 0$ tales que*

- (i) $\kappa_u(p)$ es denso en X .
- (ii) $B_{H_d}(A, \varepsilon) \cap C(\kappa_u(p)) = \emptyset$.

Entonces, existe $\mathcal{L} \subset C_2(X) \setminus C(X)$ subcontinuo tal que

- Para cada $Z \in \mathcal{L}$, Z tiene una componente en A , y
- $\bigcup \mathcal{L} = X$.

De nuevo, se ejemplificarán algunos pasos mediante el continuo de la Figura 5, la compactación natural del rayo sobre un triodo simple.

Demostración. Dado que A es propio, existe $q \in X \setminus A$ y por ser cerrado $d(q, A) > 0$. Tomemos $\varepsilon' \in (0, \min\{\varepsilon, \frac{1}{3}d(q, A)\})$. Puesto que $\kappa_u(p)$ es denso, existe $p' \in B(q, \varepsilon') \cap \kappa_u(p)$. Consideremos $B(p', \varepsilon')$ y supongamos que existe $z \in B(p', \varepsilon') \cap A$. Luego,

$$\varepsilon' \leq d(q, A) \leq d(q, z) \leq d(q, p') + d(p', z) < \varepsilon' + \varepsilon' = 2\varepsilon',$$

lo cual es una contradicción, y esto nos lleva a $B(p', \varepsilon') \cap A = \emptyset$. Se sigue que A, p, ε' satisfacen que

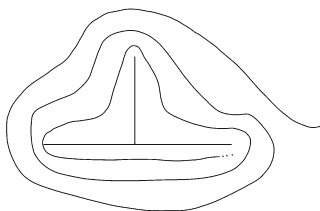


Figura 5: Compactación del rayo con residuo triodo.

- (a) $\kappa_u(p')$ es denso en X , pues $\kappa_u(p) = \kappa_u(p')$.
- (b) $B_{H_d}(A, \varepsilon') \cap C(\kappa_u(p')) = \emptyset$, ya que $B_{H_d}(A, \varepsilon') \subset B_{H_d}(A, \varepsilon)$ pues $\varepsilon' \leq \varepsilon$.
- (c) $B(p', \varepsilon') \cap A = \emptyset$.

Debido a que siempre es posible encontrar $p' \in \kappa_u(p)$ y $\varepsilon' \leq \varepsilon$ para que se cumpla la tercera condición, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $B(p, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. En el caso de la compactación del triodo, p es el punto final del rayo y A un subtriodo propio, como se muestra en la Figura 6.

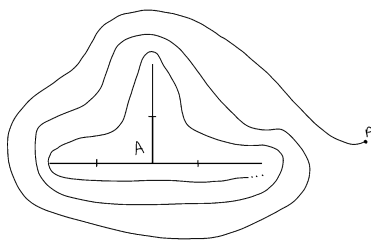


Figura 6: Punto p y subcontinuo A .

Probaremos primero que si $x \in \kappa_u(p)$, entonces existe $\mathcal{S}$ subcontinuo de $C_2(X) \setminus N_{H_d}(C(X), \frac{\varepsilon}{6})$ tal que

- $\{p\} \cup A \in \mathcal{S}$,

- existe $M_x \in \mathcal{S}$ tal que $x \in M_x$,
- para cada $M \in \mathcal{S}$, $M \cap A$ es una componente de M .

Dado que $x \in \kappa_u(p)$, existe un continuo encadenable por continuos N con $p, x \in N$. Sea $\{N_1, \dots, N_m\}$ una $\frac{\varepsilon}{3}$ -cadena de continuos con $p \in N_1$ y $x \in N_m$, véase la Figura 7. Notemos que $N_j \in C(\kappa_u(p))$ para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, se sigue que $N_j \notin B_{H_d}(A, \varepsilon)$. Esto implica que $A \setminus N(N_j, \varepsilon) \neq \emptyset$ ó $N_j \setminus N(A, \varepsilon) \neq \emptyset$ para cada $j \in \{1, \dots, m\}$. Esto sugiere estudiar los eslabones por casos: Sea $J_1 = \{j \in \{1, \dots, m\} : N_j \subset N(A, \varepsilon)\}$, el cual corresponde a los eslabones que están “cerca” de A , y $J_2 = \{1, \dots, m\} \setminus J_1$, para los que están “lejos”. Notemos que como $p \in N_1$ y $p \notin N(A, \varepsilon)$, tenemos que $1 \in J_2$.

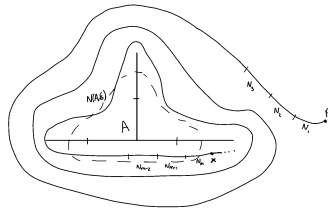


Figura 7: El punto x , la nube de A y la cadena de continuos.

Ahora, definamos $\mathcal{N}_j = \{M \cup E : M \in C(N_j), E \in C(A)\}$ para cada $j \in J_2$, el cual es un subcontinuo de $C_2(X)$. De la definición de J_2 tenemos que si $j \in J_2$, entonces $N_j \cap N(A, \varepsilon)^c \neq \emptyset$. Esto se divide en 2 casos: si $N_j \subset N(A, \varepsilon)^c$ y si $N_j \cap N(A, \varepsilon) \neq \emptyset$, por lo que procederemos por casos.

Caso 1: Supongamos que $N_j \subset N(A, \varepsilon)^c$.

Afirmación 1. Si $N_j \subset N(A, \varepsilon)^c$, entonces $d(N_j, A) \geq \varepsilon$.

Demostración de la Afirmación. Supongamos que $d(N_j, A) < \varepsilon$. Luego, existen $(y, z) \in N_j \times A$ tales que $d(y, z) < \varepsilon$. Se sigue que $d(y, A) \leq d(y, z) < \varepsilon$, por lo que $y \in N(A, \varepsilon)$; una contradicción pues $y \in N_j \subset N(A, \varepsilon)^c$. Entonces $d(N_j, A) \geq \varepsilon$ como se buscaba.

Sea $F \in \mathcal{N}_j$. Existen $(M, E) \in C(N_j) \times C(A)$ tales que $F = M \cup E$. Se sigue de que $M \times E \subset N_j \times A$. Por la Afirmación 1 tenemos que $\varepsilon/3 < \varepsilon \leq d(N_j, A)$ y así $\frac{\varepsilon}{3} < d(M, E)$. Se sigue del Lema 3.4 que $F = M \cup E \in C_2(X) \setminus N_{H_d}(C(X), \frac{\varepsilon}{6})$. Ya que F fue arbitrario concluimos que

$$\mathcal{N}_j \subset C_2(X) \setminus N_{H_d}(C(X), \frac{\varepsilon}{6}).$$

Caso 2: Supongamos que $N_j \cap N(A, \varepsilon) \neq \emptyset \neq N_j \cap N(A, \varepsilon)^c$. Denotemos por $Y = \text{Fr}(N(A, \varepsilon))$. Notemos que $N_j \cap Y \neq \emptyset$; si no fuera así, se tendría que $N_j \subset N(A, \varepsilon) \cup \text{int}(N(A, \varepsilon)^c)$ los cuales son ajenos y por tanto, $N_j \subset N(A, \varepsilon)$ ó $N_j \subset \text{int}(N(A, \varepsilon)^c)$ pues N_j es continuo. Esto se muestra en la Figura 8.

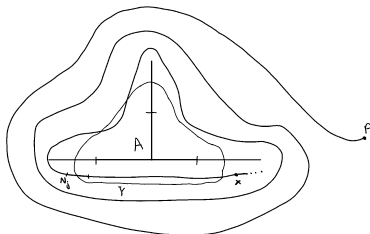


Figura 8: El cerrado Y y un eslabón de la cadena que lo intersecta.

Veamos un par de afirmaciones:

Afirmación 2. Si $N_j \cap Y \neq \emptyset$, entonces $d(Y, A) \geq \varepsilon$.

Demostración de la Afirmación. Supongamos por el contrario que $d(Y, A) < \varepsilon$. En consecuencia, existen $a \in A$, $y \in Y$ tales que $d(a, y) < \varepsilon$. Como $B(a, \varepsilon)$ es una vecindad de $y \in \text{Fr}(N(A, \varepsilon))$, tenemos que $B(a, \varepsilon) \cap N(A, \varepsilon)^c \neq \emptyset$. Esto es una contradicción pues se cumple que $B(a, \varepsilon) \subset N(A, \varepsilon)$, y así hemos probado que $d(Y, A) \geq \varepsilon$.

Por otro lado, consideremos $z \in N(N_j, \frac{\varepsilon}{3})$. Luego, existe $z_N \in N_j$ tal que $d(z, z_N) < \frac{\varepsilon}{3}$. Se sigue que

$$d(z, Y) \leq d(z, q) \leq d(z, z_N) + d(z_N, q) \leq d(z, z_N) + \text{diám } N_j < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Por consiguiente, $z \in N(Y, \frac{2\varepsilon}{3})$. Al ser z un elemento arbitrario, tenemos que

$$N(N_j, \frac{\varepsilon}{3}) \subset N(Y, \frac{2\varepsilon}{3}). \quad (1)$$

Continuamos con otra Afirmación.

Afirmación 3. $N(Y, \frac{2\varepsilon}{3}) \cap N(A, \frac{\varepsilon}{3}) = \emptyset$.

Demostración de la Afirmación. De nuevo, supongamos por el contrario que no es así. Sea $z \in N(Y, \frac{2\varepsilon}{3}) \cap N(A, \frac{\varepsilon}{3})$. Se sigue que existen $z_A \in A$, $z_Y \in Y$ tales que $d(z, z_A) < \frac{\varepsilon}{3}$ y $d(z, z_Y) < \frac{2\varepsilon}{3}$. Luego,

$$d(Y, A) \leq d(z_Y, z_A) \leq d(z_Y, z) + d(z, z_A) < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Lo cual es una contradicción de la Afirmación 2, por lo que $N(Y, \frac{2\varepsilon}{3}) \cap N(A, \varepsilon) \neq \emptyset$ como se quería probar.

Una consecuencia directa de la Afirmación 3 y de la Ecuación (1) es que si $M \in C(N_j)$, $E \in C(A)$ y $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{3}]$, se tiene que

$$\begin{aligned} N(M, \delta) &\subset N(N_j, \delta) \subset N(N_j, \frac{\varepsilon}{3}) \subset N(Y, \frac{2\varepsilon}{3}), \\ N(E, \delta) &\subset N(A, \delta) \subset N(A, \frac{\varepsilon}{3}), \end{aligned}$$

y así $N(M, \delta) \cap N(E, \delta) = \emptyset$. Esto será útil más adelante.

Utilizamos la Afirmación 3 para concluir que en este caso $\mathcal{N}_j$ también es un subcontinuo de $C_2(X) \setminus C(X)$.

Continuemos y supongamos que existe $F \in \mathcal{N}_j \cap N_{H_d}(C(X), \frac{\varepsilon}{6})$. Luego, existe $K \in C(X)$ tal que $H_d(F, K) < \frac{\varepsilon}{6}$ y de la definición de H_d tenemos

$$F \subset N(K, \frac{\varepsilon}{6}) \text{ y } K \subset N(F, \frac{\varepsilon}{6}).$$

Además existen $M \in C(N_j)$ y $E \in C(A)$ tales que $F = M \cup E$. Luego $N(M, \frac{\varepsilon}{6})$ y $N(E, \frac{\varepsilon}{6})$ son abiertos ajenos y por definición de nube tenemos que $N(M \cup E, \frac{\varepsilon}{6}) = N(M, \frac{\varepsilon}{6}) \cup N(E, \frac{\varepsilon}{6})$. Con esto

$$F = M \cup E \subset N(K, \frac{\varepsilon}{6}) \text{ y } K \subset N(M, \frac{\varepsilon}{6}) \cup N(E, \frac{\varepsilon}{6}).$$

Puesto que K es conexo, tenemos que $K \subset N(M, \frac{\varepsilon}{6})$ ó $K \subset N(E, \frac{\varepsilon}{6})$. Sin pérdida de generalidad, $K \subset N(M, \frac{\varepsilon}{6})$. Dado que $E \subset N(K, \frac{\varepsilon}{6})$ y que

$N(K, \frac{\varepsilon}{6}) \subset N(M, \frac{\varepsilon}{3})$, se sigue que $E \subset N(M, \frac{\varepsilon}{3})$. Esto contradice la consecuencia de la Afirmación 3, de que $N(M, \frac{\varepsilon}{3})$ y $N(E, \frac{\varepsilon}{3})$ son ajenos. Por lo que $\mathcal{N}_j \cap N_{H_d}(C(X), \frac{\varepsilon}{6}) = \emptyset$. De ambos casos tenemos que si $j \in J_2$, entonces $\mathcal{N}_j \subset C_2(X) \setminus N_{H_d}(C(X), \frac{\varepsilon}{6})$.

