

ISBN: 978-607-487-600-0



Es este libro la expresión de un esfuerzo por dejar constancia de la riqueza matemática de la Séptima Gran Semana Nacional de la Matemática 2011 (7GSNM). Toda obra editorial se realiza con la esperanza de tener numerosos lectores; si por lo menos los asistentes se convierten en lectores y éstos propagan este volumen, estaremos satisfechos. Los trabajos aquí presentados fueron sometidos a estricto arbitraje.



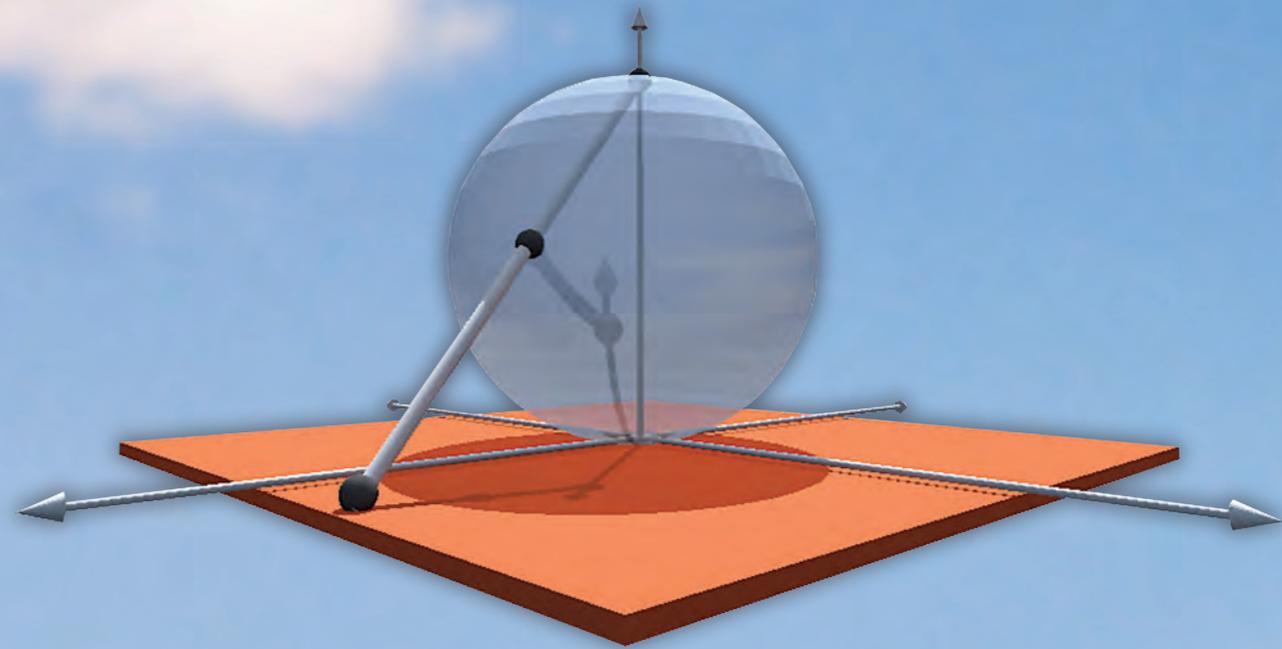
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Facultad de Ciencias Físico matemáticas  
Dirección de Fomento Editorial

Miguel Ángel García Ariza  
Fernando Macías Romero  
José Jacobo Oliveros Oliveros  
editores

Matemáticas y sus Aplicaciones 2



# Matemáticas y sus Aplicaciones 2



Miguel Ángel García Ariza  
Fernando Macías Romero  
José Jacobo Oliveros Oliveros  
editores



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Matemáticas y sus Aplicaciones 2  
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas  
*Benemérita Universidad Autónoma de Puebla*



Matemáticas y sus Aplicaciones 2  
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas  
*Benemérita Universidad Autónoma de Puebla*

EDITORES:

Miguel Ángel García Ariza

Fernando Macías Romero

José Jacobo Oliveros Oliveros

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

José Alfonso Esparza Ortiz

*Rector*

José Ciro Ignacio Morales Hernández

*Secretario General*

Pedro Hugo Hernández Tejeda

*Vicerrector de Investigación y Estudios de Posgrado*

Fernando Santiesteban Llaguno

*Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura*

José Ramón Enrique Arrazola Ramírez

*Director de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas*

*Matemáticas y sus Aplicaciones 2*

Primera edición, 2013

ISBN: 978-607-487-600-0

©Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Dirección de Fomento Editorial

2 Norte 1404, C. P. 72000

Puebla, Pue.

Teléfono y fax: 01 (222) 246.85.59

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel

Edificio 111<sup>a</sup> Ciudad Universitaria

Puebla, Pue. C.P. 72570

Teléfono: 01 (222) 229.55.00 ext. 7552

Impreso y hecho en México

*Printed and made in Mexico*

## **Matemáticas y sus Aplicaciones 2**

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos trabajos presentados a la  
Séptima Gran Semana Nacional de la Matemática 2011, FCFM, BUAP

Editores:

Miguel Ángel García Ariza

Fernando Macías Romero

José Jacobo Oliveros Oliveros

Comité Científico:

Jorge Luis Alamilla López, Juan Angoa Amador, Esteban Astudilo de la Vega,  
Lucía Cervantes Gómez, Hugo Adán Cruz Suárez, Juan Alberto Escamilla Reyna,  
Andrés Fragueta Collar, David Herrera Carrasco, Manuel Ibarra Contreras, Hugo  
Juárez Anguiano, Armando Martínez García, Iván Martínez Ruíz, Francisco Javier  
Mendoza Torres, María Monserrat Morín Castillo, Sergio Francisco Salem Silva,  
Francisco Solano Tajonar Sanabria, Víctor Hugo Vázquez Guevara



# Índice General

Presentación	v
<b>Análisis Matemático</b>	<b>1</b>
Capítulo 1. La Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$ <i>Eder Cardoso García</i> <i>Francisco Javier Mendoza Torres</i>	3
Capítulo 2. Desigualdades y Límite <i>Manuel Ibarra Contreras</i> <i>Armando Martínez García</i>	17
Capítulo 3. Métodos de Sumabilidad de Cesàro y Abel aplicados a las Series de Henstock-Fourier <i>María Guadalupe Morales Macías</i>	31
<b>Ecuaciones Diferenciales y Modelación Matemática</b>	<b>43</b>
Capítulo 4. Models of the Electrical Activity of the Pancreatic $\beta$ -Cells <i>Roberto Ávila Pozos</i> <i>Ricardo Cruz Castillo</i> <i>Rafael Godínez Fernández</i>	45
Capítulo 5. Nueva Generación Algebraica de Soluciones de la Ecuación Diferencial de Hermite <i>Miriam Arenas Álvarez</i> <i>Mario Alberto Maya Mendieta</i>	57
Capítulo 6. Análisis de Sensibilidad Local de un Modelo Complejo para Crecimiento de Lechugas Cultivadas en Invernadero <i>John Goddard Close</i> <i>Irineo Lorenzo López Cruz</i> <i>Abraham Rojano Aguilar</i> <i>Raquel Salazar Moreno</i>	69
Capítulo 7. Estudio Numérico de las Ecuaciones de Poisson-Nernst-Planck en Celdas de Combustible sin Membrana <i>Miguel González Vázquez</i> <i>Lorenzo Héctor Juárez Valencia</i>	87
Capítulo 8. Introducción a las Funciones de Control de Lyapunov <i>Evodio Muñoz Aguirre</i>	105
Capítulo 9. Obtención de un Modelo Matemático para la Velaria del Auditorio “Guelaguetza” en Oaxaca <i>Silvia Reyes Mora</i> <i>Emmanuel A. Romano Castillo</i>	119
<b>Lógica Matemática</b>	<b>131</b>

Capítulo 10. Concurrencia y Propiedades Lineales Temporales en Model Checking	133
<i>José Ramón Arrazola Ramírez</i>	
<i>Iván Cortés Cortés</i>	
<i>Jesús Lavalle Martínez</i>	
Capítulo 11. El Teorema de Compacidad	147
<i>José Ramón Arrazola Ramírez</i>	
<i>Iván Martínez Ruiz</i>	
<i>Miguel Pérez Gaspar</i>	
Capítulo 12. Una Introducción al Análisis Categorista de la Lógica	163
<i>Luis Estrada González</i>	
<b>Probabilidad y Estadística</b>	181
Capítulo 13. Modelo Trinomial para la Valuación de Opciones	183
<i>Rocío Alducin Yobal</i>	
<i>Víctor Hugo Vázquez Guevara</i>	
Capítulo 14. Una Aplicación de la Teoría de Opciones al Reaseguro no Proporcional	195
<i>Rebeca Antonio Zambrano</i>	
<i>Abraham Cuesta Borges</i>	
<i>Juana Elisa Escala Vega</i>	
<i>Carlos Palomino Jiménez</i>	
<i>Francisco Salem Silva</i>	
<i>Francisco Solano Tajonar Sanabria</i>	
Capítulo 15. Enfoque Bayesiano de los Procedimientos de la Estadística Vía la Teoría de la Decisión	213
<i>Gladys Linares Fleites</i>	
<i>Arturo Abraham López Pérez</i>	
Capítulo 16. Fundamentos de la Estadística Bayesiana	225
<i>Gladys Linares Fleites</i>	
<i>Arturo Abraham López Pérez</i>	
Capítulo 17. Valuación de una Opción Call Digital en el Modelo de Volatilidad Estocástico de Heston	243
<i>Carlos Palomino Jiménez</i>	
<i>Francisco Solano Tajonar Sanabria</i>	
<i>Héctor David Ramírez Hernández</i>	
<b>Topología</b>	255
Capítulo 18. $\kappa$ -Redes: Un Par de Aplicaciones	257
<i>José Ramón Arrazola Ramírez</i>	
<i>Javier Casas de la Rosa</i>	
<i>Iván Martínez Ruiz</i>	
<i>Alejandro Ramírez Páramo</i>	

Capítulo 19. Encajes	271
<i>Luis Alberto Guerrero Méndez</i>	
<i>David Herrera Carrasco</i>	
<i>Fernando Macías Romero</i>	
Capítulo 20. Continuos Casi Enrejados y Localmente Conexos con $n$ -ésimo Producto Simétrico Único	287
<i>David Herrera Carrasco</i>	
<i>Fernando Macías Romero</i>	
<i>Francisco Vázquez Juárez</i>	
Capítulo 21. Cardinalidad de la Familia de Funciones con un Conjunto de Continuidad Dado	301
<i>Reinaldo Martínez Cruz</i>	
<i>José Erasmo Pérez Vázquez</i>	
<i>Marisol Rodríguez Xicohtencatl</i>	



## Presentación

Las Grandes Semanas Nacionales de la Matemática son un ejercicio anual del colectivo matemático nacional que, organizado bajo la dirección de la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, presenta una gran gama de actividades que forman parte del quehacer matemático.

Es este libro la expresión de un esfuerzo por dejar constancia de la riqueza matemática de la Séptima Gran Semana Nacional de la Matemática (7GSNM). Toda obra editorial se realiza con la esperanza de tener numerosos lectores; si por lo menos los asistentes se convierten en lectores y éstos propagan este volumen, estaremos satisfechos.

En este libro se recogen algunos trabajos presentados a la 7GSNM, agrupándolos de acuerdo a las sesiones de la misma, los cuales fueron sometidos a arbitraje riguroso. Agradecemos sinceramente a todos los árbitros su dedicación y profesionalismo, así como a los encargados de las mencionadas sesiones: José Enrique Ramón Arrazola Ramírez, Juan Alberto Escamilla Reyna, David Herrera Carrasco, Armando Martínez García, Iván Martínez Ruíz, Francisco Javier Mendoza Torres, María Monserrat Morín Castillo y José Jacobo Oliveros Oliveros. Agradecemos a María del Rocío Macías Prado y a Leonardo Remedios Santiago por el apoyo técnico para la realización de este trabajo.



# Análisis Matemático



# CAPÍTULO 1

## LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN $L^2(\mathbb{R})$

EDER CARDOSO GARCÍA  
FRANCISCO JAVIER MENDOZA TORRES  
FCFM, BUAP

RESUMEN. A partir de su definición en  $L^1(\mathbb{R})$ , presentamos un método para definir la transformada de Fourier en  $L^2(\mathbb{R})$ . El método clásico para realizar este proceso emplea el espacio  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  o el espacio de Schwartz, los cuales son densos en  $L^2(\mathbb{R})$ . En este caso, consideramos el espacio de las funciones escalonadas.

### 1. INTRODUCCIÓN

La transformada de Fourier se ha estudiado y empleado en el contexto de las integrales de Riemann y Lebesgue. En el espacio de las funciones Lebesgue integrables,  $L^1(\mathbb{R})$ , la transformada de Fourier se define, en  $s \in \mathbb{R}$ , como

$$(1) \quad \widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ixs} dx,$$

la cual siempre existe. Además se define la transformada de Fourier inversa de una función  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , para cada  $x \in \mathbb{R}$ , como:

$$f^\vee(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{2\pi ixs} ds.$$

La transformada de Fourier definida en (1) no se aplica directamente a cada  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , ya que no toda función en este espacio está en  $L^1(\mathbb{R})$  y viceversa. Por ejemplo, la función

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} x^{-\frac{2}{3}} & \text{si } x > 1, \\ 0 & \text{si } x \leq 1, \end{cases}$$

pertenece a  $L^2(\mathbb{R})$ , pero no a  $L^1(\mathbb{R})$ . Por otro lado, la función

$$g(x) = \begin{cases} x^{-\frac{2}{3}} & \text{si } x \in (0, 1), \\ 0 & \text{si } x \notin (0, 1), \end{cases}$$

está en  $L^1(\mathbb{R})$  pero no en  $L^2(\mathbb{R})$ .

Además, observamos que la transformada de Fourier de la función  $f$  en (2) no está definida para  $s = 0$ , pues la integral

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix0} dx = \int_1^{\infty} x^{-\frac{2}{3}} dx,$$

no existe.

El método que en general se expone en la literatura matemática para extender la transformada de Fourier a  $L^2(\mathbb{R})$  es el teorema de Plancherel, ver Rudin [7], el cual consiste en lo siguiente.

**Teorema 1.1.** *Para cada  $f \in L^2(\mathbb{R})$  se le asocia una función  $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$  tal que las siguientes propiedades se cumplen:*

- (a) *Si  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , entonces  $\widehat{f}$  es la transformada de Fourier de  $f$  definida en (1).*
- (b) *Para cada  $f \in L^2(\mathbb{R})$  se tiene que  $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$ .*
- (c) *El mapeo  $f \rightarrow \widehat{f}$  es un isomorfismo del espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$  sobre  $L^2(\mathbb{R})$ .*
- (d) *La siguiente relación simétrica existe entre  $f$  y  $\widehat{f}$ . Si*

$$\Phi_A(t) = \int_{-A}^A f(x)e^{-2\pi ixt} dx \quad y \quad \Psi_A(x) = \int_{-A}^A \widehat{f}(t)e^{2\pi ixt} dt,$$

*entonces  $\|\Phi_A - \widehat{f}\|_2 \rightarrow 0$  y  $\|\Psi_A - f\|_2 \rightarrow 0$  cuando  $A \rightarrow \infty$ .*

Observemos que (d) nos proporciona una familia de funciones en  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  por medio de las cuales se puede calcular  $\widehat{f}$ . De manera análoga ocurre para la transformada de Fourier inversa.

Otros textos, por ejemplo Kolmogorov [5], en lugar de considerar el subconjunto  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , emplean el espacio de Schwartz,  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , el cual también es denso en  $L^2(\mathbb{R})$ . Pero esencialmente la prueba sigue la misma secuencia de los incisos (a) hasta (d).

Por otro lado, distinguiremos entre el teorema de Plancherel y la identidad del mismo nombre. La identidad de Plancherel se refiere al inciso (b) del teorema anterior.

En este artículo, presentamos un método alternativo para definir la transformada de Fourier a  $L^2(\mathbb{R})$ . Para esto, consideramos al espacio de las funciones escalonadas,  $K(\mathbb{R})$ .

## 2. EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES ESCALONADAS

Las funciones escalonadas forman un espacio vectorial con respecto a la suma de funciones y producto por escalares. En esta sección definimos las funciones escalonadas y reguladas sobre  $\mathbb{R}$ , presentamos una caracterización de las segundas y demostramos que  $K(\mathbb{R})$  es denso en  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Definición 2.1.** Sea  $[a, b]$  un intervalo en  $\mathbb{R}$ .

- Una función medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$ , es una función definida sobre  $[a, b]$  que es positiva.
- Usaremos la notación  $(I, t)$  para decir que  $I$  es un intervalo etiquetado por  $t \in I$ .
- Si  $P = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$  es una partición etiquetada que cumple

$$[x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \delta_\varepsilon(t_i), t_i + \delta_\varepsilon(t_i)], \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n,$$

se dice que es  $\delta_\varepsilon$ -fina.

**Definición 2.2.** Una función escalonada es una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que existe una partición  $P$  y constantes  $\{c_k\}_{k=1}^n$  tales que  $f(x) = c_k$  en  $[x_{k-1}, x_k)$  para  $1 \leq k < n$  y  $c_n$  en  $[x_{n-1}, x_n]$ .

Así, una función escalonada en  $\mathbb{R}$  es aquella para la que existe un intervalo  $[a, b]$  tal que en él cumple con la definición anterior y que toma el valor 0 fuera del intervalo  $[a, b]$ .

**Definición 2.3.** Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es regulada sobre  $I$ , si para todo  $\epsilon > 0$  existe una función escalonada  $s_\epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$|f(x) - s_\epsilon(x)| \leq \epsilon \quad \text{para todo } x \in I.$$

**Observación 2.4.** Dotando a  $K(\mathbb{R})$  y al espacio de las funciones reguladas con la norma  $\|\cdot\|_\infty$ , se tiene que el espacio  $K(\mathbb{R})$  es denso en el espacio de las funciones reguladas.

A continuación exponemos la siguiente caracterización de las funciones reguladas.

**Teorema 2.5.** Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es una función regulada, si y sólo si, tiene límites laterales en cada punto del intervalo  $I$ .

*Demostración.* Notemos primero que toda función escalonada tiene límites laterales en cada punto. Para probar que una función regulada  $f$  tiene la misma propiedad, sea  $c \in [a, b]$ ; probaremos que  $f$  tiene límite lateral derecho en  $c$ . Para esto, sean  $\epsilon > 0$  y  $s_\epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalonada tal que

$$|f(x) - s_\epsilon(x)| \leq \epsilon \quad \text{para todo } x \in I.$$

Como  $s_\epsilon$  es una función escalonada, entonces  $\lim_{x \rightarrow c^+} s_\epsilon(x)$  está definido, luego, existe  $\delta_\epsilon(c) > 0$  tal que si  $x, y \in (c, c + \delta_\epsilon(c))$ , resulta que  $s_\epsilon(x) = s_\epsilon(y)$ . Por lo tanto, si  $x, y \in (c, c + \delta_\epsilon(c))$ , entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - s_\epsilon(x)| + |s_\epsilon(x) - s_\epsilon(y)| + |s_\epsilon(y) - f(y)| \\ &\leq \epsilon + 0 + \epsilon \\ &= 2\epsilon. \end{aligned}$$

Como  $\epsilon$  es arbitrario, el criterio de Cauchy, ver [1], implica que el límite lateral derecho existe. La existencia del límite lateral izquierdo en  $c \in [a, b]$  se prueba de la misma manera.

Ahora supongamos que  $f$  tiene límites laterales en cada punto de  $I$ . El criterio de Cauchy para la existencia de los límites laterales garantiza que, dado  $\epsilon > 0$ , existe una función medidora  $\delta_\epsilon$  sobre  $I$  tal que si  $t \in I$  y  $y_1, y_2 \in (t - \delta_\epsilon(t), t)$ , entonces  $|f(y_1) - f(y_2)| \leq \epsilon$ . Ahora sea  $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i]), t_i\}_{i=1}^n$  una partición  $\delta_\epsilon$ -fina de  $I$ . Definimos  $s_\epsilon(x) = f(z)$  si  $z$  no es uno de los números

$$a = x_0 \leq t_1 \leq \dots \leq x_{i-1} \leq t_i \leq x_i \leq \dots \leq t_n \leq x_n = b.$$

Sobre el intervalo  $(x_{i-1}, t_i) \subseteq [t_i - \delta_\epsilon(t_i), t_i)$ , definimos  $s_\epsilon = f(\frac{1}{2}(x_{i-1} + t_i))$ . Así que

$$|f(x) - s_\epsilon(x)| = |f(x) - f(\frac{1}{2}(x_{i-1} + t_i))| \leq \epsilon.$$

De manera similar, sobre el intervalo  $(t_i, x_i) \subseteq [t_i, t_i + \delta_\epsilon(t_i))$ , definimos  $s_\epsilon = f(\frac{1}{2}(t_i + x_i))$ , así que

$$|f(x) - s_\epsilon(x)| = |f(x) - f(\frac{1}{2}(t_i + x_i))| \leq \epsilon.$$

Por lo tanto la función escalonada  $s_\epsilon$  satisface  $|f(x) - s_\epsilon(x)| \leq \epsilon$  para todo  $x \in I$ . Como  $\epsilon$  es arbitrario, concluimos que  $f$  es una función regulada.  $\square$

**Observación 2.6.** Toda función continua es una función regulada.

A continuación demostraremos la densidad de las funciones escalonadas en  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Lema 2.7.** *El espacio de las funciones escalonadas en  $\mathbb{R}$  es denso en  $L^2(\mathbb{R})$ .*

*Demostración.* Sabemos que el espacio de funciones continuas con soporte compacto,  $C_c(\mathbb{R})$ , es un conjunto denso en  $L^2(\mathbb{R})$ . Ahora consideremos  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y  $\epsilon > 0$  entonces existe una función  $f_c \in C_c(\mathbb{R})$  tal que

$$(3) \quad \|f_c - f\|_2 < \epsilon/2.$$

Supongamos que  $\text{supp } f_c \subset [a, b]$ . Como el espacio de las funciones escalonadas es denso en el conjunto de las funciones reguladas de valores reales sobre  $[a, b]$ , con la norma  $\|\cdot\|_\infty$ , entonces para  $f_c \chi_{[a,b]}$ , existe una función escalonada  $\varphi$  tal que  $\|f_c - \varphi\|_\infty < \epsilon/\sqrt{2}\sqrt{b-a}$ . Luego

$$\int_a^b |f_c - \varphi|^2 \leq (b-a)\|f_c - \varphi\|_\infty^2 < \epsilon^2/\sqrt{2}^2,$$

y por lo tanto  $\|f_c - \varphi\|_2 < \epsilon/2$ . Entonces por esta desigualdad y (3), tenemos que

$$\begin{aligned} \|\varphi - f\|_2 &= \|\varphi - f_c + f_c - f\|_2 \leq \|\varphi - f_c\|_2 + \|f_c - f\|_2 \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el espacio de las funciones escalonadas es denso en  $L^2(\mathbb{R})$ .  $\square$

### 3. LEMAS PREVIOS

El objetivo de esta sección es demostrar una serie de lemas, los cuales nos serán de utilidad para demostrar uno de nuestros resultados principales en la siguiente sección.

**Lema 3.1.** *Sean  $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$  con  $\alpha + a < -\alpha < 0 < \alpha < \alpha + b$ . Entonces*

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{\alpha+a}^{\alpha+b} \frac{\text{sen } \pi(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)} \left( \frac{\text{sen } 2\pi Bu}{\pi u} \right) du = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\text{sen } \pi(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)} \left( \frac{\text{sen } 2\pi Bu}{\pi u} \right) du.$$

*Demostración.* Sean  $\alpha + a < -\alpha < 0 < \alpha < \alpha + b$ . Tenemos que  $[\alpha + a, \alpha + b] = [\alpha + a, -\alpha] \cup [-\alpha, \alpha] \cup [\alpha, \alpha + b]$ . Observemos que cuando  $u = \alpha, 0$ , por la regla de L'Hôpital, tenemos que

$$\lim_{u \rightarrow \alpha} \frac{\text{sen } \pi(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)\pi u} = \frac{1}{\pi\alpha} \quad y \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2\pi Bu}{\pi u} = 2B.$$

Así que la función  $f(u) = \frac{\text{sen } \pi(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)} \left( \frac{\text{sen } 2\pi Bu}{\pi u} \right)$  es integrable sobre  $[\alpha + a, \alpha + b]$ .

Por el Lema de Riemann-Lebesgue, el límite de la integral de  $f(u)$ , cuando  $B \rightarrow \infty$ , sobre los intervalos  $[\alpha + a, -\alpha]$  y  $[\alpha, \alpha + b]$  es cero. Por lo tanto tenemos

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{\alpha+a}^{\alpha+b} \frac{\text{sen } \pi(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)} \left( \frac{\text{sen } 2\pi Bu}{\pi u} \right) du = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\text{sen } \pi(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)} \left( \frac{\text{sen } 2\pi Bu}{\pi u} \right) du. \quad \square$$

Utilizamos este resultado para demostrar el siguiente lema.

**Lema 3.2.** Sean  $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$  tales que  $a < \alpha < b$ . Se tiene que

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{\text{sen } \pi \beta}{\pi \beta} \left( \frac{\text{sen } 2\pi B(\alpha + \beta)}{\pi(\alpha + \beta)} \right) d\beta = \frac{\text{sen } \pi \alpha}{\pi \alpha}.$$

*Demostración.* Podemos considerar como un primer caso  $a < -\alpha < 0 < \alpha < b$ . De esto, se tiene  $a < -2\alpha < -\alpha < 0 < b$  y así  $\alpha + a < -\alpha < 0 < \alpha < \alpha + b$ . Haciendo el cambio  $u = \alpha + \beta$ , tenemos

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{\text{sen } \pi \beta}{\pi \beta} \left( \frac{\text{sen } 2\pi B(\alpha + \beta)}{\pi(\alpha + \beta)} \right) d\beta = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{\alpha+a}^{\alpha+b} \frac{\text{sen } \pi(u - \alpha)}{\pi(u - \alpha)} \left( \frac{\text{sen } 2\pi B u}{\pi u} \right) du.$$

Luego, por el Lema 3.1 sólo analizaremos

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\text{sen } \pi(u - \alpha)}{\pi(u - \alpha)} \left( \frac{\text{sen } 2\pi B u}{\pi u} \right) du.$$

Antes observemos que haciendo el cambio de variable  $t = 2\pi B u$ ;

$$\begin{aligned} \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\text{sen } 2\pi B u}{\pi u} du &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-2\pi B \alpha}^{2\pi B \alpha} \frac{\text{sen } t}{\frac{t}{2\pi B}} \frac{dt}{2\pi B} \\ (4) \qquad \qquad \qquad &= \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-2\pi B \alpha}^{2\pi B \alpha} \frac{\text{sen } t}{t} dt = 1. \end{aligned}$$

Así, tomando en cuenta (4), se tiene

$$\begin{aligned} &\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\text{sen } \pi(u - \alpha)}{\pi(u - \alpha)} \left( \frac{\text{sen } 2\pi B u}{\pi u} \right) du \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \left[ \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\text{sen } \pi(u - \alpha)}{\pi(u - \alpha)} \left( \frac{\text{sen } 2\pi B u}{\pi u} \right) du \right. \\ &\quad \left. - \frac{\text{sen } \pi \alpha}{\pi \alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\text{sen } 2\pi B u}{\pi u} du + \frac{\text{sen } \pi \alpha}{\pi \alpha} \right] \\ (5) \qquad \qquad \qquad &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[ \frac{\text{sen } \pi(u - \alpha)}{\pi(u - \alpha)\pi u} - \frac{\text{sen } \pi \alpha}{\pi \alpha \pi u} \right] \text{sen } 2\pi B u du + \frac{\text{sen } \pi \alpha}{\pi \alpha}. \end{aligned}$$

Observemos que la función

$$\begin{aligned} h(u) &= \frac{\text{sen } \pi(u - \alpha)}{\pi(u - \alpha)\pi u} - \frac{\text{sen } \pi \alpha}{\pi \alpha \pi u} \\ &= \frac{\pi \alpha \text{sen } \pi(u - \alpha) - \pi(u - \alpha) \text{sen } \pi \alpha}{\pi(u - \alpha)\pi \alpha \pi u} \end{aligned}$$

no está definida en 0. Sin embargo, por la regla de L'Hôpital con la primera derivada, tenemos que

$$\lim_{u \rightarrow 0} h(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\pi^2 \alpha \cos \pi(u - \alpha) - \pi \text{sen } \pi \alpha}{2\pi^3 \alpha u - \pi^3 \alpha^2} = \frac{\pi \alpha \cos \pi \alpha - \text{sen } \pi \alpha}{-\pi^2 \alpha^2}.$$

Asignando este valor en  $u = 0$ , tendremos que  $h$  será continua, y por lo tanto integrable, en  $[-\alpha, \alpha]$ .

Aplicando el Lema de Riemann-Lebesgue en (5) se tiene que

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\text{sen } \pi(u - \alpha)}{\pi(u - \alpha)} \left( \frac{\text{sen } 2\pi B u}{\pi u} \right) du = \frac{\text{sen } \pi \alpha}{\pi \alpha}.$$

Para el segundo caso, consideremos  $a < 0 < -\alpha < b$ , entonces  $a < \alpha < 0 < -\alpha < -2\alpha < b$ . Haciendo el cambio de variable  $u = \alpha + \beta$  y realizando un procedimiento similar al anterior, obtenemos el resultado

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{-\alpha} \frac{\operatorname{sen} \pi(u - \alpha)}{\pi(u - \alpha)} \left( \frac{\operatorname{sen} 2\pi B u}{\pi u} \right) du = -\frac{\operatorname{sen} \pi \alpha}{\pi \alpha}.$$

□

**Lema 3.3.** Sean  $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$ , se tiene que

$$(6) \quad \begin{aligned} & \operatorname{Re} \left( \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \alpha}{\pi \alpha} \left[ \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \beta}{\pi \beta} \left( \int_{-A}^B e^{2\pi i \alpha x} e^{2\pi i \beta x} dx \right) d\beta \right] d\alpha \right) \\ &= \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \alpha}{\pi \alpha} \left[ \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \beta}{\pi \beta} \left( \frac{\operatorname{sen} 2\pi B(\alpha + \beta)}{2\pi(\alpha + \beta)} \right) d\beta \right. \\ & \quad \left. - \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \beta}{\pi \beta} \left( \frac{\operatorname{sen} 2\pi A(\alpha + \beta)}{2\pi(\alpha + \beta)} \right) d\beta \right] d\alpha. \end{aligned}$$

*Demostración.* Primero desarrollaremos la parte real de la última integral de (6).

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left( \int_{-A}^B e^{2\pi i \alpha x} e^{2\pi i \beta x} dx \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \int_{-A}^B (\cos 2\pi \alpha x + i \operatorname{sen} 2\pi \alpha x)(\cos 2\pi \beta x + i \operatorname{sen} 2\pi \beta x) dx \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \int_{-A}^B (\cos 2\pi \alpha x \cos 2\pi \beta x + i \cos 2\pi \alpha x \operatorname{sen} 2\pi \beta x \right. \\ & \quad \left. + i \operatorname{sen} 2\pi \alpha x \cos 2\pi \beta x - \operatorname{sen} 2\pi \alpha x \operatorname{sen} 2\pi \beta x) dx \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \int_{-A}^B (\cos 2\pi x(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen} 2\pi x(\alpha + \beta)) dx \right) \\ &= \int_{-A}^B \cos 2\pi x(\alpha + \beta) dx = \frac{\operatorname{sen} 2\pi x(\alpha + \beta)}{2\pi(\alpha + \beta)} \Big|_A^B \\ &= \frac{\operatorname{sen} 2\pi B(\alpha + \beta)}{2\pi(\alpha + \beta)} - \frac{\operatorname{sen} 2\pi A(\alpha + \beta)}{2\pi(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left( \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \alpha}{\pi \alpha} \left[ \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \beta}{\pi \beta} \left( \int_{-A}^B e^{2\pi i \alpha x} e^{2\pi i \beta x} dx \right) d\beta \right] d\alpha \right) \\ &= \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \alpha}{\pi \alpha} \left[ \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \beta}{\pi \beta} \left( \frac{\operatorname{sen} 2\pi B(\alpha + \beta)}{2\pi(\alpha + \beta)} - \frac{\operatorname{sen} 2\pi A(\alpha + \beta)}{2\pi(\alpha + \beta)} \right) d\beta \right. \\ &= \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \alpha}{\pi \alpha} \left[ \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \beta}{\pi \beta} \left( \frac{\operatorname{sen} 2\pi B(\alpha + \beta)}{2\pi(\alpha + \beta)} \right) d\beta \right. \\ & \quad \left. - \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \beta}{\pi \beta} \left( \frac{\operatorname{sen} 2\pi A(\alpha + \beta)}{2\pi(\alpha + \beta)} \right) d\beta \right] d\alpha. \end{aligned}$$

□

Utilizaremos los Lemas 3.2 y 3.3 para demostrar nuestro resultado principal de esta sección.

**Lema 3.4.** Sean  $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$  tales que  $a < \gamma < b$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{-A}^B \left| \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \gamma}{\pi \gamma} e^{2\pi i \gamma x} d\gamma \right|^2 dx \\ &= \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \alpha}{\pi \alpha} \left[ \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \beta}{\pi \beta} \left( \frac{\operatorname{sen} 2\pi B(\alpha + \beta) - \operatorname{sen} 2\pi A(\alpha + \beta)}{2\pi(\alpha + \beta)} \right) d\beta \right] d\alpha \end{aligned}$$

tiende a

$$\int_a^b \left( \frac{\operatorname{sen} \pi \gamma}{\pi \gamma} \right)^2 d\gamma$$

cuando  $A \rightarrow -\infty$  y  $B \rightarrow \infty$ .

**Observación 3.5.** La expresión integral del Lema 3.4 no contiene parte imaginaria.

*Demostración.* Sean  $a < \gamma < b$ . Primero tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{-A}^B \left| \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \gamma}{\pi \gamma} e^{2\pi i \gamma x} d\gamma \right|^2 dx \\ &= \int_{-A}^B \left( \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \alpha}{\pi \alpha} e^{2\pi i \alpha x} d\alpha \right) \left( \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \beta}{\pi \beta} e^{2\pi i \beta x} d\beta \right) dx \\ &= \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \alpha}{\pi \alpha} \left( \int_{-A}^B e^{2\pi i \alpha x} \left[ \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \beta}{\pi \beta} e^{2\pi i \beta x} d\beta \right] dx \right) d\alpha \\ &= \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \alpha}{\pi \alpha} \left[ \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \beta}{\pi \beta} \left( \int_{-A}^B e^{2\pi i \alpha x} e^{2\pi i \beta x} dx \right) d\beta \right] d\alpha. \end{aligned}$$

Por el Lema 3.3, se tiene

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \alpha}{\pi \alpha} \left[ \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \beta}{\pi \beta} \left( \int_{-A}^B e^{2\pi i \alpha x} e^{2\pi i \beta x} dx \right) d\beta \right] d\alpha \\ &= \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \alpha}{\pi \alpha} \left[ \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \beta}{\pi \beta} \left( \frac{\operatorname{sen} 2\pi B(\alpha + \beta)}{2\pi(\alpha + \beta)} \right) d\beta \right. \\ & \quad \left. - \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \beta}{\pi \beta} \left( \frac{\operatorname{sen} 2\pi A(\alpha + \beta)}{2\pi(\alpha + \beta)} \right) d\beta \right] d\alpha. \end{aligned}$$

Por el Lema 3.2 resulta que

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \alpha}{\pi \alpha} \left[ \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \beta}{\pi \beta} \left( \frac{\operatorname{sen} 2\pi B(\alpha + \beta)}{2\pi(\alpha + \beta)} \right) d\beta \right. \\ & \quad \left. - \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \beta}{\pi \beta} \left( \frac{\operatorname{sen} 2\pi A(\alpha + \beta)}{2\pi(\alpha + \beta)} \right) d\beta \right] d\alpha \\ &= \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \alpha}{\pi \alpha} \left[ \frac{\operatorname{sen} \pi \alpha}{2\pi \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \pi \alpha}{2\pi \alpha} \right] d\alpha \\ &= \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi \alpha}{\pi \alpha} \left[ \frac{\operatorname{sen} \pi \alpha}{\pi \alpha} \right] d\alpha = \int_a^b \left( \frac{\operatorname{sen} \pi \alpha}{\pi \alpha} \right)^2 d\alpha. \end{aligned}$$

□

## 4. RESULTADOS PRINCIPALES

En esta sección expondremos los siguientes resultados

- (a) Un método para extender la transformada de Fourier a  $L^2(\mathbb{R})$  considerando  $K(\mathbb{R})$ , el espacio de las funciones escalonadas. Dado que en  $K(\mathbb{R})$  está definida la transformada de Fourier, cumple la identidad de Plancherel y es denso en  $L^2(\mathbb{R})$ , podemos extender la transformada de Fourier de  $K(\mathbb{R})$  a  $L^2(\mathbb{R})$ .
- (b) La transformada de Fourier es una transformación lineal en  $L^2(\mathbb{R})$ .
- (c) Se cumple la identidad de Plancherel en  $L^2(\mathbb{R})$ .
- (d) Se cumple un teorema de inversión en  $L^2(\mathbb{R})$ .