Hemos visto que los eslabones indexados por J_2 nos inducen subcontinuos de $C_2(X)$ que están “lejos” de $C(X)$. A continuación veremos que los eslabones indexados por J_1 también lo hacen. Recordemos que $J_1 = \{j \in \{1, \dots, m\} : N_j \subset N(A, \varepsilon)\}$. Sean $S_1, \dots, S_k$ las componentes de $\bigcup_{j \in J_1} N_j$. Tenemos que $S_k \in C(\kappa_u(p))$ y $S_k \subset N(A, \varepsilon)$ para cada $k \in \{1, \dots, r\}$. Por construcción existe $w_k \in A \setminus N(S_k, \varepsilon)$. Para cada $j \in J_1$, existe $k_j \in \{1, \dots, r\}$ tal que $N_j \subset S_{k_j}$ y así, definamos

$$\mathcal{N}_j := \{\{w_{k_j}\} \cup D : D \in C(N_j)\},$$

el cual es un subcontinuo de $C_2(X)$. Sean $j \in J_1$ y $F \in \mathcal{N}_j$. Entonces, existen $k_j \in \{1, \dots, r\}$ y $D \in C(N_j)$ tales que $F = \{w_{k_j}\} \cup D$. Dado que $N_j \subset S_{k_j}$, se sigue que

$$d(w_{k_j}, D) \geq d(w_{k_j}, S_{k_j}) \geq \varepsilon > \frac{\varepsilon}{3},$$

y por el Lema 3.4, $F = \{w_{k_j}\} \cup D \in C_2(X) \setminus N_{H_d}(C(X), \frac{\varepsilon}{6})$.

Dado que F y j fueron arbitrarios tenemos que $\mathcal{N}_j \subset C_2(X) \setminus N_{H_d}(C(X), \frac{\varepsilon}{6})$ para todo $j \in J_1$.

Hemos creado una colección de subcontinuos de $C_2(X) \setminus C(X)$ a partir de una cadena de continuos en X . La afirmación siguiente nos dice que esta colección de subcontinuos también es una cadena de continuos.

Afirmación 4. Si $|j - i| \leq 1$, entonces $\mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j \neq \emptyset$.

Demostración de la Afirmación. Sea $j \in \{1, \dots, m-1\}$. Procederemos por casos:

- Si $j, j+1 \in J_1$: como existe $y \in N_j \cap N_{j+1}$, luego $\{y\} \in C(N_j) \cap C(N_{j+1})$ y así $\{y\} \cup A \in \mathcal{N}_j \cap \mathcal{N}_{j+1}$.
- Si $j, j+1 \in J_2$: existen $y \in N_j \cap N_{j+1}$, y $k_j, k_{j+1} \in \{1, \dots, r\}$ tales que $N_j \subset S_{k_j}$ y $N_{j+1} \subset S_{k_{j+1}}$. Notemos que $N_j \cup N_{j+1}$ es conexo y como $S_{k_j}, S_{k_{j+1}}$ son componentes tenemos que $N_j \cup N_{j+1} \subset S_{k_j}$ y $N_j \cup N_{j+1} \subset S_{k_{j+1}}$.

$S_{k_{j+1}}$. La única manera de que esto sea posible es que $S_{k_j} = S_{k_{j+1}}$ y así $k_j = k_{j+1}$. Con esto $\{w_{k_j}, y\} \in \mathcal{N}_j \cap \mathcal{N}_{j+1}$.

- Si $j \in J_1, j+1 \in J_2$: De nuevo, existen $y \in N \cap N_{j+1}$ y $k_j \in \{1, \dots, r\}$ tales que $N_j \subset S_{k_j}$. Luego, $\{w_{k_j}\} \in C(A)$ y así $\{w_{k_j}, y\} \in \mathcal{N}_j \cap \mathcal{N}_{j+1}$.

El caso $j \in J_2, j+1 \in J_1$ es análogo al caso $j \in J_1, j+1 \in J_2$. Entonces tenemos que si $i, j \in \{1, \dots, m\}$ con $|i - j| \leq 1$ tenemos que $\mathcal{N}_j \cap \mathcal{N}_i \neq \emptyset$ como se afirmaba.

Ahora, definamos $\mathcal{S} = \bigcup_{j=1}^m \mathcal{N}_j \subset C_2(X) \setminus N_{H_d}(C(X), \frac{\varepsilon}{6})$.

Afirmación 5. $\mathcal{S} \subset C_2(X) \setminus C(X)$ es un subcontinuo con las siguientes propiedades

- $\{p\} \cup A \in \mathcal{S}$,
- existe $M \in \mathcal{S}$ tal que $x \in M$,
- para cada $M \in \mathcal{S}$, M tiene una componente conexa en A .

Demostración de la Afirmación. Dado que $\mathcal{S}$ es una unión finita de compactos, es compacto. Más aún, $\mathcal{S}$ es una unión finita de conjuntos conexos que, por la Afirmación 4, tiene intersecciones consecutivas no vacías. Por el Teorema 3.7, $\mathcal{S}$ es conexo.

Por construcción, M tiene una componente conexa en A para cada $M \in \mathcal{S}$. Puesto que $\{p\} \in C(N_1)$, tenemos que $\{p\} \cup A \in \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{S}$. Finalmente, para $x \in N_m$ existen dos casos para m : si $m \in J_1$, existe $k_j \in \{1, \dots, r\}$ tal que $N_m \subset S_{k_j}$ y así $\{w_{k_j}, x\} \in \mathcal{N}_m \subset \mathcal{S}$; si $m \in J_2$, $\{x\} \cup A \in \mathcal{N}_m \subset \mathcal{S}$. De ambos casos existe $M \in \mathcal{S}$ tal que $x \in M$. De esta forma, $\mathcal{S}$ satisface todas las propiedades mencionadas.

Ahora, como $\kappa_u(p)$ es denso y X es compacto, existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \kappa_u(p)$ denso. Por lo anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\mathcal{M}_n \subset C_2(X \setminus N_{H_d}(C(X), \frac{\varepsilon}{6}))$ subcontinuo tal que

- $\{p\} \cup A \in \mathcal{M}_n$,
- existe $M \in \mathcal{M}_n$ tal que $x_n \in M$,
- para cada $M \in \mathcal{M}_n$ M tiene una componente conexa en A .

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{p\} \cup A \in \mathcal{M}_n$, tenemos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n$ es conexo. Definamos $\mathcal{L} = \text{cl}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n)$, el cual es un subcontinuo de $C_2(X)$. Además, tenemos que $C_2(X) \setminus N_{H_d}(C(X), \frac{\varepsilon}{6})$ es cerrado, luego $\mathcal{L} \subset C_2(X) \setminus N_{H_d}(C(X), \frac{\varepsilon}{6})$.

Afirmación 6. $\bigcup \mathcal{L}$ es cerrado en X .

Demostración de la Afirmación. Sea $z \in \text{cl}(\bigcup \mathcal{L})$, luego existe $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \bigcup \mathcal{L}$ tal que $z_n \rightarrow z$. Se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $Z_n \in \mathcal{L}$ tal que $z_n \in Z_n$ y así tenemos una sucesión $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$. Dado que $\mathcal{L}$ es compacto, existe $\{Z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ subsucesión y $Z \in \mathcal{L}$ tal que $Z_{n_k} \rightarrow Z$. Como $\{z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión con $z_{n_k} \in Z_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $z_{n_k} \rightarrow z$, se tiene que $z \in \limsup Z_{n_k} = Z$. Así $z \in Z \subset \bigcup \mathcal{L}$. Dado que z fue arbitrario tenemos que $\text{cl}(\bigcup \mathcal{L}) \subset \bigcup \mathcal{L}$, es decir, $\bigcup \mathcal{L}$ es cerrado en X .

Recordemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $M_n \in \mathcal{M}_n \subset \mathcal{L}$ tal que $x_n \in M_n$, luego $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \subset \bigcup \mathcal{L}$. Tomando la cerradura, $X = \text{cl}(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \subset \bigcup \mathcal{L}$.

Afirmación 7. Si $Z \in \bigcup \mathcal{L}$, Z posee una componente conexa contenida en A .

Demostración de la Afirmación. Tenemos que existe $\{Z_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n$ sucesión tal que $Z_k \rightarrow Z$. Denotemos por C_1, C_2 las componentes de Z y C_1^k, C_2^k las componentes de Z_k . Sin pérdida de generalidad, $C_1^k \subset A$ para toda k y $C_1^k \rightarrow C_1^*, C_2^k \rightarrow C_2^*$ con $C_1^* \in C(A), C_2^* \in C(X)$.

Notemos que $C_1^* = \limsup C_1^k \subset \limsup Z_k = Z$, por lo que $C_1^* \subset C_1 \cup C_2$. Sin pérdida de generalidad $C_1^* \subset C_1$. Supongamos que existe $z \in C_1 \setminus C_1^*$, luego del hecho de que $z \in Z = \limsup Z_k$, tenemos que existe $\{Z_{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \{Z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ subsucesión y $z_i \in Z_{k_i}$ para todo i tal que $z_i \rightarrow z$. Luego, si $z_i \in C_1^{k_i}$ para una cantidad infinita de i 's, por definición de $\limsup$, se tendría que $z \in C_1^*$. Esto es una contradicción pues $z \notin C_1^*$, por lo que $z_i \in C_2^{k_i}$ para una cantidad finita de i 's. Dado que $\{C_2^{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \{C_2^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ subsucesión con $z_i \in C_2^{k_i}$ y $z_i \rightarrow z$, tenemos que $z \in \limsup C_2^{k_i} = C_2^*$. Luego, $C_2^* \cap C_1 \neq \emptyset$ y al ser C_2^* conexo se tiene que $C_2^* \subset C_1$. Finalmente, tenemos que

$$Z = \limsup Z_k = \limsup (C_1^k \cup C_2^k) = (\limsup C_1^k) \cup \limsup C_2^k = C_1^* \cup C_2^* \subset C_1.$$

Una contradicción, por lo que no puede existir $z \in C_1 \setminus C_1^*$ y así $C_1 =$

$C_1^* \in C(A)$. Hemos probado la existencia de un subcontinuo $\mathcal{L} \subset C_2(X) \setminus N_{H_d}(C(X), \frac{\varepsilon}{6})$ tal que

- Cada $Z \in \mathcal{L}$ tiene una componente conexa en A .
- $\bigcup \mathcal{L} = X$

Como se quería probar. □

Ahora veamos el segundo lema que utilizaremos. Este lema es de suma importancia, pues a pesar de su estructura parecida con el Lema 5.1 nos permitirá crear un subcontinuo de $C_2(X) \setminus C(X)$ con la propiedad de tener ciertos elementos de $C_2(X) \setminus C(X)$; a diferencia del Lema 5.1, que solo nos da un subcontinuo que tiene a $\{p\} \cup A$.

Lema 5.2. *Sea X un continuo. Supongamos que existen p en X , $A \subset X$ subcontinuo propio y $\varepsilon > 0$ tales que*

- $\kappa_u(p)$ es denso en X .
- $B_{H_d}(A, \varepsilon) \cap C(\kappa_u(p)) = \emptyset$.

Entonces, si $C_1, \dots, C_n \in C(X \setminus A)$, existe $\mathcal{L} \subset C_2(X) \setminus C(X)$ subcontinuo tal que

- $\{A \cup C_1, \dots, A \cup C_n\} \subset \mathcal{L}$.
- $\bigcup \mathcal{L} = X$.
- $\{p\} \cup A \in \mathcal{L}$.