(a). El método es constructivo, así que empezaremos probando que para intervalos acotados  $I$  y  $J$  se tiene que

$$(7) \quad (\widehat{\chi}_I)^\vee = \chi_I; \quad \langle \widehat{\chi}_I, \widehat{\chi}_J \rangle = \langle \chi_I, \chi_J \rangle,$$

donde  $\chi_I$  y  $\chi_J$  son las funciones características de  $I$  y  $J$  respectivamente. Teniendo estas relaciones, se prueba la inversión de Fourier y la identidad de Plancherel en el espacio  $K(\mathbb{R})$ . Teniendo en cuenta lo anterior, la definición en  $L^2(\mathbb{R})$  se realiza tomando en cuenta la densidad del espacio  $K(\mathbb{R})$ , permitiendo que la validez de la inversión de Fourier y la identidad de Plancherel se extiendan a  $L^2(\mathbb{R})$ .

Realizaremos la prueba de las igualdades en (7). De forma similar, debido a la simetría que tienen las expresiones de la transformada de Fourier y de la transformada de Fourier inversa, puede deducirse que:  $(\check{\chi}_I)^\wedge = \chi_I$  y  $\langle \check{\chi}_I, \check{\chi}_J \rangle = \langle \chi_I, \chi_J \rangle$ .

Sea  $\chi_I$  la función característica del intervalo  $I$ . Como primer paso verificaremos la inversión de Fourier de  $\chi_I$ .

**Proposición 4.1.** Sean  $I = [a, b]$  y  $\chi_I$  la función característica del intervalo  $I$ . Se cumple que  $(\widehat{\chi}_I)^\vee = \chi_I$ .

*Demostración.* Con la intención de facilitar la notación, usaremos  $f$  en lugar de  $\chi_I$ . Entonces

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\gamma) &= \int_a^b e^{-2\pi i \gamma x} dx \\ &= \int_a^b (\cos 2\pi \gamma x - i \operatorname{sen} 2\pi \gamma x) dx \\ &= \int_a^b \cos 2\pi \gamma x dx - i \int_a^b \operatorname{sen} 2\pi \gamma x dx \\ &= \frac{\operatorname{sen} 2\pi \gamma x}{2\pi \gamma} \Big|_a^b - i \left( -\frac{\cos 2\pi \gamma x}{2\pi \gamma} \right) \Big|_a^b \\ &= \frac{\operatorname{sen} 2\pi \gamma b}{2\pi \gamma} - \frac{\operatorname{sen} 2\pi \gamma a}{2\pi \gamma} + i \left( \frac{\cos 2\pi \gamma b}{2\pi \gamma} - \frac{\cos 2\pi \gamma a}{2\pi \gamma} \right). \end{aligned}$$

Para simplificar esta última expresión consideremos, en particular, el intervalo  $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . Observemos que

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{sen} 2\pi\gamma b}{2\pi\gamma} - \frac{\operatorname{sen} 2\pi\gamma a}{2\pi\gamma} + i \left( \frac{\cos 2\pi\gamma b}{2\pi\gamma} - \frac{\cos 2\pi\gamma a}{2\pi\gamma} \right) \\ &= \frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{2\pi\gamma} + \frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{2\pi\gamma} + i \left( \frac{\cos \pi\gamma}{2\pi\gamma} - \frac{\cos \pi\gamma}{2\pi\gamma} \right) \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} \pi\gamma}{2\pi\gamma} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{\pi\gamma}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:  $\widehat{f}(\gamma) = \frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{\pi\gamma}$ .

Ahora debemos demostrar que la función

$$f_{ab}(x) = \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{\pi\gamma} e^{2\pi i\gamma x} d\gamma$$

tiende a  $f$  en  $L^2(\mathbb{R})$ , cuando  $a \rightarrow -\infty$  y  $b \rightarrow \infty$ . Es decir, que se cumple la inversión de Fourier para funciones sobre intervalos acotados. Observemos que por el Lema 3.4, tenemos

$$\begin{aligned} \|f_{ab} - f\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{\pi\gamma} e^{2\pi i\gamma x} d\gamma \right|^2 dx \\ &\quad - 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[ \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{\pi\gamma} \cos 2\pi\gamma x d\gamma \right] dx + 1 \\ (8) \quad &= \int_a^b \left( \frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{\pi\gamma} \right)^2 d\gamma - 2 \int_a^b \left( \frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{\pi\gamma} \right)^2 d\gamma + 1. \end{aligned}$$

Verifiquemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{\pi\gamma} \right)^2 d\gamma = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\gamma} \right)^2 d\gamma = 1.$$

Por integración por partes, sea  $u = \operatorname{sen}^2 \gamma$ ,  $du = 2 \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma d\gamma$ ,  $dv = \frac{d\gamma}{\gamma^2}$ ,  $v = -\frac{1}{\gamma}$  y con una sustitución trigonométrica se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 \gamma}{\gamma^2} d\gamma &= -\frac{\operatorname{sen}^2 \gamma}{\gamma} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma}{\gamma} d\gamma \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\gamma} d\gamma \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{\pi\gamma} \right)^2 d\gamma = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\gamma} \right)^2 d\gamma = \frac{1}{\pi}(\pi) = 1.$$

Usando esto en (8), concluimos que  $\|f_{ab} - f\|_2 = 0$ , cuando  $a \rightarrow -\infty$  y  $b \rightarrow \infty$ . Por lo tanto se verifica que  $f_{ab} \rightarrow f$  en  $L^2(\mathbb{R})$ .  $\square$

Sea  $f \in K(\mathbb{R})$ . Esta función es de la forma  $\sum c_I \chi_I$ , una suma de múltiplos complejos de funciones características de un número finito de intervalos acotados  $I$ . Para tal función, la inversión de Fourier  $(\widehat{f})^\vee = f$  se cumple, ya que en cada múltiplo complejo de funciones características, está definida la inversión de Fourier y la transformada de Fourier inversa es lineal.

Emplearemos la Proposición 4.1 para demostrar el siguiente resultado.

**Proposición 4.2.** *Sean  $I$  y  $J$  intervalos acotados. Entonces*

$$\langle \widehat{\chi}_I, \widehat{\chi}_J \rangle = \langle \chi_I, \chi_J \rangle.$$

*Demostración.* Como  $\widehat{\chi}_I$  y  $\widehat{\chi}_J$  pertenecen a  $L^2(\mathbb{R})$ , se tiene que  $\langle \widehat{\chi}_I, \widehat{\chi}_J \rangle$  existe, y puede ser evaluado como sigue:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\chi}_I, \widehat{\chi}_J \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\chi}_I(\gamma) \overline{\widehat{\chi}_J(\gamma)} d\gamma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\chi}_I(\gamma) \left( \int_J e^{2\pi i \gamma x} dx \right) d\gamma \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \widehat{\chi}_I(\gamma) \left( \int_J e^{2\pi i \gamma x} dx \right) d\gamma \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_J \left( \int_{-n}^n \widehat{\chi}_I(\gamma) e^{2\pi i \gamma x} d\gamma \right) dx. \end{aligned}$$

Por la Proposición 4.1, la segunda integral tiende a  $\chi_I$  en  $L^2(\mathbb{R})$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Así

$$\langle \widehat{\chi}_I, \widehat{\chi}_J \rangle = \int_J \chi_I(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_I(x) \overline{\chi_J(x)} dx = \langle \chi_I, \chi_J \rangle.$$

□

El siguiente resultado es la identidad de Plancherel en  $K(\mathbb{R})$  y se cumple debido a la proposición anterior.

**Corolario 4.3.** *Si  $f \in K(\mathbb{R})$ , entonces*

$$\|\widehat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

*Demostración.* Sea  $f \in K(\mathbb{R})$ , luego

$$\|\widehat{f}\|_2^2 = \sum c_I \overline{c_J} \langle \widehat{\chi}_I, \widehat{\chi}_J \rangle = \sum c_I \overline{c_J} \langle \chi_I, \chi_J \rangle = \|f\|_2^2.$$

□

Ahora hacemos el proceso de extensión de la transformada de Fourier de  $K(\mathbb{R})$  a  $L^2(\mathbb{R})$ .

Dada  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , existe  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones escalonadas de tal manera que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0$ . Por el corolario anterior,

$$\|\widehat{f}_n - \widehat{f}_m\|_2 = \|(f_n - f_m)^\wedge\|_2 = \|f_n - f_m\|_2.$$

Así, la sucesión  $\{\widehat{f}_n\}$  es de Cauchy en  $L^2(\mathbb{R})$ , por lo que podemos definir  $\widehat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n$  y este límite existe en  $L^2(\mathbb{R})$ .

Verifiquemos que está bien definida. Sea  $f \in L^2(\mathbb{R})$  entonces existe una sucesión de funciones  $\{h_n\} \subset K(\mathbb{R})$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n - f\|_2 = 0$ . Por como definimos a  $\widehat{f}$  en el comentario anterior, tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{h}_n - \widehat{f}\|_2 = 0$ . Supongamos que existe otra sucesión  $\{g_n\} \subset K(\mathbb{R})$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - f\|_2 = 0$ . Demostraremos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{g}_n - \widehat{f}\|_2 = 0$ . Desarrollando

$$\begin{aligned} \|\widehat{g}_n - \widehat{f}\|_2 &= \|\widehat{g}_n + \widehat{h}_n - \widehat{h}_n - \widehat{f}\|_2 \\ &= \|(g_n - h_n)^\wedge\|_2 + \|\widehat{h}_n - \widehat{f}\|_2 \\ &= \|g_n - h_n\|_2 + \|\widehat{h}_n - \widehat{f}\|_2 \\ &\leq \|g_n - f\|_2 + \|h_n - f\|_2 + \|\widehat{h}_n - \widehat{f}\|_2. \end{aligned}$$

Haciendo tender  $n$  a infinito, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{g}_n - \widehat{f}\|_2 = 0.$$

Así concluye la demostración.

La transformada de Fourier así definida es una aplicación lineal.

**Teorema 4.4.** Si  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces  $\widehat{\alpha f + g} = \alpha \widehat{f} + \widehat{g}$ .

*Demostración.* Sean  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , luego  $\widehat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n$  con  $\{f_n\} \subset K(\mathbb{R})$  y  $\widehat{g} = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{g}_n$  con  $\{g_n\} \subset K(\mathbb{R})$ . Dado que la transformada de Fourier es lineal en  $K(\mathbb{R})$ , entonces

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha f + g} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha \widehat{f}_n + \widehat{g}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha \widehat{f}_n + \widehat{g}_n) \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{g}_n = \alpha \widehat{f} + \widehat{g}. \end{aligned}$$

□

Ahora demostramos la identidad de Plancherel en  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Teorema 4.5.** Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , entonces  $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ .

*Demostración.* Dada  $f \in L^2(\mathbb{R})$  existe  $\{f_n\} \subset K(\mathbb{R})$  tal que

$$\|f\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2.$$

Como en  $K(\mathbb{R})$  se cumple la identidad de Plancherel se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{f}_n\|_2 = \|\widehat{f}\|_2.$$

Por lo tanto  $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ . □

Así que la transformada de Fourier es una aplicación inyectiva.

Se demuestra de manera análoga que la transformada de Fourier inversa se extiende de  $K(\mathbb{R})$  a  $L^2(\mathbb{R})$  y tiene las siguientes propiedades.

Sean  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$

- $(\alpha f + g)^\vee = \alpha \check{f} + \check{g}$ .
- $\langle \check{f}, \check{g} \rangle = \langle f, g \rangle$ .
- $\|\check{f}\|_2 = \|f\|_2$ .

Se cumple la inversión de Fourier en  $L^2(\mathbb{R})$  de la siguiente manera.

Sea  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , existe  $\{f_n\} \subset K(\mathbb{R})$  tal que  $\|f - f_n\|_2 \rightarrow 0$ , por consecuencia  $\|\widehat{f} - \widehat{f}_n\|_2 \rightarrow 0$ .

Ahora fijémonos en

$$\begin{aligned} \|f - \widehat{f}^\vee\|_2 &= \|f - f_n + f_n - \widehat{f}^\vee\|_2 \\ &\leq \|f - f_n\|_2 + \|\widehat{f}^\vee - \widehat{f}_n^\vee\|_2 \\ &= \|f - f_n\|_2 + \|\widehat{f} - \widehat{f}_n\|_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $f = \widehat{f}^\vee$ .

Así que la transformada de Fourier es un isomorfismo de  $L^2(\mathbb{R})$  sobre  $L^2(\mathbb{R})$ .

## 5. CONCLUSIÓN

Se expuso un método alternativo al teorema de Plancherel estudiado en Rudin, [7]. Si consideramos una función  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y calculamos su transformada de Fourier aplicando el método expuesto en este artículo y posteriormente calculamos su transformada con el teorema de Plancherel de Rudin, la pregunta natural que surge es: ¿Se ha obtenido el mismo resultado?

La respuesta es afirmativa. Denotemos a la transformada de Fourier obtenida mediante el teorema de Plancherel de Rudin y a la transformada obtenida mediante el método expuesto en este artículo como:  $\widehat{f}_L$  y  $\widehat{f}_K$  respectivamente. Supongamos que  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , luego por el teorema de Plancherel de Rudin existe  $\widehat{f}_L \in L^2(\mathbb{R})$  tal que  $\|\widehat{f}_n - \widehat{f}_L\|_2 \rightarrow 0$  con  $\{f_n\} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  y  $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$ . Por otro lado, utilizando el método descrito en este artículo, para la misma función  $f$ , si  $\{g_n\} \subset K(\mathbb{R})$  tal que  $\|g_n - f\|_2 \rightarrow 0$ , entonces  $\|\widehat{g}_n - \widehat{f}_K\|_2 \rightarrow 0$ . Por demostrar que  $\|\widehat{f}_L - \widehat{f}_K\|_2 = 0$ .

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}_L - \widehat{f}_K\|_2 &= \|\widehat{f}_L - \widehat{f}_n + \widehat{f}_n - \widehat{g}_n + \widehat{g}_n - \widehat{f}_K\|_2 \\ &\leq \|\widehat{f}_L - \widehat{f}_n\|_2 + \|\widehat{g}_n - \widehat{f}_K\|_2 + \|\widehat{f}_n - \widehat{g}_n\|_2. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{f}_n - \widehat{g}_n\|_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|(f_n - g_n)^\vee\|_2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g_n\|_2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f + f - g_n\|_2 \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 + \|f - g_n\|_2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

entonces

$$\|\widehat{f}_L - \widehat{f}_K\|_2 \leq \|\widehat{f}_L - \widehat{f}_n\|_2 + \|\widehat{g}_n - \widehat{f}_K\|_2 + \|\widehat{f}_n - \widehat{g}_n\|_2 = 0.$$

Por lo tanto ambas transformadas son iguales.

## REFERENCIAS

- [1] Bartle Robert G., *A Modern Theory of Integration*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 32, American Mathematical Society, Providence, 2001.
- [2] Bartle Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley and Sons, 1995
- [3] Bachman George, Narici Lawrence, Beckenstein Edward, *Fourier and Wavelet Analysis*, Springer-Verlag, New York. Inc. 1991.
- [4] H. Dym, H. P. McKean, *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, 1972.
- [5] Kolmogorov, A.N., Fomin S.V., *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, Mir, Moscú, 1972.
- [6] Pinsky, Mark A., *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets* Pacific Grove, Australia, CA : Brooks/Cole, c2002.
- [7] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, Vol. 3, 1987.
- [8] Weidmann Joachim, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer-Verlag, New York Inc., 1980.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel  
Puebla, Pue. C.P. 72570

ecardoso1@hotmail.com, jmendoza@fcfm.buap.mx



# CAPÍTULO 2

## DESIGUALDADES Y LÍMITE

MANUEL IBARRA CONTRERAS  
ARMANDO MARTÍNEZ GARCÍA  
FCFM, BUAP

RESUMEN. En este capítulo se presenta el concepto de límite de una función real de variable real. La intención es darle al lector una idea geométrica del concepto a través del planteamiento y solución de algunas desigualdades.

### 1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de estas notas es presentarle al alumno de nuevo ingreso en una Facultad de Ciencias, una introducción al concepto de **límite de una función** por medio del planteamiento y solución de algunas desigualdades.

Se ha de mencionar que el concepto de **límite de una función** se presenta en el primer curso de Cálculo que se lleva en dichas facultades, por lo que debemos de tomar en cuenta que éste no es un material nuevo, más sí la forma en que se presenta.

Esta presentación no pretende resolver todos los problemas concernientes al tema, sino darle al alumno una idea geométrica del concepto para poder entender mejor lo que es precisamente el **límite de una función**.

### 2. DESIGUALDADES

Al conjunto de los números reales, como es usual, lo denotaremos como  $\mathbb{R}$ , cuyas propiedades básicas se pueden consultar en [1].

Recordemos que para  $a, b, c \in \mathbb{R}$  una ecuación de la forma

$$ax + b = c \quad \text{con } a \neq 0$$

tiene solución si existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que

$$ax_0 + b = c$$

y que, en este caso

$$x_0 = \frac{(c-b)}{a}.$$

En forma análoga dados  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } b^2 - 4ac \geq 0$$

tiene solución si existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que,

$$ax_0^2 + bx_0 + c = 0.$$

En este caso tenemos las soluciones

1.  $x_0 = \frac{(-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)})}{2a}$  y

2.  $x_0 = \frac{(-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)})}{2a}$

si  $b^2 - 4ac > 0$  las cuales pueden coincidir, y

$$x_0 = \frac{-b}{a}$$

si  $b^2 - 4ac = 0$ .

De manera similar, dados  $a, b, c \in \mathbb{R}$  una desigualdad de la forma

$$ax + b < c \quad \text{con } a \neq 0$$

tiene solución si existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que

$$ax_0 + b < c$$

y, en este caso

$$x_0 < \frac{(c-b)}{a} \quad \text{si } a > 0$$

o

$$x_0 > \frac{(c-b)}{a} \quad \text{si } a < 0.$$

Es decir, la solución es el conjunto  $S \subset \mathbb{R}$  con

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x < \frac{(c-b)}{a}\} \quad \text{si } a > 0$$

o

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x > \frac{(c-b)}{a}\} \quad \text{si } a < 0.$$

Lo cual significa que

$$\text{si } x \in S \text{ entonces } ax + b < c.$$

Los siguientes resultados nos permitirán resolver otro tipo de desigualdades. Aquí será útil recordar que dado  $a \in \mathbb{R}$ , al producto de  $a \cdot a$  lo denotaremos como  $a^2$ , es decir,  $a^2 = a \cdot a$ .

**Proposición 2.1.** Sean  $a > 0$  y  $b > 0$ . Entonces

$$a < b \text{ si y sólo si } a^2 < b^2.$$

*Demostración.* Si  $a < b$ , como  $a > 0$  y  $b > 0$ , se sigue que  $a^2 < ab$  y  $ab < b^2$  y por lo tanto,  $a^2 < b^2$ . Por otro lado, si  $a^2 < b^2$  entonces, por tricotomía  $a = b$ ,  $a > b$  o  $b > a$  y  $a = b$  implica que  $a^2 = b^2$  lo cual no puede ser. Análogamente si  $a > b$  por la primera parte tendríamos que  $a^2 > b^2$  lo cual tampoco puede ser. Por lo tanto  $a < b$ .  $\square$

**Definición 2.2.** Sean  $a \geq 0$  y  $b \geq 0$ . El número real  $a$  es la raíz cuadrada de  $b$  si  $a^2 = b$ .

Al hecho de que  $a$  sea la raíz cuadrada de  $b$  lo escribiremos como

$$a = \sqrt{b}.$$

Es claro que si  $a^2 = b$ , es decir  $a = \sqrt{b}$  entonces

$$(\sqrt{b})^2 = b.$$

**Proposición 2.3.** Sea  $b > 0$ . Entonces

- 1)  $a^2 < b$  si y sólo si  $-(\sqrt{b}) < a < \sqrt{b}$ .
- 2)  $b < a^2$  si y sólo si  $a < -(\sqrt{b})$  o  $\sqrt{b} < a$ .

*Demostración.* 1) Es claro que si  $a = 0$ , la proposición 1) se satisface.

Ahora, si  $a > 0$  y  $a^2 < b$ , como  $b > 0$ ,  $b = (\sqrt{b})^2$  y de aquí se sigue que  $a^2 < (\sqrt{b})^2$  de donde, aplicando la Proposición 2.1, tenemos que  $a < \sqrt{b}$  y por lo tanto

$$-(\sqrt{b}) < a < \sqrt{b}.$$

Análogamente, si  $a < 0$  y  $a^2 < b$ , como  $b > 0$ ,  $b = (\sqrt{b})^2$  y  $(-a)^2 = a^2$  se sigue que  $(-a)^2 < (\sqrt{b})^2$  de donde, aplicando la Proposición 2.1, tenemos que  $-a < \sqrt{b}$  de donde se sigue que,

$$-(\sqrt{b}) < a < \sqrt{b}.$$

Ahora, si  $-(\sqrt{b}) < a < \sqrt{b}$  y  $a > 0$  se sigue que  $0 < a < \sqrt{b}$ , de donde

$$a^2 < b.$$

Análogamente, si  $-(\sqrt{b}) < a < \sqrt{b}$  y  $a < 0$  se sigue que  $0 < -a < \sqrt{b}$ , de donde

$$a^2 < b.$$

En forma similar se prueba el inciso 2). □

**Corolario 2.4.** Sean  $a > 0$  y  $b > 0$ . Entonces

$$a < b \text{ si y sólo si } \sqrt{a} < \sqrt{b}.$$

Ahora aplicaremos la Proposición 2.3 para resolver las siguientes desigualdades.

**Ejemplo 2.5.** Encontrar la solución de la desigualdad  $4x^2 + 6 < 22$ .

Es claro que

$$4x^2 + 6 < 22 \iff 4x^2 < 22 - 6 \iff 4x^2 < 16 \iff x^2 < 4$$

de donde se sigue que,

$$-2 < x < 2.$$

Es decir, el conjunto solución  $S$  está dado como

$$S = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 2\}.$$

**Ejemplo 2.6.** Encontrar la solución de la desigualdad  $x^2 - 4x < 12$ .

Es claro que  $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$ . Por lo tanto

$$x^2 - 4x < 12 \iff (x - 2)^2 - 4 < 12 \iff (x - 2)^2 < 16 \iff -4 < x - 2 < 4$$

de donde,

$$-2 < x < 6.$$

Es decir, el conjunto solución  $S$  está dado como

$$S = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 6\}.$$

## 3. INTERVALOS

**Definición 3.1.** Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  el intervalo abierto con extremos  $a$  y  $b$ , el cual denotaremos como  $(a, b)$ , es el conjunto:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

**Definición 3.2.** Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  el intervalo cerrado con extremos  $a$  y  $b$ , el cual denotaremos como  $[a, b]$ , es el conjunto:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

**Definición 3.3.** Dado  $a \in \mathbb{R}$ , el intervalo semi abierto con extremo izquierdo  $a$ , el cual denotaremos como  $(a, \infty)$ , es el conjunto:

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}.$$

**Definición 3.4.** Dado  $b \in \mathbb{R}$ , el intervalo semi abierto con extremo derecho  $b$ , el cual denotaremos como  $(-\infty, b)$ , es el conjunto:

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}.$$

Es claro que si  $a < b$  y  $c = \frac{a+b}{2}$  entonces,  $b - c = c - a$ , es decir, la distancia de  $b$  a  $c$  es igual a la distancia de  $c$  a  $a$ , por tal motivo en los intervalos  $(a, b)$  y  $[a, b]$  al punto  $c$  se le llama el centro del intervalo y a la distancia  $b - c$  se le llama el radio del intervalo.

**Definición 3.5.** Sean  $x_0 \in \mathbb{R}$  y  $r > 0$ . El intervalo abierto con centro en  $x_0$  y radio  $r$ , el cual denotaremos como  $(x_0 - r, x_0 + r)$ , es el conjunto:

$$(x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\}$$

Es claro que si  $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$  entonces, la distancia de  $x$  a  $x_0$  es menor que  $r$ .

**Observación 3.6.** Para considerar un intervalo abierto con centro en un punto dado  $x_0 \in \mathbb{R}$  será suficiente dar su radio el cual es un número real  $r > 0$ .

En el Ejemplo 2.5 el conjunto solución  $S = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 2\}$  de la desigualdad  $4x^2 + 6 < 22$  lo podemos dar como  $S = (-2, 2)$ , es decir, son las  $x$  que están en el intervalo abierto con centro en 0 y radio 2.

En el Ejemplo 2.6 el conjunto solución  $S = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 6\}$  de la desigualdad  $x^2 - 4x < 12$  lo podemos dar como  $S = (-2, 6)$  es decir, son todas las  $x$  que están en el intervalo abierto con centro en 2 y radio 4.

## 4. VALOR ABSOLUTO

**Definición 4.1.** Sea  $x \in \mathbb{R}$ . El valor absoluto de  $x$ , el cual denotamos como  $|x|$ , se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Observemos que

$$\text{para todo } x \in \mathbb{R} \text{ se tiene que } |x| \geq 0$$

y que

$$|x| = 0 \iff x = 0$$

lo cual nos permite pensar a  $|x|$  como la distancia de  $x$  a 0, independientemente de si  $x$  es positivo o negativo.

**Proposición 4.2.** *Sea  $x \in \mathbb{R}$ . Entonces*

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

*Demostración.* Para probar el enunciado será suficiente ver que  $|x|^2 = x^2$ :

$$|x|^2 = |x||x| = |x^2| = x^2.$$

□

**Teorema 4.3.** *Sea  $x \in \mathbb{R}$  y  $r > 0$ . Entonces*

$$|x| < r \text{ si y sólo si } -r < x < r.$$

*Demostración.* Es claro que si  $x = 0$  la afirmación se satisface.

Ahora, si  $|x| < r$  y  $x > 0$  entonces  $|x| = x$ , de donde se sigue que  $x < r$  y como  $-r < 0$  y  $0 < x$  se tiene que

$$-r < x < r.$$

Análogamente, si  $|x| < r$  y  $x < 0$  entonces  $|x| = -x$ , de donde se sigue que  $-x < r$ , es decir,  $-r < x$  y como  $x < 0$  y  $0 < r$  tenemos que

$$-r < x < r.$$

Ahora, si  $-r < x < r$  y  $x > 0$ , entonces  $|x| = x$  y  $x < r$ , de donde se sigue que

$$|x| < r.$$

Análogamente, si  $-r < x < r$  y  $x < 0$ , entonces  $|x| = -x$  y  $-r < x$ , de donde se sigue que

$$|x| < r.$$

□

Es decir,

$$|x| < r \iff -r < x < r \iff x \in (-r, r).$$

Por lo tanto, dado  $x_0 \in \mathbb{R}$  y  $r > 0$ , la desigualdad

$$|x - x_0| < r$$

la podemos leer en cualquiera de las siguientes formas siendo todas ellas equivalentes entre sí:

1. El valor absoluto de  $x$  menos  $x_0$  es menor que  $r$ ;
2. La distancia de  $x$  a  $x_0$  es menor que  $r$ ;
3.  $x$  está en el intervalo abierto con centro en  $x_0$  y radio  $r$ .

**Observación 4.4.** Siguiendo el comentario anterior podemos decir que resolver una desigualdad de la forma  $|x - x_0| < r$  es equivalente, según el inciso (2), a encontrar  $S \subset \mathbb{R}$  tal que si  $x \in S$ , entonces la distancia de  $x$  a  $x_0$  es menor que  $r$  o, equivalentemente, según el inciso (3), a encontrar  $S \subset \mathbb{R}$  tal que si  $x \in S$ , entonces  $x$  está en el intervalo abierto con centro en  $x_0$  y radio  $r$ .

A continuación damos una cantidad suficiente de ejemplos que muestran lo dicho anteriormente.

**Ejemplo 4.5.** Encontrar todas las  $x \in \mathbb{R}$  tales que la distancia de  $4x$  a 2 sea menor que  $\frac{1}{10}$ .

Por la Observación 4.4 esto es equivalente a encontrar  $S \subset \mathbb{R}$  tal que

$$\text{si } x \in S \text{ entonces } |4x - 2| < \frac{1}{10}.$$

Aplicando el Teorema 4.3 tenemos que

$$\begin{aligned} (1) \quad & |4x - 2| < \frac{1}{10} \iff \frac{-1}{10} < 4x - 2 < \frac{1}{10} \\ (2) \quad & \iff 2 - \frac{1}{10} < 4x < 2 + \frac{1}{10} \\ (3) \quad & \iff \frac{19}{10} < 4x < \frac{21}{10} \\ (4) \quad & \iff \frac{19}{40} < x < \frac{21}{40}. \end{aligned}$$

De donde se sigue que  $S = (\frac{19}{40}, \frac{21}{40})$ , es decir

$$\text{si } x \in (\frac{19}{40}, \frac{21}{40}) \text{ entonces } |4x - 2| < \frac{1}{10}.$$

**Ejemplo 4.6.** Encontrar todas las  $x \in \mathbb{R}$  tales que  $x^2$  esté en el intervalo abierto con centro en 9 y radio  $\frac{1}{20}$ .

Por la Observación 4.4 esto es equivalente a encontrar  $S \subset \mathbb{R}$  tal que

$$\text{si } x \in S \text{ entonces } |x^2 - 9| < \frac{1}{20}.$$

Aplicando el Teorema 4.3 tenemos que

$$\begin{aligned} (5) \quad & |x^2 - 9| < \frac{1}{20} \iff \frac{-1}{20} < x^2 - 9 < \frac{1}{20} \\ (6) \quad & \iff 9 - \frac{1}{20} < x^2 < 9 + \frac{1}{20} \\ (7) \quad & \iff \frac{179}{20} < x^2 < \frac{181}{20}. \end{aligned}$$

Ahora, aplicando el Corolario 2.4 y la Proposición 4.2 tenemos que

$$\frac{179}{20} < x^2 < \frac{181}{20} \iff \sqrt{\frac{179}{20}} < |x| < \sqrt{\frac{181}{20}}.$$

Ahora, si  $x > 0$ ,  $|x| = x$  y obtenemos que

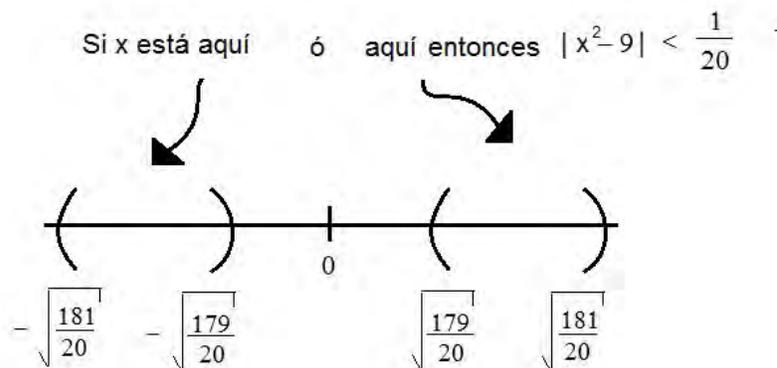
$$\sqrt{\frac{179}{20}} < x < \sqrt{\frac{181}{20}}.$$

Y si  $x < 0$ ,  $|x| = -x$  y se tiene que

$$-\sqrt{\frac{181}{20}} < x < -\sqrt{\frac{179}{20}},$$

de donde  $S = (-\sqrt{\frac{181}{20}}, -\sqrt{\frac{179}{20}}) \cup (\sqrt{\frac{179}{20}}, \sqrt{\frac{181}{20}})$ , es decir

si  $x \in (-\sqrt{\frac{181}{20}}, -\sqrt{\frac{179}{20}}) \cup (\sqrt{\frac{179}{20}}, \sqrt{\frac{181}{20}})$  entonces  $|x^2 - 9| < \frac{1}{20}$ .



**Ejemplo 4.7.** Encontrar todas las  $x \in \mathbb{R}$  tales que la distancia de  $\frac{(x^2-16)}{(x-4)}$  a 8 sea menor que  $\frac{1}{100}$ .

Por la Observación 4.4 lo anterior es equivalente a encontrar  $S \subset \mathbb{R}$  tal que

$$\text{si } x \in S \text{ entonces } \left| \frac{(x^2-16)}{(x-4)} - 8 \right| < \frac{1}{100}.$$

Es claro que si  $x \in S$ ,  $x$  debe ser distinta de 4 para satisfacer la condición deseada y que  $\frac{(x^2-16)}{(x-4)} = x + 4$ , de donde el problema que tenemos que resolver es

$$|x - 4| < \frac{1}{100} \text{ si } x \in S \text{ y } x \neq 4.$$

Aplicando el Teorema 4.3 tenemos que

$$(8) \quad |x - 4| < \frac{1}{100} \iff -\frac{1}{100} < (x - 4) < \frac{1}{100}$$

$$(9) \quad \iff 4 - \frac{1}{100} < x < 4 + \frac{1}{100}$$

$$(10) \quad \iff \frac{399}{100} < x < \frac{401}{100} \text{ y } x \neq 4.$$

Por lo tanto  $S = (\frac{399}{400}, 4) \cup (4, \frac{401}{100})$ , es decir

$$\text{si } x \in (\frac{399}{400}, 4) \cup (4, \frac{401}{100}) \text{ entonces } \left| \frac{(x^2-16)}{(x-4)} - 8 \right| < \frac{1}{100}.$$

Pero observemos que

$$x \in (\frac{399}{400}, 4) \cup (4, \frac{401}{100}) \iff 0 < |x - 4| < \frac{1}{100} \text{ y } x \neq 4$$

de donde se sigue que para  $x \neq 4$

$$\text{si } 0 < |x - 4| < \frac{1}{100} \text{ entonces } \left| \frac{(x^2-16)}{(x-4)} - 8 \right| < \frac{1}{100}.$$

**Ejemplo 4.8.** Encontrar todas las  $x \in \mathbb{R}$  tales que  $\frac{1}{x}$  esté en el intervalo abierto con centro en 2 y radio  $\frac{1}{1000}$ .

Por la Observación 4.4 esto es equivalente a encontrar  $S \subset \mathbb{R}$  tal que

$$\text{si } x \in S \text{ entonces } \left| \frac{1}{x} - 2 \right| < \frac{1}{1000}.$$

Observemos que  $x \neq 0$ . Ahora:

$$(11) \quad \left| \frac{1}{x} - 2 \right| < \frac{1}{1000} \iff \frac{-1}{1000} < \frac{1}{x} - 2 < \frac{1}{1000}$$

$$(12) \quad \iff 2 - \frac{1}{1000} < \frac{1}{x} < 2 + \frac{1}{1000}$$

$$(13) \quad \iff \frac{1999}{1000} < \frac{1}{x} < \frac{2001}{1000}.$$

Como  $\frac{1999}{1000} < \frac{1}{x}$  implica que  $x > 0$  obtenemos que  $\frac{1000}{2001} < x < \frac{1000}{1999}$ .

Por lo tanto  $S = \left( \frac{1000}{2001}, \frac{1000}{1999} \right)$ , es decir

$$\text{si } x \in \left( \frac{1000}{2001}, \frac{1000}{1999} \right) \text{ entonces } \left| \frac{1}{x} - 2 \right| < \frac{1}{1000}.$$

Observemos que en cada uno de los ejemplos anteriores no se impone ninguna condición sobre el conjunto solución de la desigualdad a resolver. En los ejemplos que siguen pondremos atención en un problema un poco distinto: resolveremos una desigualdad imponiendo una cierta condición sobre el conjunto solución.

Recordemos que dado  $x_0 \in \mathbb{R}$ , para dar un intervalo con centro en  $x_0$ , lo único que tenemos que dar es su radio, el cual es un número positivo  $r$ .

**Ejemplo 4.9.** Encontrar el radio  $r$  del intervalo abierto con centro en  $\frac{1}{2}$  tal que: si  $x$  está en este intervalo entonces la distancia de  $4x$  a 2 es menor que  $\frac{1}{10}$ .