Demostración. Por el Lema 5.1 existe $\mathcal{S} \subset C_2(X) \setminus C(X)$ tal que

- para cada $L \in \mathcal{S}$, L tiene una componente en A ,
- $\bigcup \mathcal{S} = X$,
- $\{p\} \cup A \in \mathcal{S}$.

Veremos que si $B \in C(X \setminus A)$ entonces existe $\mathcal{L}_1 \subset C_2(X) \setminus C(X)$ subcontinuo tal que $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ y $A \cup B \in \mathcal{L}_1$. Si $x \in B$, existe $L \in \mathcal{S}$ tal que $x \in L$. Denotemos por L_1, L_2 las componentes de L . Sin pérdida de generalidad, $L_1 \subset A$. Se sigue que $x \in L_2 \cap B$. Por el Teorema [9, 14.9], existen

- $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(L_2)$ arco de L_2 a $\{x\}$.
- $\beta : [0, 1] \rightarrow C(B)$ arco de $\{x\}$ a B .
- $\gamma : [0, 1] \rightarrow C(A)$ arco de L_1 a A .

Notemos que para todo $t \in [0, 1]$, $\alpha(t) \cap L_1, \beta(t) \cap L_1, \gamma(t) \cap B = \emptyset$; por lo que los siguientes conjuntos

- $\mathcal{N}_\alpha = \{L_1 \cup \alpha(t) : t \in [0, 1]\}$,
- $\mathcal{N}_\beta = \{L_1 \cup \alpha(t) : t \in [0, 1]\}$,
- $\mathcal{N}_\gamma = \{\gamma(t) \cup B : t \in [0, 1]\}$,

son subcontinuos de $C_2(X) \setminus C(X)$. Más aún, como $L_1 \cup \{x\} \in \mathcal{N}_\alpha \cap \mathcal{N}_\beta$, $L_1 \cap B \in \mathcal{N}_\beta \cap \mathcal{N}_\gamma$; por el Teorema 3.7

$$\mathcal{L} = \mathcal{N}_\alpha \cup \mathcal{N}_\beta \cup \mathcal{N}_\gamma \subset C_2(X) \setminus C(X)$$

es un subcontinuo tal que $\mathcal{L} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ y $A \cup B \in \mathcal{L}$.

Luego, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe $\mathcal{L}_i \subset C_2(X) \setminus C(X)$ subcontinuo tal que $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ y $A \cup C_i \in \mathcal{L}_i$. Se sigue que

$$\mathcal{L} = \mathcal{S} \cup \left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{L}_i \right) \subset C_2(X) \setminus C(X)$$

es un subcontinuo tal que $\bigcup \mathcal{L} = X$, $\{p\} \cup A \in \mathcal{L}$ y $\{A \cup C_1, \dots, A \cup C_n\} \subset \mathcal{L}$. $\square$

Ahora tenemos todas las herramientas necesarias para probar el siguiente teorema.

Teorema 5.3. *Sea $X = I \cup R$ un continuo, donde*

- R es homeomorfo a $[0, \infty)$,
- $I = \text{cl}_X(R) \setminus R$,
- I es arco-conexo.

Si $C(R)$ no es denso en $C(X)$, entonces $C_2(X) \setminus C(X)$ es conexo por continuos.

Demostración. Supongamos que $C(R)$ no es denso en $C(X)$. Entonces, existe $A \in C(X)$ y $\varepsilon > 0$ tal que $B_{H_d}(A, \varepsilon) \cap C(R) \neq \emptyset$. Notemos que $A \subset I$. Dado que $R \approx [0, \infty)$, existe $f : [0, \infty) \rightarrow R$ homeomorfismo y con ello tomemos $p = f(0)$.

Afirmación 1. $\kappa_u(p) = R$.

Demostración de la Afirmación. Probaremos las dos contenciones.

$(R \subset \kappa_u(p))$. Si $x \in R$, existe $a \in [0, \infty)$ tal que $x = f(a)$ y así, $f([0, a])$ es un subcontinuo propio encadenable por continuos que une a p con x ; por lo que $R \subset \kappa_u(p)$.

$(R \subset \kappa_u(p))$. Supongamos que existe $x \in \kappa_u(p) \setminus R$, entonces $x \in I$. Existe M subcontinuo propio encadenable por continuos que une a p con x . Notemos que $R \subset M$, pues sino existiría $y \in R$ tal que

$$M \subset X \setminus \{y\} = I \cup f((f^{-1}(y), \infty)) \cup f([0, f^{-1}(y))),$$

dado que $I \cup f((f^{-1}(y), \infty))$ y $f([0, f^{-1}(y)))$ son abiertos ajenos y M es conexo, entonces $M \subset I \cup f((f^{-1}(y), \infty))$ ($p \notin M$) ó $M \subset f([0, f^{-1}(y)))$ ($x \notin M$) contradicciones, por lo que no existe dicha y . Se sigue que $\text{cl}_X(R) = X \subset M$ una contradicción pues M es propio. Por lo que $\kappa_u(p) \subset R$.

Sea $B \in C_2(X) \setminus C(X)$ con $B \neq \{p\} \cup A$. Denotemos por B_1, B_2 las componentes de B . Hay 2 casos para B :

Caso 1: $B \subset I$. Por el Lema 5.1 existe $\mathcal{S} \subset C_2(X) \setminus C(X)$ subcontinuo tal que $\bigcup \mathcal{S} = X$, $\{p\} \cup A \in \mathcal{S}$ y cada elemento de $\mathcal{S}$ tiene una componente contenida en A . Como I es arco-conexo existe $x \in I \setminus B$. Como $x \in \text{cl}_X(R)$ existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset R$ tal que $x_n \rightarrow x$. Se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $S_n \in \mathcal{S}$ tal que $x_n \in S_n$, denotemos por E_n, D_n las componentes de S_n con $E_n \subset A$. Como $\mathcal{S}$ es compacto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe $S \in \mathcal{S}$ tal que $S_n \rightarrow S$ y si E, D son las componentes de S entonces $E_n, D_n \rightarrow E, D$. Notemos que $x_n \in D_n$ y así $x \in D \subset S$. Como D es continuo, $C(D)$ es conexo por caminos, por lo que existe $\gamma : [0, 1] \rightarrow C(D)$ camino de D a $\{x\}$. Ahora consideremos el conjunto

$$\Gamma = \{E \cup \gamma(t) : t \in [0, 1]\} \subset C_2(X) \setminus C(X),$$

el cual es un subcontinuo tal que $S, E \cup \{x\} \in \Gamma$. Notemos que $E \subset A \subset I$ y $x \in D \cap I$, por lo que $E \cup \{x\} \in C_2(I) \setminus C(I)$. Más aún, $x \notin B$ por lo que $B \neq E \cup \{x\}$ y como $C_2(I) \setminus C(I)$ es conexo por continuos, existe M subcontinuo de $C_2(I) \setminus C(I)$ que conecta a B con $E \cup \{x\}$. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{S}_B = \mathcal{S} \cup \Gamma \cup M \subset C_2(X) \setminus C(X)$$

el cual es un subcontinuo tal que $B, \{p\} \cup A \in \mathcal{S}_B$.

Caso 2: $B \cap R$. Notemos que sin pérdida de generalidad existe $M \in C(X)$ tal que $B_2 \cup A \subset M$ y $B_1 \cap M = \emptyset$. Se sigue que $B_1 \in C(X \setminus A)$ y por el Lema 5.2 existe $\mathcal{S} \subset C_2(X) \setminus C(X)$ subcontinuo tal que $\bigcup \mathcal{S} = X$, $\{p\} \cup A \in \mathcal{S}$ y $B_1 \cup A \in \mathcal{S}$. Definamos el conjunto

$$\mathcal{M} = \{E \cup B_1 : E \in C(M)\} \subset C_2(X) \setminus C(X)$$

el cual es un continuo tal que $B, B_1 \cup A \in \mathcal{M}$. Se sigue que $\mathcal{S}_B = \mathcal{S} \cup \mathcal{M} \subset C_2(X) \setminus C(X)$ es un subcontinuo que conecta a $\{p\} \cup A$ con B .

De ambos casos tenemos que si $B \neq \{p\} \cup A$, entonces existe $\mathcal{S}_B \subset C_2(X) \setminus C(X)$ subcontinuo que los une. Ahora, sean $B, D \in C(X) \setminus C(X)$ con $B \neq D$, si $B = \{p\} \cup A$ ($D = \{p\} \cup A$) entonces $\mathcal{S}_D$ ($\mathcal{S}_B$) es un subcontinuo de $C_2(X) \setminus C(X)$ que une a B con D . Si $B, D \neq \{p\} \cup A$, entonces $\mathcal{S} = \mathcal{S}_B \cup \mathcal{S}_D \subset C_2(X) \setminus C(X)$ es un subcontinuo que conecta B con D . Es decir, $C_2(X) \setminus C(X)$ es conexo por continuos. $\square$

Agradecimientos

Aquí agradeceremos después de las observaciones.

Referencias

- [1] J. Camargo, S. Macías, D. Maya, $C_1(X)$ on the edge of $C_2(X)$, Appl. Gen. Topol. 26, no. 1 (2025), 341 – 368.
- [2] J. Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1978.
- [3] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Local dendrites with unique n -fold hyperspace*, Topology Appl. 158 (2011), 244–251.

- [4] A. Illanes, *Dendrites with unique hyperspace $F_2(X)$* , J. P. Geometry and Topology 2 (2002), no. 1, 75–96.
- [5] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [6] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X* , Topology Appl. 109 (2001), 237–256.
- [7] S. Macías, *Topics on continua*, 2nd ed., Springer, Cham, Switzerland, 2018.
- [8] V. Martinez-De-La-Vega, J. M. Martínez-Montejano., *Concerning when $F_1(X)$ is a continuum of colocal connectedness in hyperspaces and symmetric products*, Colloquium Mathematicum, Vol. 160, 297–307 (2020).
- [9] S.B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, volume 158 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker Inc., 1992.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UANL
Pedro de Alba s/n, Niños Héroes, Ciudad Universitaria
San Nicolás de los Garza, N.L. C.P. 66451

gerardo.hernandezvld@uanl.edu.mx
jahir.salasry@uanl.edu.mx

Capítulo 8

Sobre la unicidad del cono en las gráficas finitas

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero,
David Rodríguez Hernández
FCFM, BUAP

Resumen

Este capítulo se centra en el estudio de la unicidad del cono sobre continuos, con especial atención a las gráficas finitas. Los principales resultados establecen condiciones bajo las cuales el cono sobre una gráfica finita determina de manera única a la gráfica salvo homeomorfismos. Se demuestra que, excepto en los casos del intervalo, curvas cerradas simples, n – odos simples y curvas n – teta (con $n \geq 3$), el cono sobre una gráfica finita tiene la propiedad del cono único. Esta propiedad dice que X un continuo tiene cono único si siempre que Y es un continuo para el que $Cono(X)$ y $Cono(Y)$ son homeomorfos, entonces se tiene que X y Y son homeomorfos. Las demostraciones aprovechan invariantes topológicos como el número de componentes euclidianas, la estructura de los puntos de ramificación y la localización del vértice en el cono.

1 Introducción

En topología, una construcción importante es la del cono sobre un espacio topológico. Dado un continuo X , su cono $Cono(X)$ se obtiene al identificar todos los puntos de la forma $(x, 1)$ en el producto $X \times [0, 1]$. Este espacio resultante tiene la propiedad de ser contráctil, y su estudio permite comprender mejor la estructura del espacio original. Un problema interesante surge al preguntarse si el cono determina de manera única al espacio base. Existen continuos no homeomorfos que tienen conos homeomorfos. Esto motiva la siguiente cuestión: ¿bajo qué condiciones el cono de un continuo tiene la propiedad de ser único? Este capítulo se enfoca en el caso particular de las

gráficas finitas, que son continuos de dimensión 1. Nuestro objetivo principal es verificar cuáles gráficas finitas tienen la propiedad del cono único. Los resultados principales muestran que, excepto en los casos conocidos del intervalo, las curvas cerradas simples, los n – *odos* simples y las curvas n – *teta* (con $n \geq 3$), toda gráfica finita satisface esta propiedad. En la Sección 2 se presentan definiciones y resultados preliminares sobre continuos, conos y gráficas finitas. En la Sección 3 se estudian propiedades generales del cono de un continuo. Finalmente, en la Sección 4 se demuestran los principales resultados sobre la unicidad del cono en gráficas finitas.