El planteamiento anterior queda escrito de la siguiente forma:

$$\text{si } \left| x - \frac{1}{2} \right| < r \text{ entonces } |4x - 2| < \frac{1}{10}$$

o equivalentemente a

$$|4x - 2| < \frac{1}{10} \text{ si } \left| x - \frac{1}{2} \right| < r.$$

Ahora, del Ejemplo 4.5 tenemos que, si  $x \in \left( \frac{19}{40}, \frac{21}{40} \right)$  entonces  $|4x - 2| < \frac{1}{10}$ ; en este caso  $\frac{1}{2}$  es el centro del intervalo abierto  $\left( \frac{19}{40}, \frac{21}{40} \right)$  así que tomando  $r = \frac{1}{40}$  podemos afirmar que

$$\text{si } \left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{40} \text{ entonces } |4x - 2| < \frac{1}{10}.$$

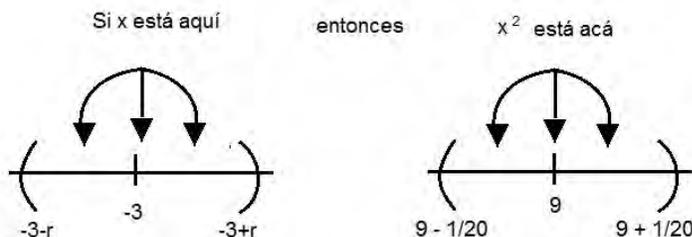
**Ejemplo 4.10.** Encontrar el radio  $r$  del intervalo abierto con centro en  $-3$  tal que:  $x^2$  esté en el intervalo abierto con centro en 9 y radio  $\frac{1}{20}$  si  $x$  está en el intervalo abierto con centro en  $-3$  y radio  $r$ . (Ver siguiente figura)

Una vez más, el problema que tenemos que resolver es:

$$\text{si } |x - (-3)| < r \text{ entonces } |x^2 - 9| < \frac{1}{20}$$

o equivalentemente

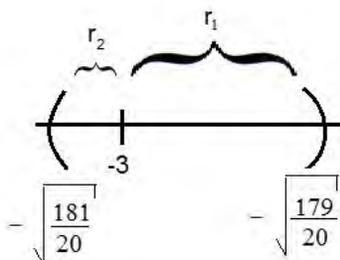
$$|x^2 - 9| < \frac{1}{20} \text{ si } |x - (-3)| < r.$$



Ahora, del Ejemplo 4.6 tenemos que, si  $x \in (-\sqrt{\frac{181}{20}}, -\sqrt{\frac{179}{20}}) \cup (\sqrt{\frac{179}{20}}, \sqrt{\frac{181}{20}})$  entonces  $|x^2 - 9| < \frac{1}{20}$ .

Es claro que  $-3 \in (-\sqrt{\frac{181}{20}}, -\sqrt{\frac{179}{20}})$  así que tomando  $r = \min\{r_1, r_2\}$  donde  $r_1 = -\sqrt{\frac{179}{20}} - (-3)$  y  $r_2 = -3 - (-\sqrt{\frac{181}{20}})$ , podemos afirmar que:

$$\text{si } |x - (-3)| < r \text{ entonces } |x^2 - 9| < \frac{1}{20}.$$



**Ejemplo 4.11.** Encontrar el radio  $r$  del intervalo abierto con centro en 4 tal que si  $x$  está en este intervalo entonces la distancia de  $\frac{x^2-16}{x-4}$  a 8 es menor que  $\frac{1}{100}$ .

Del Ejemplo 4.7 se sigue que el problema que tenemos que resolver es:

$$\left| \frac{x^2-16}{x-4} - 8 \right| < \frac{1}{100} \text{ si } |x - 4| < r \text{ y } x \neq 4.$$

Del mismo Ejemplo 4.7 tenemos que si  $x \in (\frac{399}{400}, 4) \cup (4, \frac{401}{100})$ , entonces  $|\frac{x^2-16}{x-4} - 8| < \frac{1}{100}$ , lo cual se puede escribir como:

$$\text{si } 0 < |x - 4| < \frac{1}{100} \text{ entonces } \left| \frac{x^2-16}{x-4} - 8 \right| < \frac{1}{100}.$$

**Ejemplo 4.12.** Encontrar el radio  $r$  del intervalo abierto con centro en  $\frac{1}{2}$  tal que  $\frac{1}{x}$  esté en el intervalo abierto con centro en 2 y radio  $\frac{1}{1000}$  si  $x$  está en el intervalo abierto con centro en  $\frac{1}{2}$  y radio  $r$ .

Una vez más el problema a resolver queda planteado de la siguiente manera:

$$\left| \frac{1}{x-2} \right| < \frac{1}{1000} \text{ si } \left| x - \frac{1}{2} \right| < r.$$

Del Ejemplo 4.8 tenemos que si  $x \in \left(\frac{1000}{2001}, \frac{1000}{1999}\right)$ , entonces  $\left|\frac{1}{x} - 2\right| < \frac{1}{1000}$  y como  $\frac{1}{2}$  está en el intervalo abierto  $\left(\frac{1000}{2001}, \frac{1000}{1999}\right)$  tomando  $r = \min\{r_1, r_2\}$  donde  $r_1 = \frac{1000}{1999} - \frac{1}{2}$  y  $r_2 = \frac{1}{2} - \frac{1000}{2001}$  podemos afirmar que:

$$\text{si } \left| x - \frac{1}{2} \right| < r \text{ entonces } \left| \frac{1}{x} - 2 \right| < \frac{1}{1000}.$$

**Ejemplo 4.13.** Encontrar el radio  $r > 0$  del intervalo abierto con centro en  $\frac{4}{3}$  tal que si  $x$  está en este intervalo entonces  $[x]$  está en el intervalo abierto con centro 1 y radio  $\frac{1}{1000}$ .

Una vez más el problema a resolver es:

$$|[x] - 1| < \frac{1}{1000} \text{ si } \left| x - \frac{4}{3} \right| < r.$$

Como el único entero que está en el intervalo abierto con centro en 1 y radio  $\frac{1}{1000}$  es el 1, esto implica que  $[x] = 1$  y  $[x] = 1$  si  $1 < x < 2$ . Como  $\frac{4}{3} \in [1, 2)$ , eligiendo  $r = \frac{1}{3}$  podemos asegurar que:

$$|[x] - 1| < \frac{1}{1000} \text{ si } \left| x - \frac{4}{3} \right| < \frac{1}{3}.$$

**Ejemplo 4.14.** Encontrar el radio  $r > 0$  del intervalo abierto con centro en  $-2$  tal que  $|x|$  esté en el intervalo abierto con centro en 2 y radio  $\frac{1}{1000}$  si  $x$  está en el intervalo abierto con centro en  $-2$  y radio  $r > 0$ .

Una vez más el problema a resolver es:

$$||x| - 2| < \frac{1}{1000} \text{ si } |x - (-2)| < r.$$

Se deja al lector como ejercicio que encuentre el radio  $r$ .

## 5. FUNCIONES.

Observemos que los Ejemplos 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13 y 4.14 los pudimos haber enunciado definiendo en cada uno, una función con dominio  $A \subseteq \mathbb{R}$  y contradominio  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 5.1.** En el Ejemplo 4.9, si definimos la función  $f(x) = 4x$  con  $A = \mathbb{R}$  el problema a resolver queda escrito como:

Encontrar el radio  $r > 0$  del intervalo abierto con centro en  $\frac{1}{2}$  tal que:

$$\text{si } \left| x - \frac{1}{2} \right| < r \text{ entonces } |f(x) - 2| < \frac{1}{10}$$

o equivalentemente

$$|f(x) - 2| < \frac{1}{10} \text{ si } \left| x - \frac{1}{2} \right| < r.$$

Tomando  $r = \frac{1}{40}$  podemos afirmar que

$$\text{si } \left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{40} \text{ entonces } |f(x) - 2| < \frac{1}{10}.$$

**Ejemplo 5.2.** En el Ejemplo 4.10 se define la función  $f(x) = x^2$  con  $A = \mathbb{R}$  para que el problema a resolver quede escrito como:

Encontrar el radio  $r > 0$  del intervalo abierto con centro en  $-3$  tal que:

$$\text{si } |x - (-3)| < r \text{ entonces } |f(x) - 9| < \frac{1}{20}$$

o equivalentemente

$$|f(x) - 9| < \frac{1}{20} \text{ si } |x - (-3)| < r.$$

Tomando  $r = \min\{r_1, r_2\}$  donde  $r_1 = -(\sqrt{\frac{179}{20}}) - (-3)$  y  $r_2 = -3 - (-\sqrt{\frac{181}{20}})$ , podemos afirmar que:

$$\text{si } |x - (-3)| < r \text{ entonces } |f(x) - 9| < \frac{1}{20}.$$

**Ejemplo 5.3.** En el Ejemplo 4.11 si definimos la función  $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$  con  $A = \mathbb{R} - \{4\}$  el problema a resolver queda escrito como:

Encontrar el radio  $r > 0$  del intervalo abierto con centro en  $4$  tal que:

$$|f(x) - 8| < \frac{1}{100} \text{ si } 0 < |x - 4| < r.$$

Tomando  $r = \frac{1}{100}$  podemos afirmar que:

$$\text{si } 0 < |x - 4| < \frac{1}{100} \text{ entonces } |f(x) - 8| < \frac{1}{100}.$$

**Ejemplo 5.4.** Si en el Ejemplo 4.12 se define la función  $f(x) = \frac{1}{x}$  con  $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , entonces el problema a resolver queda escrito como:

Encontrar el radio  $r > 0$  del intervalo abierto con centro en  $\frac{1}{2}$  tal que:

$$|f(x) - 2| < \frac{1}{1000} \text{ si } |x - \frac{1}{2}| < r.$$

Tomando  $r = \min\{r_1, r_2\}$  donde  $r_1 = \frac{1000}{1999} - \frac{1}{2}$  y  $r_2 = \frac{1}{2} - \frac{1000}{2001}$  podemos afirmar que:

$$\text{si } |x - \frac{1}{2}| < r \text{ entonces } |f(x) - 2| < \frac{1}{1000}.$$

**Ejemplo 5.5.** Si en el Ejemplo 4.13 se define la función  $f(x) = [x]$  con  $A = \mathbb{R}$ , entonces el problema a resolver queda escrito como:

Encontrar el radio  $r > 0$  del intervalo abierto con centro en  $\frac{4}{3}$  tal que:

$$|f(x) - 1| < \frac{1}{1000} \text{ si } |x - \frac{4}{3}| < r.$$

Tomando  $r = \frac{1}{3}$  podemos asegurar que:

$$|f(x) - 1| < \frac{1}{1000} \text{ si } |x - \frac{4}{3}| < \frac{1}{3}.$$

**Ejemplo 5.6.** En el Ejemplo 4.14 definimos a la función  $f(x) = |x|$  con  $A = \mathbb{R}$  para que el problema a resolver quede escrito como:

Encontrar el radio  $r > 0$  del intervalo abierto con centro en  $-2$  tal que:

$$|f(x) - 2| < \frac{1}{1000} \text{ si } |x - (-2)| < r.$$

## 6. LÍMITE DE FUNCIONES.

De los ejemplos mostrados en la sección anterior podemos decir todavía más y es lo que mostramos en seguida.

**Ejemplo 6.1.** En el Ejemplo 5.1 podemos fijar cualquier intervalo abierto con centro en 2 y radio  $\epsilon > 0$  y encontrar un intervalo abierto con centro en  $\frac{1}{2}$  y radio  $r > 0$  tal que:

$$\text{si } |x - \frac{1}{2}| < r \text{ entonces } |f(x) - 2| < \epsilon$$

o equivalentemente

$$|f(x) - 2| < \epsilon \text{ si } |x - \frac{1}{2}| < r.$$

Procediendo como en el Ejemplo 4.9 podemos ver que tomando  $r = \frac{\epsilon}{4}$  podemos afirmar que

$$\text{si } |x - \frac{1}{2}| < \frac{\epsilon}{4} \text{ entonces } |f(x) - 2| < \epsilon.$$

**Ejemplo 6.2.** En el Ejemplo 5.2 podemos fijar cualquier intervalo abierto con centro en 9 y radio  $\epsilon > 0$  y encontrar un intervalo abierto con centro en  $-3$  y radio  $r > 0$  tal que:

$$\text{si } |x - (-3)| < r \text{ entonces } |f(x) - 9| < \epsilon$$

o equivalentemente

$$|f(x) - 9| < \epsilon \text{ si } |x - (-3)| < r.$$

Procediendo como en el Ejemplo 4.10 podemos ver que tomando  $r = \min\{r_1, r_2\}$  donde  $r_1 = -(\sqrt{9-\epsilon}) - (-3)$  y  $r_2 = -3 - (-\sqrt{9+\epsilon})$ , podemos afirmar que:

$$\text{si } |x - (-3)| < r \text{ entonces } |f(x) - 9| < \epsilon.$$

**Ejemplo 6.3.** En el Ejemplo 5.3 podemos fijar cualquier intervalo abierto con centro en 8 y radio  $\epsilon > 0$  y encontrar un intervalo abierto con centro en 4 y radio  $r > 0$  tal que:

$$|f(x) - 8| < \epsilon \text{ si } 0 < |x - 4| < r.$$

Procediendo como en el Ejemplo 4.11 tomando  $r = \epsilon$  podemos afirmar que:

$$\text{si } 0 < |x - 4| < r \text{ entonces } |f(x) - 8| < \epsilon.$$

**Ejemplo 6.4.** En el Ejemplo 5.4 podemos fijar cualquier intervalo abierto con centro 2 y radio  $\epsilon > 0$  y encontrar un intervalo abierto con centro en  $\frac{1}{2}$  y radio  $r > 0$  tal que:

$$|f(x) - 2| < \epsilon \text{ si } |x - \frac{1}{2}| < r.$$

Ahora, si procedemos como en el Ejemplo 4.12, tomando  $r = \min\{r_1, r_2\}$  donde  $r_1 = \frac{1}{2-\epsilon} - \frac{1}{2}$  y  $r_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2+\epsilon}$  podemos afirmar que:

$$\text{si } |x - \frac{1}{2}| < r \text{ entonces } |f(x) - 2| < \epsilon.$$

**Ejemplo 6.5.** En el Ejemplo 5.5 podemos fijar cualquier intervalo abierto con centro en 1 y radio  $\epsilon > 0$  y encontrar un intervalo abierto con centro en  $\frac{4}{3}$  y radio  $r > 0$  tal que

$$|f(x) - 1| < \epsilon \text{ si } |x - \frac{4}{3}| < r.$$

Procediendo como en el Ejemplo 4.13 tomando  $r = \frac{1}{3}$  podemos asegurar que:

$$|f(x) - 1| < \epsilon \text{ si } |x - \frac{4}{3}| < r.$$

**Ejemplo 6.6.** En el Ejemplo 5.6 también podemos fijar cualquier intervalo abierto con centro en 2 y radio  $\epsilon > 0$  y encontrar un intervalo abierto con centro en  $-2$  y radio  $r > 0$  tal que

$$|f(x) - 2| < \epsilon \text{ si } |x - (-2)| < r.$$

Es claro que en los Ejemplos 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5 y 6.62, las funciones allí consideradas son casos particulares de funciones que definen una propiedad de este tipo, y que enunciamos a continuación.

Dada una función real  $f$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $L \in \mathbb{R}$  y  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que:

$$(14) \quad \text{si } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Es importante observar que  $x_0$  puede estar o no en el dominio de  $f$  tal como lo muestra el ejemplo 5.3.

Más aún, podríamos tener una función definida en  $x_0$  sin que este valor coincida con  $L$  como nos lo muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 6.7.** Sea  $f$  definida como  $f(x) = 0$  si  $x \neq 0$  y  $f(x) = 1$  si  $x = 0$ . Es fácil ver que dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que:

$$\text{si } 0 < |x - 0| < \delta \text{ entonces } |f(x) - 0| < \epsilon.$$

Concluamos: Cuando una función satisfaga 14 se dice que  $L$  es el límite de  $f$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$ .

#### REFERENCIAS

- [1] J. Angoa, A. Contreras, M. Ibarra, R. Linares, A. Martínez *Matemáticas Elementales*, Fomento Editorial BUAP, México, Segunda Edición, 2008.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel  
Puebla, Pue. C.P. 72570

mibarra@fcfm.buap.mx, maga@fcfm.buap.mx.



# CAPÍTULO 3

## MÉTODOS DE SUMABILIDAD DE CESÀRO Y ABEL APLICADOS A LAS SERIES DE HENSTOCK-FOURIER.

MARÍA GUADALUPE MORALES MACÍAS  
BUAP, FCFM

RESUMEN. En este trabajo se demuestran 2 resultados (3.2 y 4.2) sobre la sumabilidad (Cesàro y Abel) de las series de Fourier de funciones Henstock-Kurzweil integrables, los cuales son generalizaciones de los que se tienen en la Teoría clásica de Fourier ( por ejemplo el Teorema de Fatou ). Una característica importante de la clase de funciones Henstock-Kurzweil integrables, es que contiene propiamente al espacio de funciones integrables en el sentido de Lebesgue. Así, un objetivo es ampliar el estudio de las Series de Fourier empleando esta integral. La razón por la cual se usan dichos métodos de sumabilidad, es porque las sumas parciales de la series de Fourier pueden no converger a la función original, así que no se emplean los resultados clásicos de convergencia para series de Fourier.

### 1. INTRODUCCIÓN

A mediados del siglo pasado, XX, Ralph Henstock y Jaroslav Kurzweil, dieron a conocer una definición del concepto de integral. Esta definición tiene la ventaja de ser análoga a la integral de Riemann, ya que está definida a partir de sumas de Riemann, y no es necesario un estudio de Teoría de la Medida, como la integral de Lebesgue, además contiene propiamente al espacio de las funciones Lebesgue integrables sobre intervalos, y si una función  $f$  es diferenciable en un intervalo cerrado, entonces  $f'$  es integrable en este sentido. A esta integral se le llama integral de Henstock-Kurzweil (HK) y también es conocida como la **integral Generalizada de Riemann** o la **integral Medidora**. En los últimos años se ha empleado en diferentes ámbitos de la Matemática, particularmente en el análisis de Fourier. En el año 2002 Talvila en [6], inició el estudio de la transformada de Fourier en el contexto de la integral de HK.

El objetivo general de este trabajo es ampliar el estudio de las Series de Fourier empleando la Teoría de integración de Henstock-Kurzweil, en particular, se aplican los métodos de sumabilidad de Cesàro y Abel a las Series de Fourier de funciones integrables en el sentido de Henstock-Kurzweil. Estos métodos asignan un valor a la serie, y en el caso de que la serie converja, entonces el valor asignado por dichos procedimientos coincide con el límite original de la serie numérica. Sin embargo, si la serie es convergente en alguno de estos sentidos (Cesàro o Abel) no necesariamente es convergente en el sentido usual, además no toda serie es sumable en el sentido de Cesàro o Abel. La razón por la cual se aplican estos métodos se debe a que la sucesión de sumas parciales de la serie pueden no converger al valor original de la función (la función puede ser o no integrable en el sentido de Lebesgue), así, se tiene una alternativa de solución a este problema. En el caso de funciones no integrables

en el sentido de Lebesgue se puede presentar el fenómeno de que sus coeficientes de Fourier sean altamente oscilantes, ver [6, Ejemplo 3 (b)]. Para aplicar dichos métodos a las series de Fourier de funciones integrables en el sentido de Henstock-Kurzweil, es importante emplear el concepto de C-continuidad, ver Definición 3.1, a partir de la cual, se llega a los siguientes resultados:

- Sea  $f \in HK([-π, π])$  de período  $2π$  tal que  $a_0(f) = 0$ , si  $x$  es un punto de C-continuidad, entonces  $S_f(x)$  es sumable  $(C, k)$ ,  $k > 1$  (o sumable Abel), con valor  $f(x)$ .

Estos resultados son semejantes a los que se tienen para funciones Lebesgue integrables [1, Teorema 2.10] ( en el caso clásico sólo se sabe que es sumable Cesàro o Abel casi dondequiera ), ahora se sabe en que puntos la serie es sumable, es decir, si algún punto cumple la propiedad de C-continuidad, entonces la serie en dicho punto es sumable.

## 2. DEFINICIONES Y PROPIEDADES BÁSICAS

A continuación se enuncian definiciones y resultados básicos de la teoría de Henstock-Kurzweil.

Sean  $a$  y  $b$  números reales tales que  $a < b$ . Una partición  $P$  del intervalo  $[a, b]$  es una colección finita  $P = \{[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n\}$  de subintervalos de  $[a, b]$  tal que  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ .

Si  $P = \{[x_{i-1}, x_i] : i = 1, 2, \dots, n\}$  es una partición del intervalo  $[a, b]$ , tal que a cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  se le asigna un punto  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , entonces se dice que  $t_i$  es etiqueta de  $[x_{i-1}, x_i]$ . En este caso se dice que la **partición es etiquetada** y se denotará como

$$\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n.$$

Se dice que una función  $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es **función medidora** en  $[a, b]$  si  $\delta(t) > 0$  para cada  $t \in [a, b]$ .

Sea  $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$  una partición etiquetada de  $[a, b]$ . Si  $\delta$  es una función medidora en  $[a, b]$ , se dice que la **partición  $\dot{P}$  es  $\delta$ -fina** si

$$[x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)] \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, n,$$

se dice que cada subintervalo está subordinado a la función  $\delta$ .

**Definición 2.1.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función, se dice que  $f$  es **Henstock-Kurzweil integrable sobre  $[a, b]$**  ( $f$  es HK integrable) si existe  $A \in \mathbb{R}$  tal que para toda  $\epsilon > 0$  existe una función medidora  $\delta_\epsilon$  sobre  $[a, b]$  tal que para cada partición etiquetada  $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$  de  $[a, b]$   $\delta_\epsilon$ -fina, se cumple

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - A \right| \leq \epsilon.$$

Se puede probar que si  $f$  es HK integrable el número  $A$  es único, y le llamaremos la integral de  $f$  sobre  $[a, b]$  y se denotará como:

$$A = \int_a^b f = \int_a^b f(x)dx.$$

$HK([a, b])$ , denotará el espacio de funciones HK integrables. Este espacio es un espacio vectorial con respecto a las operaciones usuales de suma de funciones y producto por un escalar.

Enunciaremos ahora la definición de función de variación acotada, este tipo de funciones tienen la característica de ser los multiplicadores de las funciones integrables en el sentido de Henstock-Kurzweil.

**Definición 2.2.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que  $f$  es de variación acotada en  $[a, b]$  ( $f \in BV([a, b])$ ) si

$$\text{Var}(f, [a, b]) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^n |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \right\} < \infty,$$

donde  $P = \{[x_i, x_{i+1}]\}_{i=0}^n$  varía sobre todas las particiones de  $[a, b]$ . El espacio de funciones de variación acotada sobre  $[a, b]$  se denota como  $BV([a, b])$ .

De ahora en adelante todas las integrales serán en el sentido de HK, a menos que se haga alguna aclaración.

**Teorema 2.3.** *Teorema del Multiplicador:* Sean  $f, \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f \in HK([a, b])$  y  $\varphi$  es de variación acotada sobre  $[a, b]$ . Entonces

$$f \cdot \varphi \in HK([a, b]).$$

Además

$$\int_a^b f \varphi = F(b)\varphi(b) - \int_a^b F d\varphi,$$

donde  $F(t) = \int_a^t f$  y  $\int_a^b F d\varphi$  es la integral de Riemann-Stieltjes.

**Teorema 2.4.** *Teorema de Integración por Partes:* Sean  $f, g \in HK([a, b])$ ,  $F(x) = \int_a^x f$  y  $G(x) = \int_a^x g$  sus integrales indefinidas, respectivamente.

(a) Entonces  $Fg + fG \in HK([a, b])$  y tiene a  $FG$  como integral indefinida, además

$$\int_a^b (Fg + fG) = FG|_a^b.$$

(b)  $Fg \in HK([a, b])$  si y sólo si  $fG \in HK([a, b])$ , y

$$\int_a^b Fg = FG|_a^b - \int_a^b fG.$$

Existe una versión de este resultado considerando a  $F$  y  $G$  como c-primitivas de  $f$  y  $g$ , respectivamente, ver [2].

Otro concepto básico es el de función absolutamente continua, dado enseguida junto con dos conceptos que son extensiones de éste que serán de gran utilidad en lo sucesivo.

**Definición 2.5.** Sea  $I$  un intervalo,  $E \subset I$ .

a) Sea  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que  $F$  es **absolutamente continua** sobre  $E$  ( $F \in AC(E)$ ), si dado  $\epsilon > 0$  existe  $\eta_\epsilon > 0$  tal que si  $\{[u_k, v_k]\}_{k=1}^n$  es cualquier colección finita de intervalos cerrados que no se traslapan, con  $u_k, v_k \in E$ ,  $k = 1 \dots n$  y

$$\sum_{k=1}^n (v_k - u_k) < \eta_\epsilon, \text{ entonces } \sum_{k=1}^n |F(u_k) - F(v_k)| < \epsilon.$$

b)  $F$  es **absolutamente continua en el sentido restringido** sobre  $E$  ( $F \in AC_*(E)$ ), si dado  $\epsilon > 0$  existe  $\eta_\epsilon > 0$  tal que si  $\{[u_k, v_k]\}_{k=1}^n$  es cualquier colección finita de intervalos cerrados que no se traslapan, con  $u_k, v_k \in E$ ,  $k = 1 \dots n$  y

$$\sum_{k=1}^n (v_k - u_k) < \eta_\epsilon, \text{ entonces } \sum_{k=1}^n \sup_{u, v \in [u_k, v_k]} |F(u) - F(v)| < \epsilon.$$

Nótese que la diferencia entre estas dos definiciones es que en b) se toma la suma de las oscilaciones.

c)  $F$  es **absolutamente continua generalizada en el sentido restringido** sobre  $E$  ( $F \in ACG_*(E)$ ), si  $F$  es continua sobre  $I$  y  $E$  es una unión numerable de conjuntos sobre cada uno de los cuales  $F \in AC_*$ .

El intervalo  $I$  puede ser compacto o no.

La siguiente caracterización de funciones  $ACG_*$ , ver [4], se usará para determinar los coeficientes Fourier de funciones integrables en el sentido de Henstock-Kurzweil.

**Teorema 2.6.** Sea  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .  $F \in ACG_*([a, b])$  si y sólo si  $F'$  existe casi dondequiera,  $F' \in HK([a, b])$  y para cada  $x \in [a, b]$ ,  $\int_a^x F' = F(x) - F(a)$ .

**Teorema 2.7.**  $f \in HK([a, b])$  si y sólo si existe una función  $G \in ACG_*([a, b])$  tal que  $G' = f$  casi dondequiera y para cada  $x \in [a, b]$ ,

$$(1) \quad \int_a^x f = G(x) - G(a).$$

Observación: La integral indefinida de una función HK es  $ACG_*$  pero no necesariamente cumple (1).

Enseguida se enuncia la definición de Serie de Henstock-Fourier.

**Definición 2.8.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \in HK([-\pi, \pi])$  de período  $2\pi$ . La Serie de Henstock-Fourier de  $f$ , en el punto  $x$ , está dada por

$$(2) \quad S_f(x) := \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)],$$

donde

$$a_k := a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt$$

y

$$b_k := b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \text{sen}(kt) dt,$$

$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , son llamados los coeficientes de Henstock-Fourier.

No es suficiente referirse a la serie (2) como “Serie de Fourier” ya que ahora se está trabajando sobre un espacio más amplio de funciones que el espacio  $L^1$ ; para ser más precisos a la serie de Fourier de una función integrable en el sentido de

Henstock-Kurzweil se llama “Serie de Henstock-Fourier”, por la misma razón a los coeficientes de Fourier de una función Henstock-Kurzweil se llaman “coeficientes de Henstock-Fourier”. Además la expresión (2) no necesariamente converge.

Nótese que dichos coeficientes existen ya que las funciones coseno y seno son de variación acotada en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  y  $f \in HK([-\pi, \pi])$  (Teorema del Multiplicador).

Se considera importante conocer las propiedades de los coeficientes de Fourier de las funciones  $ACG_*$ . Así, se generaliza el siguiente resultado que presenta J. Duoandikoetxea en [3] que dice que: *Si  $f$  es absolutamente continua,  $a_k(f) = -1/kb_k(f')$  y  $b_k(f) = 1/ka_k(f')$ .*

**Proposición 2.9.** *Sea  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f \in ACG_*([-\pi, \pi])$ , entonces*

$$a_k(f) = -\frac{1}{k}b_k(f'),$$

$$b_k(f) = \frac{1}{k}a_k(f'), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

*Demostración.* Sea  $f \in ACG_*([-\pi, \pi])$ , por el Teorema 2.6 se tiene que  $f' \in HK([-\pi, \pi])$  y

$$F(x) := \int_{-\pi}^x f' = f(x) - f(-\pi).$$

Sea  $g(x) := k \cdot \cos(kx) \in HK([-\pi, \pi])$  para cada  $k \in \mathbb{N}$  y  $G(x) := \text{sen}(kx)$ . Obsérvese que  $F$  y  $G$  son las integrales indefinidas de  $f'$  y  $g$  respectivamente.

Además  $f'(x) \cdot \text{sen}kx \in HK([-\pi, \pi])$  (Teorema del Multiplicador), luego aplicando el Teorema de Integración por Partes (b), se obtiene

$$\begin{aligned} b_k(f') &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \text{sen}(kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} F(x) \text{sen}(kx) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \\ &\quad \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(-\pi)) \cos(kx) dx \\ &= -ka_k(f). \end{aligned}$$

De forma análoga se tiene que  $kb_k(f) = a_k(f')$ . □

Es necesario hacer la siguiente aclaración: en este trabajo se emplean las frases “la función es HK integrable” o “pertenece al espacio HK” para hacer referencia a que la función es integrable en el sentido Henstock-Kurzweil sobre algún intervalo. Debido a lo largo de esta frase por brevedad se emplearán las frases mencionadas. También por comodidad se escribirá “serie de Henstock-Fourier” para hacer referencia a la serie de Fourier de una función integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil.

## 3. MÉTODO DE CESÀRO

Este método consiste en tomar promedios de las sumas parciales antes de pasar al límite. Está basado en el conocido resultado de Cauchy para sucesiones de números reales que dice que: *si el límite de la sucesión  $\{b_n\}$  es  $l$ , la sucesión de promedios  $(b_1 + b_2 + \dots + b_n)/n$  también converge a  $l$* , el recíproco no siempre se cumple, por ejemplo la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$  es divergente pero es sumable Cesàro con suma  $1/2$ . Además, no toda serie es sumable Cesàro.

Existe un resultado más general, ver [7], y dice que: *Sean  $\{p_n\}$  y  $\{q_n\}$  dos sucesiones de números reales tal que  $q_i > 0$  para cada  $i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . Sean  $P_n = p_0 + \dots + p_n$  y  $Q_n = q_0 + \dots + q_n$  tal que  $Q_n \rightarrow \infty$ . Si  $s_n = p_n/q_n \rightarrow s$ , entonces  $\sigma_n = P_n/Q_n \rightarrow s$ . Si  $q_n = 1$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$  se obtiene el resultado clásico de Cauchy.*

Con base en lo anterior, en general, el método de Cesàro se define de la siguiente manera: Dada una sucesión  $(s_i)_{i \in \{0\} \cup \mathbb{N}}$  se definen las sucesiones  $(S_n^k)_{n \in \{0\} \cup \mathbb{N}}$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$  como

$$S_n^0 = s_n,$$

$$S_n^k = S_0^{k-i} + S_1^{k-1} + \dots + S_n^{k-1}, \text{ para } k = 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots$$

Análogamente para  $k = 0, 1, 2, \dots$  se define la sucesión de números reales  $(A_n^k)_{n \in \{0\} \cup \mathbb{N}}$  como

$$A_n^0 = 1,$$

$$A_n^k = A_0^{k-1} + A_1^{k-1} + \dots + A_n^{k-1}.$$

Se dice que la sucesión  $(s_i)_{i \in \{0\} \cup \mathbb{N}}$  es sumable  $(C, k)$ , con suma  $s$ , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^k}{A_n^k} = s.$$

Sean  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  una serie de números reales y  $s_n = \sum_{i=0}^n a_i$ , con  $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . Supóngase que  $k = 1$ , entonces  $S_n^1 = s_0 + (s_0 + s_1) + (s_0 + s_1 + s_2) + \dots + \sum_{i=0}^n s_i$  y  $A_n^1 = n + 1$ . Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^1}{A_n^1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n s_i}{n + 1} = s,$$

se dice que la serie  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  es sumable Cesàro con suma  $s$ .

En general, la serie  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  es sumable  $(C, r)$ , con suma  $s$ , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^r}{A_n^r} = s,$$

donde  $S_n^0 = \sum_{i=0}^n a_i$  y  $S_n^r = S_0^{r-1} + \dots + S_n^{r-1}$ .

Zygmund demuestra en [7] que si una serie es sumable  $(C, k)$ , para  $k \geq 0$ , con suma  $s$ , entonces dicha serie es sumable  $(C, k + h)$  con suma  $s$ , para cada  $h \in \mathbb{N}$ .

Ahora se aplicará el método de sumabilidad de Cesàro a las series de Henstock-Fourier, es decir, se considera: una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de período  $2\pi$  tal que  $f \in HK([-\pi, \pi])$ , su respectiva serie de Henstock-Fourier en  $x$ ,  $S_f(x)$ , y a la sucesión

de sumas parciales  $\{S_j(f, x)\}$  de la serie de Henstock-Fourier. En el caso  $k = 1$  se considera la sucesión de medias aritméticas

$$\sigma_N f(x) := \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N S_j(f, x).$$

Como

$$S_n(f, x) := S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt,$$

donde  $D_n(t) := \text{sen}(n + \frac{1}{2})t / 2\text{sen} \frac{t}{2}$  es el  $n$ -ésimo núcleo de Dirichlet, se tiene que

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_j(t) f(x-t) dt.$$

Usando la expresión del núcleo de Dirichlet y otras identidades trigonométricas se obtiene que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N D_j(t) &= \sum_{j=0}^N \frac{\text{sen}(j + \frac{1}{2})t}{2\text{sen} \frac{t}{2}} = \frac{1 - \cos(N+1)t}{4\text{sen} \frac{t}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\text{sen}(N+1)\frac{t}{2}}{\text{sen}(\frac{t}{2})} \right)^2. \end{aligned}$$

Se llama  $N$ -ésimo núcleo de Fejér a

$$F_N(t) := \frac{1}{2(N+1)} \left( \frac{\text{sen}(N+1)\frac{t}{2}}{\text{sen}(\frac{t}{2})} \right)^2,$$

con esta notación se tiene que

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) f(x-t) dt.$$

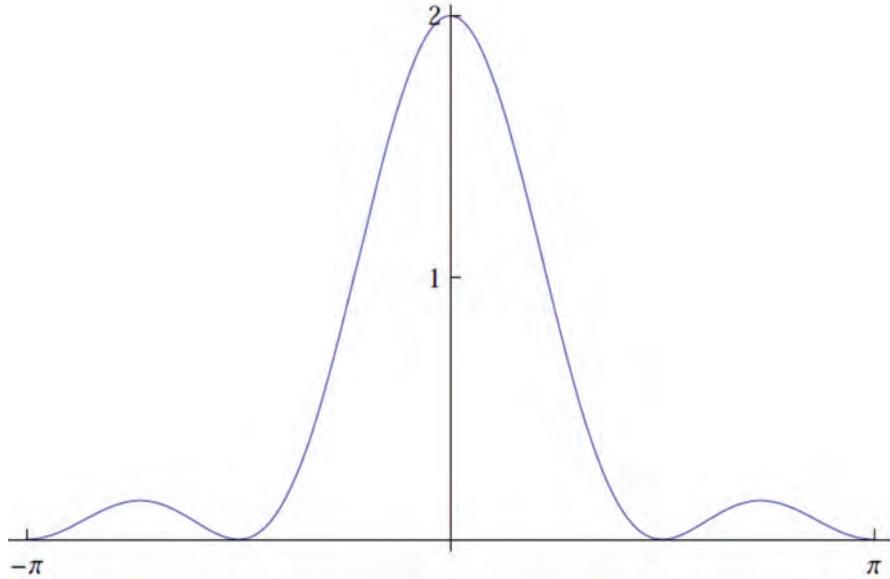
Nótese que esta integral existe en el sentido de Henstock-Kurzweil, ya que  $F_N$  es de variación acotada pues es la suma finita de funciones de variación acotada (cada  $D_n$  es de variación acotada en el  $[-\pi, \pi]$ ) y  $f$  es HK integrable. La figura 1 muestra el tercer núcleo de Fejér en  $[-\pi, \pi]$ .

Algunas propiedades del núcleo de Fejér son:

1.  $F_N$  es una función periódica, par, continua y no negativa.
2.  $\int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) dt = \pi$  para cada  $N$ .
3. Para cualquier  $\delta > 0$ ,  $F_N(t)$  tiende uniformemente a 0 en  $\delta \leq |t| \leq \pi$ .
4. Cada  $F_N$  es monótona a trozos.

En [7] Zygmund menciona que para asegurar la sumabilidad  $(C, 1)$  de la serie de Fourier  $S_f(x)$ , es necesario que  $\Phi_x(t) = o(t)$ , donde  $\Phi_x(t) = \text{Var}(F_x, [-\pi, \pi])$ ,  $F_x = F(x+t) + F(x-t) - 2tF'(t)$  y  $F(t) = \int_{-\pi}^t f$ . Esta es una condición más fuerte que la C-continuidad de la función  $f$ .