2 Preliminares

En esta sección presentamos la notación que hemos convenido en usar para algunos términos matemáticos de este trabajo. También se presentan algunas definiciones que los autores consideran necesarias conocer, así como algunos resultado básicos.

- (i) Por $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$ denotamos al conjunto de números reales y al conjunto de números enteros positivos, respectivamente.
- (ii) Dado $r > 0$ denotamos por $B^n(r)$ a la bola cerrada de $\mathbb{R}^n$ con centro en el origen y de radio r .
- (iii) Por S^n denotamos la esfera unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$.
- (iv) Si X y Y son espacios topológicos, $A \subset X$ y $f: X \rightarrow Y$ una función. La función $f|_A$ denotará la función restringida al subespacio A .
- (v) Si A es un subconjunto de un espacio topológico X , denotamos $\text{int}_X(A)$, $\text{cl}_X(A)$ y $\text{fr}_X(A)$ como el interior, la cerradura y la frontera de A en X respectivamente.

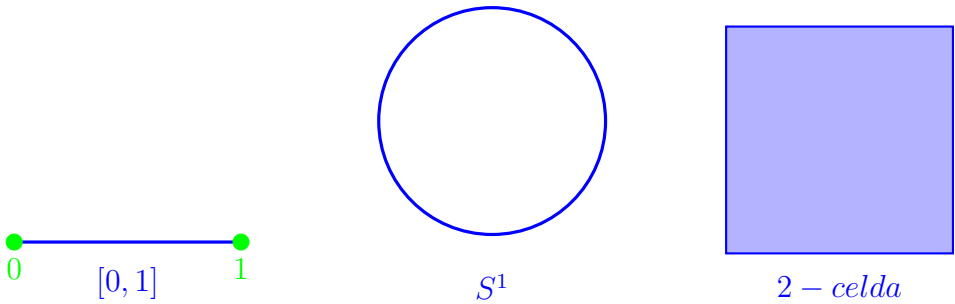
Definición 2.1. Decimos que un conjunto es **numerable** si es finito o si tiene cardinalidad igual a la del conjunto $\mathbb{N}$. Decimos que un subconjunto D de un espacio métrico X es **denso** en X , si cada subconjunto abierto y no vacío en X intersecta a D (equivalentemente si $\text{cl}_X(D) = X$). También decimos que un espacio topológico X es **separable** si este contiene un subconjunto denso y numerable.

Ejemplo 2.2. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$, ya que dado cualquier intervalo abierto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ siempre existe un número racional entre a y b . Más aún $\mathbb{R}$ es separable ya que $\mathbb{Q}$ es numerable. En general también se cumple que $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$.

Dado un espacio métrico X y $A \subset X$, se dice que A es relativamente compacto si $\text{cl}_X(A)$ es compacto. A saber, si A es compacto, entonces A es relativamente compacto ya que al ser X un espacio métrico, se sigue que es un espacio de Hausdorff, y como en los espacios de Hausdorff los compactos son cerrados, entonces $\text{cl}_X(A) = A$. Luego $\text{cl}_X(A)$ es compacto y así A es relativamente compacto. Siguiendo esta línea, [2, Teorema 3.28] y [2, Teorema 3.31] nos permiten concluir que todo espacio métrico compacto es separable.

Definición 2.3. Un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto. Un **subcontinuo** de un continuo X es un subconjunto cerrado, conexo y no vacío de X .

Ejemplo 2.4. El continuo más simple es el intervalo $[0, 1]$ de la recta real, también la circunferencia unitaria y la 2-celda que definimos como el producto cartesiano $[0, 1] \times [0, 1]$ son ejemplos clásicos de continuos.



Nota: Por la manera en que un continuo se define se tiene que los continuos son separables, algunos resultados de la teoría de retracts y espacios contráctiles se trabajan en espacios separables, por tanto es importante especificar que dichos resultados son aplicables a los continuos.

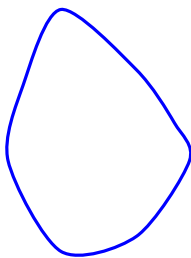
Definición 2.5. Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo $[0, 1]$. Si A es un arco y $h : [0, 1] \rightarrow A$ es un homeomorfismo, los puntos extremos de A son $h(0)$ y $h(1)$ y decimos que A “une” a $h(0)$ con $h(1)$.

Definición 2.6. Una **curva cerrada simple** es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria.

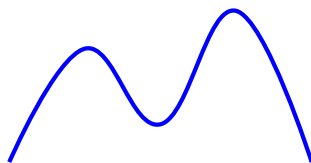
Definición 2.7. Un continuo X es **arco-conexo** si cada par de puntos distintos de X son los puntos extremos de un arco en X .

Definición 2.8. Un espacio métrico X es **localmente conexo** en $p \in X$, si para cada vecindad V de p existe un subconjunto abierto y conexo U de X tal que $p \in U \subset V$. Se dice que X es **localmente conexo** si es localmente conexo en cada uno de sus puntos. Los continuos que son localmente conexos se les conoce como **continuos de Peano**.

Ejemplo 2.9. Un arco, una curva cerrada simple y una 2-celda (Espacio homeomorfo a $B^2(r)$) son ejemplos de continuos localmente conexos.



Curva cerrada simple



Arco

El siguiente teorema nos proporciona una manera sencilla de construir nuevos continuos a partir de continuos más simples.

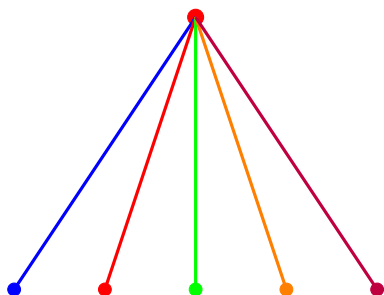
Teorema 2.10. La unión de dos continuos es un continuo si su intersección es distinta del vacío.

Demostración. Sean X_1 y X_2 dos continuos en un espacio métrico X , tales que $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$. Queremos probar que $Y = X_1 \cup X_2$ es un continuo. Para esto, obsérvese que $Y \neq \emptyset$ ya que $X_1 \neq \emptyset$ y $X_2 \neq \emptyset$, también Y es compacto pues la unión finita de compactos es compacto. Para probar la conexidad,

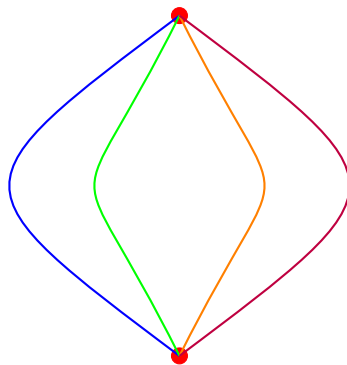
supongamos por el contrario que Y no es conexo, entonces existen abiertos U y V , tales que $U \cap Y \neq \emptyset$, $V \cap Y \neq \emptyset$, $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$ y $Y \subset U \cup V$. Dado que X_1 es conexo y $X_1 \subset Y \subset U \cup V$, se tiene que $X_1 \subset U$ o $X_1 \subset V$, análogamente $X_2 \subset U$ o $X_2 \subset V$. Sea $p \in X_1 \cap X_2$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $p \in U$, entonces $X_1 \subset U$ y $X_2 \subset U$, de donde $Y = X_1 \cup X_2 \subset U$, entonces $V \cap Y = \emptyset$ lo cual es una contradicción y, por tanto Y es conexo, finalmente al ser $Y \subset X$, restringiendo la métrica de X a Y se tiene que Y es un espacio métrico. Así Y es un continuo.

□

A continuación presentamos algunos continuos que serán importantes en este trabajo



5-odo simple



Curva 4-teta

Definición 2.11. Sean X un espacio topológico y A un subespacio de X . Diremos que A es una **componente** de X si se cumplen:

(i) A es conexo.

(ii) Si B es un subespacio conexo de X que contiene a A , entonces $B = A$.

Los puntos anteriores nos dicen que en realidad una componente es un subespacio conexo maximal.

Teorema 2.12. *X un espacio topológico es localmente conexo si y solo si cada componente de un subconjunto abierto de X es un conjunto abierto de X .*

Demostración. $\Rightarrow$ Supongamos que X es un espacio localmente conexo. Sea U un subconjunto abierto de X y sea C una componente de U , queremos probar que C es abierto de X , nótese que para cada $p \in C$ existe un abierto y conexo V_p tal que $p \in V_p \subset U$, luego $V_p \cup C$ es un subconjunto conexo de U que contiene a C , entonces $C \cup V_p = C$ ya que C es componente de U , luego $V_p \subset C$, es decir que para cada $p \in C$ existe un abierto V_p tal que $V_p \subset C$, por tanto C es abierto.

$\Leftarrow$ Sean $x \in X$ y U un abierto de X tal que $x \in U$. Sea C una componente de U tal que $x \in C$. Por hipótesis, C es abierto y además conexo y es tal que $x \in C \subset U$, esto significa que X es localmente conexo en x . Así, X es localmente conexo. □

Definición 2.13. *Dado un espacio topológico X , decimos que X es **totalmente desconexo** si todas sus componentes conexas son conjuntos unitarios.*

Definición 2.14. *Sea X un espacio topológico, diremos que X tiene **dimensión 1** si cada abierto no vacío de X contiene otro abierto cuya frontera es totalmente desconexa. (Esta definición en realidad nos dice que la topología de X tiene una base de abiertos cuya frontera es totalmente desconexa).*

Definición 2.15. *Llamaremos **curva** a los continuos que tienen dimensión 1.*

Definición 2.16. *Sea X un continuo y sea $\mathfrak{n}$ un número cardinal. Diremos que un punto $x \in X$ es de orden menor o igual que $\mathfrak{n}$ en X , lo cual denotamos por $\text{ord}(x, X) \leq \mathfrak{n}$, si x tiene una base de abiertos $\mathcal{B}_x$ tal que $|\text{fr}_X(B)| \leq \mathfrak{n}$ para cada $B \in \mathcal{B}_x$. El número cardinal $\mathfrak{n}$ más pequeño con esta propiedad es llamado el orden del punto x en X y lo denotamos por $\text{ord}(x, X) = \mathfrak{n}$.*

Definición 2.17. *Sea X un espacio topológico, diremos que X es **contráctil**, si existe una función continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = x_0$ para todo $x \in X$.*

Teorema 2.18. *Sea X un espacio métrico, no vacío y separable. Si X es contráctil, entonces X es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sea X un espacio contráctil, entonces existe una función continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que para cualquier $x \in X$, $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = x_0$ con $x_0 \in X$. Sean $p, q \in X$ y $\alpha : I \rightarrow X$ una función definida como:

$$\alpha(t) = \begin{cases} H(p, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ H(q, 2 - 2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

por el Lema de pegado de funciones se afirma que α está bien definida y es continua. Luego, obsérvenos que $\alpha(0) = H(p, 0) = p$ y $\alpha(1) = H(q, 0) = q$, de donde, se tiene que existe una trayectoria de p a q en X , por lo que X es conexo por trayectorias.

□

3 Cono de continuos

Se sabe que dado un espacio topológico (X, τ) cualquier partición $\mathcal{G}$ de este, induce un espacio topológico nuevo $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ el cual llamamos espacio de descomposición. Estos espacios son muy importantes en la teoría de los continuos, sin embargo, no necesariamente sucede que un espacio de descomposición de un continuo sea también un continuo. En [4] se hace un estudio amplio de las particiones semicontinuas superiores, se muestra como estas inducen un espacio de descomposición scs. Además se muestra que dado un continuo X y A un subconjunto cerrado de X , se tiene que $\mathcal{G}_A = \{A\} \cup \{\{z\} : z \in X - A\}$ es una partición scs y el espacio que induce denotado por X/A es también un continuo.

Definición 3.1. Consideremos $Z = X \times [0, 1]$ con X un espacio topológico, $A = \{(x, 1) : x \in X\}$. El **Cono de X** es $\text{Cono}(X) = Z/A = (X \times [0, 1]) / (X \times \{1\})$.

- A es el vértice del $\text{Cono}(X)$ y lo denotaremos por v_X ,
- Nótese que en el caso en que X es un continuo, se tiene que $\text{Cono}(X)$ también es un continuo,
- Los puntos del $\text{Cono}(X)$ son de la forma $[(x, t)]$ donde $x \in X$ y $t \in [0, 1]$.