Si se considera la función  $F(t) = \int_a^t f$ , donde  $f$  pertenece a  $HK([a, b]) - L([a, b])$ , la variación total de  $F$  diverge, es decir,  $\text{Var}(F, [a, b]) = \infty$ , esto es, no se garantiza que  $\Phi_x(t) = o(t)$ . Esto se sabe gracias al Teorema 7.5 de [2], el cual es una caracterización de las funciones Lebesgue integrables a través de la variación de su integral indefinida y dice que:  $g \in L([a, b])$  si y sólo si  $G \in BV([a, b])$ , y

FIGURA 1.  $F_3(t)$ 

$$\int_a^b |g| = \text{Var}(G, [a, b]), \text{ donde } G(t) = \int_a^t g.$$

En este estudio no se logró obtener condiciones para asegurar la sumabilidad  $(C, 1)$  de las series de Henstock-Fourier. Sin embargo, se demuestra el Teorema 3.4 que habla de la sumabilidad de Cesàro de orden mayor que 1 para las series de Henstock-Fourier. Para su demostración es necesario el siguiente Teorema el cual se puede revisar con detalle en [7].

**Teorema 3.1.** *Sea  $F$  una función de valor real. Se define la serie derivada de  $F'$  como  $S'_F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(F) \cos(nx) + b_n(F) \text{sen}(nx)]'$ . Para cada punto  $x$  donde  $F'(x)$  existe, se tiene que  $S'_F(x)$  es sumable  $(C, k)$  para  $(k > 1)$ , con suma  $F'(x)$ .*

Para aplicar los métodos de sumabilidad a las series de Henstock-Fourier es necesario el concepto de C-continuidad que enseguida se enuncia.

**Definición 3.2.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de período  $b - a$ , tal que  $f \in HK([a, b])$ ,  $f$  es C-continua en  $x$  si

$$(3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(u) du = f(x)$$

La propiedad de C-continuidad en más general, es decir, no es sólo para funciones periódicas o HK integrables, si no localmente integrables en algún sentido. Y se refiere a que el promedio de la integral converge al valor de la función en el punto, como se puede ver en el lado derecho de la ecuación (3).

**Proposición 3.3.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de período  $b - a$ . Si  $f \in HK([a, b])$ , entonces  $f$  es C-continua casi dondequiera.*

*Demostración.* Sea  $f$  una función de período  $b - a$  que pertenece a  $HK([a, b])$ . Por el Teorema 2.7 existe  $G \in ACG_*([a, b])$  y un conjunto  $Z \subset [a, b]$  de medida cero tal que  $G'(x) = f(x)$  para cada  $x \in [a, b] - Z$ , además para cada  $x \in [a, b]$  se tiene que

$$\int_a^x f = G(x) - G(a).$$

Sea  $y \in [a, b] - Z$  y se calcula

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_y^{y+h} f(t) dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(y+h) - G(y)}{h} \\ &= G'(y) \\ &= f(y). \end{aligned}$$

□

Ahora se enuncia el primer resultado sobre la sumabilidad de la serie de Henstock-Fourier.

**Teorema 3.4.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de período  $2\pi$ . Si  $f \in HK([-\pi, \pi])$  y  $f$  es  $C$ -continua en  $x$ , entonces la serie de Henstock-Fourier  $S_f(x) - a_0(f)/2$  es sumable  $(C, k)$  para  $k > 1$ , con suma  $f(x)$ .*

*Demostración.* Como  $f \in HK([-\pi, \pi])$  por el Teorema 1.5, existen una función  $G \in ACG_*([-\pi, \pi])$  y un conjunto  $Z \subset [-\pi, \pi]$  de medida cero tal que  $G'(x) = f(x)$  para cada  $x \in [-\pi, \pi] - Z$ , y para cada  $x \in [-\pi, \pi]$  se tiene que

$$\int_{-\pi}^x f = G(x) - G(-\pi).$$

Sea  $x \in [-\pi, \pi] - Z$ . Por la Proposición 3.3,  $f$  es  $C$ -continua en  $x$ , además  $G'(x)$  existe y  $G'(x) = f(x)$ .

Se calcula

$$\begin{aligned} S'_G(x) &:= \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(G) \cos(nx) + b_n(G) \operatorname{sen}(nx)]' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(G) \cos(nx)]' + [b_n(G) \operatorname{sen}(nx)]' \\ (4) \quad &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \operatorname{sen}(nx) \\ &= S_f(x) - \frac{a_0(f)}{2}. \end{aligned}$$

La igualdad (4) se tiene por la Proposición 2.9. Nótese que la función  $G$  es diferenciable casi dondequiera y aplicando el Teorema 3.1 se tiene que  $S_f(x) - a_0(f)/2$  es sumable  $(C, k)$ , ( $k > 1$ ) casi dondequiera, con suma  $f(x)$ . □

En particular si  $a_0(f) = 0$ , entonces  $S_f(x)$  es sumable  $(C, k)$ , ( $k > 1$ ) para cada  $x \in [-\pi, \pi] - Z$ , con suma  $f(x)$ .

En el caso del espacio de funciones Lebesgue integrables se tiene el siguiente resultado [1, Teorema 2.10]: *Sea  $f \in L^1([-\pi, \pi])$ . Entonces existe  $H \subset [-\pi, \pi]$  de*

medida cero tal que para cada  $x \in [-\pi, \pi] - H$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n f(x) = f(x)$ .

Como ya se mencionó, el método de sumabilidad de Cesàro asegura que si una serie es sumable  $(C, k)$ , para  $k \geq 0$  con suma  $s$ , entonces dicha serie es sumable  $(C, k + h)$  con suma  $s$ , para cada  $h \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto la serie de Fourier de una función Lebesgue integrable es sumable  $(C, k)$ ,  $k \geq 1$  casi dondequiera al valor original de la función.

Si el coeficiente  $a_0(f)$  de la serie de Henstock-Fourier de una función  $f \in HK([-\pi, \pi])$  es cero, entonces el Teorema 3.4 es una generalización, en cierto sentido, del resultado sobre la sumabilidad  $(C, k + h)$  para funciones Lebesgue integrables. Aunque el Teorema 3.4 es más preciso, en el sentido que nos dice que si  $f$  es C-continua en  $x$ , entonces  $S_f(x)$  es sumable  $(C, k)$ , ( $k > 1$ ) con suma  $f(x)$ , es decir, en que conjunto  $S_f(x)$  es sumable.

En  $L^1$  se tiene el siguiente resultado [3, Teorema 7.1] el cual dice que: Si la función  $f$  es Lebesgue integrable y tiene límites laterales en el punto  $x$ , entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N f(x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)],$$

es decir,  $S_f(x)$  es sumable  $(C, k)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  con valor  $[f(x+) + f(x-)]/2$ . En particular, si  $f$  es continua en  $x$ , entonces

$$\sigma_N f(x) = f(x).$$

De esta situación surge la pregunta: ¿si una función pertenece al conjunto  $HK([-\pi, \pi])$  (de período  $2\pi$ ) y tiene límites laterales, entonces es C-continua? Para dar respuesta a esta pregunta se analizan los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 3.5.** Sea

$$k(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Se redefine  $k$  tal que sea de período  $2\pi$ , es claro que  $k \in HK([-\pi, \pi])$ . Se demuestra que  $k$  no es C-continua en el punto  $x = 1$ , a pesar de que tiene límites laterales.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} k(x) dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (x) \Big|_1^{1+h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (1 + h - 1) \\ &= 1 \\ &\neq k(1). \end{aligned}$$

El siguiente ejemplo muestra que la propiedad de C-continuidad no implica continuidad.

**Ejemplo 3.6.** Sea,

$$k_1(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

de período  $2\pi$ . Nótese que  $k_1$  es C-continua en el punto  $x = 1$ , según el ejemplo anterior, pero es discontinua.

Sin embargo, existen funciones con las propiedades de continuidad y C-continuidad.

**Ejemplo 3.7.** Sea  $I$  la función identidad sobre  $[0, 1]$  de período  $\lambda \geq 1$  y se calcula

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} I(t) dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_x^{x+h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{x^2 + 2xh + h^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) \\ &= x. \end{aligned}$$

Si  $f$  es continua, entonces por [2, Corolario 4.10] es C-continua.

#### 4. MÉTODO DE ABEL

A continuación se estudia el método de sumabilidad de Abel. Se considera la serie convergente  $\sum a_n$ , entonces la serie  $\sum a_n r^n$  es convergente para todo  $0 < r < 1$  y define la función  $S(r) = \sum_n^\infty a_n r^n$ . Abel demostró que  $\lim_{r \rightarrow 1^-} S(r)$  coincide con la suma de la serie original. Sin embargo,  $S(r)$  y su límite pueden existir sin que la serie original  $\sum a_n$  sea convergente, lo que sugiere una manera diferente de asignar una suma a una serie, a la cual se llama sumabilidad de Abel. Si la serie es sumable Abel no implica que la serie sea convergente en el sentido usual, por ejemplo la serie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} n(-1)^{n-1}$  es divergente en el sentido usual pero es sumable Abel con suma  $1/4$ .

En esta sección se estudia

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)] r^k,$$

donde  $a_k$  y  $b_k$  son los coeficientes de Henstock-Fourier.

Se denota

$$D_1 F(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[F(x+h) - F(x-h)]}{2h}$$

como la derivada simétrica de  $F$  en el punto  $x_0$ , este concepto será utilizado posteriormente.

Se enuncia el Teorema de Fatou en [7] el cual es necesario para la demostración del Teorema 4.2.

**Teorema 4.1.** *Teorema de Fatou:* Sea  $F : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , la Serie de Fourier de  $F$ , en el punto  $x_0$  está dada por

$$S_F(x_0) := \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(kx_0) + A_k \text{sen}(kx_0)],$$

donde  $A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(kx) dx$  y  $B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin(kx) dx$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  son los coeficientes de Fourier, además supóngase que  $D_1 F(x_0)$  existe. Entonces,  $S'_F(x_0)$  es sumable Abel en  $x_0$ , al valor  $D_1 F(x_0)$ .

Así, se presenta el segundo resultado con respecto a la sumabilidad de series.

**Teorema 4.2.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de período  $2\pi$ . Si  $f \in HK([-\pi, \pi])$  y  $f$  es C-continua en  $x_0$ , entonces la serie de Henstock-Fourier  $S_f(x_0) - a_0(f)/2$  es sumable Abel, al valor  $f(x_0)$ .*

*Demostración.* Como  $f \in HK([-\pi, \pi])$ , sea  $G$  como en el Teorema 1.5, y sea  $x_0$  un punto en  $[-\pi, \pi] - Z$  donde  $Z$  es de medida cero y tal que  $f$  es C-continua en  $x_0$ . Obsérvese que si  $G'(x)$  existe, entonces la derivada simétrica  $D_1 G(x)$  también existe y ambos valores son iguales.

Además  $S'_G(x_0) = S_f(x_0) - a_0(f)/2$ , aplicando el Teorema de Fatou se obtiene que,  $S_f(x_0) - a_0(f)/2$  es sumable Abel al valor  $f(x_0)$ .  $\square$

En particular, si  $a_0(f) = 0$ , entonces  $S_f(x_0)$  es sumable Abel al valor  $f(x_0)$  para todo  $x_0$  donde  $f$  es C-continua.

## 5. CONCLUSIÓN

En este trabajo se obtuvieron resultados sobre la sumabilidad (Cesàro y Abel) de Series de Fourier para funciones Henstock-Kurzweil integrables, los cuales son generalizaciones de los resultados clásicos. Como trabajo futuro, se pretende ampliar el estudio de las Series y la Transformada de Fourier en el contexto de la integral de Henstock-Kurzweil, así se abre un amplio campo de estudio, y se considera importante realizar esta investigación ya que tiene implicaciones en áreas como Ecuaciones Diferenciales, Ecuaciones Integrales, Óptica, entre otras.

## REFERENCIAS

- [1] J. Arias, *Pointwise Convergence on Fourier series, Lecture Notes in Mathematics*, Springer, Berlin Heidelberg, 2002.
- [2] R.G. Bartle, *A Modern Theory of Integration*, American Mathematical Society, Providence, 2001.
- [3] J. Duoandikoetxea, *Lecciones sobre las Series y Transformadas de Fourier*, UNAN-Managua, 2003.
- [4] A. Gordon, *The Integral of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, American Mathematical Society, Providence, 1994.
- [5] D. L. Myers, Wilcox, Howard J., *An Introduction to Lebesgue Integration and Fourier Series*, Dover Publications, New York, 1978.
- [6] E. Talvila, *Henstock-Kuzweil Fourier Transform*, Illinois Journal of Mathematics, **46** (2002) 1207-1226.
- [7] A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwow, 1935.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
 Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel  
 Puebla, Pue. C.P. 72570  
 205702094@alumnos.buap.mx.

# Ecuaciones Diferenciales y Modelación Matemática



# CAPÍTULO 4

## MODELS OF THE ELECTRICAL ACTIVITY OF THE PANCREATIC $\beta$ CELLS

ROBERTO ÁVILA-POZOS<sup>1</sup>  
RICARDO CRUZ CASTILLO<sup>1</sup>  
RAFAEL GODÍNEZ FERNÁNDEZ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE HIDALGO,

<sup>2</sup>LABORATORIO DE BIOFÍSICA, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
METROPOLITANA-IZTAPALAPA

**ABSTRACT.** Bursting oscillations are complex oscillations characterized by two time scales. On the slow time scale, silent and active phases alternate. The silent phase is relatively quiescent, while the active phase exhibits oscillatory behaviour on a faster time scale. Bursting oscillations have provided fertile ground for mathematical investigations on several levels, including the development of detailed biophysical single-cell models. We present a representative model of the electrical activity of a single pancreatic  $\beta$ -cell. We review a detailed biophysical behaviour including  $K_{ATP}$  channel, Voltage-dependent K channel and  $Ca^{++}$  conductance. We present a model that involves a system of two identical cells and, finally, we present a model with two non-identical cells.

### 1. INTRODUCTION

Pancreatic  $\beta$ -cells secrete insulin, the hormone that maintains blood plasma glucose within narrow limits in the face of variable food ingestion and physical activity patterns. Insulin allows muscle to take up glucose for immediate energy, causes the liver to store glucose as glycogen for medium-term energy storage, and signals fat cells to use glucose for fat deposition for long-term energy storage. Diabetes is a disease in which glucose is chronically elevated, leading to several complications like blindness, kidney failure, limb amputation, cardiovascular disease, and death. Type 1 or juvenile diabetes is the result of an absolute lack of insulin following auto-immune destruction of the  $\beta$ -cells. Type 2 or adult onset diabetes, the most common variety, involves a relative lack of insulin, usually as a result of two defects: insuline resistance (higher than normal concentrations of insulin are required for glucose processing) and failure of the  $\beta$ -cells to produce enough insulin to compensate.

Type 2 Diabetes is an important health issue worldwide. Early diagnosis in this disease is vital in order to prevent the systemic damage that it usually produces in humans. The glucose tolerance test is the most used tool in order to provide a precise diagnosis of the disease. When the concentration of blood glucose rises above a certain threshold after the ingestion of a standard load of glucose, the diagnosis of diabetes is made. This excess in the blood glucose concentration is most frequently caused by a deficiency in the liberation of insulin by the  $\beta$  cells in the pancreas. The study of the glucose tolerance test response curves has been recently proposed

for the dynamic analysis of glycemia in healthy subjects in order to elucidate the control mechanisms involved at a systemic level and to eventually use the results of this analysis to arrive at a more precise diagnosis of the disease. Electrophysiological studies of the  $\beta$  cells in the pancreas have revealed the mechanisms involved in the liberation of insulin into the bloodstream. These cells store insulin in packets and when the glycemic level rises, the insulin is liberated by exocytosis. In order for this process to start, a pulsating rise in the concentration of intracellular  $\text{Ca}^{2+}$  ( $[\text{Ca}^{2+}]_i$ ) is required. The source of  $\text{Ca}^{2+}$  is extracellular, and the ion enters the  $\beta$  cells in the pancreas through voltage-dependent  $\text{Ca}^{2+}$  channels. The pulsating rise of  $\text{Ca}^{2+}$  in the  $\beta$  cell depends on bursting electrical activity which consists of action potentials mounted on a depolarizing voltage plateau. The action potentials are generated by  $\text{Ca}^{2+}$  currents that increase the  $[\text{Ca}^{2+}]_i$ . When the blood glucose concentration is not elevated, the  $\beta$  cells have a resting potential that does not present any electrical activity.  $\text{K}^+$  channels, mostly those dependent on the intracellular ATP concentration ( $[\text{ATP}]_i$ ), mediate the resting potential. These channels are open in the absence of ATP and their closure is dependent on the  $[\text{ATP}]_i$ . When blood glucose concentration is increased due to glucose ingestion, a larger amount of the substance enters the  $\beta$  cells, which causes an oscillating increase in the  $\text{ATP}_i$  level. This raises its average level, which produces a decrease in the number of open  $\text{K}(\text{ATP}_i)$  channels which in turn leads to the depolarizing of the cells. This depolarization can be large enough to reach the threshold to initiate the action potential bursts that produce the pulsating  $\text{Ca}_i^{2+}$  and the release of insulin. Electrophysiological techniques have contributed to a detailed description of the voltage (or metabolite) dependency on the opening or the kinetics of the  $\beta$  cell ionic channels. This has permitted the generation of models that describe the channel behaviors. For example, functions that describe the behavior of  $\text{K}(\text{ATP}_i)$  with respect to  $[\text{ATP}]_i$  have been formulated. In addition, the experimental data on the elevation of the ATP/ADP ratio in the  $\beta$  cells in the human as a result of extracellular glucose loads are now available. This manuscript makes use of all of this information in order to construct a simulation model of the electrical activity of the  $\beta$  cells that would be generated during a glucose tolerance test for normal subjects. The model reproduces experimental data at the systemic and cellular levels. It describes the blood glucose levels, the associated  $\text{ATP}_i$  increase, the bursting activity of action potentials and the pulsating elevation of  $\text{Ca}_i^{2+}$ , which is indispensable for the liberation of insulin by the  $\beta$  cells. It also predicts an optimal  $[\text{ATP}]_i$  for an adequate electrical response to an extracellular glucose load. A suboptimal  $[\text{ATP}]_i$  level inhibits the electrical response. The model predicts a failure in the electrical response of the  $\beta$  cells due to a glucose load produced by a decrease in the ATP/ADP ratio. Thus it is proposed that an alteration of the mechanisms regulating the basal level of  $\text{ATP}_i$  in the  $\beta$  cells may be one of the mechanisms that trigger type 2 diabetes.

## 2. A SINGLE CELL MODEL

We employed the model developed by Trujillo [32] in order to quantitatively describe the blood glucose concentration during a glucose tolerance test. The mathematical model that describes the electrical activity of the cell is taken from Godínez [19] which is a modified version of Chay [9, 10]. It describes the characteristic electrical activity of  $\beta$  cells and takes into account changes in  $[\text{Ca}]_i$ . Even though

more complex models exist which allow the identification of the different agents that participate in  $\text{Ca}^{2+}$  regulation, a simpler model was preferred, as it allowed the analysis of the changes of the electrical activity and  $[\text{Ca}]_i$  induced by the extracellular glucose level. The action of the extracellular glucose on the membrane resistance of the  $\beta$  cell was added to the model. Since these membrane resistance changes are mediated by the ATP level, these factors were also incorporated, using the experimental results reported by Detimary [14] which describe the changes in the ATP/ADP ratio with the concentration of extracellular glucose in human  $\beta$  cells. Other important factors relating the extracellular glucose with the ATP level are the changes in the oscillating frequency of  $[\text{ATP}]_i$ . In order to incorporate these factors we used data reported by Ainscow [1]. These authors describe a change in the oscillating period of  $[\text{ATP}]_i$  when the extracellular glucose concentration changes. For example, when the glucose concentration is low (3mM), the oscillating period is  $66 \pm 6$  s; however this period is increased to a mean of  $167 \pm 32$  s in the case of hyperglycemia (15 mM). This change is not accompanied by a change in amplitude. We used a sinus function to describe the  $[\text{ATP}]_i$  oscillation. Due to the lack of experimental results, we employed a linear relation between extracellular glucose and the oscillation period.

In order to obtain the  $[\text{ATP}]_i$  from the ATP/ADP ratio, a constant level of total nucleotides was assumed, although different levels have been reported that vary from 2-10 mM [17]. The value employed in this work was 2.691 mM. The simulation results are similar to those reported by Ainscow [1]. The only difference is that the previous publication shows the results of  $[\text{ATP}]_i$  in arbitrary values, while the simulation allows us to calculate  $[\text{ATP}]_i$ . An important factor that must be included in the model is the magnitude of the maximum K conductance that is mediated by K(ATP) channels. This is the conductance that is achieved when there is a great probability that all the K(ATP) channels are open. We used the value of  $3.9 \pm 1$  nS, according to the data reported by Goepel [18]. It is well known that that the probability of opening of K(ATP) channels is affected not only by  $[\text{ATP}]_i$ , but also by the ADP level. The function that was used, that employs both nucleotides was reported by Westermarck [33], and is based on experimental data. It describes the K conductance mediated by K(ATP) channels according to  $[\text{ATP}]_i$ , in  $\beta$  cells. All of the added empirical functions were necessary in order to explain the changes in time of the electrical properties of the  $\beta$  cells and the associated  $[\text{Ca}]$  changes that were induced by the extracellular glucose. In order to solve the differential equations that describe the kinetics of the ionic channels and the  $\text{Ca}_i$  diffusion we used the 4th order Runge-Kutta method programmed in Matlab.

The following equation was employed to quantitatively describe the blood glucose concentration  $[\text{glucose}]$  during a glucose tolerance test (Trujillo et. al.)

$$(1) \quad [\text{glucose}] = g_{L0} + g_{L1} \exp\left(-\frac{t}{t_1}\right) \sin\left(\frac{t}{t_2}\right)$$

With  $g_{L0} = 86$  mg/100 ml and  $g_{L1} = 229.37$  mg/100 ml. These units are those that are normally employed medically for glycemia; however, for experimental work these units were changed for mols, which are more frequently used for experimental work.  $t_1$  and  $t_2$  values were 249.376 min, and 40.274 min respectively.

A model associating glucose with ATP was also employed. For this purpose, an exponential function was adjusted to the results reported by Phillipe Detimaruy et.

al. [14] that describes the changes in the  $[ATP]/[ADP]$  ratio with the extracellular glucose in human  $\beta$  cells.

$$(2) \quad \frac{[ATP]}{[ADP]} = 2.9 + 3.8 \left( 1 - \exp \left( \frac{-[glucose]}{2.5 \times 10^{-3}} \right) \right)^2$$

Additionally, as the total nucleotide concentration  $[N_t]$  is constant we have:

$$(3) \quad [ATP] + [ADP] = [N_t]$$

From this expression the  $[ATP]$  is calculated in terms of the  $[ATP]/[ADP]$  ratio

$$(4) \quad [ATP] = \frac{\left( \frac{[ATP]}{[ADP]} \right) [N_t]}{1 + \frac{[ATP]}{[ADP]}}$$

The  $[N_t]$  that was employed had a 4.3 mM, which is within the experimental measurement range.

Recent experimental studies show that  $[ATP]$  is not constant, but oscillates with a frequency that is dependent on the glucose concentration. In order to reproduce these results a sinus function was employed that had a frequency period according to Ainscow et.al. [1]. Since only two oscillation periods were obtained experimentally for the glucose concentration, a linear approximation between the glucose concentration and the frequency of oscillation was carried out. The amplitude of oscillation does not change with the frequency and is 10% of the basal ATP concentration measured at a glucose concentration of mM. Taking all this into consideration, final  $[ATP]$  is given by

$$(5) \quad [ATP]_f = 0.1[ATP]_0 \sin(2\pi vt) + [ATP]$$

where  $[ATP]$  is given by equation 3. The magnitude and oscillating frequency for  $[ADP]_f$  were obtained by equation 4.

**2.1.  $K_{ATP}$  channel.** It was important to determine  $[ATP]_f$  and  $[ADP]_f$  since both metabolites determine the percentage of  $K_{ATP}$  channels that remain in the open state. According to the mathematical model proposed by Hanley et. al. [21], which is based on experimental data, the open ( $n_{ATP}$ ) channel fraction from the whole number of  $K_{ATP}$  channels is given by the expression:

$$(6) \quad n_{ATP} = \frac{0.08 \left( 1 + 0.33 \left( \frac{[ADP]_f}{K_{dd}} \right) \right) + 0.89 \left( 0.165 \left( \frac{[ADP]_f}{K_{dd}} \right) \right)^2}{\left( 1 + 0.165 \left( \frac{[ADP]_f}{K_{dd}} \right) \right)^2 \left( \left( 1 + 0.135 \left( \frac{[ADP]_f}{K_{td}} \right) \right) + \left( 0.05 \left( \frac{[ATP]_f}{K_{tt}} \right) \right) \right)}$$

Where  $K_{dd} = 17 \times 10^{-6}$ ,  $K_{td} = 26 \times 10^{-6}$  and  $K_{tt} = 1 \times 10^{-6}$  represent the dissociation constants. It is possible to evaluate the  $K_{ATP}$  channels conductance as a function of  $[ATP]_f$  using the experimentally obtained values of  $n_{ATP}$  and the maximal conductance  $\bar{g}_{K_{ATP}}$

$$(7) \quad g_{K_{ATP}} = \bar{g}_{K_{ATP}} n_{ATP}$$

The value for  $\bar{g}_{K_{ATP}}$  was 4.2 nS.

Finally, the expression for the K current  $I_{K_{ATP}}$  that is mediated by the  $K_{ATP}$  channels as a function of  $[ATP]_f$  and  $[glucose]$  would be

$$(8) \quad I_{K_{ATP}} = g_{K_{ATP}}(V_m - V_K)$$

where  $V_m$  and  $V_K$  represent the membrane and  $K^+$  equilibrium potentials respectively.

The mathematical model that describes the  $\beta$  cells was taken from Chay [9, 10, 11, 12, 13], with a few modifications. An important one is the incorporation of K(ATP) channels. In Chay's model a high glucose concentration is assumed, so during the simulation, the  $\beta$  cells are always generating action potential bursts.

The model consists of three ionic channels: a voltage-dependent K channel; a voltage-activated Ca channel that is inactivated by an increase of the intracellular calcium concentration  $[Ca]_i$ , and a leakage channel (the channels are always in the open state). The model also incorporates a description of the diffusion and removal processes for  $Ca_i^{++}$  in order to explain the changes in  $[Ca]_i$  during electrical activity.

**2.2. Voltage-dependent K channel.** The conductance  $g_K$  of the voltage - dependent  $K^+$  channel is given by

$$(9) \quad g(V_m)_{K_{V_m}} = \bar{g}_{K_{V_m}} n_{K_{V_m\infty}}(V_m)$$

where  $\bar{g}_{K_{V_m}}$  is the maximum conductance for  $K^+$  and  $n_{K_{V_m\infty}}$  is the probability of the  $K^+$  channel being open. In this case we have used  $\bar{g}_{K_{V_m}}=1.3$  nS. The channel's opening and closing can be modeled by a first order kinetic:

$$(10) \quad \frac{dn}{dt} = \frac{n_\infty - n}{\tau_n}$$

where  $n_\infty$  is the fraction of the channels in an open state for given membrane potential, while  $\tau_n$  is its time constant. The variables are related with  $\alpha_n$  and  $\beta_n$  by the equations

$$(11) \quad n_\infty = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \beta_n}$$

$$(12) \quad \tau_n = \frac{1}{\alpha_n + \beta_n}$$

Experimental data suggest that  $n_\infty$  and  $\tau_n$  are voltage dependent and consequently the fraction of the open channels  $n_\infty$  can be represented by a curve that can be adjusted by a Boltzmann equation of the form

$$(13) \quad n_\infty(V_m) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{V_N - V_m}{S_N}\right)}$$

where  $S_N$  is the slope of the activating current and  $V_N$  is the potential for which half of the maximum value for  $n_\infty$  is obtained. For the purposes of the simulation we use the values  $V_N = 9 \times 10^{-3}$  and  $S_N = 11 \times 10^{-3}$ .

If we assume that the transition constants are exponential and constant respectively, we obtain

$$(14) \quad \alpha_n = \lambda \exp\left(\frac{V_m - V_N}{S_A}\right)$$

$$(15) \quad \beta_n = \lambda$$

where  $S_A$  is the slope that is adjusted to the shape of  $n_\infty$  and  $\lambda$  is a scaling factor that is used to provide the action potentials with the appropriate frequency. The values that were employed were  $\lambda = 117$  and  $S_A = 10 \times 10^{-3}$ .

**2.3.  $\text{Ca}^{++}$  conductance.** The union of  $\text{Ca}^{++}$  to its receptor site depends on the voltage, which affects the dissociation constant. If  $K_{PH}$  is the dissociation constant in the absence of a membrane potential difference, then the expression for  $K_{PH}$  is

$$(16) \quad K_{PH} = K_H \exp\left(\frac{V_m}{S_C}\right)$$

with values  $S_C = 30 \times 10^{-3}$  and  $K_H = 5 \times 10^{-6}$ .

Inactivation is believed to originate by the union of  $\text{Ca}^{++}$  to a site in the channel on the cytoplasm side. The probability that the channel will not be inactivated by  $\text{Ca}^{++}$  is given by the equation

$$(17) \quad H_I = \frac{1}{\left(1 + \frac{[\text{Ca}^{++}]}{K_{PH}}\right)^3}$$

The channel's conductance is given by an inactivation  $H_I$  and an activation  $M_I$  term

$$(18) \quad g_{Ca} = \bar{g}_{Ca} M_I H_I$$

where  $\bar{g}_{Ca}$  is the maximum conductance when the calcium channels are open.  $M_I$ 's voltage dependence has a sigmoidal behavior that can be adjusted by a Boltzmann equation of the type

$$(19) \quad M_I = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{V_m - V_M}{S_M}\right)}$$

where  $S_M$  is the curve's slope and  $V_M$  is the membrane potential. The simulation values are  $S_M = 7.5 \times 10^{-3}$  and  $V_M = 23 \times 10^{-3}$ .

The intracellular  $\text{Ca}^{++}$  concentration can be treated as a dynamic variable and the changes in time are due to the following factors: the influx of  $\text{Ca}^{++}$  produced by  $I_{Ca^{++}}$  and efflux of  $\text{Ca}^{++}$  produced by the  $\text{Ca}^{++}$  pumps. Consequently, the equation describing the changes of  $[\text{Ca}^{++}]_i$  is

$$(20) \quad \frac{d[\text{Ca}^{++}]}{dt} = F_I \left( \frac{-I_{Ca}}{873207 \times 10^{-13}} - K_{Ca} [\text{Ca}^{++}] \right)$$

and the values that we employed were:  $K_{Ca} = 60$  and  $F_I = 3 \times 10^{-4}$ .

This equation differs from Chay's approach, since we take the calcium's double charge into consideration. In this equation  $K_{Ca}$  is the efflux velocity constant for

$\text{Ca}^{++}$  and  $F_I$  is the proportion of free  $\text{Ca}^{++}$  with respect to the total inside the cell.

The total current across the membrane can be expressed as

$$(21) \quad I_m = I_{Ca} + I_{K(V)} + I_{K_{ATP}} + I_L$$

where

$$(22) \quad I_{Ca} = g_{Ca}(V_m - V_{Ca})$$

$$(23) \quad I_{K(V)} = g_K(V_m - V_K)$$

$$(24) \quad I_{K_{ATP}} = g_{K_{ATP}}(V_m - V_K)$$

$$(25) \quad I_L = g_L(V_m - V_L)$$

The changes in the membrane potential can be described as

$$(26) \quad \frac{dV_m}{dt} = \frac{-I_m}{C_m}$$

where  $V_m$  is the membrane potential and  $C_m$  is the membrane capacitance.

**Example 2.1.** Figure 1 shows simulation of electrical activity in a pancreatic  $\beta$ -cell. We show changes in membrane potential and intracellular calcium oscillations. With this model, a more detailed study can be done.

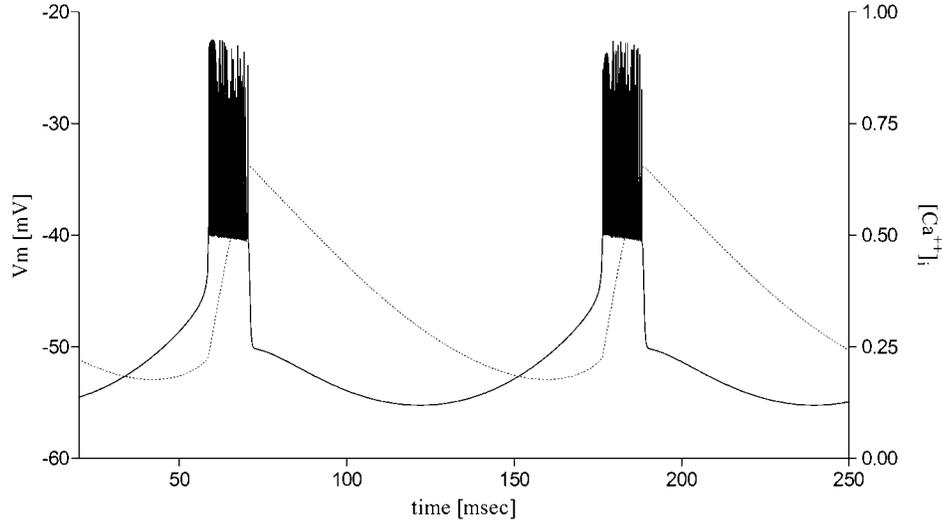


FIGURE 1. Simulation of the change in membrane potential and intracellular calcium oscillations.

## 3. A TWO-CELL COUPLED MODELS

**3.1. Identical cells.** Pancreatic  $\beta$ -cells are in close electrical contact with their neighbours through protein channels connecting one cell to another, so that ions can flow from one cell to the other without passing through extracellular space. In this section, we present a coupled-cell system. The system of equations is as follows:

$$(27) \quad \tau \frac{dv_i}{dt} = -I_{ion}(v_i, n_i, s_i) - g_c \sum_{j \in \Omega_i} (v_i - v_j)$$

$$(28) \quad \tau \frac{dn_i}{dt} = \lambda [n_\infty(v_i) - n_i]$$

$$(29) \quad \tau_s \frac{ds_i}{dt} = s_\infty - s_i$$

where  $v$  represent the membrane potential,  $n$  and  $s$  represent open probabilities,  $\lambda$ ,  $\tau$  and  $\tau_s$  are parameters governing the time scales of the dynamics,  $I_{ion}$  represent the potassium, calcium and slowly modulated currents. In a coupled cell system, the variables  $v$ ,  $n$  and  $s$  are indexed by cell number, and a coupling term is added, where  $g_c$  represents a constant junctional conductance,  $i = 1, 2$ , and  $\Omega_i$  is the set of indices of the cells that are coupled to cell  $i$ . Simulations of larger clusters of cells have shown that the results obtained for two-cell models can be carried over to large populations [16, 30]. Sherman and Rinzel [30] examined the role of gap-junctional coupling in synchronizing electrical activity of identical cells. It was shown that synchrony on the level of bursts occurred over a wide range of coupling conductances, but that synchrony on the level of the spikes within the active phase depends on coupling strength [6, 7]. To understand this facts the study was extended to the fast-slow decomposition method. In this case, the fast subsystem is four-dimensional, and there are two candidates for the bifurcation parameter, corresponding to the presence of two slow variables,  $s_1$  and  $s_2$ . The coupled fast subsystem, with a single bifurcation parameter  $\mathbf{s}$  is

$$(30) \quad \tau \frac{dv_i}{dt} = -I_{ion}(v_i, n_i, \mathbf{s}) - g_c(v_i - v_j)$$

$$(31) \quad \tau \frac{dn_i}{dt} = \lambda [n_\infty(v_i) - n_i],$$

for  $i, j = 1, 2, i \neq j$ .

We focus on the moderate to strong coupling regime, for which a two-cell system with identical cells behaves as the single cell, as shown in Figure 2.

**Example 3.1.**  $\beta$ -cells do not act in isolation. Instead, they are in close electrical contact with their nearest neighbours. The numerical solution for the two-cell model is shown in Figure 2. Burst are synchronized.