Los siguientes resultados nos dicen que de hecho solo con que X sea métrico y compacto, se tendrá que el $Cono(X)$ es un continuo.

Teorema 3.2. *Sea X un espacio topológico, entonces el $Cono(X)$ es contráctil.*

Demostración. Consideremos $H: Cono(X) \times [0, 1] \rightarrow Cono(X)$ como:

$$H([(x, t)], s) = \begin{cases} [(x, (1-s)t + s)], & \text{si } t \in [0, 1), \\ v_X, & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Obsérvese que:

$$H([(x, t)], 0) = [(x, (1-0)t + 0)] = [(x, t)]$$

y

$$H([(x, t)], 1) = [(x, (1-1)t + 1)] = [(x, 1)] = v_X.$$

Vamos a probar que H es continua, en efecto, analicemos esto en dos casos, supongamos primero que $t < 1$, nótese que $H^*: X \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1]$ dada por $H^*(x, t, s) = (x, (1-s)t + s)$, es continua y en consecuencia $H = \pi \circ H^*$ es continua en $Cono(X) \times [0, 1] \setminus \{v_X\} \times [0, 1]$ con $\pi: X \times [0, 1] \rightarrow Cono(X)$ la función natural. Ahora bien, si $t = 1$, H es constante para cada $s \in [0, 1]$, a saber $H(v_X, s) = v_X$, sea U un abierto de $Cono(X)$ que contiene a v_X , a saber, U tiene la siguiente forma: $U = \pi(X \times (1 - \epsilon, 1])$ para $\epsilon > 0$, es decir que U contiene los puntos $[(x, t)]$ del $Cono(X)$ para los que $t > 1 - \epsilon$.

Ahora bien, consideremos $W = \pi(X \times (1 - \eta, 1]) \times (s - \delta, s + \delta)$ con $\eta = \epsilon$ si $s = 1$ o bien $\eta = \frac{\epsilon}{2}$ si $s < 1$ y con $\delta > 0$ suficientemente pequeña, tal W es un abierto de $Cono(X) \times [0, 1]$ tal que $(v_X, s) \in W$. Sea $(v, s') \in W$, para el caso en que $s = 1$, se tiene que $W = (X \times (1 - \epsilon, 1]) \times (1 - \delta, 1 + \delta)$, luego $s' \in (1 - \delta, 1 + \delta)$, entonces $|s' - 1| < \delta$ para δ tan pequeña como quieramos, digamos $\delta < \epsilon$, si $t > 1 - \eta$, entonces $(1 - s')t + s' > (1 - s')(1 - \eta) + s' = 1 - \eta - s' + s'\eta + s' = 1 - (1 - s')\eta > 1 - \delta\eta > 1 - \delta\epsilon > 1 - \epsilon$, y como

$$H(v_X, s') = \begin{cases} [(x, (1-s')t + s')] & \text{si } t \in [0, 1), \\ v_X & \text{si } t = 1, \end{cases}$$

se tiene que $H(v_X, s') \in U$ ya que $(1 - s')t + s' > 1 - \epsilon$.

Ahora bien para el caso en que $s < 1$, se tiene que $W = \pi(X \times (1 - \frac{\epsilon}{2}, 1] \times (s - \delta, s + \delta))$, sea $(v_X, s') \in W$, luego $s' \in (s - \delta, s + \delta)$ para $\delta > 0$ tan pequeña como queramos, digamos $\delta < \frac{\epsilon}{2}$, es decir, que $s' - s < \frac{\epsilon}{2}$, entonces $s' < \frac{\epsilon}{2} + s < \frac{\epsilon}{2} + 1$. Si $t > 1 - \eta$, entonces $(1 - s')t + s' > (1 - s')(1 - \eta) + s' = 1 - (1 - s')\eta > 1 - \eta = 1 - \frac{\epsilon}{2} > 1 - \epsilon$, de donde al igual que en el caso previo $H(v_X, s') \in U$ y así H es continua, por lo tanto $\text{Cono}(X)$ es contráctil. $\square$

Teorema 3.3. *Sea X un espacio topológico, entonces el $\text{Cono}(X)$ es conexo por trayectorias.*

Demostración. Se sigue del teorema 3.2 y del teorema 2.18. $\square$

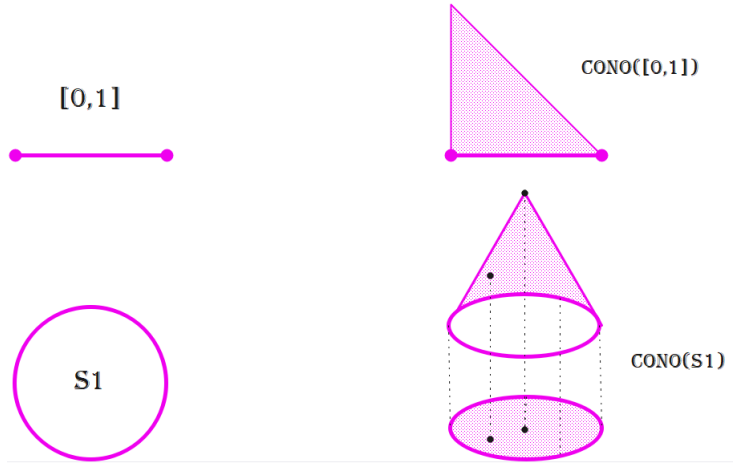
Corolario 3.4. *Sea X un espacio métrico, compacto y no vacío, entonces el $\text{Cono}(X)$ es un continuo.*

Demostración. El teorema 3.3 nos dice que $\text{Cono}(X)$ es conexo por trayectorias, entonces $\text{Cono}(X)$ es conexo y así $\text{Cono}(X)$ es un continuo. $\square$

Definición 3.5. *Sea X un espacio topológico y consideremos el $\text{Cono}(X)$ con base B , llamamos **Suspensión sobre X** al espacio de descomposición $\text{Cono}(X)/B$ el cual denotamos por $\text{Sus}(X) = \text{Cono}(X)/B = ((X \times [0, 1])/(X \times \{1\}))/ (X \times \{0\})$.*

Definición 3.6. *Sean $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$ y X un espacio discreto de n puntos, llamamos n -odo simple a $T_n = \text{Cono}(X)$ y llamamos curva n -teta a $\Theta_n = \text{Sus}(X)$.*

Pueden existir espacios no homeomorfos cuyos conos si lo sean, a saber, el intervalo $[0, 1]$ y S^1 no son homeomorfos, sin embargo sus conos si lo son, ya que tanto $\text{Cono}([0, 1])$ como $\text{Cono}(S^1)$ son homeomorfos a una **2-celda**.



Otro ejemplo a destacar que tiene que ver con nuestras definiciones previas consiste en tomar $n \in \mathbb{N}$: $n \geq 2$, y resulta que Θ_n y T_n son espacios no homeomorfos entre si, pero sus respectivos conos si lo son.

Este ejemplo previo, en realidad, es consecuencia de un resultado más general. En el siguiente teorema se demuestra que, dado cualquier espacio topológico X , se tiene que $Cono(Cono(X))$ y $Cono(Sus(X))$ son homeomorfos.

Teorema 3.7. [1, Lema (4.1)] Sea X un espacio topológico, entonces los espacios

- (i) $Cono(Cono(X))$,
- (ii) $Cono(X) \times [0, 1]$,
- (iii) $Sus(Cono(X))$,
- (iv) $Cono(Sus(X))$,

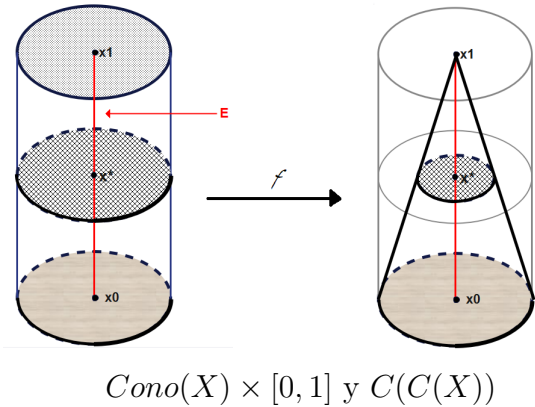
son homeomorfos entre ellos.

Demostración. $\boxed{(i) \approx (ii)}$ Consideremos la función $f: Cono(X) \times [0, 1] \rightarrow Cono(X) \times [0, 1]$ dada por

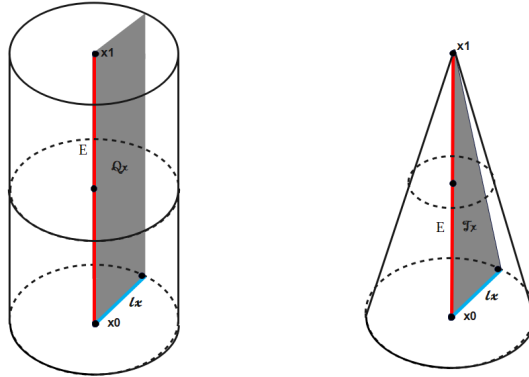
$$f([(x, t)], s) = [(x, (1 - s)t)], s$$

nótese que esta función deja invariante al conjunto $Cono(X) \times \{0\}$ y para cada $s \in (0, 1)$ manda a $Cono(X) \times \{s\}$ en el subcono de radio s contenido

en $Cono(X) \times \{s\}$, además manda al conjunto $Cono(X) \times \{1\}$ a un punto del $Cono(X) \times \{1\}$, digamos $x \times \{1\}$ con x algún punto del $Cono(X)$. Esta función induce un encaje que preserva el nivel del $Cono(Cono(X))$ en $Cono(X) \times [0, 1]$. A saber, la imagen de este encaje es una forma particular de caracterizar al $Cono(Cono(X))$ que convenimos en denotar por $C(C(X))$. Obsérvese que los espacios $Cono(X) \times [0, 1]$ y $C(C(X))$ contienen como subespacio a $x \times [0, 1]$ el cual llamaremos *eje* y lo denotaremos simplemente por E , para ilustrar esto véase la figura de abajo tomando $x_0 = (x, 0)$, $x_1 = (x, 1)$ y $x^* = (x, \frac{1}{2})$.



Ahora bien, dado $x \in Cono(X)$, el segmento l_x del $Cono(X)$ determina un “cuadrado” $Q_x = l_x \times [0, 1]$ en $Cono(X) \times [0, 1]$, también l_x determina un “triángulo rectángulo” T_x en $C(C(X))$ tal que T_x y Q_x tienen como lados comunes a E y a l_x , ilustramos esta idea a continuación:



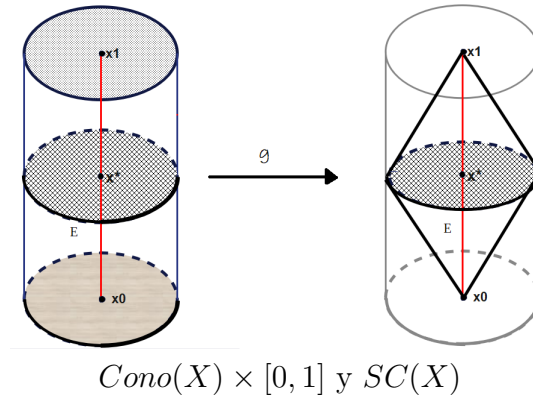
$Cono(X) \times [0, 1]$ y $C(C(X))$ son homeomorfos

Luego para cada x podemos escoger un homeomorfismo $\psi_x: Q_x \rightarrow T_x$ que mantenga invariantes los lados comunes E y l_x y usando el mismo homeomorfismo para cada x , podemos combinar estos en un solo homeomorfismo $\Psi: Cono(X) \times [0, 1] \rightarrow C(C(X))$ y así $Cono(X) \times [0, 1]$ y $C(C(X))$ son homeomorfos.

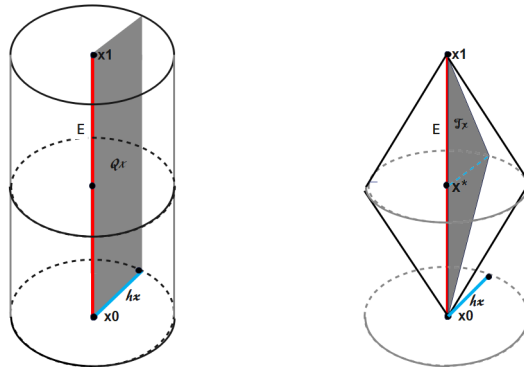
(ii) $\approx$ (iii) Para esta parte consideremos la función $g: Cono(X) \times [0, 1] \rightarrow Cono(X) \times [0, 1]$ dada por

$$g([(x, t)], s) = ([x, (1 - |1 - 2s|)t], s).$$

Nótese que esta función deja invariante al conjunto $Cono(X) \times \{\frac{1}{2}\}$, manda el conjunto $Cono(X) \times \{0\}$ a un punto de $Cono(X) \times \{0\}$ y manda el conjunto $Cono(X) \times \{1\}$ a un punto de $Cono(X) \times \{1\}$. La función g induce un encaje que preserve el nivel de la $Sus(Cono(X))$ en $Cono(X) \times [0, 1]$. A saber, la imagen de este encaje es también una forma particular de caracterizar a la $Sus(Cono(X))$ que convenimos en denotar por $SC(X)$. También aquí, $Cono(X) \times [0, 1]$ y $SC(X)$ tienen como subespacio común a E , sirve de ilustración la figura que a continuación se presenta:



Ahora bien, dado $x \in Cono(X) \times \{0\}$, el segmento h_x del $Cono(X)$ determina un “cuadrado” $Q_x = l_x \times [0, 1]$ en $Cono(X) \times [0, 1]$, también h_x determina un “triángulo isósceles” T_x en $SC(X)$ tal que T_x y Q_x tienen como lado común a E y “altura” común h_x , ilustramos esta idea a continuación:



$Cono(X) \times [0, 1]$ y $SC(X)$ son homeomorfos

Luego para cada x podemos escoger un homeomorfismo $\psi_x: Q_x \rightarrow T_x$ que mantenga invariantes a E y a la altura h_x y usando el mismo homeomorfismo para cada x , podemos combinar estos en un solo homeomorfismo $\Psi: Cono(X) \times [0, 1] \rightarrow SC(X)$ y así $Cono(X) \times [0, 1]$ y $SC(X)$ son homeomorfos.

(iii) $\approx$ (iv) Para cada $x \in X$, sea $L_x = \{[(x, t)] \in Cono(X) : t \in [0, 1]\}$ la línea del cono que une x con v_X , luego $Sus(L_x)$ es un “triángulo” T_x contenido en $Sus(Cono(X))$. Para cada $x \in X$, los T_x tienen en común el segmento

A que contiene a v_X y cuyos vértices son p_0 y p_1 . Así, $Sus(Cono(X)) = \bigcup_{x \in X} T_x$

donde $T_x \cap T_y = A$ para cada $x \neq y \in X$.

Por otro lado, para cada $x \in X$, sea $M_x = \{(x, s) \in Sus(X) : s \in [0, 1]\}$ la línea en la suspensión que contiene a x , luego $Cono(M_x)$ es un “triángulo” T'_x contenido en $Cono(Sus(X))$, a saber, estos T'_x tiene en común el segmento A' que contiene a $v_{Sus(X)}$ y cuyos vértices son p'_0 y p'_1 (polos de $Sus(X)$), así $Cono(Sus(X)) = \bigcup_{x \in X} T'_x$ con $T'_x \cap T'_y = A'$ para cada $x \neq y \in X$, luego,

para cada $x \in X$, sea $\psi_x: T_x \rightarrow T'_x$ un homeomorfismo tal que $\psi_x(p_0) = p'_0$, $\psi_x(p_1) = p'_1$ y $\psi_x(v_x) = v_{Sus(X)}$, se sigue que $Sus(Cono(X))$ y $Cono(Sus(X))$ son homeomorfos. $\square$

Definición 3.8. Sea X un continuo y consideremos $x \in X$, diremos que:

- (i) x es un **punto de ramificación** de X si $ord(x, X) \geq 3$,
- (ii) x es un **punto ordinario** de X si $ord(x, X) = 2$,
- (iii) x es un **punto extremo** en X si $ord(x, X) = 1$.

Sean

$$\begin{aligned} R(X) &= \{x \in X : x \text{ es punto de ramificación de } X\}, \\ O(X) &= \{x \in X : x \text{ es punto ordinario de } X\}, \\ E(X) &= \{x \in X : x \text{ es punto extremo de } X\}. \end{aligned}$$

Definición 3.9. Sea X un continuo, diremos que $x \in X$ es un **punto euclidiano** si existe una vecindad de x en X que es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, también diremos que x es un **punto semieuclediano** de X si x tiene una vecindad que es homeomorfa al semiespacio $\{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n : p_n \geq 0\}$, además denotamos por:

- $\alpha(X) = \{x \in X : x \text{ es un punto euclidiano de } X\}$,
- $\beta(X) = \{x \in X \setminus \alpha(X) : x \text{ es un punto semieuclediano de } X\}$,
- $\gamma(X) = X \setminus (\alpha(X) \cup \beta(X))$.

Nota: Las componentes de $\alpha(X)$ son llamadas **componentes euclidianas** de X .

Ejemplo 3.10. Consideremos $X = [0, 1]$ se tiene que $\alpha(X) = (0, 1)$, ya que cada $x \in (0, 1)$ tiene una vecindad de la forma (a, b) con $0 < a < x < b < 1$, tal vecindad como sabemos es homeomorfa a $\mathbb{R}$, también para este ejemplo se tiene que $\beta(X) = \{0, 1\}$, como consecuencia de que las vecindades de 0 y 1 son de la forma $[0, b)$ y $(a, 1]$ respectivamente, que a su vez son homeomorfas a $[0, \infty)$. De esto tenemos que $\gamma(X) = \emptyset$. Más aún dado que $\alpha(X)$ es conexo, entonces X solo tiene una componente euclidiana, a saber $(0, 1)$.

Ejemplo 3.11. Consideramos $X = S^1$, a saber, $\alpha(X) = X$ ya que cada punto de S^1 tiene vecindades homeomorfas a $\mathbb{R}$, luego, claramente $\beta(X) = \emptyset$ y $\gamma(X) = \emptyset$, además como $\alpha(X) = S^1$ y sabemos que S^1 es conexo, entonces X tiene una sola componente euclidiana, a saber S^1 .

Ejemplo 3.12. Consideremos $X = S^1 \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, y = 0\}$, se tiene que $\alpha(X) = X \setminus \{(1, 0), (2, 0)\}$, $\beta(X) = \{(2, 0)\}$ y $\gamma(X) = \{(1, 0)\}$, nótese que las vecindades de $(1, 0)$ son triodos con vértice $(1, 0)$ y en particular estos no son puntos euclidianos ni semieuclicidianos. Finalmente obsérvese que X tiene dos componentes euclidianas, a saber $S^1 \setminus \{(1, 0)\}$ y $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2, y = 0\}$.

Teorema 3.13. Si X es una curva localmente conexa, entonces se cumplen:

- (i) X es una curva cerrada simple si y solo si $v_X \in \alpha(\text{Cono}(X))$,
- (ii) X es un intervalo si y solo si $v_X \in \beta(\text{Cono}(X))$,
- (iii) $\alpha(X \times [0, 1)) = \alpha(X) \times (0, 1)$.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ Si X es una curva cerrada simple cualquier vecindad del vértice del $\text{Cono}(X)$ es homeomorfa a un disco abierto que a su vez es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, de donde $v_X \in \alpha(\text{Cono}(X))$.

$\Leftarrow$ Ahora supongamos que $v_X \in \alpha(\text{Cono}(X))$ A saber $X \neq [0, 1]$, nótese que si sucediera que $X = [0, 1]$ tendríamos que existe una vecindad en el $\text{Cono}(X)$ homeomorfa a $\mathbb{R}^2$, pero las vecindades de v_X son homeomorfas al semiespacio euclidiano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ y estas no son homeomorfas a $\mathbb{R}^n$, para algún n . Así, supongamos que $R(X) \neq \emptyset$ y tomemos $p \in R(X)$ fijo, nótese que cada vecindad de v_X contiene puntos de la forma $[(p, t)]$ y conjuntos de la forma $T_3 \times [0, 1]$, tales vecindades no son planas y luego v_X no pertenece a $\alpha(\text{Cono}(X))$, lo cual es una contradicción. Así $R(X) = \emptyset$ y en consecuencia, cada punto de X es ordinario, por lo tanto, X es una curva cerrada simple.

(ii) $\Rightarrow$ Si X es un intervalo cualquier vecindad del vértice v_X del $\text{Cono}(X)$ es homeomorfa al semiespacio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \geq 0\}$, de donde $v_X \in \beta(\text{Cono}(X))$. $\Leftarrow$ Ahora supongamos que $v_X \in \beta(\text{Cono}(X))$. Se tiene que X no puede ser una curva cerrada simple, ya que si X lo fuera, tendríamos por el inciso (i) que $v_X \in \alpha(\text{Cono}(X))$ y eso contradice nuestra hipótesis. Luego, al igual que en el inciso anterior, supongamos que $R(X) \neq \emptyset$, de igual manera tomemos $p \in R(X)$ fijo, luego cada vecindad de v_X contiene puntos de la forma $[(p, t)]$ y conjuntos de la forma $T_3 \times [0, 1]$ y al igual que en el inciso anterior v_X no pertenece a $\beta(\text{Cono}(X))$ lo cual es una contradicción, de donde debe suceder que $R(X) = \emptyset$ y así X es un intervalo.

(iii) Sea $(x, t) \in \alpha(X) \times (0, 1)$, entonces $x \in \alpha(X)$ y $t \in (0, 1)$, como $x \in \alpha(X)$ existe una vecindad V de x homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y como $(0, 1)$ homeomorfo a $\mathbb{R}$, entonces $V \times (0, 1)$ es una vecindad de (x, t) homeomorfa a $\mathbb{R}^{n+1}$, de donde $(x, t) \in \alpha(X \times (0, 1))$, luego $(x, t) \in \alpha(X \times [0, 1])$ y así $\alpha(X) \times (0, 1) \subseteq \alpha(X \times [0, 1])$.

Ahora, obsérvese que $\alpha(X) = X \setminus (\beta(X) \cup \gamma(X))$, por lo que si $x \in \beta(X) \cup \gamma(X)$ se implica que x no es un punto euclidiano de X , luego $(x, t) \notin \alpha(X \times [0, 1])$ ya que si (x, t) es un punto euclidiano de $\alpha(X \times [0, 1])$, existe una vecindad de (x, t) homeomorfa a algún espacio euclidiano, note que las vecindades de (x, t) son homeomorfas a un semiespacio euclidiano o bien contienen conjuntos de la forma $T_3 \times [0, 1]$. Ahora, si $x \notin \beta(X) \cup \gamma(X)$ se implica que $(x, t) \in \alpha(X) \times (0, 1)$ y así $\alpha(X \times [0, 1]) \subseteq \alpha(X) \times (0, 1)$. $\square$

Corolario 3.14. *Sea X una curva localmente conexa que no es una curva cerrada simple, entonces:*

- (i) *Cualquier componente euclidiana M del $\text{Cono}(X)$ es de la forma $M = N \times (0, 1)$ para alguna componente euclidiana N de X .*
- (ii) *Para cualquier componente euclidiana N de X , se tiene que $N \times (0, 1)$ es una componente euclidiana del $\text{Cono}(X)$.*

Demostración. (i) Dado que X no es una curva cerrada simple se tiene por el teorema 3.13(i) que $v_X \notin \alpha(\text{Cono}(X))$, de donde $\alpha(\text{Cono}(X)) = \alpha(X \times [0, 1])$. Luego por el teorema 3.13(iii), implicamos que $\alpha(\text{Cono}(X)) = \alpha(X) \times (0, 1)$, así, si M es una componente de $\alpha(\text{Cono}(X))$, entonces M es una componente

de $\alpha(X) \times (0, 1)$. Obsérvese que $\alpha(X) = \bigcup C_\delta$, donde C_δ componente de $\alpha(X)$, por lo que $\alpha(X) \times (0, 1) = \left(\bigcup C_\delta\right) \times (0, 1) = \bigcup (C_\delta \times (0, 1))$, donde $C_\delta \times (0, 1)$ conexo para cada δ y $(C_\delta \times (0, 1)) \cap (C_\varepsilon \times (0, 1)) = \emptyset$ si $\delta \neq \varepsilon$, luego M es $N \times (0, 1)$ para $N = C_\delta$ para alguna δ .