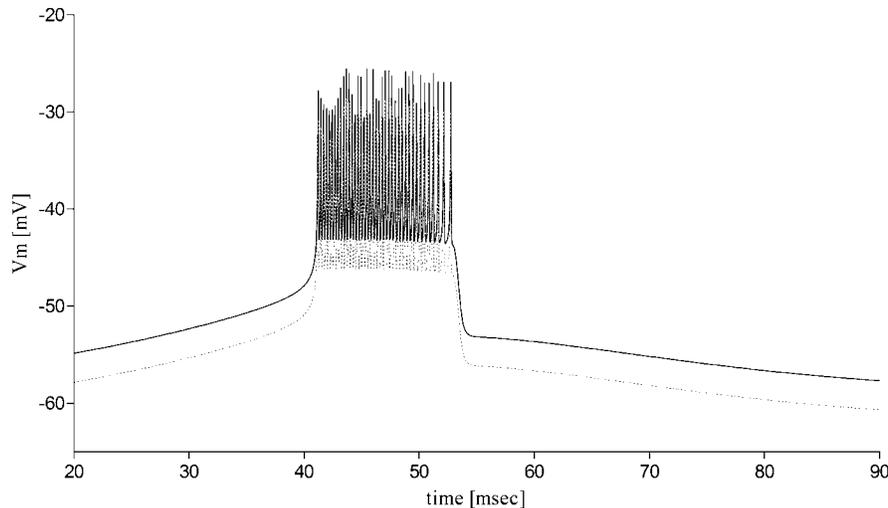


FIGURE 2. Behaviour of the two-cell model. The solid curve is the trace for cell 1 and dotted curve is the trace for cell 2.

**3.2. Non-identical cells.** Two-cell systems of non-identical cells were considered by de Vries [15], motivated by numerical simulations of clusters of heterogeneous cells. It was shown that physiologically plausible coupling conductances can synchronize the bursting pattern of the cells in the presence of heterogeneity of the cell parameters [3]. If the heterogeneity is introduced by adding a parameter  $b_i$  [23] to the equations governing the dynamics of  $s_i$

$$(32) \quad \tau_s \frac{ds_i}{dt} = s_\infty(v_i) - s_i + b_i.$$

The parameter  $b_i$  shifts the relative position of the slow nullcline for  $s_i$ , with respect to the Z-shaped curve of steady states in the bifurcation diagram for the fast subsystem [26]. The linear transformation  $\tilde{s}_i = s_i - b_i$  transfers the heterogeneity to the fast subsystem, namely to the  $v_i$  equation, where it appears as an additional linear potassium conductance. The heterogeneity is more general than it appears at first glance. Numerical solution for a specific case of  $b_1 \neq b_2$  is shown in Figure 3. Bursts are synchronized, but now the spiking during the active phase appears to be asymmetric. The spikes of the two cells no longer are in-phase, nor of equal amplitude. In addition, the burst period is lengthened relative to the single-cell buster. These observations can be explained with a bifurcation study of the coupled fast subsystem. The approximation  $s_1 \approx s_2$  no longer holds.

Nominally, a two-parameter bifurcation diagram would be required to explain the observations. However,  $s_2 - s_1 \approx \text{constant}$ .

Thus, if we let

$$(33) \quad \delta = (s_2 - s_1)/2,$$

$$(34) \quad s = (s_1 + s_2)/2,$$

then we can write  $s_1 = s - \delta$  and  $s_2 = s + \delta$ , and this motivates the computation of a bifurcation diagram for the coupled fast subsystem with respect to  $s$ , holding  $\delta$  fixed. In particular, we present the following coupled fast subsystem:

$$(35) \quad \tau \frac{dv_1}{dt} = -I_{ion}(v_1, n_1, \mathbf{s} - \delta) - g_c(v_1 - v_2),$$

$$(36) \quad \tau \frac{dn_1}{dt} = \lambda[n_\infty(v_1) - n_1],$$

$$(37) \quad \tau \frac{dv_2}{dt} = -I_{ion}(v_2, n_2, \mathbf{s} + \delta) - g_c(v_2 - v_1),$$

$$(38) \quad \tau \frac{dn_2}{dt} = \lambda[n_\infty(v_2) - n_2],$$

where  $\delta$  is taken to be the average value of  $(s_2 - s_1)/2$ , based on many iterations of the full two-cell system. The primary bifurcation parameter is  $s$ , and the secondary one is  $\delta$ .

**Example 3.2.** The numerical solution for the two-cell model with non-identical cell is shown in Figure 3. The spiking during the active phase appears to be asymmetric.

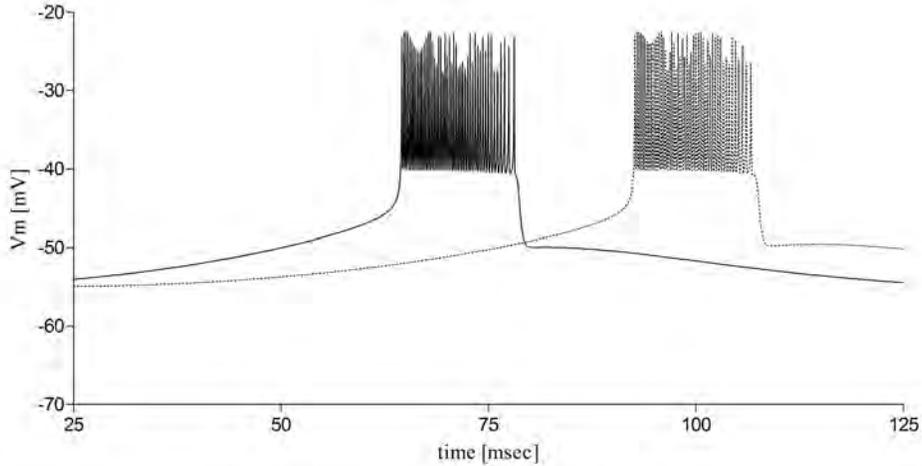


FIGURE 3. Behaviour of the two-cell model with non-identical cells. The solid curve is the trace for cell 1 and dotted curve is the trace for cell 2.

The examples discussed here represents only the tip of the  $\beta$ -cell field. The precise contributions of the mechanisms we have treated, as well as some that we have not treated, such as inactivation of the  $\text{Ca}^{2+}$  channels, are not settled.

However, it seems likely that complex interactions of all of these will be necessary to explain the diverse phenomena observed. The mechanism of other important regulators of cell electrical activity and  $[Ca^{2+}]_i$  such as cAMP and epinephrine, remain to be elucidated. Nonetheless, the basic mechanism and concepts presented here should prepare the reader sufficiently to explore the literature on his or her own.

#### REFERENCES

- [1] Ainscow, E. K. and G. A. Rutter. *Glucose-Stimulated Oscillations in Free Cytosolic ATP Concentration Imaged in Single Islet  $\beta$ -Cells*. Diabetes, **51**(2002), supp 1, February, S162-S170.
- [2] Ávila-Pozos, R., Trujillo, H. and Godínez, R. *Simulation of the Electrical Activity of the Pancreatic  $\beta$ -Cells Induced by Ingesting of Glucose During an Oral Glucose Tolerance Test*. Proc. of ICBS: 101-103, 2007.
- [3] Barajas-Ramírez, J. G., Steur, E., Femat, R. and Nijmeijer, H. *Synchronization and activation in a model of a network of  $\beta$ -cells*. Automatica **47**:1243-1248, 2011.
- [4] Barbosa, R. M., Silva, A. M., Tomé, A. R., Stamford, J.A., Santos, R. M. and Rosario, L.M. *Control of pulsatile 5-HT/insulin secretion from single mouse pancreatic islets by intracellular calcium dynamics*. J Physiol. **510**:135-143, 1998.
- [5] Bertram, R., Previte, J., Sherman, A., Kinard, T.A. and Satin, L. S. *The Phantom Burster Model for Pancreatic  $\beta$ -Cells*. Biophys J. **79**:2880-2892, 2000.
- [6] Bertram, R. and Sherman, A. *A Calcium-based Phantom Bursting Model for Pancreatic Islets*. Bulletin of Mathematical Biology **66**:1313-1344, 2004.
- [7] Bertram, R., Sherman and Satin, L. S. *Metabolic and electrical oscillations: partners in controlling pulsatile insulin secretion*. Am J Physiol Endocrinol Metab **293**:E890-E900, 2007.
- [8] Beuter, A., Glass, L., Mackey, M. and Titcombe, M. S. (eds) *Nonlinear Dynamics in Physiology and Medicine*. Springer, 2003.
- [9] Chay, T.-R. *A model for biological oscillations*. Proc. Nat. Acad. Sci. **78**(4): 2204-2207, 1981.
- [10] Chay, T.-R. *Minimal Model for Membrane Oscillation in the Pancreatic  $\beta$ -Cell*. Biophys. J. **42**: 181-190, 1983.
- [11] Chay, T.-R. and Rinzel, J. *Bursting, Beating, and Chaos in an Excitable Membrane Model*. Biophys. J. **47**: 357-366, 1985.
- [12] Chay, T.-R. and Keizer, J. *Theory of the Effect of Extracellular Potassium on Oscillations in the Pancreatic  $\beta$ -cell*. Biophys. J. **48**: 815-827, 1985.
- [13] Chay, T.-R. *On the Effect of the Intracellular Calcium-Sensitive  $K^+$  Channel in the Bursting Pancreatic  $\beta$ -cell*. Biophys. J. **50**: 765-777, 1986.
- [14] Detimary, P., Dejonghe, S., Ling, Z., Pipeleers, D., Schuit, F. and Henquin, J.-C. *The Changes in Adenine Nucleotides Measured in Glucose-stimulated Rodent Islets Occur in  $\beta$  Cells but Not in  $\alpha$  Cells and Are Also Observed in Human Islets*. J. Bio. Chem. **273**(51): 33905-33908, 1998.
- [15] De Vries, G. *The effect of coupling noise, and heterogeneity on bursting oscillations*. Canadian Applied Mathematics Quarterly. **11**(1): 29-50, 2003.
- [16] Fall, C. P., Marland E. S., Wagner, J. M. and Philipson L. H. (eds) *Computational Cell Biology*. Springer, 2002.
- [17] Fridlyand, L. E., Tamarina N. and Philipson L. H. *Modeling of  $Ca^{++}$  flux in pancreatic  $\beta$ -cells: role of the plasma membrane and intracellular stores*. Am J Physiol Endocrinol Metab, **285**: E138-E154, 2003.
- [18] Gall, D. and Susa, I. *Effect of Na/Ca Exchange on Plateau Fraction and  $[Ca]_i$  in Models for Bursting in Pancreatic  $\beta$ -Cells*. Biophys J. **77**: 45-53, 1999.
- [19] Godínez, F. R. and Urbina, M. G. *Simulación de la actividad eléctrica de las células  $\beta$  del páncreas*. Rev. Mex. de Ing. Bioméd., **XIV**(1): 21, 1993.
- [20] González, V. and Godínez, R. *Simulation of five intracellular  $Ca^{2+}$ -regulation mechanisms in response to voltage-clamp pulses*. Comp in Biol and Med. **34**(4): 279, 2004.
- [21] Hanley, P. J., Musset, B., Renigunta, V., Limberg, S. H., Dalpke, A. H., Sus, R., Heeg, K. M., Preisig-Müller, R. and Daut, J. *Extracellular ATP induces oscillations of intracellular*

- $Ca^{2+}$  and membrane potential and promotes transcription of *IL-6* in macrophages. PNAS **101**(25): 9479-9484, 2004.
- [22] Himmel, D.M and Chay, T.-R. *Theoretical Studies on the Electrical Activity of Pancreatic  $\beta$ -cells as a Function of Glucose*. Biophys. J. **51**: 89-107, 1987.
- [23] Izhikevich, E.M. *Neural excitability, spiking and bursting*. Int. J. Bifurcation and Chaos **10**: 1171-1266, 2000.
- [24] Larsson, O., Kindmark, H., Bränström, R., Fredholm, B. and Berggren P.-O. *Oscillations in  $K_{ATP}$  channel activity promote oscillations in cytoplasmic free  $Ca^{2+}$  concentration in the pancreatic  $\beta$  cell*. Proc. Natl. Acad. Sci. **93**: 5161-5165, 1996.
- [25] Liu, Y.-J., Tengholm, A., Grapengisser, E., Hellman, B. and Gylfe E. *Origin of slow and fast oscillations of  $Ca^{2+}$  in mouse pancreatic islets*. Journal of Physiology **508**(2): 471-481, 1998.
- [26] Meng, P., Lu, Q. S., and Wang, Q. Y. *Dynamical analysis of bursting oscillations in the Chay-Keizer model with three time scales*. Sci China Tech Sci. **54**: 2024-2032, 2011.
- [27] Porkensen, N., Nyholm, B., Veldhuis, J.D., Butler, P.C. and Schmitz, O. *In humans at least 75% of insulin secretion arises from punctuated insulin secretory bursts*. The Am Physiol Soc. 0193-1849, 1997.
- [28] Schuster, S., Marhl, M. and Hofer, T. *Modelling of simple and complex calcium oscillations From single-cell responses to intercellular signaling*. Eur. J. Biochem. **269**: 1333-1355, FEBS 2002.
- [29] Scott, A. M., Atwater, I. and Rojas, E. *A Method for the Simultaneous Measurement of Insulin Release and  $\beta$  Cell Membrane Potential in Single Mouse Islets of Langerhans*. Diabetologia, **21**: 470-475, 1981.
- [30] Sherman, A. and Rinzel, J. *Model for synchronization of pancreatic  $\beta$ -cells by gap junctions*. Biophys. J. **59**: 547-559, 1991.
- [31] Smith, P.A., Ashcroft, F. M. and Rorsman, P. *Simultaneous recordings of glucose dependent electrical activity and ATP-regulated  $K^+$ -currents in isolated mouse pancreatic  $\beta$ -cells*. FEBS **261**(1): 187-190, 1990.
- [32] Trujillo, H. and R.R. Roman. *Does a single time function adequately describe blood glucose concentration dynamics during an OGTT?* Medical Hypotheses, **62**:53-61, 2004.
- [33] Westermark, P. O. and A. Lansner. *A Model of Phosphofructokinase and Glycolytic Oscillations in the Pancreatic  $\beta$ -cell*. Biophysics Journal, **85**:126-139, 2003.

Área Académica de Matemáticas y Física,  
 Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería,  
 Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo  
 Carretera Pachuca-Tulancingo, Km. 4.5  
 Mineral de la Reforma, Hgo. C.P. 42184

Laboratorio de Biofísica  
 Departamento de Ingeniería Eléctrica, DCBI  
 Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa  
 Av San Rafael Atlixco No.186, Col.Vicentina  
 Del. Iztapalapa, D.F., C.P.09340

ravila@uaeh.edu.mx, rcruz@uaeh.edu.mx, gfjr@xanum.uam.mx

# CAPÍTULO 5

## NUEVA GENERACIÓN ALGEBRAICA DE SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE HERMITE

MIRIAM ARENAS ALVAREZ  
MARIO ALBERTO MAYA MENDIETA

FCFM, BUAP

RESUMEN. Los polinomios de Hermite tienen mucha importancia en la física matemática, en particular son soluciones del problema del oscilador armónico cuántico, del cual se derivan muchas aplicaciones teóricas, prácticas y didácticas. En este trabajo presentamos una manera algebraica de generar los polinomios de Hermite utilizando únicamente dos operadores diferenciales de primer orden, llamados operadores de escalera. Establecemos un nuevo conjunto de relaciones iterativas de carácter general entre operadores y polinomios. Demostramos algunas de sus propiedades, en particular, que con la forma más general para los polinomios, se satisface la ecuación diferencial de Hermite.

### 1. INTRODUCCIÓN

Uno de los hechos importantes de muchos de los fenómenos físicos es que se pueden describir con ecuaciones diferenciales de segundo orden, lineales y homogéneas. Es el caso de la mecánica cuántica con la ecuación de Schrodinger:

$$-\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + V(x)\psi_n = E_n\psi_n, \quad (1.1)$$

donde  $E_n$  es la energía, independiente de la posición  $x$ , la cual es una variable real. El potencial  $V(x)$  es una función real y representa a la fuerza que mueve a la partícula y caracteriza al mismo sistema físico,  $E_n$  es la energía y la solución  $\psi_n$  es la función de onda que contiene toda la información que se puede conocer sobre dicho sistema [1].

En el caso del oscilador armónico, cuyo potencial es

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad (1.2)$$

la solución es una función de onda de la forma

$$\psi_n(x) = e^{-x^2/2}H_n(x) \quad (1.3)$$

donde  $H_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  son los polinomios de Hermite. La exponencial muestra el comportamiento asintótico  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi_n(x) = 0$  de la función de onda. La sustitución de (1.3) en (1.1) con  $V(x)$  dado por (1.2) nos permite encontrar la ecuación diferencial que satisfacen los polinomios de Hermite:

$$\frac{d^2H_n}{dx^2} - 2x\frac{dH_n}{dx} + 2nH_n = 0 \quad (1.4)$$

llamada ecuación de Hermite. El entero positivo  $n$  es el número cuántico que aparece en la energía  $E_n$ .

Desde el punto de vista de la física, el oscilador armónico es uno de los problemas más importantes tanto en su aplicación como en su valor didáctico, pues la forma de encontrar su solución (1.3) es algo muy conocido. Además el oscilador armónico permite generalizaciones que sirven, entre otras cosas, para profundizar en los conceptos teóricos de la mecánica cuántica. Podemos mencionar algunos trabajos que van en ese sentido: el oscilador anarmónico [2], el oscilador armónico singular [3, 4], los osciladores amortiguados [5], la generalización al caso relativista [6], los osciladores armónicos en espacios curvados [7] y muchos otros.

Por otro lado, desde el lado de la física matemática, la ecuación de Hermite es una de las más estudiadas a través de la historia de la física matemática, y es uno de los temas importantes en los textos sobre las ecuaciones llamadas especiales. En la literatura el tema de los polinomios de Hermite tradicionalmente se inicia de dos maneras: 1) resolviendo la ecuación (1.4) por medio de series de potencias de  $x$  [8] y 2) estableciendo una función generatriz cuya expansión en serie contiene a los polinomios de Hermite en sus coeficientes [8].

En la Ref. [9] se presenta un novedoso mecanismo, el cual es básicamente algebraico, basado en dos operadores que llamamos operadores de escalera pues permiten, partiendo de un polinomio de Hermite de grado  $n$ , es decir, de  $H_n$ , calcular el anterior  $H_{n-1}$  y el siguiente  $H_{n+1}$ . Estos operadores llamados de descenso  $\hat{D}$  y de ascenso  $\hat{A}$  son operadores diferenciales de primer orden. Con estos operadores nosotros encontramos algunas expresiones de los polinomios  $H_n$  de carácter general, a partir de las cuales se puede desarrollar toda la teoría que ya está establecida en la literatura. Aparte de su valor como un método alternativo para generar los polinomios de Hermite, creemos que es más simple que los métodos ya mencionados, como se verá más adelante.

El trabajo se presenta de la siguiente manera: En la Sec. 2 demostramos, sólo para una comparación con nuestro método, algunas propiedades de los polinomios de Hermite de la manera como aparecen en muchos libros sobre el tema, iniciando con la función generatriz, al estilo de la Ref. [10] y concluyendo con algunos comentarios sobre la ecuación diferencial. En la Sec. 3 repasamos brevemente la teoría formal en la que se basa la existencia de los operadores de escalera para el caso general expresado en la ecuación diferencial (3.1), lo cual se aplica en la Sec.4 para el caso particular de la ecuación de Hermite, construyendo los operadores de escalera y mostrando como se construyen los polinomios comenzando con el de menor grado. En la Sec. 5 presentamos nuestra contribución estableciendo un conjunto de fórmulas generales que, hasta donde sabemos, son inéditas, las cuales usamos en la Sec. 6 para demostrar las mismas propiedades que se derivaron en la Sec. 2 con el método tradicional y demostramos que la forma más general de  $H_n$  es efectivamente solución de (1.4). Finalmente, en la Sec. 7 damos algunas conclusiones.

2. EL MÉTODO TRADICIONAL

Sólo para comparación entre uno de los métodos tradicionales para generar los polinomios de Hermite y el método algebraico que proponemos, en esta sección revisamos brevemente la manera de construir dichos polinomios con una función llamada generatriz. Este método se encuentra en casi todos los textos que tratan las funciones especiales o funciones de la física matemática. Nosotros consultamos la Ref. [8].

Partimos de la función generatriz de los polinomios de Hermite

$$G(x, t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n, \quad (2.1)$$

donde se hace explícito el papel de los polinomios de Hermite como parte de la serie de potencias en  $t$  para la función  $G$  que depende de las variables  $x$  y  $t$ . Haciendo explícitamente el desarrollo en serie de Taylor se encuentra que

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n G}{\partial t^n} \right|_{t=0} t^n.$$

Calculando la  $n$ -ésima derivada parcial de  $G(x, t)$  respecto a  $t$  y realizando algunos arreglos obtenemos

$$H_n(x) = \left. \frac{\partial^n G}{\partial t^n} \right|_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \quad (2.2).$$

La Ec. (2.2) es llamada fórmula de Rodrigues. Con (2.2) se puede demostrar que

$$\begin{aligned} H_n(x) &= (2x)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2}n)_r (\frac{1}{2} - \frac{n}{2})_r}{r!} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^r, \\ &= (2x)^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1}{2} - \frac{n}{2}; -\frac{1}{x^2}\right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde

$$F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1}{2} - \frac{n}{2}; -\frac{1}{x^2}\right),$$

es una función hipergeométrica confluyente.

Con (2.3) y cierto trabajo, pero más fácilmente con (2.2), se encuentran los polinomios de grado mas bajo:

$$\begin{aligned} H_1 &= 2x, \\ H_2 &= -2 + 4x^2, \\ H_3 &= -12x + 8x^3, \\ H_4 &= 12 - 48x^2 + 16x^4, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ahora establecemos alguna propiedades de los polinomios de Hermite, entre ellos la ecuación diferencial que satisfacen.

Primero desarrollamos las llamadas relaciones de recurrencia entre polinomios. Para ello primero derivamos (2.1) respecto a  $x$ :

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2tG(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (2.5)$$

Usando de nuevo (2.1) en (2.5) e igualando los coeficientes de las potencias de  $t$  encontramos la relación de recurrencia

$$2nH_{n-1}(x) = H'_n(x) \quad (2.6)$$

entre polinomios de diferente grado.

Otra relación de recurrencia, la cual es independiente de (2.6), se obtiene derivando la función generatriz (2.1) pero ahora respecto a  $t$ :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = (2x - 2t)G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

de donde:

$$2xH(x) - 2nH_{n-1}(x) = H_{n+1}(x). \quad (2.7)$$

Con (2.6) y (2.7), se pueden deducir una infinidad de nuevas relaciones entre polinomios de Hermite, por ejemplo, eliminando  $2nH_{n-1}(x)$  de (2.6) y (2.7) obtenemos

$$2xH(x) - H'_n(x) = H_{n+1}(x).$$

Ahora vamos a obtener la ecuación diferencial de Hermite. Derivamos la última expresión tenemos

$$H''_n(x) = -H'_{n+1}(x) + 2xH'_n(x) + 2H_n(x),$$

pero de (2.4) tenemos, con el cambio  $n \rightarrow n+1$ ,

$$H'_{n+1} = 2(n+1)H_n(x)x,$$

y combinando las dos últimas igualdades, obtenemos

$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0$$

que en general se escribe

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0. \quad (2.8)$$

Esta expresión es la ecuación diferencial de Hermite, mostrando que  $H_n(x)$  generado por la función (2.1), es decir (2.3), es una solución. Esta es una prueba indirecta. Un desarrollo mas completo consiste en proponer como solución de (2.8) una serie de potencias de la forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \quad (2.9)$$

Al sustituir (2.9) en (2.8) se encuentra la siguiente relación entre los coeficientes  $c_{k+2}$  y  $c_k$

$$c_{k+2} = \frac{2(k-n+1)}{(k+2)(k+3)} c_k \quad (2.10)$$

lo que indica que existen soluciones de paridad par y soluciones de paridad impar. La relación (2.10) también sirve para cortar la serie y obtener un polinomio de grado  $n$  si imponemos la condición de que a partir de cierta  $k$ ,  $c_{k+2} = 0$  y  $c_k \neq 0$ . Para los casos mas sencillos, es decir, con el entero  $n$  pequeño, se demuestra que

(2.9) se reduce a los polinomios (2.4). Los detalles de este mecanismo se pueden encontrar en cualquier texto de ecuaciones diferenciales sobre el tema. También se pueden consultar libros de mecánica cuántica en relación con el oscilador armónico cuántico [1], y como se dijo antes, en textos sobre funciones de la física matemática [8, 10].

### 3. TEORÍA DE LOS OPERADORES DE ESCALERA

En esta sección hacemos una reseña de la teoría formal [9] que sirve para construir los operadores de escalera para una familia de ecuaciones diferenciales de segundo orden, lineales y homogéneas

$$P(x) \frac{d^2 y_n}{dx^2} + Q(x) \frac{dy_n}{dx} + R_n(x) y_n = 0, \quad (3.1)$$

donde  $\frac{Q(x)}{P(x)}$  y  $\frac{R_n(x)}{P(x)}$  son funciones analíticas en los puntos ordinarios de la ecuación diferencial. Los coeficientes  $P(x)$  y  $Q(x)$  son los mismos para cada familia determinada por la función  $R_n(x)$  definida por el entero  $n$ . Para mayor información ver la referencia original [9].

Los operadores de escalera  $\widehat{A}_n(x)$  y  $\widehat{D}_n(x)$ , los cuales son operadores diferenciales de primer orden, se definen por las expresiones

$$\widehat{A}_n y_n = a_n y_{n+1}, \quad (3.2)$$

$$\widehat{D}_n y_n = d_n y_{n-1}, \quad (3.3)$$

con  $a_n$  y  $d_n$  constantes, y  $\widehat{A}_n$  (operador de ascenso o subida) y  $\widehat{D}_n$  (operador de descenso o de bajada) tienen la forma

$$\widehat{A}_n = g_n(x) \frac{d}{dx} + u_n(x), \quad (3.4)$$

$$\widehat{D}_n = f_n(x) \frac{d}{dx} + v_n(x). \quad (3.5)$$

Vamos a encontrar las funciones  $f_n$ ,  $g_n$ ,  $v_n$  y  $u_n$  que nos permitan construir los operadores de ascenso  $\widehat{A}_n$  y descenso  $\widehat{D}_n$  para encontrar las soluciones de (3.1). Es claro que los operadores de escalera (3.4) y (3.5) y las constantes  $a_n$  y  $d_n$  dependen fundamentalmente de los coeficientes variables  $P(x)$ ,  $Q(x)$  y  $R_n(x)$ .

Usamos (3.2) y (3.3) para demostrar que

$$\widehat{D}_{n+1} \widehat{A}_n y_n = a_n d_{n+1} y_n, \quad (3.6)$$

$$\widehat{A}_n \widehat{D}_{n+1} y_{n+1} = d_{n+1} a_n y_{n+1}. \quad (3.7)$$

Definimos la constante

$$k_n = a_n d_{n+1}. \quad (3.8)$$

Ahora calculamos de nuevo (3.6) y (3.7) pero ahora con las formas (3.4) y (3.5). Los resultados son

$$\begin{aligned}\widehat{D}_{n+1}\widehat{A}_n &= f_{n+1}g_n\frac{d^2}{dx^2} \\ &+ \left(f_{n+1}\frac{dg_n}{dx} + f_{n+1}u_n + v_{n+1}g_n\right)\frac{d}{dx} \\ &+ f_{n+1}\frac{du_n}{dx} + d_{n+1}u_n,\end{aligned}\quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}\widehat{A}_n\widehat{D}_{n+1} &= g_nf_{n+1}\frac{d^2}{dx^2} \\ &+ \left(g_n\frac{df_{n+1}}{dx} + f_{n+1}u_n + g_nv_{n+1}\right)\frac{d}{dx} \\ &+ g_n\frac{dv_{n+1}}{dx} + u_nv_{n+1}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Para establecer la conexión entre la ecuación diferencial (3.1) y los operadores de escalera (3.2) y (3.3) proponemos que

$$\widehat{D}_{n+1}\widehat{A}_n = P\frac{d^2}{dx^2} + Q\frac{d}{dx} + R_n + k_n, \quad (3.11)$$

$$\widehat{A}_n\widehat{D}_{n+1} = P\frac{d^2}{dx^2} + Q\frac{d}{dx} + R_{n+1} + k_n. \quad (3.12)$$

De (3.9) y (3.11)

$$P = f_{n+1}g_n, \quad (3.13)$$

$$Q = f_{n+1}\frac{dg_n}{dx} + f_{n+1}u_n + v_{n+1}g_n, \quad (3.14)$$

$$R_n + k_n = f_{n+1}\frac{du_n}{dx} + v_{n+1}u_n, \quad (3.15)$$

y de (3.10) y (3.12)

$$P = g_nf_{n+1}, \quad (3.13)$$

$$Q = g_n\frac{df_{n+1}}{dx} + f_{n+1}u_n + g_nv_{n+1}, \quad (3.16)$$

$$R_{n+1} + k_n = g_n\frac{dv_{n+1}}{dx} + u_nv_{n+1}. \quad (3.17)$$

De (3.14) y (3.16) encontramos

$$f_{n+1}\frac{dg_n}{dx} = g_n\frac{df_{n+1}}{dx}. \quad (3.18)$$

De todas las soluciones posibles de esta ecuación diferencial escogemos la sencilla:

$$f_{n+1} = g_n. \quad (3.19)$$

Pero por (3.13)

$$P = f_{n+1}g_n \implies f_{n+1} = g_n = \sqrt{P}. \quad (3.20)$$

En todos los casos de interés para la física matemática  $P(x) \geq 0$  en una vecindad de los puntos singulares regulares.

Vemos de (3.20) que  $f_n$  y  $g_n$  son independientes del entero  $n$ . Ahora pasamos a determinar la forma de las funciones  $u_n$  y  $v_n$ . Sustituyendo en (3.14) tenemos

$$u_n + v_{n+1} = \frac{Q}{\sqrt{P}} - \frac{d\sqrt{P}}{dx}. \quad (3.21)$$

Ahora regresamos a (3.15) y (3.17) que ahora son

$$R_n + k_n = \sqrt{P} \frac{du_n}{dx} + v_{n+1} u_n, \quad (3.22)$$

$$R_{n+1} + k_n = \sqrt{P} \frac{dv_{n+1}}{dx} + u_n v_{n+1}. \quad (3.23)$$

Restando e integrando obtenemos

$$v_{n+1} - u_n = c_n + \int \frac{1}{\sqrt{P}} (R_{n+1} - R_n) dx. \quad (3.24)$$

Finalmente, con (3.21) y (3.24) encontramos

$$u_n = \frac{Q}{2\sqrt{P}} - \frac{1}{2} \frac{d\sqrt{P}}{dx} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{P}} (R_{n+1} - R_n) dx - c_n, \quad (3.25)$$

$$v_{n+1} = \frac{Q}{2\sqrt{P}} - \frac{1}{2} \frac{d\sqrt{P}}{dx} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{P}} (R_{n+1} - R_n) dx + c_n. \quad (3.26)$$

Con (3.20), (3.25) y (3.26) tenemos las funciones  $f_{n+1}$ ,  $g_n$ ,  $u_n$  y  $v_{n+1}$  en términos de las funciones  $P(x)$ ,  $Q(x)$  y  $R_n(x)$  de la ecuación diferencial (3.1), necesarias para construir los operadores de escalera (3.4) y (3.5) para cada familia de ecuaciones diferenciales y sus soluciones. En [9] la teoría presentada aquí se aplica a las ecuaciones de Bessel, de Hermite, de Laguerre, de Legendre, asociada de Legendre, de Tchebischef, de Jacobi y asociada de Jacobi y a otras no tan conocidas, pero podemos decir que se tratan en [9] los casos mas importantes de ecuaciones de la física matemática. Como dijimos en la introducción, nosotros hacemos una generalización de los resultados de [9] para la ecuación de Hermite. El método esbozado en este trabajo es aplicable a varias de las ecuaciones mencionadas.

#### 4. GENERACIÓN ALGEBRÁICA DE LOS POLINOMIOS DE HERMITE

En esta sección presentamos el esquema que permite generar la teoría de Hermite por el método puramente algebraico, que se basa en los dos operadores diferenciales de primer orden, de acuerdo con el modelo expuesto en la sección anterior. Aquí los construimos explícitamente. Escribimos de nuevo la ecuación de Hermite (2.8)

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0. \quad (2.8)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
P(x) &= 1, \\
Q(x) &= -2x, \\
R_n &= 2n, \quad n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Así, por medio de (4.1), (3.20), (3.25) y (3.26) tenemos

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= g_n(x) = 1, \\
u_n(x) &= -2x - \frac{1}{2}c_n, \\
v_{n+1}(x) &= \frac{1}{2}c_n.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Con (3.4), (3.5) y (4.2) construimos los operadores de ascenso y descenso para la ecuación de Hermite:

$$\widehat{A} = \frac{d}{dx} - 2x, \tag{4.3}$$

$$\widehat{D} = \frac{d}{dx}, \tag{4.4}$$

respectivamente. Observamos que los operadores de escalera son independientes de  $n$ . Las propiedades (3.6) y (3.7) son ahora

$$\widehat{A}H_n(x) = -H_{n+1}(x), \tag{4.5}$$

$$\widehat{D}H_n(x) = 2nH_{n-1}(x). \tag{4.6}$$

Ahora procedemos a generar los polinomios. De (4.6) tenemos, con  $n = 0$ ,

$$\widehat{D}H_0 = \frac{d}{dx}H_0 = 0,$$

de donde obtenemos el primer polinomio

$$H_0 = 1. \tag{4.7}$$

Ahora vamos para arriba. Con (4.5) obtenemos sucesivamente los polinomios de mayor grado a partir de (4.7):

$$\begin{aligned}
H_1 &= -\widehat{A}H_0, \\
H_2 &= -\widehat{A}H_1, \\
H_3 &= -\widehat{A}H_2, \\
H_4 &= -\widehat{A}H_3, \\
&\dots \\
H_n &= -\widehat{A}H_{n-1}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Al realizar las operaciones correspondiente encontramos de nuevo las expresiones (2.4), pero ahora de una manera mas directa y mas sencilla.

Las relaciones de recurrencia (2.6) y (2.7) están contenidas en las formas (4.3) y (4.4) respectivamente, de los operadores de escalera.

Antes de terminar esta sección, tenemos que aclarar que los operadores (4.3) y (4.4) aquí expuestos no son los mismos que aparecen en la literatura común sobre el oscilador armónico cuántico; ver por ejemplo la Ref. [1].

### 5. FÓRMULAS GENERALIZADAS

En esta sección presentamos unas fórmulas nuevas que generalizan las propiedades de los operadores de escalera establecidas en la Ref. [9]. Estas fórmulas se pueden obtener de una manera iterativa comenzando con  $n = 0$  y usando repetidamente el operador de ascenso, o comenzando con alguna  $n$  y el operador de descenso. Una demostración formal se realiza a través de inducción matemática. Aquí sólo las exponemos y demostramos en la siguiente sección que dan resultados correctos.

La primera de ellas es muy interesante; se refiere a  $n$  aplicaciones sucesivas del operador de ascenso

$$\widehat{A}^n = \left( \frac{d}{dx} - 2x \right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} n!}{(n-k)!k!} H_{n-k} \widehat{D}^k. \quad (5.1)$$

Esta expresión recuerda la fórmula binomial. Es una relación entre potencias de los operadores de ascenso y descenso. Lo que llama la atención es que los mismos polinomios de Hermite  $H_{n-k}$  aparecen como parte de los coeficientes de las potencias del operador de descenso.

Otra fórmula generalizada es una expresión equivalente a (4.8):

$$H_n = (-1)^k \widehat{A}^k H_{n-k}, \quad k \leq n, \quad (5.2)$$

en la que el polinomio de grado  $n$  se obtiene del polinomio de grado  $n - k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , con  $n$  aplicaciones sucesivas del operador de ascenso.

Una generalización de (4.6) para el operador de descenso es

$$\widehat{D}^k H_m = 2^k \frac{m!}{(m-k)!} H_{m-k}, \quad k \leq m. \quad (5.3)$$

Si unimos (5.1) y (5.3) obtenemos una expresión también muy interesante

$$\widehat{A}^n H_m = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} 2^k n! m!}{(n-k)! (m-k)! k!} H_{n-k} H_{m-k}, \quad n \leq m, \quad (5.4)$$

que combinada con la fórmula también general

$$H_{n+m} = \widehat{A}^n H_m, \quad (5.5)$$

nos permite escribir

$$H_{n+m} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k n! m!}{(n-k)! (m-k)! k!} H_{n-k} H_{m-k}. \quad (5.6)$$

El resultado (5.6) nos dice que podemos generar el polinomio  $H_{n+m}$  de grado  $n + m$  a partir de polinomios de menor grado  $H_{n-k}$  y  $H_{m-k}$ , con  $k = 1, 2, \dots, n$ . Consideramos que esta relación es la contribución más importante de este trabajo ya que no la hemos encontrado en ningún libro y en ningún artículo de revistas especializadas; creemos que tiene un potencial que debe ser explorado.

## 6. ALGUNAS APLICACIONES

Ahora vamos a usar nuestros resultados para demostrar su utilidad. La primera aplicación se refiere a la fórmula de Rodrigues (2.2) que se consigue por medio del operador de descenso de la siguiente manera. Primero se demuestra que

$$\widehat{D}^n e^{-x^2} = (-1)^n H_n e^{-x^2}.$$

Ahora multiplicamos por  $(-1)^n e^{x^2}$  y el resultado es precisamente (2.2). Hay que decir que esta derivación no es privativa de nuestro método, pues también se encuentra en la literatura [10]. En la siguiente aplicación derivamos la relación de recurrencia (2.6). Para ello aplicamos (5.6) a  $H_m$  con  $n = 1$ :

$$\widehat{A}H_m = -2xH_m + 2mH_{m-1} = -H_{m+1}.$$

La última igualdad se deduce, como ya se había mencionado, también directamente de (3.3). Para hallar la relación de recurrencia (2.7) utilizamos (5.3) con  $k = 1$ :

$$\widehat{D}H_m = 2 \frac{m!}{(m-1)!} H_{m-1} = 2mH_{m-1}.$$

Para demostrar que los polinomios  $H_n$  obtenidos con este mecanismo son soluciones de la ecuación de Hermite (2.3) procedemos así: tomamos la ecuación diferencial de Hermite (2.8) como modelo y definimos el operador

$$\widehat{Q}_n = \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + 2n$$

y lo aplicamos a (5.6). Escribimos el resultado así

$$\widehat{Q}_{n+m}H_{n+m} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k n! m!}{(n-k)! (m-k)! k!} P \quad (6.1)$$

donde  $P$ , después de realizar algunos cálculos, es

$$\begin{aligned} P &= H_{n-k} \left( \frac{d^2}{dx^2} H_{m-k} - 2x \frac{d}{dx} H_{m-k} \right) + H_{m-k} \left( \frac{d^2}{dx^2} H_{n-k} - 2x \frac{d}{dx} H_{n-k} \right) \\ &\quad + 2 \frac{d}{dx} H_{m-k} \frac{d}{dx} H_{n-k} + 2(n+m) H_{n-k} H_{m-k}. \end{aligned}$$

Si suponemos que  $H_{m-k}$  y  $H_{n-k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n; m$ , son soluciones de la ecuación de Hermite, es decir, si  $\widehat{Q}_{m-k}H_{m-k} = 0$  y  $\widehat{Q}_{n-k}H_{n-k} = 0$ , entonces

$$P = 4kH_{n-k}H_{m-k} + 2(m-k)(n-k)H_{m-k-1}H_{n-k-1}. \quad (6.2)$$

Ahora sustituimos (6.2) en (6.1):

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_{n+m}H_{n+m} &= 4 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k n! m!}{(n-k)! (m-k)! k!} k H_{n-k} H_{m-k} \\ &\quad + 2 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k n! m!}{(n-k)! (m-k)! k!} (m-k)(n-k) H_{m-k-1} H_{n-k-1}. \end{aligned}$$

En el primer término hacemos el cambio  $k \rightarrow k + 1$  y rearreglamos; el resultado es

$$-2nm \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k (n-1)! (m-1)!}{(n-1-k)! (m-1-k)! k!} H_{n-1-k} H_{m-1-k} = -2nm H_{n-1+m-1}. \quad (6.3)$$

En el segundo término hacemos algunos rearrreglos y obtenemos

$$2nm \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k (n-1)! (m-1)!}{(n-1-k)! (m-1-k)! k!} H_{m-1-k} H_{n-1-k} = 2nm H_{n-1+m-1} \quad (6.4)$$

por lo cual, al sumar (6.3) y (6.4) obtenemos

$$\widehat{Q}_{n+m} H_{n+m} = 0.$$

Hemos demostrado que si  $H_{n-k}$  y  $H_{m-k}$  son soluciones de la ecuación de Hermite también lo es  $H_{n+m}$  expresado por (5.6). Para terminar, mostramos una aplicación sencilla de (5.6). Para hallar, por ejemplo,  $H_5$ , a partir de  $H_0, H_1, H_2$  y  $H_3$ , hacemos lo siguiente

$$\begin{aligned} H_5 &= H_{2+3} = H_2 H_3 - 12 H_1 H_2 + 24 H_0 H_1, \\ &= (4x^2 - 2)(8x^3 - 12x) - 12(2x)(4x^2 - 2) + 24(1)(2x), \\ &= 32x^5 - 160x^3 + 120x. \end{aligned}$$

Desde luego que también la combinación  $H_5 = H_{1+4}$ , da el mismo resultado.

## 7. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado una generalización de los resultados de la Ref. [9] para construir los polinomios de Hermite por medio de operadores de ascenso y descenso, los cuales son operadores diferenciales de primer orden. Este método es puramente algebraico. Las expresiones (5.1) a (5.6) son la parte medular de nuestra contribución. Como ya mencionamos, no hemos encontrado en la literatura algo semejante a estas expresiones y por lo mismo, creemos que pueden tener algún valor, ya sea en la aplicación a resultados ya conocidos, o, como esperamos, a aplicaciones nuevas.

## REFERENCIAS

- [1] N. Zetilli, *Quantum Mechanics*, Wiley.
- [2] P. B. Abraham and H. E. Moses, *Phys. Rev.*, **A 22** (1980).
- [3] V. C. Aguilera-Navarro, G. A. Estévez and R. Guardiola, *Jour. Math. Phys.*, **31** (1990) 99.
- [4] R. L. Hall, N. Saad and A. B. von Keviczky, *Jour. Math. Phys.*, **43** (2002).
- [5] A. N. W. Hone and M. Senthivelan, *Journ. Math. Phys.*, **50** (2009) 102902.
- [6] B. Nagel, *Journ. Math. Phys.*, **35** (1994) 1549.
- [7] C. Vignat and P. W. Lambert, *Journ. Math. Phys.*, **50** (2009).
- [8] I. N. Sneddon, *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*, Oliver and Boyd, (1961).
- [9] E. Piña, *Rev. Mex. Phys.*, **42** (1995) 913.
- [10] N. N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Dover, (1972), New York.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel  
Puebla, Pue. C.P. 72570

# CAPÍTULO 6

## ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD LOCAL DE UN MODELO COMPLEJO PARA CRECIMIENTO DE LECHUGAS CULTIVADAS EN INVERNADERO

JOHN GODDARD CLOSE<sup>2</sup>  
IRINEO LORENZO LÓPEZ CRUZ<sup>1</sup>  
ABRAHAM ROJANO AGUILAR<sup>1</sup>  
RAQUEL SALAZAR MORENO<sup>1</sup>  
<sup>1</sup>POSTGRADO EN INGENIERÍA AGRÍCOLA  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA CHAPINGO  
<sup>2</sup>DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
UAM-IZTAPALAPA

RESUMEN. En el presente trabajo se muestra la metodología del análisis de sensibilidad local y se aplica a un modelo dinámico que describe el crecimiento potencial de un cultivo de lechugas (*Lactuca sativa* L.) bajo ambiente invernadero. Primeramente se programa en el ambiente Matlab-Simulink el modelo para crecimiento potencial de lechugas NICOLET, el cual consta de las variables de estado: carbono y nitrógeno en las vacuolas, carbono y nitrógeno estructural y carbono excedente. En seguida se calcula en forma analítica las derivadas parciales requeridas para poder escribir las ecuaciones de sensibilidad. Posteriormente se generan y resuelven numéricamente 95 ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineales para poder calcular tanto las funciones como los índices de sensibilidad relativa que describen el efecto de cada uno de los 18 parámetros del modelo sobre las cinco variables de estado. Los resultados muestran que el carbono en exceso es la variable de estado que es más afectada por cambios pequeños de todos los parámetros del modelo. Por el contrario el carbono en vacuolas, carbono estructural y nitrógeno estructural son influidos por un subconjunto pequeño de parámetros.

### 1. INTRODUCCIÓN

Para mejorar el rendimiento y calidad de hortalizas cultivadas en invernadero, es necesario controlar y optimizar las variables ambientales. Para esto se requieren modelos matemáticos que simulen el crecimiento y desarrollo del cultivo. Una vez que se obtiene la estructura del modelo, normalmente expresada en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineales, es necesario llevar a cabo análisis de incertidumbre y sensibilidad para entender mejor el comportamiento del modelo y así incrementar la confianza en esta representación simplificada del sistema real. En particular los análisis de sensibilidad estudian como la variación de las salidas o variables de estado de un modelo dinámico, pueden ser asignadas, en forma cualitativa o cuantitativa, a las diferentes fuentes de variación [6]. El análisis de sensibilidad es parte relevante del proceso de desarrollo de modelos matemáticos dinámicos de un sistema agrícola. Su objetivo es determinar como las variables que predice el modelo son afectadas por la incertidumbre de los parámetros. En general existen dos enfoques para llevar a cabo un análisis de sensibilidad: los métodos locales que usan derivadas para plantear y resolver las llamadas ecuaciones de sensibilidad y los

métodos globales que usan Funciones de Densidad de Probabilidades y simulación Monte Carlo [7]. Un análisis de sensibilidad para los parámetros de un modelo dinámico es útil para seleccionar el subconjunto de parámetros a ser determinado mediante estimación o calibración. También para determinar que parámetros son poco significativos y pueden participar en la simplificación del modelo [7].

El modelo NICOLET (NItrate COntrol in LETtuce), propuesto para el cultivo de lechuga (*Lactuca sativa* L.) [4, 5], tiene dos variables de estado: contenido de carbono en las vacuolas y contenido de carbono en la estructura celular; el núcleo de este modelo es un balance de flujos de carbono. La concentración de nitratos en las vacuolas se calcula algebraicamente a partir de la correlación negativa entre la concentración de carbono y la concentración de nitrógeno presente en las vacuolas. Las salidas del modelo, como el peso seco de la planta, el peso fresco y el contenido de nitratos, se calculan a partir de los estados mediante ecuaciones algebraicas. Un análisis de sensibilidad local para todos los parámetros de este modelo se ha presentado recientemente [1].

Existe una versión más compleja del modelo NICOLET incluyendo cuatro variables de estado: carbono y nitrógeno en vacuolas además de carbono y nitrógeno estructural [3]. Pero la versión más compleja y completa [2] toma en cuenta las variables de estado: carbono en las vacuolas y en biomasa estructural, un compartimiento para carbono en exceso y el contenido de nitrógeno en las vacuolas y en la estructura celular. Esto ha incrementado la complejidad del modelo no sólo en sus variables de estado sino también en sus parámetros. Sin embargo, hasta ahora no se ha estudiado el comportamiento del modelo NICOLET complejo, considerando cambios pequeños en sus 18 parámetros. Por lo tanto, el presente trabajo tuvo el objetivo de efectuar un análisis de la sensibilidad local del modelo NICOLET con 5 variables de estado, en relación a todos sus parámetros, usando como variables de entrada datos del clima dentro de un invernadero localizado en Chapingo, Estado de México. El capítulo presenta primeramente una descripción de un modelo dinámico para crecimiento de lechugas. Describe en seguida el procedimiento normalmente aplicado para obtener las llamadas ecuaciones de sensibilidad. Posteriormente se discute la implementación computacional tanto del modelo como de las ecuaciones de sensibilidad local. En seguida se muestran los principales resultados obtenidos mostrando las funciones de sensibilidad calculadas numéricamente y también los índices de sensibilidad asociados con cada parámetro. Finalmente se presentan conclusiones generales.

## 2. EL MODELO DINÁMICO PARA CRECIMIENTO DE LECHUGAS NICOLET

El modelo NICOLET [2] con cinco variables de estado, consta de tres compartimientos para describir el comportamiento del cultivo a nivel celular. Uno representa el contenido de carbono y nitrógeno en la biomasa no estructural (principalmente glucosa del jugo celular). El segundo representa el contenido de carbono y nitrógeno en la biomasa estructural (proteínas, carbohidratos de cadena larga, lípidos, lignina y ácidos orgánicos). El tercer compartimiento representa el contenido de carbono excedente (almacenes de biomasa estructural de largo plazo). Los compartimientos están conectados mediante los principales flujos de carbono y nitrógeno. El modelo

dinámico consta de las ecuaciones diferenciales no-lineales siguientes:

$$(1) \quad \frac{dM_{Cv}}{dt} = F_{Cp} - F_{Cvs} - F_{Cg} - F_{Cm} - F_{Cve} + F_{Cev}$$

$$(2) \quad \frac{dM_{Cs}}{dt} = F_{Cvs}$$

$$(3) \quad \frac{dM_{Ce}}{dt} = F_{Cve} - F_{Cev}$$

$$(4) \quad \frac{dM_{Nv}}{dt} = F_{Nu} - F_{Nvs}$$

$$(5) \quad \frac{dM_{Ns}}{dt} = F_{Nvs}$$

donde las variables de estado son: carbono en las vacuolas ( $M_{Cv}, mol m^{-2}$ ), carbono en la estructura ( $M_{Cs}, mol m^{-2}$ ), carbono excedente ( $M_{Ce}, mol m^{-2}$ ), nitrógeno en las vacuolas ( $M_{Nv}, mol m^{-2}$ ) y nitrógeno estructural ( $M_{Ns}, mol m^{-2}$ ). Las tasas de cambio de las variables de estado dependen de los flujos de carbono y nitrógeno. Los flujos de carbono considerados en el modelo NICOLET son los siguientes:

$$(6) \quad F_{Cp} = p(I, C_{Ca})f_s(M_{Cs})A_p(\Gamma_{Cv})$$

$$(7) \quad F_{Cvs} = g(T_a)f_s(M_{Cs})A_{vs}(\Gamma_{Cv})$$

$$(8) \quad F_{Cg} = \theta F_{Cvs}$$

$$(9) \quad F_{Cm} = e(T_a)f_s(M_{Cs})$$

$$(10) \quad F_{Cve} = p(I, C_{Ca})f_s(M_{Cs})A_{ve}(\Gamma_{Cv})$$

$$(11) \quad F_{Cev} = g(T_a)f_s(M_{Cs})A_{ev}(\Gamma_{Cv})(1 + \theta)$$

donde  $F_{Cp}$  ( $mol m^{-2}s^{-1}$ ) representa la tasa de fotosíntesis bruta,  $F_{Cvs}$  ( $mol m^{-2}s^{-1}$ ) es el incremento de biomasa estructural,  $F_{Cg}$  ( $mol m^{-2}s^{-1}$ ) es la respiración de crecimiento,  $F_{Cm}$  ( $mol m^{-2}s^{-1}$ ) es la respiración de mantenimiento,  $F_{Cve}$  ( $mol m^{-2}s^{-1}$ ) representa el flujo de carbono no estructural hacia el almacén de exceso y  $F_{Cev}$  ( $mol m^{-2}s^{-1}$ ) es el flujo de carbono del almacén de exceso hacia el almacén de carbono no estructural. Los flujos de nitrógeno son:

$$(12) \quad F_{Nu} = \frac{1}{\beta_N}(GF_{Cvs} - \beta_C(F_{Cp} - F_{Cm} - F_{Cve} + F_{Cev}))$$

$$(13) \quad F_{Nvs} = rF_{Cvs}$$

donde  $F_{Nu}$  ( $mol m^{-2}s^{-1}$ ) es la absorción de nitrógeno,  $F_{Nvs}$  ( $mol m^{-2}s^{-1}$ ) es el flujo de nitrógeno en el proceso de crecimiento. El proceso de fotosíntesis de un

follaje cerrado ( $p(I, C_{Ca}), mol m^{-2} s^{-1}$ ) es descrito mediante la ecuación:

$$(14) \quad p(I, C_{Ca}) = \frac{\epsilon I \sigma C_{Ca}}{\epsilon I + \sigma C_{Ca}}$$

La cantidad de radiación interceptada ( $f_s(M_{Cs})$ , adimensional) por el follaje es calculada mediante la ecuación exponencial:

$$(15) \quad f_s(M_{Cs}) = 1 - \exp(-aM_{Cs})$$

La respiración de mantenimiento ( $e(T_a), mol m^{-2} s^{-1}$ ) es calculada mediante la ecuación:

$$(16) \quad e(T_a) = k \exp(c(T_a - T^*))$$

La tasa de crecimiento de biomasa estructural ( $g(T_a), mol m^{-2} s^{-1}$ ) se estima usando el modelo:

$$(17) \quad g(T_a) = \nu e(T_a)$$

El modelo NICOLET considera varias funciones de atenuación [9] que dependen de las variables de estado carbono en estructural y no estructural:

$$(18) \quad A_p(\Gamma_{Cv}) = h_p(\Gamma_{Cv}) + (1 - h_p(\Gamma_{Cv}))\xi$$

$$(19) \quad A_{ve}(\Gamma_{Cv}) = (1 - h_p(\Gamma_{Cv}))\xi$$

$$(20) \quad A_{ev}(\Gamma_{Cv}) = (1 - h_g(\Gamma_{Cv}))\xi$$

$$(21) \quad A_{vs}(\Gamma_{Cv}) = h_g(\Gamma_{Cv})$$

También se incorporan dos funciones de saturación [10]:

$$(22) \quad h_p(\Gamma_{Cv}) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-b_p}{1-\Gamma_{Cv}}\right)^{s_p}}$$

$$(23) \quad h_g(\Gamma_{Cv}) = \frac{1}{1 + \left(\frac{b_g}{\Gamma_{Cv}}\right)^{s_g}}$$

Dos ecuaciones auxiliares completan la descripción del modelo:

$$(24) \quad \Gamma_{Cv} = \frac{\beta_C M_{Cv}}{\lambda \Pi M_{Cs}}$$

$$(25) \quad G = \lambda \Pi + \beta_N r + \beta_C (1 + \theta)$$

Las variables de entrada del modelo son la temperatura del aire ( $T_a$ , °C), la concentración de dióxido de carbono ( $C_{Ca}$ , ppm) y la radiación fotosintéticamente activa ( $I$ ,  $Wm^{-2}$ ). Los parámetros que aparecen en las ecuaciones (1)-(25) son descritos en el Cuadro 1.

CUADRO 1. Parámetros del modelo NICOLET con 5 variables de estado.

Parámetro	Símbolo	Valor nominal	Unidades
Coefficiente de extinción de la radiación	a	1.7	$m^2 mol^{-1}$
Eficiencia fotosintética	$\epsilon$	0.03	$mol mol^{-1}$
Conductancia foliar de $CO_2$	$\sigma$	$6.0 \times 10^{-3}$	$ms^{-1}$
Potencial osmótico	$\theta$	0.3	adimensional
Respiración de mantenimiento	k	$0.25 \times 10^{-6}$	$mol m^{-2} s^{-1}$
Tasa de crecimiento específica	$\nu$	9.5	adimensional
Exponente en la función exponencial	c	0.0693	$K^{-1}$
Temperatura de referencia	T*	20.0	°C
Presión osmótica vacuolar debida a C	$\beta_C$	0.6	$m^3 kPa mol^{-1}$
Presión osmótica vacuolar debida a N	$\beta_N$	6.0	$m^3 kPa mol^{-1}$
Volumen de agua asociado con una unidad de carbono estructural	$\lambda$	0.0009	$m^3 mol^{-1}$
Potencial osmótico en las vacuolas	$\Pi$	580	kPa
Cociente C:N estructural	r	0.16	$mol mol^{-1}$
Pendiente límite para la fotosíntesis	$s_p$	10	adimensional
Pendiente límite para el crecimiento	$s_g$	10	adimensional
Frontera límite para la fotosíntesis	$b_p$	0.97	adimensional
Frontera límite para el crecimiento	$b_g$	0.20	adimensional
Parámetro de división	$\xi$	0.4	adimensional

### 3. PROCEDIMIENTO DEL ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD LOCAL

**Ecuaciones de sensibilidad.** Un análisis de sensibilidad local [8] se basa en el concepto de derivada, ya que la derivada  $\frac{\partial Y_j}{\partial X_i}$  de una variable de salida  $Y_j$  contra una variable de entrada  $X_i$  puede ser pensada como la definición matemática de la sensibilidad de  $Y_j$  contra  $X_i$ . En el caso de modelos dinámicos se requiere obtener y resolver las ecuaciones de sensibilidad [6] las cuales son un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que se definen en forma matricial como:

$$(26) \quad \frac{dS(t)}{dt} = A(t, \mathbf{p}^0)S(t) + M(t, \mathbf{p}^0); S(0) = 0$$

tal que:

$$(27) \quad A(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t, p^0)}$$

$$(28) \quad M(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t, p^0)}$$

$$(29) \quad S(t) = S_{ij}(t) = \frac{\partial x_i(t, \mathbf{p}^0)}{\partial p_j}; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, q$$

donde  $\mathbf{x}$  representa el vector de las variables de estado,  $\mathbf{p}$  es el vector de los parámetros del modelo, y  $p^0$  es el vector nominal de parámetros,  $n$  es el número de estados y  $q$  el número de parámetros. Para nuestro caso el vector de los estados  $\mathbf{x}$  tiene dimensión 5 y el vector  $\mathbf{p}$  es de dimensión 18 ya que contiene los elementos mostrados en el Cuadro 1. Note que la ecuación 26 es lineal pero con coeficientes variables en el tiempo.

La matriz Jacobiana  $A(t)$  tiene dimensión  $n \times n$  y representa la linealización del sistema no lineal descrito por las ecuaciones (1)-(5) a lo largo de la trayectoria del vector  $\mathbf{x}(t)$ . Mientras que la matriz  $M(t)$  tiene dimensión  $n \times q$ . Una vez obtenidas estas ecuaciones se requiere resolverlas conjuntamente con el modelo dinámico. Por lo tanto se resolvieron numéricamente un total de 90 ecuaciones diferenciales de sensibilidad conjuntamente con las ecuaciones de estado (1)-(5). Las derivadas parciales requeridas por las matrices  $A(t)$  y  $M(t)$  fueron calculadas analíticamente. Cabe mencionar que el modelo dinámico del sistema lechugas cultivadas en invernadero, puede ser descrito mediante la ecuación vectorial:

$$(30) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}); \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

donde  $\mathbf{u}$  representa el vector de las variables de entrada y  $\mathbf{f}$  es un vector de funciones no lineales del modelo dinámico. Para facilitar la interpretación de las sensibilidades locales, se calcularon las sensibilidades relativas mediante la ecuación:

$$(31) \quad S_{ij}(t) = \frac{p_j^0}{x_i(t)} \frac{\partial x_i(t)}{\partial p_j^0}$$

Esto significa que el parámetro  $p_j$  será más influyente sobre la variable de estado  $x_i(t)$  si  $|S_{ij}(t)|$  se encuentra más alejado de cero y viceversa. Para poder ordenar las sensibilidades relativas, es posible calcular un índice de sensibilidad como sigue:

$$(32) \quad I = \int_a^b |S(t)| dx$$

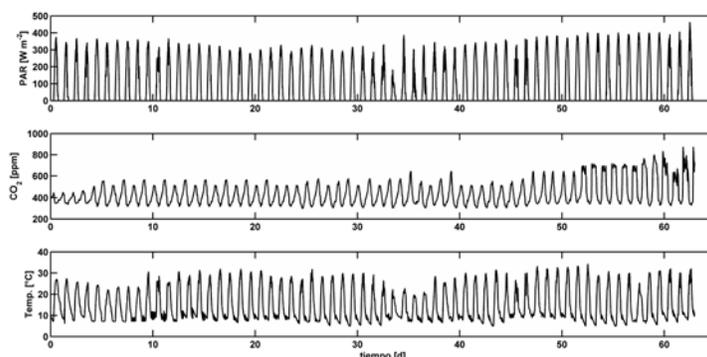


FIGURA 1. Variables climáticas medidas dentro del invernadero y usadas como variables de entrada del modelo NICOLET

donde  $a$  y  $b$  representan los tiempos de inicio y fin de la simulación, respectivamente.

**Variables de entrada.** Las variables climáticas (Figura 1) que requiere el modelo NICOLET fueron medidas dentro de un invernadero con cubierta de plástico, localizado en Chapingo, Estado de México. El tiempo de muestreo fue cada 15 min.

#### 4. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

El modelo dinámico para crecimiento de lechugas definido por las ecuaciones (1)-(25) fue programado en el ambiente Matlab-Simulink (Mathworks Inc., 1984-2009). Se utilizó una subrutina escrita en lenguaje C con la finalidad de incrementar la velocidad de las simulaciones. Se usaron los valores nominales de los parámetros para ejecutar simulaciones preliminares. También se llevó a cabo una calibración manual para mejorar el ajuste de las predicciones a las mediciones de peso fresco y seco total del cultivo. Se programó una segunda rutina en lenguaje C conteniendo tanto el modelo dinámico como las ecuaciones de sensibilidad (26). En total se programaron 95 ecuaciones diferenciales ordinarias. Para la integración numérica se usó el método de Dormand-Prince (función ode45.m de Matlab-Simulink) de cuarto orden con tamaño de paso de integración variable, una tolerancia relativa de  $1.0 \times 10^{-10}$  y una tolerancia absoluta de  $1.0 \times 10^{-12}$ .

#### 5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

**Funciones de sensibilidad.** Las Figuras 2-18 muestran las funciones de sensibilidad relativa calculadas. Aparentemente la variable de estado carbono en exceso es la variable más afectada por cambios pequeños en todos los parámetros del modelo NICOLET. También es claro que las funciones de sensibilidad tienen diferentes valores de acuerdo a la variable independiente tiempo. Varias variables de estado muestran valores de cero para algunos parámetros. Esto significa que estos parámetros no son influyentes en el comportamiento del modelo.

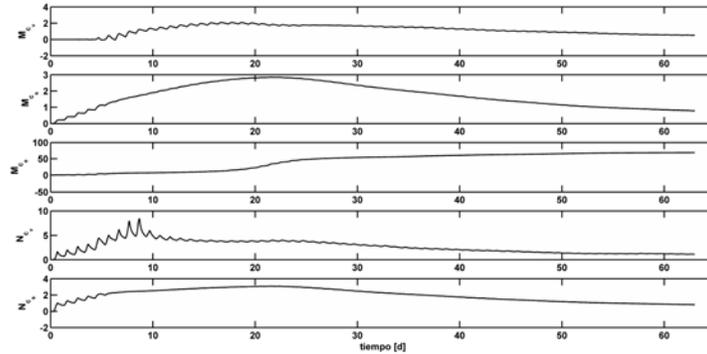


FIGURA 2. Sensibilidades relativas del modelo NICOLET con respecto al coeficiente de extinción de la radiación

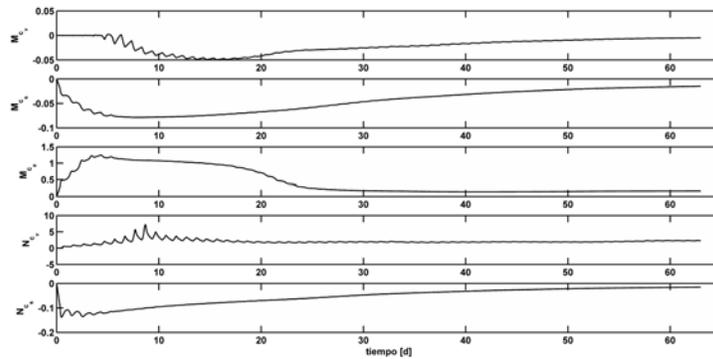


FIGURA 3. Sensibilidades relativas del modelo NICOLET con respecto al parámetro eficiencia fotosintética

La Figura 2 muestra que el carbono (C) en exceso es más sensible a cambios pequeños del parámetro coeficiente de extinción de la radiación. También muestra que el efecto de este parámetro es mayor al inicio del período de crecimiento, para los restantes cuatro estados, lo cual es consistente con el papel que el coeficiente de extinción de la radiación tiene en el proceso de intercepción de radiación solar. Un comportamiento similar se observa para el caso de los parámetros de eficiencia fotosintética (Figura 3) y de conductancia foliar de  $CO_2$  (Figura 4).

En contraste el papel del parámetro potencial osmótico resultó ser poco relevante para todas las variables de estado del modelo a excepción del carbono en exceso (Figura 5). En este caso el efecto fue mayor a partir de 20 días del período de crecimiento del cultivo.

El efecto del parámetro respiración de mantenimiento fue mayor a medida que se incrementó el período de crecimiento del cultivo (Figura 6), especialmente en el

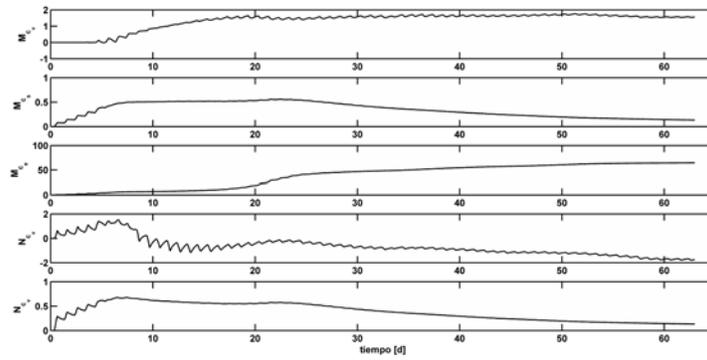


FIGURA 4. Sensibilidades relativas del modelo NICOLET con respecto al parámetro conductancia foliar de dióxido de carbono

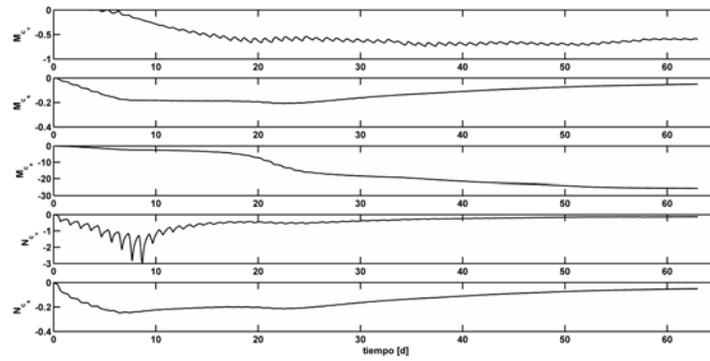


FIGURA 5. Sensibilidades relativas del modelo NICOLET con respecto al parámetro potencial osmótico

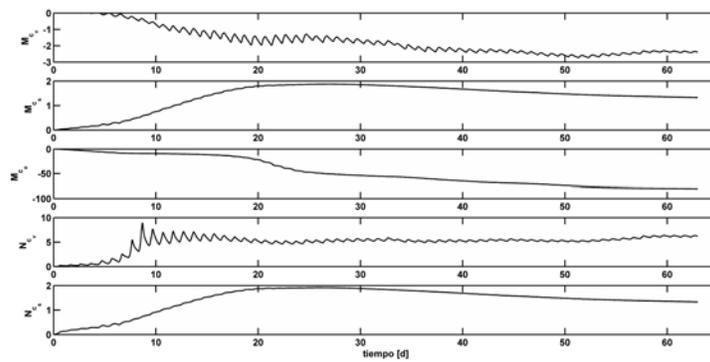


FIGURA 6. Sensibilidades relativas del modelo NICOLET con respecto al parámetro respiración de mantenimiento

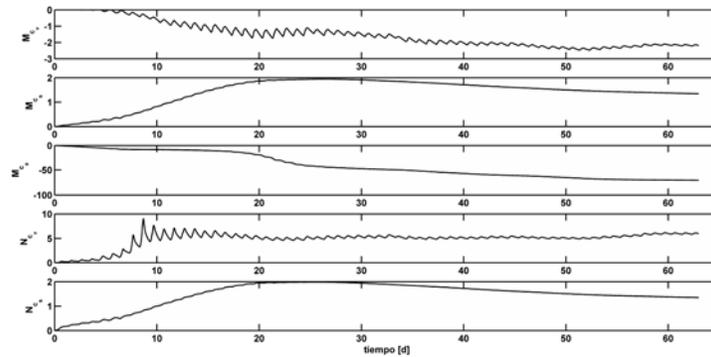


FIGURA 7. Sensibilidades relativas del modelo NICOLET con respecto al parámetro tasa específica de crecimiento

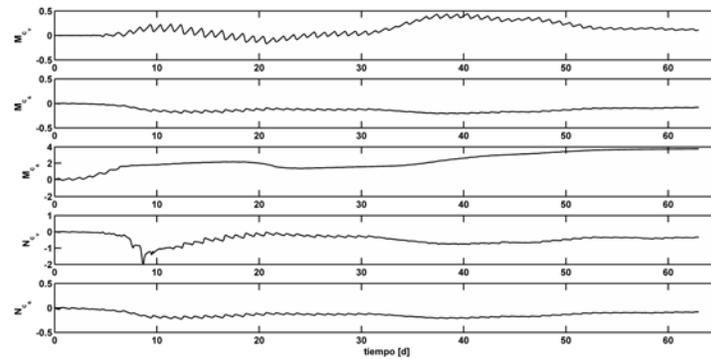


FIGURA 8. Sensibilidades relativas del modelo NICOLET con respecto al exponente de la función de crecimiento exponencial

caso del carbono en exceso. Un comportamiento semejante fue encontrado para el parámetro tasa específica de crecimiento (Figura 7).

El exponente de la función de crecimiento exponencial afecta en forma poco significativa al carbono en el compartimiento de exceso, para las otras variables es prácticamente irrelevante (Figura 8). Por su parte la temperatura de referencia afecta significativamente el comportamiento de todas las variables del modelo NICOLET complejo, ya que las sensibilidades relativas crecen o decrecen a lo largo del ciclo de crecimiento del cultivo (Figura 9). La variable más sensible a este parámetro fue el carbono en exceso.

Tanto el parámetro presión osmótica vacuolar debida a carbono (Figura 10) como a nitrógeno (Figura 11) resultaron ser poco importantes para todas las variables del modelo NICOLET complejo, a excepción de la variable nitrógeno en las vacuolas quien aparentemente es afectada por este parámetro dentro de los primeros diez

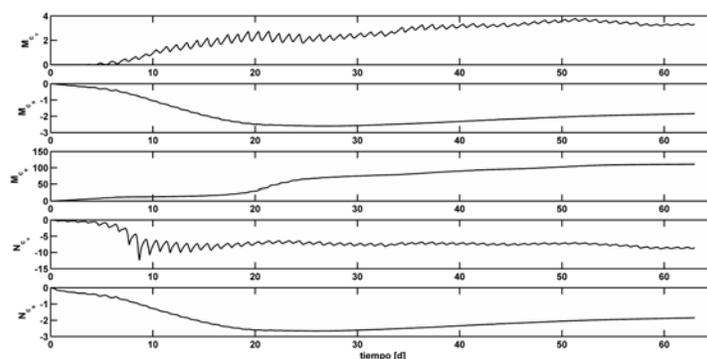


FIGURA 9. Sensibilidades relativas del modelo NICOLET con respecto a la temperatura de referencia

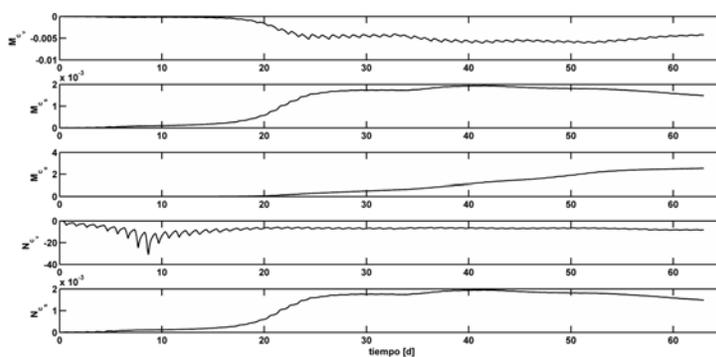


FIGURA 10. Sensibilidades relativas del modelo NICOLET con respecto al parámetro presión osmótica vacuolar debida a carbono (C)

días del ciclo de crecimiento del cultivo.

El parámetro relacionado con el volumen de agua por unidad de carbono estructural sólo fue importante para el carbono en exceso a lo largo de todo el intervalo de crecimiento (Figura 12) y el nitrógeno vacuolar pero únicamente durante los primeros días del ciclo de crecimiento del cultivo. En forma similar el parámetro potencial osmótico en vacuolas resultó ser relevante solamente para el compartimiento de carbono en exceso.

El efecto del cociente carbono-nitrógeno estructural fue notable para la variable de estado nitrógeno en vacuolas (Figura 13), especialmente dentro de los primeros diez días del período de crecimiento del cultivo. También se observó un efecto, aunque menor, sobre el nitrógeno estructural a lo largo de todo el ciclo de crecimiento del cultivo.