(ii) Sea N una componente de $\alpha(X)$, luego $N \times (0, 1)$ es un conexo contenido en $\alpha(X) \times (0, 1) = \alpha(X \times [0, 1))$, de donde $N \times (0, 1) \subset M$ para alguna componente M de $\alpha(X \times [0, 1))$. Por el inciso anterior $M = K \times (0, 1)$ para alguna componente K de $\alpha(X)$ de donde $N \times (0, 1) \subset K \times (0, 1)$, entonces $N \subset K$ y como N es componente de $\alpha(x)$ se tiene que $N = K$, es decir, $M = N \times (0, 1)$ y por lo tanto $N \times (0, 1)$ componente de $\alpha(\text{Cono}(X))$. $\square$

Ejemplo 3.15. Si consideramos el triodo simple $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, donde A_1 , A_2 y A_3 son arcos con puntos extremos e_1 , e_2 y e_3 respectivamente y punto extremo en común p , se tiene que:

$$\alpha(X) = A_1 \setminus \{p, e_1\} \cup A_2 \setminus \{p, e_2\} \cup A_3 \setminus \{p, e_3\},$$

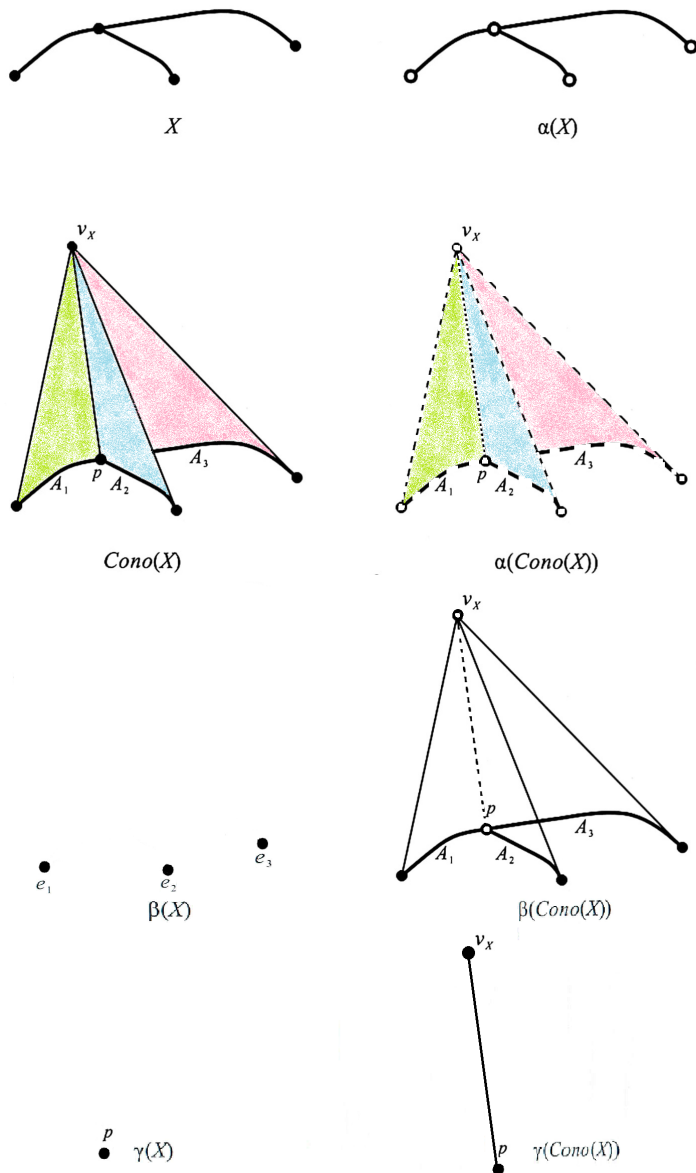
$$\alpha(\text{Cono}(X)) = (A_1 \setminus \{p, e_1\} \times (0, 1)) \cup (A_2 \setminus \{p, e_2\} \times (0, 1)) \cup (A_3 \setminus \{p, e_3\} \times (0, 1)),$$

$$\beta(X) = \{e_1, e_2, e_3\},$$

$$\beta(\text{Cono}(X)) = (X \times \{0\}) \cup (\beta(X) \times [0, 1)),$$

$$\gamma(X) = \{p\},$$

$$\gamma(\text{Cono}(X)) = \{p\} \times [0, 1].$$



Para los resultados que veremos más adelante es necesario considerar los siguientes subconjuntos del $Cono(X)$.

- (i) $C_X = \{w \in Cono(X) : w \text{ pertenece al interior como variedad de una 2-celda en } Cono(X)\},$

- (ii) $D_X = \text{Cono}(X) \setminus C_X$,
- (iii) $S_X = \{w \in D_X : w \text{ es el vértice de un triodo simple contenido en } D_X\}$

4 Unicidad del *Cono* en gráficas finitas

Existen diversas formas de definir a las *Gráficas* para este trabajo convenimos en usar la siguiente definición.

Definición 4.1. *Una gráfica finita es un continuo que puede escribirse como la unión finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos o son ajenos o bien se intersectan solo en uno o en sus dos puntos extremos.*

El siguiente lema generaliza la idea presentada en el ejemplo 3.15.

Lema 4.2. [5, Lema 3.1] *Sea X una gráfica finita y supongamos que $|R(X)| = m \geq 1$, entonces:*

- (i) $\gamma(\text{Cono}(X)) = R(X) \times [0, 1]$ y, por lo tanto, $\gamma(\text{Cono}(X))$ es el cono sobre el espacio discreto con m puntos,
- (ii) Si $m = 1$, entonces $\gamma(\text{Cono}(X)) \subset \text{cl}_{\text{Cono}(X)}(J \times (0, 1))$ para cada componente euclidiana J de X ,
- (iii) Si $R(X) = \{p, q\}$ con $p \neq q$, entonces $\gamma(\text{Cono}(X))$ es el arco $\{p, q\} \times [0, 1]$. Si existe una componente euclidiana J de X tal que $\text{cl}_X(J) \cap \{p, q\} = \{p\}$, entonces $\text{cl}_{\text{Cono}(X)}(J \times (0, 1)) \cap \gamma(\text{Cono}(X))$ es el arco $\{p\} \times [0, 1]$.

Demostración. (i) Consideremos $J^* = \bigcup \{J \times (0, 1) : J \text{ es una componente euclidiana de } X\}$, a saber, $J^* = (X \setminus (\beta(X) \cup \gamma(X))) \times (0, 1) = \alpha(X) \times (0, 1)$, luego por el teorema 3.13 (iii), $J^* = \alpha(X \times [0, 1])$ y, en consecuencia, $J^* \subset \alpha(\text{Cono}(X))$. Dado que X tiene al menos un punto de ramificación, entonces X no puede ser una curva cerrada simple y tampoco un intervalo, de donde por 3.13 (i) e (ii), tenemos que $v_X \notin \alpha(\text{Cono}(X)) \cup \beta(\text{Cono}(X))$. Obsérvese que $\beta(\text{Cono}(X)) = (\alpha(X) \times \{0\}) \cup (\beta(X) \times [0, 1])$ de donde $\gamma(\text{Cono}(X)) = R(X) \times [0, 1]$.

(ii) Como $m = 1$, tenemos que $R(X)$ tien un único elemento, entonces

denotemos por p al único punto de ramificación de X , obsérvese que para cualquier componente euclidiana J de X se tiene que $p \in cl_X(J)$, más aún, por el inciso (i) $\gamma(Cono(X)) = \{p\} \times [0, 1]$, de donde se tiene que $\gamma(Cono(X)) \subset cl_{Cono(X)}(J \times (0, 1))$ para cualquier componente euclidiana J de X .

(iii) Sea J una componente euclidiana de X tal que $cl_X(J) \cap \{p, q\} = \{p\}$, entonces $\{p\} \times [0, 1] \subset cl_{Cono(X)}(J \times (0, 1))$. Obsérvese que si $z \in \{q\} \times [0, 1]$ existe V vecindad de z en $Cono(X)$ tal que $V \cap (J \times (0, 1)) = \emptyset$, por lo que $z \notin cl_{Cono(X)}(J \times (0, 1))$ para cualquier $z \in \{q\} \times [0, 1]$ y así $cl_{Cono(X)}(J \times (0, 1)) \cap \gamma(Cono(X)) = \{p\} \times [0, 1]$. $\square$

Lema 4.3. *Consideremos a X como una gráfica finita y a Y una curva localmente conexa. Si $Cono(X)$ y $Cono(Y)$ son homeomorfos, entonces Y es una gráfica finita.*

Demostración. Como X es una gráfica finita, se tiene que X tiene un número finito de componentes euclidianas y también un número finito de puntos de ramificación. Luego, el corolario 3.14 nos dice que, por cada componente euclidiana en X , hay una componente euclidiana en $Cono(X)$ y viceversa, de donde $Cono(X)$ tiene un número finito de componentes euclidianas. Además, S_X es un conjunto finito. Luego, tenemos por hipótesis que $Cono(X)$ y $Cono(Y)$ son homeomorfos y recordemos que el número de componentes es un invariante topológico. Entonces, $Cono(Y)$ tiene un número finito de componentes euclidianas y S_Y es un conjunto finito. Argumentando de manera similar por el corolario 3.14, se tiene que Y tiene un número finito de componentes euclidianas y un número finito de puntos de ramificación. Por tanto, Y es una gráfica finita. $\square$

Teorema 4.4. *[11, Teorema (4.1)] Si X y Y son curvas localmente conexas y $X \times [0, 1)$ es homeomorfo a $Y \times [0, 1)$, entonces X y Y son homeomorfos.*

Corolario 4.5. *Si X y Y son curvas localmente conexas y $h: Cono(X) \rightarrow Cono(Y)$ un homeomorfismo tal que $h(v_X) = v_Y$, entonces X y Y son homeomorfos.*

Demostración. Sean X y Y curvas localmente conexas, como $h: Cono(X) \rightarrow Cono(Y)$ es homeomorfismo tal que $h(v_X) = v_Y$, entonces $h(X \times [0, 1)) = Y \times [0, 1)$, de donde $X \times [0, 1)$ e $Y \times [0, 1)$ son homeomorfos y así por el teorema 4.4, X y Y son homeomorfos. $\square$

Lema 4.6. *Sea Y un continuo y consideremos a X una gráfica finita que no sea un intervalo, una curva cerrada simple, un n -odo o una curva n -teta para $n \geq 3$. Si $h: \text{Cono}(X) \rightarrow \text{Cono}(Y)$ es un homeomorfismo, entonces $h(v_X) = v_Y$.*

Demostración. Supongamos que X tiene al menos un punto de ramificación, es decir, que $|R(X)| = m \geq 1$; por tanto, supongamos primero que $m \geq 3$, por el lema 4.2 (i) Dado que $\text{Cono}(X)$ y $\text{Cono}(Y)$ son homeomorfos, se tiene que $\gamma(\text{Cono}(X))$ y $\gamma(\text{Cono}(Y))$ son conos sobre el espacio discreto de m puntos; es decir, son m -odos simples. Luego, $h(\gamma(\text{Cono}(X))) = \gamma(\text{Cono}(Y))$ y h mandan el corazón de $\gamma(\text{Cono}(X))$ en el corazón de $\gamma(\text{Cono}(Y))$; en consecuencia, $h(v_X) = v_Y$.