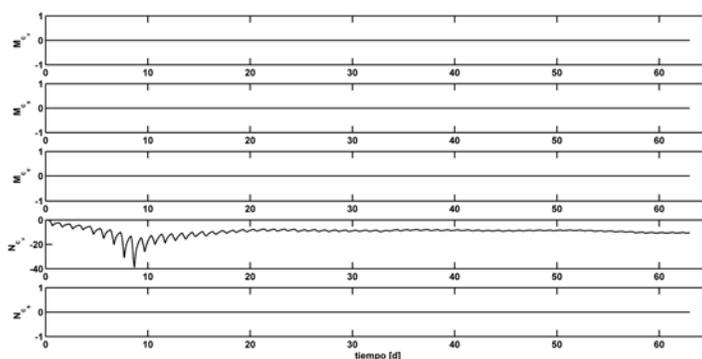


FIGURA 11. Sensibilidades relativas del modelo NICOLET con respecto al parámetro presión osmótica vacuolar debida a nitrógeno (N)

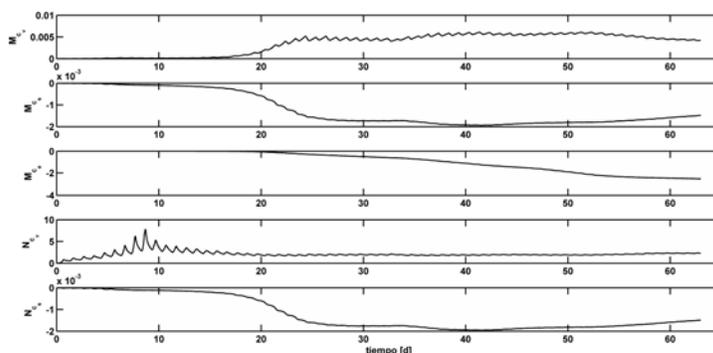


FIGURA 12. Sensibilidades relativas del modelo NICOLET con respecto al parámetro volumen de agua asociado con una unidad de carbono estructural

Aunque las sensibilidades relativas de todos los estados con respecto al parámetro pendiente límite para la función de fotosíntesis, fueron pequeñas, puede notarse que el papel de este parámetro es mayor durante los primeros treinta días del intervalo de crecimiento del cultivo (Figura 14). En contraste las sensibilidades relativas con respecto a la pendiente límite para el crecimiento fueron crecientes o decrecientes para todas las variables de estado (Figura 15). La variable carbono en exceso es drásticamente afectada por este parámetro.

Las sensibilidades relativas de todos los estados con respecto al parámetro frontera límite para la fotosíntesis fueron también pequeñas, pero su efecto fue mayor durante los primeros 40 días de crecimiento del cultivo (Figura 16). En contraste las

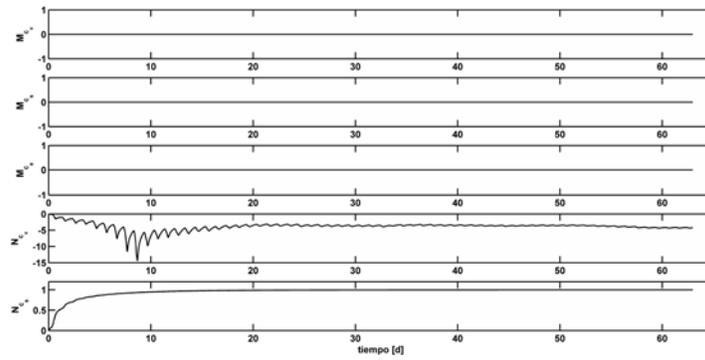


FIGURA 13. Sensibilidades relativas del modelo NICOLET con respecto al parámetro cociente carbono nitrógeno estructural

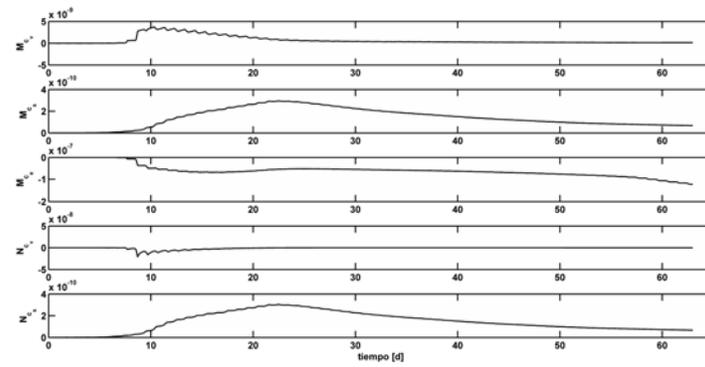


FIGURA 14. Sensibilidades relativas del modelo NICOLET con respecto al parámetro pendiente límite para la fotosíntesis

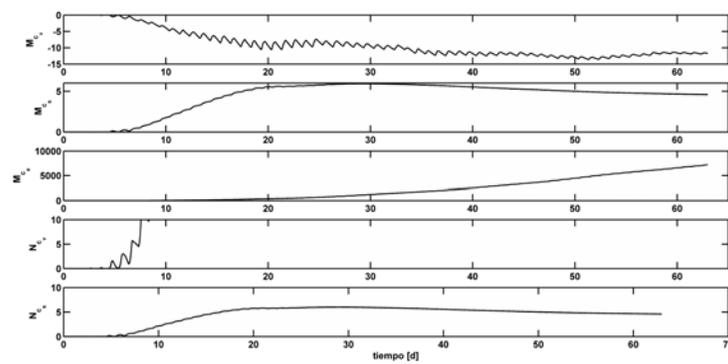


FIGURA 15. Sensibilidades relativas del modelo NICOLET con respecto al parámetro pendiente límite para el crecimiento

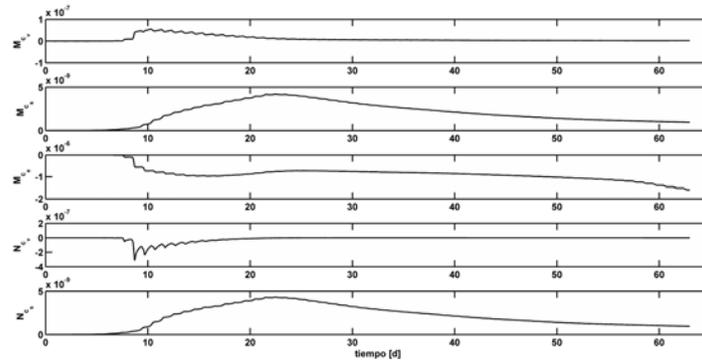


FIGURA 16. Sensibilidades relativas del modelo NICOLET con respecto al parámetro frontera límite para la fotosíntesis

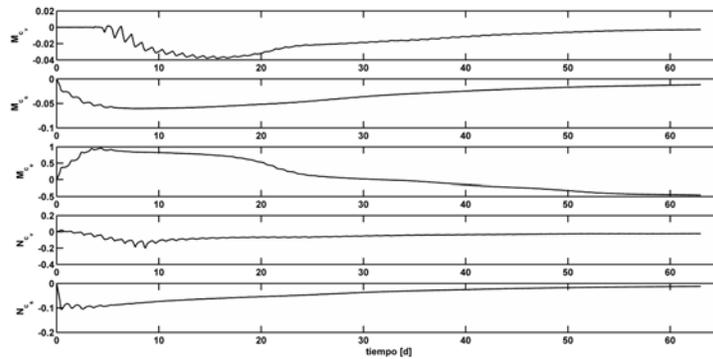


FIGURA 17. Sensibilidades relativas del modelo NICOLET con respecto al parámetro frontera límite para el crecimiento

sensibilidades con respecto al parámetro frontera límite para el crecimiento fueron considerablemente mayores y tuvieron más relevancia durante los primeros veinte días del período de crecimiento (Figura 17).

Aunque las sensibilidades relativas fueron muy pequeñas para todas las variables de estado de modelo NICOLET complejo, respecto al coeficiente de particionamiento, las funciones de sensibilidad calculadas (Figura 18) permiten observar que existe un efecto mayor durante los primeros 20 días del ciclo de crecimiento del cultivo.

**Índices de sensibilidad local.** La tabla (Figura 19) muestra los índices de sensibilidad calculados para todos los parámetros del modelo NICOLET. Claramente los valores absolutos más grandes corresponden a la variable de estado carbono en exceso, por lo tanto esta variable fue la más sensible. Esto confirma lo observado en las funciones de sensibilidad. Varios índices resultaron ser cero lo cual significa que

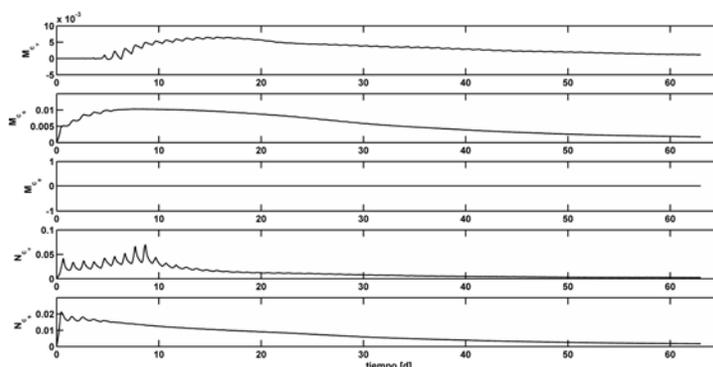


FIGURA 18. Sensibilidades relativas del modelo NICOLET con respecto al parámetro de particionamiento

para estos parámetros el modelo no es sensible. De acuerdo a los índices de sensibilidad los parámetros más importantes para el carbono en las vacuolas fueron en orden decreciente: la pendiente límite para la función de crecimiento ( $s_g$ ), la eficiencia fotosintética ( $\epsilon$ ), la temperatura de referencia ( $T^*$ ) y la respiración de mantenimiento ( $k$ ). Para el carbono estructural fueron, también en orden decreciente: la pendiente límite para la función de crecimiento ( $s_g$ ), la temperatura de referencia ( $T^*$ ) y el coeficiente de extinción de la radiación ( $a$ ). Para el carbono en exceso son todos excepto la presión osmótica debida a nitrógeno ( $\beta_N$ ), el cociente C:N estructural ( $r$ ), la pendiente límite para la fotosíntesis ( $s_p$ ), la frontera límite la fotosíntesis ( $b_p$ ) y el parámetro de división ( $\xi$ ). Los parámetros más importantes para el nitrógeno en las vacuolas son todos excepto el potencial osmótico ( $\theta$ ), el exponente de la función exponencial ( $c$ ), la pendiente límite para fotosíntesis ( $s_p$ ), la frontera límite para la fotosíntesis ( $b_p$ ), la frontera límite para el crecimiento ( $b_g$ ) y el parámetro de particionamiento ( $\xi$ ). Finalmente, para el nitrógeno estructural, en forma similar a lo observado en el carbono estructural y en vacuolas, pocos parámetros afectan mayormente su comportamiento, estos fueron en orden decreciente: la pendiente límite para la función de crecimiento ( $s_g$ ), la temperatura de referencia ( $T^*$ ), el coeficiente de extinción de la radiación solar ( $a$ ), la tasa de crecimiento específica ( $\nu$ ) y el coeficiente de respiración de mantenimiento ( $k$ ). Es importante destacar que un comportamiento similar al encontrado en el presente estudio fue reportado previamente para las variables carbono en las vacuolas y carbono estructural [1].

## 6. CONCLUSIONES

La metodología del análisis sensibilidad basado en el cálculo de derivadas, para los parámetros del modelo NICOLET de cinco variables de estado, permitió determinar que la variable carbono en exceso es la más afectada por cambios pequeños en todos los parámetros del modelo. La segunda variable más afectada por la mayoría de los parámetros del modelo NICOLET fue el nitrógeno en las vacuolas. Finalmente, el carbono, el nitrógeno estructural, así como el carbono en las vacuolas, resultaron ser afectados mayormente por pocos parámetros. Estos resultados

Parámetro	Carbono en vacuolas	Carbono estructural	Carbono en exceso	Nitrógeno en vacuolas	Nitrógeno estructural
Coefficiente de extinción de la radiación ( $a$ )	73.46	107.92	2682.90	169.48	123.15
Eficiencia fotosintética ( $\epsilon$ )	207.71	51.96	5889.20	139.97	57.99
Conductancia foliar de $CO_2$ ( $\sigma$ )	84.34	21.65	2424.70	56.10	24.16
Potencial osmótico $\theta$	33.37	8.01	954.06	28.72	8.93
Respiración de mantenimiento ( $k$ )	106.64	86.33	2922.00	308.66	89.68
Tasa de crecimiento específica ( $\nu$ )	94.87	89.24	2585.30	302.86	92.94
Exponente en la función exponencial ( $c$ )	9.45	7.96	142.40	28.42	8.37
Temperatura de referencia ( $T^*$ )	147.80	119.66	4049.90	427.81	124.30
Presión osmótica debida a Carbono ( $\beta_C$ )	0.21	0.07	55.79	473.07	0.07
Presión osmótica debida a Nitrógeno ( $\beta_N$ )	0.00	0.00	0.00	606.48	0.00
Volumen de agua asociado por unidad de carbono estructural ( $\lambda$ )	0.21	0.07	55.79	132.65	0.07
Potencial osmótico en las vacuolas (II)	1.29	2.84	27.84	127.02	3.40
Cociente C:N estructural ( $r$ )	0.00	0.00	0.00	244.65	60.41
Pendiente límite para fotosíntesis ( $s_p$ )	$4.47 \times 10^{-8}$	$8.70 \times 10^{-9}$	$3.73 \times 10^{-6}$	$6.27 \times 10^{-8}$	$8.99 \times 10^{-9}$
Pendiente límite para crecimiento ( $s_g$ )	557.77	272.51	137780	1207.40	279.75
Frontera límite para fotosíntesis ( $b_p$ )	$6.34 \times 10^{-7}$	$1.23 \times 10^{-7}$	$5.07 \times 10^{-5}$	$9.10 \times 10^{-7}$	$1.27 \times 10^{-7}$
Frontera límite para crecimiento ( $b_g$ )	0.94	2.20	25.05	3.19	2.63
Parámetro de división ( $\xi$ )	0.19	0.36	0.00	0.74	0.43

FIGURA 19. Índices de sensibilidad calculados para el modelo NI-COLET con cinco variables de estado.

pueden ser usados para estudios de calibración del modelo NICOLET complejo usando datos experimentales. Sin embargo, dado que una calibración de todos los parámetros del modelo NICOLET para la variable de estado carbono excedente, es probable que genere estimaciones imprecisas, se requiere investigación futura para indagar el potencial del enfoque de análisis de sensibilidad global para confirmar o mejorar los resultados obtenidos con el enfoque de análisis de sensibilidad local.

## REFERENCIAS

- [1] I. L. López-Cruz, A. Ramírez-Arias, A. Rojano-Aguilar, *Análisis de sensibilidad de un modelo dinámico de crecimiento para lechugas (*Lactuca sativa* L.) cultivadas en invernadero*, Agrociencia 38 (2004), 613-624.
- [2] I. Seginer, *A dynamic model for nitrogen-stressed lettuce*, Annals of Botany 91 (2003), 623-635.
- [3] I. Seginer, P. Bleyaert, M. Breugelmans, *Modelling ontogenetic changes of nitrogen and water content in lettuce*, Annals of botany 94 (2004), 393-404.
- [4] I. Seginer, F. Buwalda, G. van Straten, *Nitrate concentration in greenhouse lettuce: a modeling study*, Acta Horticulturae 456 (1998), 189-198.
- [5] I. Seginer, G. van Straten, F. Buwalda, *Lettuce growth limited by nitrate supply*, Acta Horticulturae 507 (1999), 141-148.
- [6] A. Saltelli, K. Chan, E. M. Scott, *Sensitivity analysis*, John Wiley and Sons, Ltd., Chichester, 2000.
- [7] A. Saltelli, S. Tarantola, F. Campolongo, M. Ratto, *Sensitivity analysis in practice. A guide to assesing scientific models*, John Wiley and Sons, Ltd., Chichester, 2004.
- [8] A. Saltelli, M. Ratto, T. Andres, F. Campolongo, J. Cariboni, D. Gatelli, M. Saisana, S. Tarantola, *Global sensitivity analysis. The primer*, John Wiley and Sons, Ltd., Chichester, 2008.
- [9] J. H. M. Thornley, I. R. Johnson, *Plant and crop modeling: a mathematical approach to plant and crop physiology*, The Blackburn Press, 2000.
- [10] J. H. M. Thornley, J. France, *Mathematical models in Agriculture*, CABI, Cambridge, 2007.

Postgrado en Ingeniería Agrícola y Uso Integral del Agua, UACH

Km 38.5, Carretera México-Texcoco

Chapingo, Estado de México C.P. 56230

ilopez@correo.chapingo.mx, abrojano@hotmail.com, raquels85@yahoo.com.mx  
jgc@xanum.uam.mx



# CAPÍTULO 7

## ESTUDIO NUMÉRICO DE LAS ECUACIONES DE POISSON-NERNST-PLANCK EN CELDAS DE COMBUSTIBLE SIN MEMBRANA

MIGUEL GONZÁLEZ VÁZQUEZ  
LORENZO HÉCTOR JUÁREZ VALENCIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UAM - IZTAPALAPA

RESUMEN. Una celda de combustible es un dispositivo de conversión electroquímica que se alimenta de manera continua de combustible (por ejemplo hidrógeno) y de un oxidante (el cual puede ser oxígeno), para producir electricidad de corriente directa a través de reacciones químicas de tipo reducción-oxidación. La celda de combustible sin membrana, es una tipo de celda de combustible donde la separación de los reactantes (combustible y oxidante) se obtiene por flujo laminar estable. El modelo físico incorpora la teoría electroquímica (ecuaciones de Poisson-Nernst-Planck) y la teoría de dinámica de fluidos (ecuaciones de Navier-Stokes). En este trabajo se presentan los resultados numéricos obtenidos aplicando el método de elemento finito en una y dos dimensiones, para el caso de estacionario, pero con más de dos especies iónicas, el cual es modelado por las ecuaciones de Poisson-Nernst-Planck.

### 1. INTRODUCCIÓN

Las celdas de combustible son una importante fuente de energía alternativa por ser de cero emisiones contaminantes. Entre las principales aplicaciones de las celdas de combustible se encuentran: fuentes de energía en lugares remotos (naves espaciales, estaciones meteorológicas alejadas, parques grandes, localizaciones rurales), aplicaciones de cogeneración (uso combinado de calor y electricidad) para viviendas, edificios de oficinas y fábricas, plantas de potencia, vehículos eléctricos, sistemas auxiliares de energía, sistemas de apoyo a la red eléctrica, equipos eléctricos portátiles (teléfonos celulares, computadoras, reproductores de música), etc., [1, 2, 3, 4].

La eficiencia de estas celdas es generalmente mucho mayor que en la producción de electricidad moderna, las cuales tienen una eficiencia a lo más de 40% (para el caso de plantas de energía a base de combustible fósil), comparando con algunas celdas de combustible que alcanzan hasta un 70%, [2, 4]. Los componentes de una celda de combustible son:

**Electrolito:** Cualquier sustancia que contiene iones libres, los que se comportan como un medio conductor eléctrico. El tipo de electrolito depende de la celda de combustible.

**Catalizador:** Agentes químicos encargados de acelerar las reacciones químicas, el más común de los catalizadores es el platino. Algunas celdas de combustible a altas temperaturas no necesitan de un catalizador para comenzar la reacción.

**Ensamble de membranas de electrodos:** Membranas electrolíticas acopladas,

localizadas entre la capa difusiva del gas y el catalizador, con dos placas para los campos de flujo en las salidas (ánodo y cátodo).

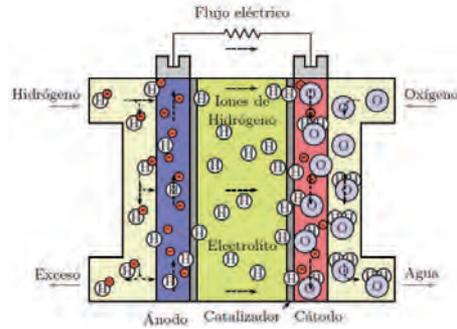


FIGURA 1. Esquema de una celda de combustible con membrana de intercambio de protón a base de hidrógeno.

Las celdas de combustible trabajan por reacción química de tipo reducción-oxidación. Una celda estándar contiene un ánodo, un cátodo y una capa electrolítica en un típico sistema como se muestra en la figura 1. El electrolito permite el paso de los iones de hidrógeno con carga positiva, mientras que los electrones cargados negativamente pasan a través de un circuito externo, lo cual genera una corriente eléctrica. En la interfaz con el cátodo, el catalizador crea una reacción con el oxígeno durante la cual se produce agua y (por un principio exotérmico) calor. Una clase de celdas de combustible son las llamadas celdas de combustible sin membrana ó también llamadas celdas de combustible de flujo laminar (Laminar Flow Fuel Cells, LFFC), donde la separación de los reactantes (el combustible y el óxido), se genera por flujo laminar estable, [4, 5].

Las celdas de combustible sin membrana, son una conveniente alternativa que ofrece considerables ahorros en el desarrollo de celdas de combustible. Además de las ventajas económicas obvias, las celdas de combustible evitan problemas técnicos inherentes en las celdas de combustible con membranas a base de polímeros, como es el cruce del combustible y que la membrana se seque.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

Consideremos una celda de combustible donde el combustible y el oxidante fluyen de izquierda a derecha, entre dos electrodos de plata. El ánodo y el cátodo están del lado del combustible y del oxidante respectivamente (ver figura 2). El flujo de los reactantes genera una corriente eléctrica por una reacción redox, la cual ocurre entre los electrodos cuando los cationes se desplazan del ánodo al cátodo, generando una diferencia de voltaje en los electrodos. Por lo tanto, si se fijan los electrodos a un circuito externo, es posible extraer la energía eléctrica de la celda.

Supongamos que los electrolitos son fluidos Newtonianos incompresibles, y que además, tienen la misma viscosidad  $\mu$  y densidad de masa  $\rho$ . Las ecuaciones que

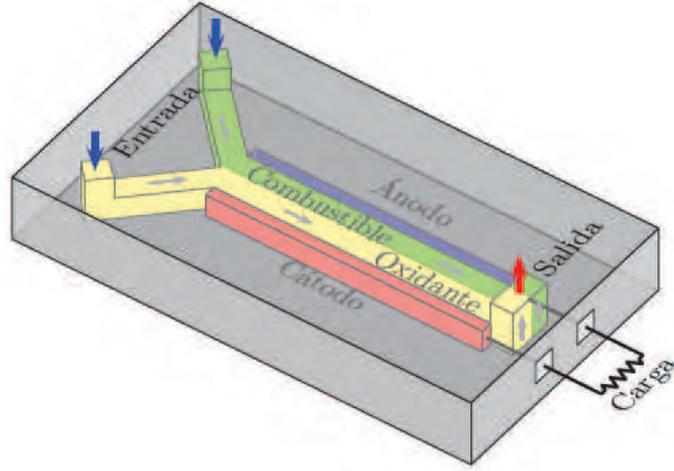


FIGURA 2. Celda de combustible sin membrana con configuración Y.

modelan este fenómeno son las ecuaciones de Navier-Stokes, que describen la dinámica de fluidos, y las ecuaciones de Poisson-Nernst-Planck que describen la electrodinámica (dinámica de las especies iónicas).

Las ecuaciones de Navier-Stokes para la dinámica del flujo de fluidos son

$$(1) \quad \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \rho_q \nabla \phi,$$

$$(2) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

donde

$$(3) \quad \rho_q = F \left( \sum_{i=1}^N z_i C_i \right),$$

denota la densidad de carga,  $\mathbf{u}$  la velocidad del fluido,  $p$  la presión,  $F$  la constante de Faraday, los términos  $C_i$  denotan las concentraciones de carga molar de cada una de las  $N$  especies iónicas (ya sean las asociadas al combustible, al oxidante y otras que pueden surgir por las reacciones químicas entre las anteriores) y  $\phi$  el potencial eléctrico en la celda de combustible. Las ecuaciones (1) y (2) describen la conservación de momento y masa del fluido, respectivamente.

La ley de Gauss  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_q / \epsilon_S$ , con  $\epsilon_S$  la permitibilidad del electrolito, implica que el potencial eléctrico  $\phi$  debe satisfacer la ecuación de Poisson

$$(4) \quad -\epsilon_S \nabla^2 \phi = \rho_q.$$

Las ecuaciones de Nernst-Planck para la distribución de las especies iónicas son

$$(5) \quad \frac{\partial C_i}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C_i = D_i \nabla \cdot \left( \nabla C_i + \frac{z_i F}{RT} C_i \nabla \phi \right) \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, N,$$

donde  $D_i$  y  $z_i$  denotan el coeficiente de difusión y el número de valencia de la  $i$ -ésima especie iónica, respectivamente,  $R$  es la constante universal de los gases y

$T$  es la temperatura absoluta. El primer término del lado derecho de la ecuación (5) representa el flujo de iones debido a la difusión (gradientes de concentración), mientras que el segundo describe el flujo de iones debido a la electromigración (gradientes de voltaje).

La conductividad eléctrica se define como

$$(6) \quad \sigma = \frac{F^2}{RT} \left( \sum_{i=1}^N z_i^2 D_i C_i \right).$$

En la superficie de los electrodos, se acumula exceso de carga, mientras que en el electrólito se forma una capa cerca de los electrodos, la cual tiene una carga eléctrica de grosor significativo. Esta capa de electrólito con carga neta se conoce como la doble capa de Gouy-Chapman-Stern, y está formada por una zona interna llamada capa compacta, y una zona un poco mayor llamada parte difusiva (figura 3). La parte compacta está compuesta por moléculas absorbidas en la superficie del electrodo y tiene un grosor  $\lambda_S$  (Capa Stern) que es del orden del diámetro de una molécula. El grosor de la parte difusiva,  $\lambda_D$  (longitud de Debye), puede ir del orden de  $10^{-8}$  m a  $10^{-7}$  m.

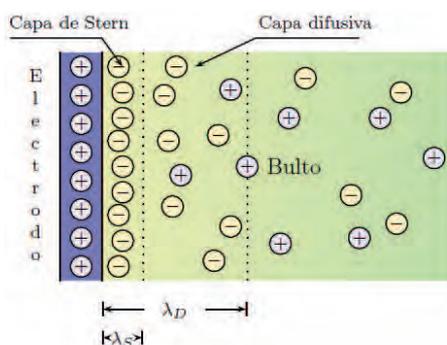


FIGURA 3. Efecto de doble capa cerca del electrodo positivo (ánodo).

Debido al exceso de carga en la doble capa, se genera un potencial eléctrico  $\phi$ . La teoría de Gouy-Chapman-Stern indica que  $\nabla\phi$  es una constante negativa en la parte compacta de la doble capa y se acerca asintóticamente a cero en la capa difusiva, [7]. Para este modelo, se deben considerar las siguientes condiciones iniciales para los electrodos. En [8] se supone un decaimiento lineal de voltaje sobre la capa de Stern, por lo tanto

$$(7) \quad \nabla\phi \cdot \mathbf{n} = -\frac{\zeta}{\lambda_S} \quad \text{con} \quad \zeta = \begin{cases} \phi - V & \text{en el ánodo,} \\ \phi & \text{en el cátodo,} \end{cases}$$

donde  $\lambda_S = \epsilon_S/C_S$  es el grosor de la capa de Stern,  $C_S$  es la capacitancia de la capa de Stern, y  $\zeta$  es llamado el potencial zeta. El potencial de referencia se escoge como cero en el cátodo y como  $V$  en el ánodo.

Para las concentraciones de carga supondremos que no hay escape de iones a través de los electrodos, es decir,

$$(8) \quad \left( \nabla C_i + \frac{z_i F}{RT} C_i \nabla \phi \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Para la velocidad del fluido en los electrodos, se impondrá un tipo de condición de frontera de no deslizamiento, esto es,

$$(9) \quad \mathbf{u} = 0.$$

### 3. DENSIDAD DE CARGA EFECTIVA

Una simplificación del modelo de celda de combustible sin membrana modelado por las ecuaciones (1),(2),(4),(5) sujeto a las condiciones de frontera (7)-(9), se obtiene al considerar la celda de combustible como una micro batería, donde los electrolitos no se mueven, es decir,  $\mathbf{u} = 0$ . Puesto que la velocidad del fluido no está presente, el modelo simplificado queda determinado por las ecuaciones de Poisson-Nernst-Planck

$$(10) \quad \frac{\partial C_i}{\partial t} = D_i \nabla \cdot \left( \nabla C_i + \frac{z_i F}{RT} C_i \nabla \phi \right) \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, N,$$

$$(11) \quad -\epsilon_S \nabla^2 \phi = F \left( \sum_{i=1}^N z_i C_i \right).$$

Para este problema simplificado se consideran las condiciones de frontera

$$(12) \quad \left( \nabla C_i + \frac{z_i F}{RT} C_i \nabla \phi \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, N,$$

y

$$(13) \quad \phi + \lambda_S \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} +v & \text{en el ánodo,} \\ -v & \text{en el cátodo.} \end{cases}$$

La primera condición de frontera corresponde a electrodos “idealmente polarizables” ó “completamente bloqueados” sin procesos de Faraday, lo cual significa que no hay flujo iónico sobre los electrodos.

En trabajos recientes, [5, 6, 8], se ha estudiado el caso binario (dos sustancias iónicas con carga opuesta) utilizando condiciones de frontera consistentes con las ecuaciones de Poisson-Nernst-Planck, las cuales aparecen de manera natural en la formulación variacional del problema.

### 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Las ecuaciones de Poisson-Nernst-Planck forman un sistema de ecuaciones diferenciales parciales altamente no lineales debido a que se encuentran fuertemente acopladas, y por lo tanto, no es posible encontrar soluciones analíticas, salvo que se consideren simplificaciones adicionales del modelo. Para el caso de celdas de combustible, las ecuaciones de Poisson-Nernst-Planck (10), (11) con condiciones de frontera (12), (13), son ecuaciones diferenciales rígidas que tienen soluciones con gradientes muy grandes cerca de los electrodos, por lo cual se requiere de métodos numéricos eficientes para encontrar su solución. En particular éstos métodos deben superar dos dificultades: introducir un esquema de integración en el tiempo que

permita romper el fuerte acoplamiento, sin degradar la solución; y resolver bien las escalas del problema, principalmente cerca de los electrodos donde se manifiestan gradientes muy altos de voltaje y concentraciones de iones, efecto del grosor de la capa de Stern  $\lambda_S$ , y de la capa difusiva  $\lambda_D$ .

Para resolver las dificultades anteriores, proponemos la siguiente estrategia: sea  $\Delta t$ , el paso para la discretización del tiempo, y sean  $C_i^n = C_i(\mathbf{x}, n\Delta t)$ ,  $\phi^n = \phi(\mathbf{x}, n\Delta t)$ , para  $i = 1, \dots, N$ . Dados los valores iniciales  $C_i^0$  para  $i = 1, \dots, N$  y  $\phi^0$ , encontrar la solución para tiempos subsecuentes aplicando el siguientes algoritmo:

Para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , encontrar  $C_i^{n+1}$  y  $\phi^{n+1}$  resolviendo

$$(14) \quad \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} - D_i \nabla^2 C_i^{n+1} = \frac{z_i D_i F}{RT} \nabla (C_i^n \nabla \phi^n) \quad \text{para } i = 1, \dots, N,$$

$$(15) \quad \epsilon_S \nabla^2 \phi^{n+1} = F \left( \sum_{i=1}^N z_i C_i^{n+1} \right).$$

El costo de este algoritmo es la solución de  $N+1$  ecuaciones elípticas desacopladas para cada paso de tiempo, las cuales son resueltas empleando el método de elemento finito. Una vez encontradas las concentraciones, es posible calcular la conductividad eléctrica y la densidad de carga, por medio de las fórmulas

$$(16) \quad \sigma^n = \frac{F^2}{RT} \left( \sum_{i=1}^N z_i^2 D_i C_i^n \right) \quad \text{y} \quad \rho_q^n = F \left( \sum_{i=1}^N z_i C_i^n \right),$$

respectivamente.

**4.1. Modelos Unidimensionales.** El objetivo de estudiar el caso unidimensional es comparar los resultados que se obtiene aplicando el algoritmo anterior con los resultados existentes en [5] (para el caso de dos especies), en donde se presentan soluciones aproximadas que se han obtenido con técnicas numéricas diferentes. Para los modelos unidimensionales, consideremos  $\Omega = [-1, 1]$ ,  $\epsilon_S = 0.25$ ,  $\lambda_S = 0.05$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $F = RT$ , como en [5], y las ecuaciones

$$(17) \quad \frac{\partial C_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( \frac{\partial C_i}{\partial x} + \frac{z_i F}{RT} C_i \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, N,$$

$$(18) \quad -\epsilon_S \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = F \left( \sum_{i=1}^N z_i C_i \right),$$

sujeto a las condiciones de frontera

$$(19) \quad \frac{\partial C_i}{\partial x} + \frac{z_i F}{RT} C_i \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{para } x = -1, 1, \quad i = 1, \dots, N,$$

y

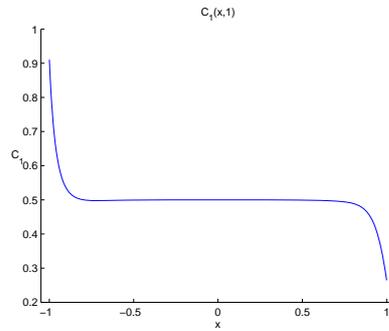
$$(20) \quad v - \lambda_S \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} -\phi & \text{en el ánodo } (x = -1), \\ +\phi & \text{en el cátodo } (x = 1), \end{cases}$$

e iniciales

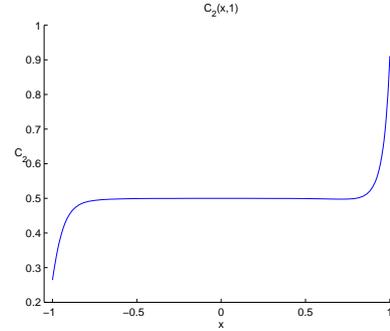
$$(21) \quad C_i(x, 0) = c_i, \quad x \in [-1, 1], \quad i = 1, \dots, N,$$

$$(22) \quad \phi(x, 0) = vx, \quad x \in [-1, 1].$$

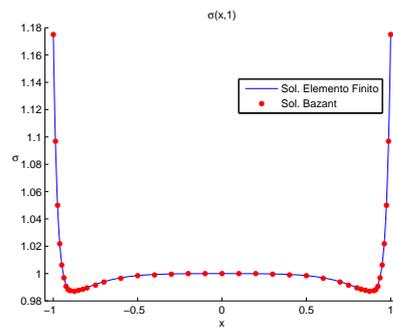
Tomando  $N = 2$ , los valores de los parámetros  $D_1 = D_2 = 0.5$ ,  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = -1$ ,  $c_1 = c_2 = 0.5$ ,  $v = 1$  y ocupando una malla de 100 nodos con refinamiento de orden  $10^{-4}$  cerca de los electrodos se obtienen los resultados para el tiempo  $t = 1$  mostrados en la figura 4.



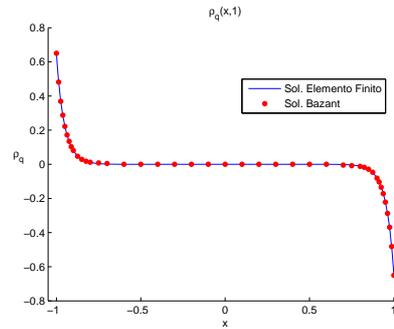
(A) Concentración de carga positiva  $C_1$ .



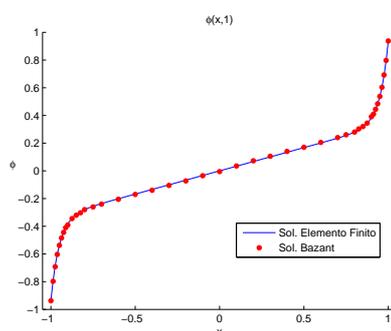
(B) Concentración de carga negativa  $C_2$ .



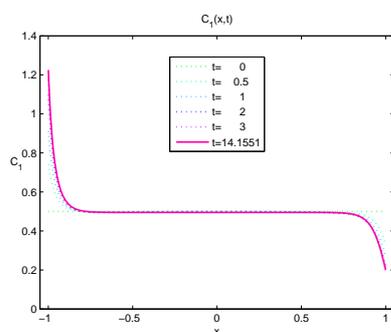
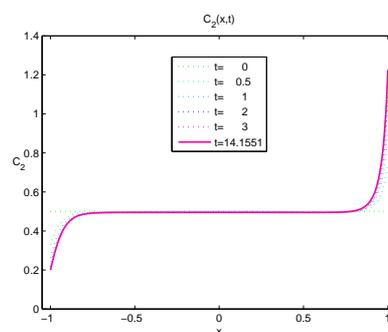
(C) Conductividad eléctrica  $\sigma$ .



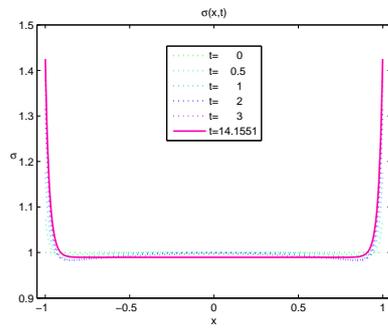
(D) Densidad de carga  $\rho_q$ .