Ahora supongamos que $m = 2$ y digamos que $R(X) = \{p, q\}$ con $p \neq q$, a saber, existe una componente euclidiana J de X tal que $cl_X(J) \cap \{p, q\}$ contienen un solo elemento p o q , ya que si $cl_X(J) \cap \{p, q\} = \{p, q\}$, para toda componente euclidiana de X , se tendría que X es una n -teta lo cual sería una contradicción. Sin pérdida de generalidad supongamos que $cl_X(J) \cap \{p, q\} = \{p\}$, así por el lema 4.2 (iii), $cl_{\text{Cono}(X)}(J \times (0, 1)) \cap \gamma(\text{Cono}(X))$ es el arco $\{p\} \times [0, 1]$. Además por el corolario 3.14 (ii), el conjunto $E = J \times (0, 1)$ es una componente euclidiana de $\text{Cono}(X)$ por lo que $h(E)$ es una componente euclidiana de $\text{Cono}(Y)$, por el Corolario 3.14 (i), existe una componente euclidiana L de Y para la que $h(E) = L \times (0, 1)$. El lema 4.2 nos dice que $\gamma(\text{Cono}(X))$ es el arco $\{p, q\} \times [0, 1]$ y como $\text{Cono}(X)$ y $\text{Cono}(Y)$ son homeomorfos, entonces $\gamma(\text{Cono}(Y))$ es un arco.

Consideremos:

$$J_0 = cl_{\text{Cono}(X)}(J \times (0, 1)) \cap \gamma(\text{Cono}(X)) = \{p\} \times [0, 1]$$

y

$$L_0 = cl_{\text{Cono}(Y)}(L \times (0, 1)) \cap \gamma(\text{Cono}(Y)).$$

Obsérvese que J_0 es un subarco propio del arco $\gamma(\text{Cono}(X))$ y como $h(\gamma(\text{Cono}(X))) = \gamma(\text{Cono}(Y))$, entonces $h(J_0) = L_0$ y L_0 es un subarco propio del arco $\gamma(\text{Cono}(Y))$. Por el lema 4.2 (ii), Y tiene exactamente dos puntos de ramificación p_0 y q_0 , luego $\gamma(\text{Cono}(Y))$ es el arco $\{p_0, q_0\} \times [0, 1]$. Si L contiene a ambos puntos p_0 y q_0 , por la construcción del $\text{Cono}(Y)$, tenemos que

$$\gamma(\text{Cono}(Y)) = \{p_0, q_0\} \times [0, 1] \subset L_0 \subset \gamma(\text{Cono}(Y))$$

y entonces $L_0 = \gamma(\text{Cono}(Y))$ lo cual es una contradicción. Esto prueba que $cl_X(L) \cap \{p_0, q_0\}$ es un conjunto unipuntual, supongamos que $cl_X(L) \cap \{p_0, q_0\} = \{p_0\}$. Por tanto $L_0 = \{p_0\} \times [0, 1]$. Ahora, como

$$h(\{p, q\} \times [0, 1]) = h(\gamma(\text{Cono}(X))) = \gamma(\text{Cono}(Y)) = \{p_0, q_0\} \times [0, 1]$$

y como

$$h(\{p\} \times [0, 1]) = h(J_0) = L_0 = \{p_0\} \times [0, 1],$$

entonces $h(v_X) = h(p, 1) = (p_0, 1) = v_Y$.

Finalmente supongamos que $m = 1$. Dado que X no es un n -odo para $n \geq 3$, debe existir una componente euclidiana J de X tal que $cl_X(J)$ es una curva cerrada simple. Sea $p \in X$ tal que $R(X) = \{p\}$, luego por el corolario 3.14 (ii), $E = J \times (0, 1)$ es una componente euclidiana de $\text{Cono}(X)$ y dado que $h(\gamma(\text{Cono}(X))) = \gamma(\text{Cono}(Y))$, entonces $h(E)$ es una componente euclidiana de $\text{Cono}(Y)$, luego existe una componente euclidiana L de Y tal que $h(E) = D = L \times (0, 1)$. El lema 4.2 (i), nos garantiza que $\gamma(\text{Cono}(X)) = \{p\} \times [0, 1]$, entonces $\gamma(\text{Cono}(Y))$ es un arco. Consideremos

$$\mathcal{A}_J = cl_{\text{Cono}(X)}(J \times (0, 1)) \cap \beta(\text{Cono}(X))$$

$$\mathcal{A}_L = cl_{\text{Cono}(Y)}(L \times (0, 1)) \cap \beta(\text{Cono}(Y)).$$

Como $h(E) = D$, se tiene que $h(\mathcal{A}_J) = \mathcal{A}_L$ y $h(cl_{\text{Cono}(X)}(\mathcal{A}_J)) = cl_{\text{Cono}(Y)}(\mathcal{A}_L)$, obsérvese que $cl_{\text{Cono}(X)}(\mathcal{A}_J) = cl_X(J \times \{0\})$ es una curva cerrada simple y por tanto $cl_{\text{Cono}(Y)}(\mathcal{A}_L)$ es una curva cerrada simple.

Ahora veamos que Y contiene exactamente un punto de ramificación; supongamos, por el contrario, que Y tiene exactamente dos puntos de ramificación: p_0 y q_0 . En el caso en que Y no es una n -teta para $n \geq 3$, notemos que Y satisface las hipótesis que se tenían para X en el caso anterior, de donde $h(v_X) = v_Y$; luego, por el corolario 4.5, X y Y son homeomorfos, lo cual es una contradicción. Así, para este caso, supongamos que Y es una n -teta para algún $n \geq 3$; entonces, $cl_{\text{Cono}(Y)}(\mathcal{A}_L) = cl_Y(L \times \{0\})$ es un arco que une los puntos $(p_0, 0)$ y $(q_0, 0)$, lo cual es una contradicción, y, entonces, Y contiene exactamente un punto de ramificación.

Sea $y \in Y$ tal que $R(Y) = \{y\}$. Si $cl_Y(L)$ es un arco que une a y con un punto extremo e de Y , entonces $\mathcal{A}_L = (L \times \{0\}) \cup (\{e\} \times [0, 1])$; entonces $cl_{\text{Cono}(Y)}(\mathcal{A}_L)$ es un arco que une los puntos $(y, 0)$ y v_Y , lo cual es una contradicción. Así $cl_Y(L)$ es una curva cerrada simple y entonces $cl_{\text{Cono}(Y)}(\mathcal{A}_L)$

es la curva cerrada simple $cl_Y(L) \times \{0\}$; por lo tanto $h(J \times \{0\}) = L \times \{0\}$. Como $h(\{p\} \times [0, 1]) = h(\gamma(\text{Cono}(X))) = \gamma(\text{Cono}(Y)) = h(\{y\} \times [0, 1])$, tomando intersecciones, concluimos que $h(p, 0) = (y, 0)$. Entonces h manda el otro punto extremo del arco $\gamma(\text{Cono}(X))$ al otro punto extremo del arco $\gamma(\text{Cono}(Y))$ y así $h(v_X) = v_Y$. $\square$

Corolario 4.7. *Sea X una gráfica finita. Entonces X tiene la propiedad del cono único si y solo si X es diferente de un intervalo, una curva cerrada simple, un n -odo o una curva n -teta con $n \geq 3$.*

Demostración. Sea Y un continuo y supongamos que $\text{Cono}(X)$ y $\text{Cono}(Y)$ son homeomorfos; sea $h: \text{Cono}(X) \rightarrow \text{Cono}(Y)$ un homeomorfismo. Luego, por el lema 4.6, $h(v_X) = v_Y$, y por el corolario 4.5, se tiene que X y Y son homeomorfos, y por tanto X tiene la propiedad del cono único. $\square$

Agradecimientos

Los autores expresan su más sincero agradecimiento a los árbitros por el tiempo y la dedicación invertidos en la revisión de este trabajo.

Referencias

- [1] Craig R. Guilbault, *A solution to the Groot's absolute cone conjecture*, Topology 46 (2007), 89–102.
- [2] David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Luis Alberto Guerrero Méndez, *La magia de los espacios métricos*, FCFM, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, 2025.
- [3] David Rodríguez Hernández, Fernando Macías Romero, David Herrera Carrasco, Un estudio de la contractibilidad, *Matemáticas y sus aplicaciones 25* Textos Científicos, Dirección de Fomento Editorial, BUAP, Primera Edición 2025.
- [4] David Rodríguez Hernández, Fernando Macías Romero, David Herrera Carrasco, Sobre la descomposición scs de un continuo y la construcción del cono topológico, *Matemáticas y sus aplicaciones 23* Textos Científicos, Dirección de Fomento Editorial, BUAP, Primera Edición 2024

-
- [5] Alejandro Illanes, Verónica Martínez-de-la-Vega, Daria Michalik, *The uniqueness of cones over locally connected curves*, Topol. Appl. 320 (2022), 108242.
 - [6] Kazimierz Kuratowski, *Topology*, Vol I, Academic Press, New York, N. Y., 1966.
 - [7] Kazimierz Kuratowski, *Topology*, Vol II, Academic Press, New York, N. Y., 1968.
 - [8] María de Jesús López Toriz, *Hiperespacios que son conos*. (Tesis de Doctorado). Universidad Nacional Autónoma de México, México, (2001).
 - [9] María de Jesús López Toriz, Patricia Pellicer-Covarrubias, Alicia Santiago-Santos, $\frac{1}{2}$ -homogeneous suspensions, Topol. Appl. 157, (2010) 482–493.
 - [10] Sergio Macías. *Una introducción a los retracts absolutos y a los retracts de vecindad absolutos*. Revista de integración, Vol. 31(2013), No. 2, 153–164.
 - [11] Daria Michalik, *The cones over locally connected curves*, Topol. Proc. 52 (2018), 35–43.
 - [12] Jan van Mill, *Infinite-dimensional topology*, North Holland Mathematical Library, Amsterdam, 1989.
 - [13] James R. Munkres, *Topología*, Prentice Hall, Madrid 2002.
 - [14] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., 158, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1992.
 - [15] Sam B. Nadler, Jr., Patricia Pellicer-Covarrubias, *Cones that are $\frac{1}{2}$ -homogeneous*, Houst. J. Math. 33 (1) (2007), 229–247.
 - [16] Patricia Pellicer-Covarrubias, Alicia Santiago-Santos, *Degree of homogeneity on cones*, Topol. Appl. 175 (2014), 49–64.

- [17] Isabel Puga, Dendroides, Capítulo 3, *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios*, editado por R. Escobedo, S. Macías, H. Méndez. Aportaciones matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 31(2006), 51–84.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx

fmacias@fcfm.buap.mx

rh2255707168@alm.buap.mx

Índice de autores

Aguilar Romero, Felipe de Jesús, 97

Arriaga Hernández, Jesús, 55

Briones de Gante, Maricela, 142

Clemente González, Julio César, 55

Cruz Suárez, Hugo Adán, 25

Cuevas Otahola, Bolivia, 55

González Quiroz, Adriana, 25

Hernández Valdez, Gerardo, 162

Herrera Carrasco, David, 97, 119, 142, 187

Juárez García, Miguel Ángel, 55

López Martínez Angel Yahel, 5

Macías Romero, Fernando, 97, 119, 142, 187

Martínez Barahona, Ingrid Carolina, 142

Martínez Ruíz Iván, 5

Oliveros Oliveros, José Jacobo, 55

Ortega Gutiérrez, Rei Israel, 25

Ramírez Aparicio, Leonardo, 119

Rodríguez Hernández, David, 187

Salas Reyna, Jahir Alessandro, 162

Matemáticas y sus aplicaciones 28

Fernando Macías Romero, David Herrera Carrasco e Ingrid Carolina
Martínez Barahona

25 de septiembre de 2026

pdf

6 MB

Matemáticas y sus aplicaciones 28

FERNANDO MACIAS ROMERO

DAVID HERRERA CARRASCO

INGRID CAROLINA MARTINEZ BARAHONA

editores

El libro Matemáticas y sus aplicaciones 28 es una obra académica que compila una selección rigurosamente arbitrada de proyectos de investigación científica presentados en la CIMA, 2024.

La obra se estructura en tres secciones temáticas principales: Teoría de Juegos, Matemática Aplicada y Teoría de Control, y Topología. Entre los temas específicos que se abordan se encuentran el estudio de la teoría de juegos conductuales y sus aplicaciones económicas, modelos matemáticos para la reconstrucción volumétrica 3D de la proteína Spike del virus SARS-CoV-2, así como diversas investigaciones avanzadas sobre hiperespacios, continuos enrejados, gráficas finitas y propiedades del cono en topología.

El propósito principal de la obra es consolidar un espacio de intercambio y divulgación del conocimiento matemático para la comunidad académica.



BUAP



Dirección
General de
Publicaciones