(E) Potencial eléctrico  $\phi$ .FIGURA 4. Soluciones para  $t = 1$ ,  $\sigma$ ,  $\rho_q$  y  $\phi$  comparadas con los resultados obtenidos en [5, 6].

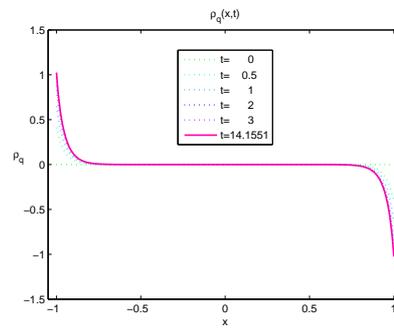
La presencia de gradientes altos en las soluciones cerca de los electrodos, revelan la formación de capas límite cerca de ellos. El voltaje simétrico externo aplicado genera una solución simétrica, en la cual en la mayor parte del intervalo se observa electroneutralidad más conductividad constante, mientras el voltaje aumenta linealmente en esa misma región. Por otra parte las soluciones para las concentraciones de carga de los iones con carga positiva y negativa son más altos en los electrodos de cargas opuestas respectivamente. Como se puede observar las soluciones obtenidas por elemento finito para  $\sigma$ ,  $\rho_q$  y  $\phi$ , coinciden en forma excelente con los resultados en [5], donde las ecuaciones de Poisson-Nernst-Planck se resuelven en términos de  $\sigma$ ,  $\rho_q$  y  $\phi$ . La figura 5 muestra las soluciones para diferentes valores de tiempo, dentro del que se encuentra el estado estacionario ( $t \approx 14.1551$ ).

(A) Concentración de carga positiva  $C_1$ .(B) Concentración de carga negativa  $C_2$ .

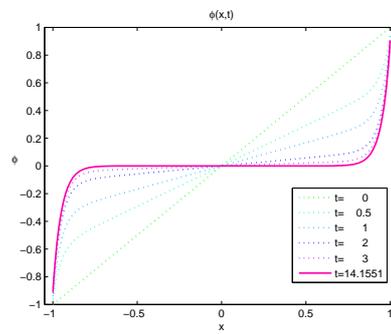
Cuando el potencial inicial es cambiado por  $\phi(x,0) = 4x$ , es decir,  $v = 4$ , el estado estacionario se alcanza en  $t \approx 28.8155$ , para este tiempo las soluciones que se obtienen se muestran en la figura 6.



(C) Conductividad eléctrica  $\sigma$ .

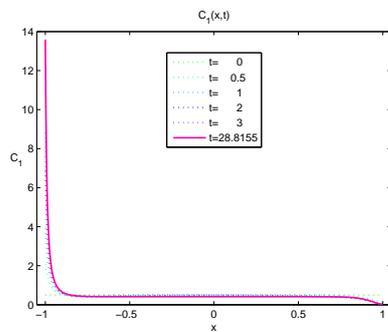


(D) Densidad de carga  $\rho_q$ .

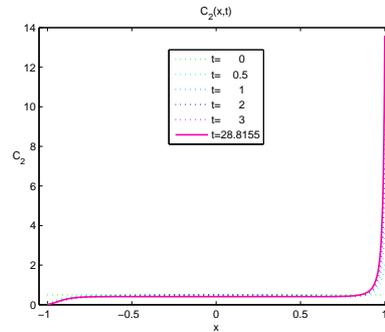


(E) Potencial eléctrico  $\phi$ .

FIGURA 5. Soluciones para diferentes valores de  $t$ .



(A) Concentración de carga positiva  $C_1$ .



(B) Concentración de carga negativa  $C_2$ .

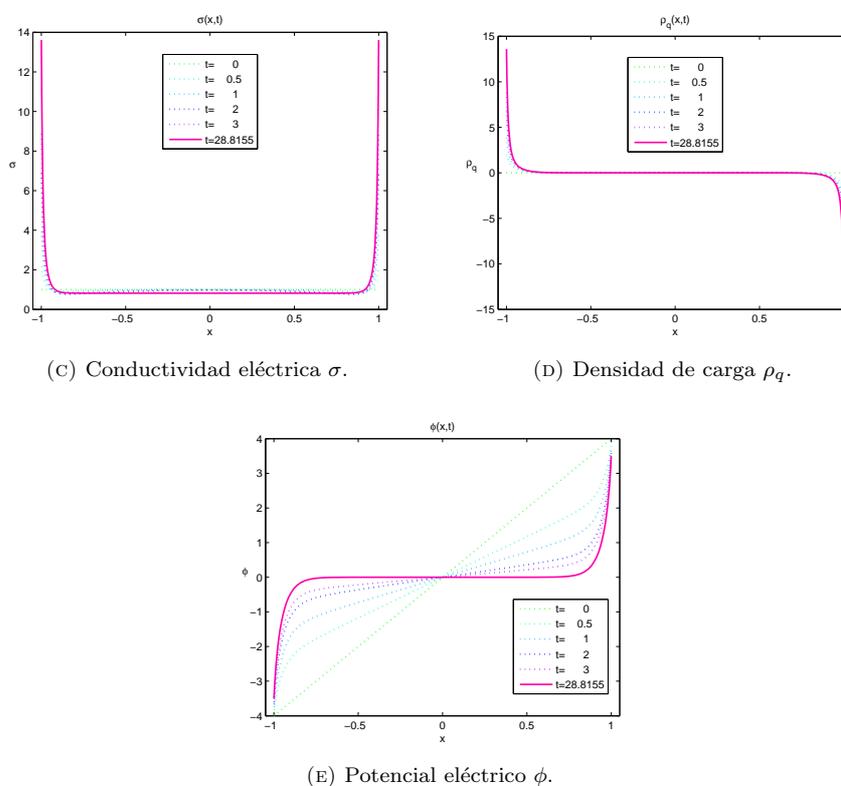


FIGURA 6. Soluciones para diferentes valores de  $t$ , cuando  $v = 4$ .

Puesto que la diferencia de potencial inicial para  $v = 4$  es mayor que para  $v = 1$ , entonces el campo eléctrico es más intenso, por tal motivo la conductividad eléctrica descende en el bulto (interior del intervalo  $[-1, 1]$ ) y permanece electroneutra, mientras que cerca de los electrodos aumenta dramáticamente, otro efecto es que las concentraciones de carga aumentan considerablemente en los extremos con gradientes más altos, comparados con las soluciones cuando  $v = 1$ .

4.1.1. *Casos con Más de Dos Especies (Problema Multiiónico)*. Tomando ahora  $N = 4$  junto los valores de los parámetros  $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = 0.5$ ,  $z_1 = z_2 = 1$ ,  $z_3 = z_4 = -1$ ,  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0.25$ ,  $v = 1$  y ocupando la misma malla que en los problemas anteriores, los resultados que se obtienen para diferentes valores de  $t$  se muestran en la figura 7.

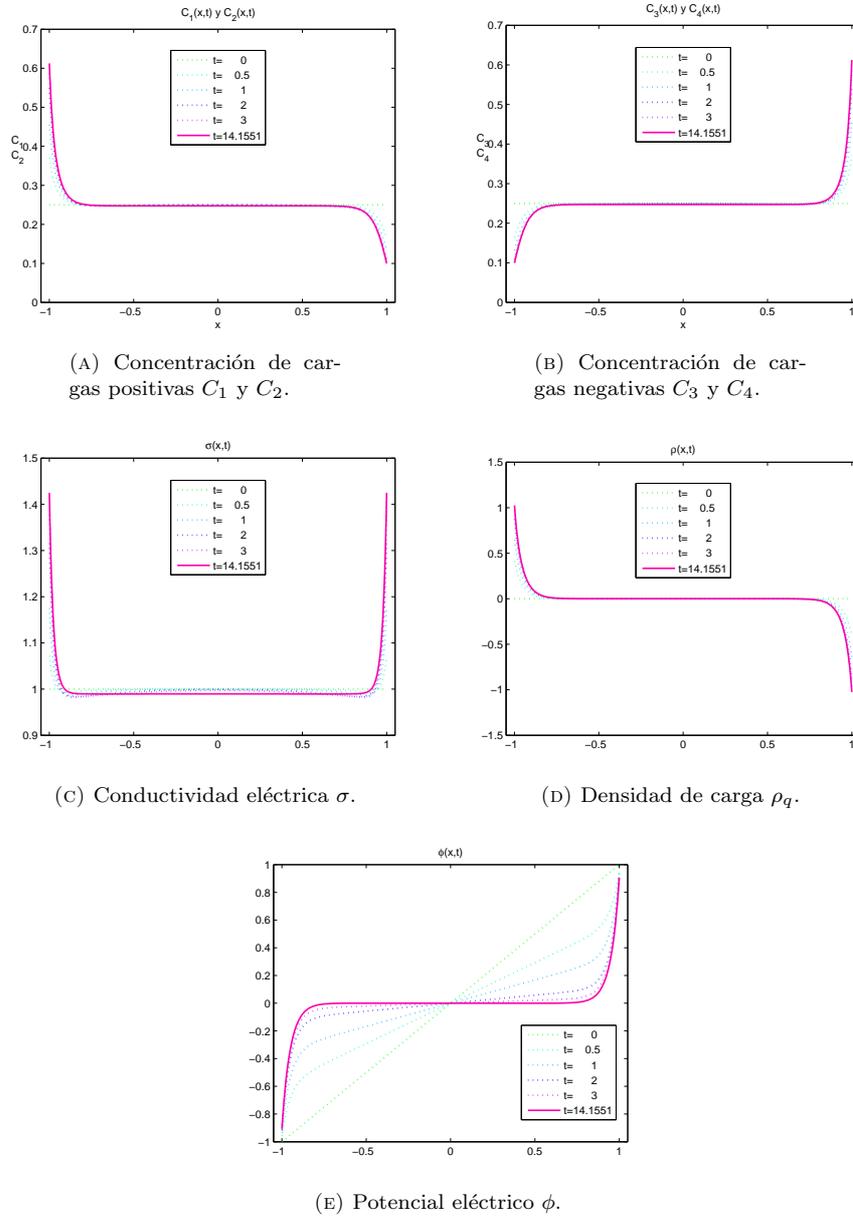
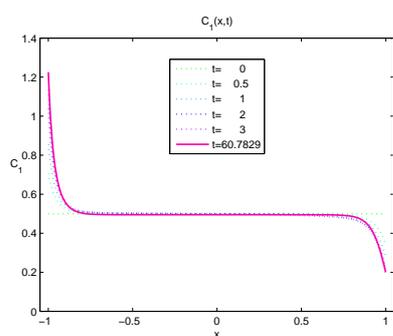


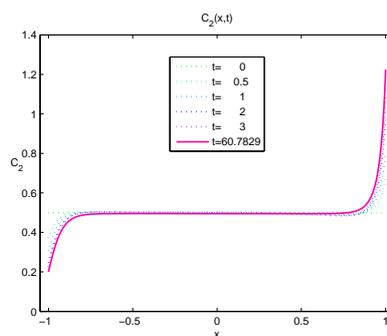
FIGURA 7. Soluciones para diferentes valores de  $t$  para 4 especies iónicas.

Las especies que tienen la misma carga también tienen la misma solución, esto es consistente ya que la solución del esquema de elemento finito es el mismo para los iones con misma carga y mismas condiciones iniciales y de frontera. Este modelo se puede ver como el modelo de 2 especies iónicas, por lo cual las soluciones para  $\sigma$  y  $\rho_q$  coinciden también con dicho modelo.

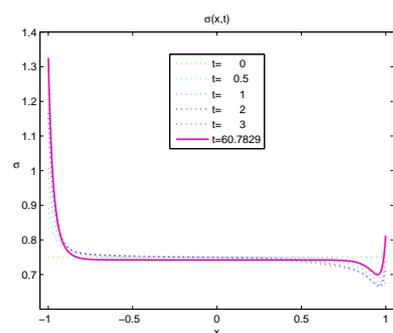
Las soluciones anteriores se obtuvieron para especies iónicas con el mismo coeficiente de difusión, en los siguientes resultados unidimensionales se consideran coeficientes de difusión distintos. Sea  $N = 2$ ,  $D_1 = 1$ ,  $D_2 = 0.5$ ,  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = -1$ ,  $c_1 = c_2 = 0.5$ ,  $v = 1$  nuevamente con la malla de los problemas anteriores, se obtienen los resultados mostrados en la figura 8, para diferentes valores de  $t$ .



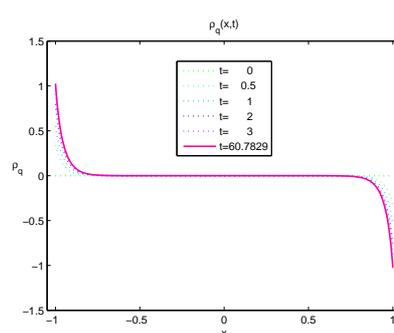
(A) Concentración de carga positiva  $C_1$ .



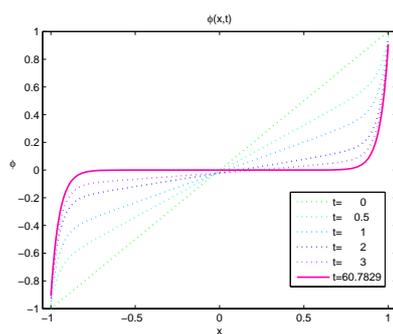
(B) Concentración de carga negativa  $C_2$ .



(C) Conductividad eléctrica  $\sigma$ .



(D) Densidad de carga  $\rho_q$ .

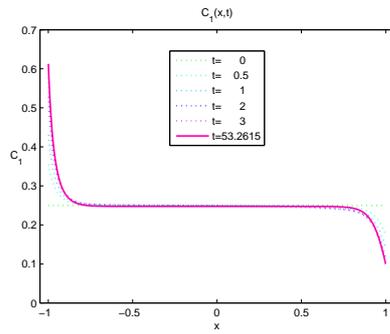


(E) Potencial eléctrico  $\phi$ .

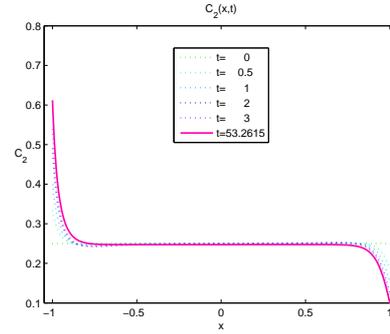
FIGURA 8. Soluciones para diferentes valores de  $t$ .

Para este caso se puede observar que la conductividad eléctrica ya no presenta simetría, esto se debe al hecho de que los iones con carga positiva se desplazan con el doble de rapidez que los iones con carga negativa, ocasionando con esto la pérdida de la simetría, y que el tiempo en el que se alcanza el estado estacionario aumenta, pues las concentraciones de los iones con carga negativa requieren de mayor tiempo para alcanzar su estado estacionario.

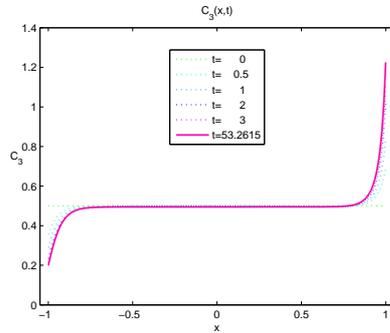
Si  $N = 3$ ,  $D_1 = 1$ ,  $D_2 = 0.5$ ,  $D_3 = 0.75$ ,  $z_1 = z_2 = 1$ ,  $z_3 = -1$ ,  $c_1 = c_2 = 0.25$ ,  $c_3 = 0.25$ ,  $v = 1$ , los resultados que se obtiene se muestran en la figura 9, para diferentes valores de  $t$ .



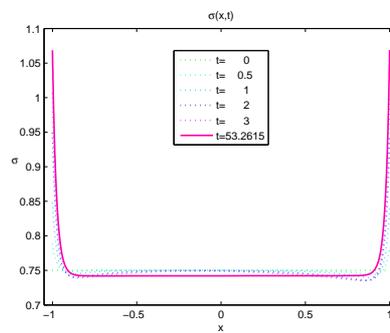
(A) Concentración de carga positiva  $C_1$ .



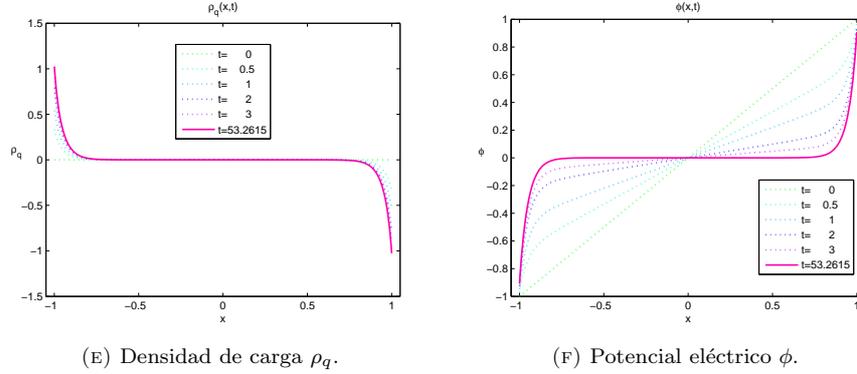
(B) Concentración de carga positiva  $C_2$ .



(c) Concentración de carga negativa  $C_3$ .



(D) Conductividad eléctrica  $\sigma$ .

FIGURA 9. Soluciones para diferentes valores de  $t$ .

Para este caso la solución para la conductividad eléctrica tampoco presenta simetría.

**4.2. Modelo Bidimensional.** El modelo bidimensional que se presenta a continuación es una generalización del caso unidimensional para el caso de dos especies. Consideremos  $\Omega = [0, 10] \times [-1, 1]$ ,  $\epsilon_S = 0.25$ ,  $\lambda_S = 0.05$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $F = RT$ , y las ecuaciones

$$(23) \quad \frac{\partial C_i}{\partial t} = D_i \nabla \cdot \left( \nabla C_i + \frac{z_i F}{RT} C_i \nabla \phi \right) \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, N,$$

$$(24) \quad -\epsilon_S \nabla^2 \phi = F \left( \sum_{i=1}^N z_i C_i \right),$$

sujeto a las condiciones de frontera

$$(25) \quad \left( \nabla C_i + \frac{z_i F}{RT} C_i \nabla \phi \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{para } y = -1, 1, \quad x \in [0, 10], \quad i = 1, \dots, N,$$

y

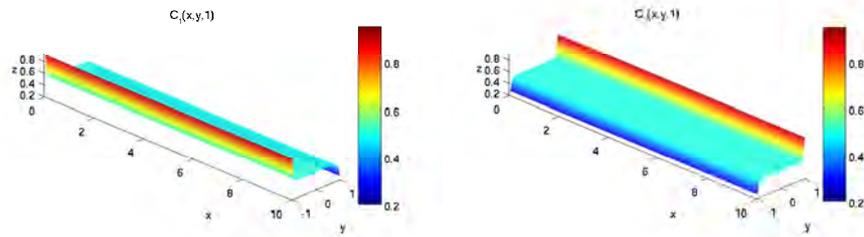
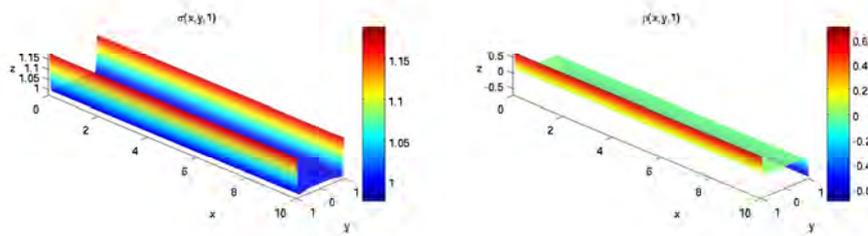
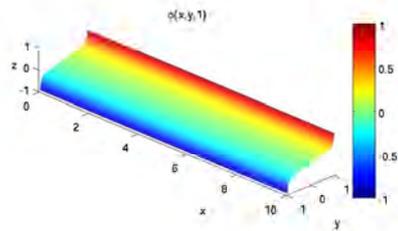
$$(26) \quad \phi + \lambda_S \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} +v & \text{en el ánodo } (y = -1), \\ -v & \text{en el cátodo } (y = 1), \end{cases}$$

e iniciales

$$(27) \quad C_i(x, y, 0) = c_i, \quad (x, y) \in [0, 10] \times [-1, 1], \quad i = 1, \dots, N,$$

$$(28) \quad \phi(x, y, 0) = vy, \quad (x, y) \in [0, 10] \times [-1, 1].$$

Aplicando el algoritmo de solución dado al principio de esta sección, para  $N = 2$ ,  $D_1 = D_2 = 0.5$ ,  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = -1$ ,  $c_1 = c_2 = 0.5$ ,  $v = 1$  y empleando para este caso una malla triangular lineal de  $100 \times 20$  nodos con orden igual a  $10^{-4}$ , se obtienen las soluciones de la figura 10 para  $t = 1$ .

(A) Concentración de carga positiva  $C_1$ .(B) Concentración de carga negativa  $C_2$ .(C) Conductividad eléctrica  $\sigma$ .(D) Densidad de carga  $\rho_q$ .(E) Potencial eléctrico  $\phi$ .FIGURA 10. Soluciones para el problema bidimensional  $t = 1$ .

Como se puede observar los valores de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\phi$ ,  $\sigma$  y  $\rho$  son constantes a lo largo del eje  $x$ , esto es consistente, ya que el flujo de los iones es transversal a dicho eje, al no existir un flujo paralelo a este eje. En la figura 11 se muestran los resultados obtenidos para este modelo en una sección transversal al eje  $x$ , y se compara con las soluciones del modelo unidimensional.

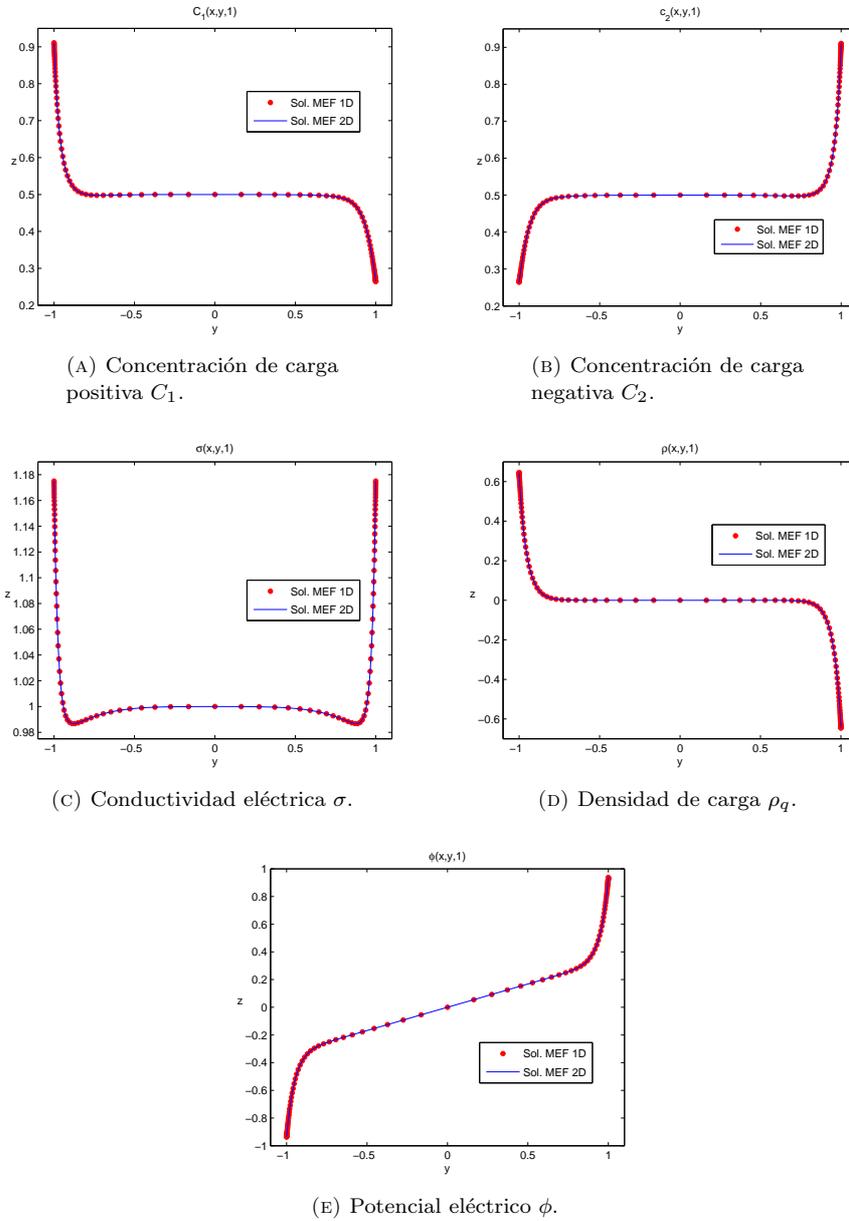


FIGURA 11. Comparación de las soluciones obtenidas para 1 y dos dimensiones cuando  $t = 1$ .

Las soluciones obtenidas en el caso bidimensional coinciden con las soluciones del modelo unidimensional, la diferencia entre cada una de ellas es del orden de  $10^{-6}$ , por lo cual el método de solución para las ecuaciones de Poisson-Nerst-Planck en una y dos dimensiones dan una buena aproximación de la solución obtenida en [5], pero en este caso, resolviendo las ecuaciones antes mencionadas en términos de

las concentraciones de carga de las especies iónicas involucradas en la dinámica de estos problemas.

## 5. CONCLUSIONES

Para resolver las ecuaciones de Poisson-Nernst-Planck, que modelan de la dinámica de carga de  $N$  especies iónicas bajo la acción de un potencial externo en una celda de combustible, se aplicó un esquema semi-implícito para discretizar en el tiempo, en combinación con el método de elemento finito. Se obtuvieron resultados para el modelo unidimensional de una celda electroquímica con la interacción de las especies iónicas, empleando una malla no uniforme, con mucho mayor refinamiento en las regiones cercanas a las capas límite. Dichos resultados concuerdan muy satisfactoriamente con la teoría electroquímica y con los resultados obtenidos en [6]. El estudio se extendió al caso más realista en el que el electrólito contiene más de dos especies iónicas, y también se abordó un caso particular del modelo bidimensional, obteniendo resultados muy satisfactorios en ambos casos.

También se abordaron problemas de celdas de combustible con diferente coeficiente de difusión. La diferencia obtenida entre los modelos con coeficientes de difusión iguales y diferentes, radica en que en los primeros, las soluciones para la conductividad eléctrica presentan simetría con respecto al origen, mientras que para el segundo caso, las soluciones para la conductividad eléctrica ya no es así, esto es debido a que las especies iónicas con menor coeficiente de difusión requieren de mayor tiempo para alcanzar su estado estacionario, lo cual aumenta el tiempo para que el sistema completo también alcance su estado estacionario. Esto último se debe a que las escalas de tiempo difusivo son diferentes, dando lugar a problemas de rigidez, muy difíciles de abordar numéricamente. Sin embargo, el esquema aplicado, aun en estos casos, proporcionó resultados satisfactorios.

## REFERENCIAS

- [1] J. M. Andújar, F. Segura, *Fuel cells: History and updating. A walk along two centuries*, Renewable and Sustainable Energy Reviews, 13 (2009), 2309-2322.
- [2] C. K. Dyer, *Fuel cells for portable applications*, Journal of Power Sources, 106 (2002), 31-34.
- [3] T. S. Zhao, *Micro Fuel Cells - Principles and Applications*, Academic Press, 2009.
- [4] Seyed Ali Mousavi Shaegh, Nam-Trung Nguyen and Siew Hwa Chan, *A review on membraneless laminar flow-based fuel cells*, International Journal of Hydrogen Energy, 36 (2011), 5675-5694.
- [5] Lorenzo Héctor Juárez Valencia, Ciro F. Flores Rivera, Eduardo Ramos Mora and José Nuñez, *Fuel Cells: Navier-Stokes and Poisson-Nernst-Planck Equations*, I Workshop on Asymptotics for Parabolic and Hyperbolic Systems (2008), Laboratório Nacional de Computação Científica, 137-149.
- [6] Martin. Z. Bazant, Katsuyo Thornton and Armand Ajdari, *Diffuse-charge dynamics in electrochemical systems*, Physical Review E., 70 (2004), (021506) 1-22.
- [7] Allen J. Bard and Larry R. Faulkner, *Electrochemical Methods. Fundamentals and Applications*, Second Edition, John Wiley & Sons, 2001.
- [8] M. Z. Bazant, K. T. Chen and B. J. Bayly, *Current-voltage relations for electrochemical thin films*, SIAM, Journal on Applied Mathematics, 65(5) (2005), 1463-1484.

Departamento de Matemáticas, UAM - Iztapalapa  
Av. San Rafael Atlixco No. 186, Colonia Vicentina, Iztapalapa  
México, D. F. C.P. 09340

`mi_gonzalezv@yahoo.com.mx`, `hect@xanum.uam.mx`.

# CAPÍTULO 8

## INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES DE CONTROL DE LYAPUNOV

EVODIO MUÑOZ AGUIRRE  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD VERACRUZANA

RESUMEN. Se exponen de manera escueta los conceptos relacionados con funciones de Lyapunov, se muestran algunos casos particulares para ejemplificar el teorema principal de este tema. Posteriormente se explican los principales problemas que aborda la teoría de control, así como los principales tipos de control. Por último, se escribe una breve descripción del problema que determina el concepto principal de éste trabajo, el de función de control de Lyapunov; se exponen además algunos ejemplos y resultados.

### 1. INTRODUCCIÓN

Se ha mostrado en varios textos, por ejemplo en [7], [3], [9], que la estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema no lineal puede ser estudiada mediante la estabilidad del punto crítico del sistema lineal pero bajo ciertas condiciones. Sin embargo, no se puede concluir algo sobre la estabilidad cuando no se cumplen estas condiciones determinadas. Aún más, muchas veces se requiere saber el comportamiento de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias alrededor de un punto de equilibrio conocido, aunque por una u otra razón no es posible encontrar de manera explícita las mismas. Es en esta situación cuando se utiliza el segundo método de Lyapunov para el estudio de la estabilidad de las soluciones, conocido también como método directo. Este consiste en encontrar una función continuamente diferenciable que depende de las variables de estado en la que si se evalúan las trayectorias es una función decreciente, pero siempre no negativa o estrictamente positiva, las características de esta función, conocida con el nombre de función de Lyapunov, se describe en la primera sección de este capítulo, así como un ejemplo. El método directo se basa en dos principios básicos de los sistemas físicos [3], i) un punto de equilibrio es estable si la energía potencial es un mínimo local, y en otro caso es inestable; y 2) la energía total es constante durante todo el movimiento. La técnica además provee información de tipo global. Por otra parte, puede leerse en [5] que S. Bennet inicia su libro dedicado a la historia de la Ingeniería del Control, con la siguiente cita de Aristóteles del capítulo 3 del primer volumen de “Política”

*Si cada instrumento pudiera llevar a cabo su propia función, respondiendo o anticipándose al trabajo de otros. Si la lanzadera tejiese y la púa tocase el arpa sin una mano que los guiara, los patronos no necesitarían ni sirvientes ni capataces.*

Esta idea, expresada con enorme acierto por Aristóteles, refleja de manera transparente lo que ha sido el motor de la Ingeniería del Control y de su teoría matemática: la automatización de los procesos para la liberación y mejora de la calidad de vida del ser humano. La palabra control implica actuación y refleja el esfuerzo

humano para intervenir en el medio que le rodea con el fin de garantizar su supervivencia y una permanente mejora en la calidad de vida.

En efecto, aunque la idea de la teoría de control se remota a varios siglos, fue aproximadamente 150 años atrás cuando comenzaron a analizarse los regidores (gobernadores) del comportamiento de los sistemas mecánicos desde un punto de vista matemático; éstos actuadores funcionan de manera estable si todas las raíces de algún polinomio asociado están contenidas en el semiplano izquierdo del plano complejo. Uno de los resultados más destacados del inicio de la Teoría de Control fue el algoritmo de Routh, que nos permite checar cuando un polinomio tiene esta propiedad. Hoy en día, se presentan cuestionamientos de estabilidad y se han utilizado nuevas técnicas en la Economía y la Biología.

Esta rama de las matemáticas aplicadas es muy importante, ya que nos ayuda, por ejemplo, a describir el movimiento deseado de un sistema físico o mecánico descrito por ecuaciones diferenciales o ecuaciones en diferencias, al cual se puede influir mediante algunas variables añadidas al sistema conocidas como **variables de Control**. Esta teoría también se utiliza para modelar sistemas químicos, físicos, y otros más, con el fin de hacer su comportamiento acorde a las necesidades que se requieran. En la tercera sección se describen los principales objetivos y elementos importantes de ésta área, necesarios para la comprensión de la sección que le sigue.

En otro orden de ideas, el estudio del control de sistemas no lineales es un tema muy difícil de abordar, una técnica extendida de control no lineal se basa en el uso de funciones  $V$ , la cual puede hacerse decrecer puntualmente por medio de la elección adecuada de controles instantáneos; dada tal  $V$ , el control aplicado en cada instante puede ser una de las fuerzas que ayudan a decrecer. Las funciones  $V$ , generalmente se les llama funciones de control de Lyapunov (CLF, por sus siglas en inglés), en analogía a las funciones de Lyapunov clásicas de los sistemas dinámicos que no contienen control. En muchas aplicaciones es benéfico contar con una función de Lyapunov continuamente diferenciable cuya derivada a través de las trayectorias del sistema pueden ser negativas para una elección apropiada de realimentación. Este problema da origen a las funciones de control de Lyapunov, objeto de estudio de la última sección de este trabajo. De hecho las funciones de control de Lyapunov aparecen comúnmente en ingeniería, ver por ejemplo [13], y hasta el momento, es la mejor herramienta que existe para establecer que un sistema sea asintóticamente estable o asintóticamente controlable .

Alrededor de los 80's, Artstein y otros autores, producen justificaciones teóricas matemáticas para el uso de este concepto, incluso las utilizan para construir algunas fórmulas de controles en realimentación [1].

El principal objetivo de este capítulo es presentar de forma sencilla y explícita las funciones de control de Lyapunov y algunos ejemplos, haciendo énfasis en los dos grandes temas de la matemáticas involucrados: las funciones de Lyapunov clásicas y la teoría de control. Con el fin de cumplir el objetivo, se dejan las demostraciones para ser consultadas en las referencias, mismas que se señalan en cada caso.

## 2. ESTABILIDAD Y FUNCIÓN DE LYAPUNOV

Un punto de equilibrio de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es estable en el sentido de Lyapunov, si todas las soluciones que inician en las cercanías del punto de equilibrio permanecen cerca del punto de equilibrio; de otra forma resulta inestable. El punto de equilibrio además es asintóticamente estable si las soluciones además de permanecer cerca del mismo, tienden hacia el punto de equilibrio cuando transcurre el tiempo. A continuación se formalizan los conceptos descritos.

**2.1. Estabilidad.** Supongamos que se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$(1) \quad \dot{X} = F(X)$$

donde  $X$  es un vector de  $n$  dimensiones. las siguientes definiciones hacen referencia a este sistema.

**Definición 2.1.** El punto de equilibrio  $X^*$  es un punto de equilibrio **estable**, si para toda vecindad  $\mathcal{O}$  de  $X^*$  en  $\mathbb{R}^n$  existe una vecindad  $\mathcal{O}_1$  de  $X^*$  in  $\mathcal{O}$  tal que cualquier solución  $X(t)$  con  $X(0) = X_0$  en  $\mathcal{O}_1$  está definida y permanece en  $\mathcal{O}$  para toda  $t > 0$ .

**Definición 2.2.** Si  $\mathcal{O}_1$  de  $X^*$  se elige como en la definición anterior y si además de ser estable cumple que  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X^*$ , se dice que el punto de equilibrio es **asintóticamente estable**.

**Definición 2.3.** Si  $X^*$  no es estable, se dice que el punto de equilibrio es **inestable**, lo cual significa que existe una vecindad  $\mathcal{O}$  de  $X^*$  tal que para cualquier vecindad  $\mathcal{O}_1$  de  $X^*$  en  $\mathcal{O}$  existe al menos una solución  $X(t)$  comenzando en  $X(0) \in \mathcal{O}$  tal que no está completamente en  $\mathcal{O}$  para  $t > 0$ .

Como es muy conocido, se puede estudiar la estabilidad del sistema lineal relacionado al sistema no lineal (1) conocido como linealización. Concretamente:

**Definición 2.4.** Al sistema:

$$(2) \quad \dot{X} = AX$$

donde  $A$  es la matriz jacobiana  $A = DF(X^*) \frac{\partial F}{\partial X}(X)|_{X=X^*}$ , se le llama **linealización** del sistema lineal (1)

Para la linealización del sistema lineal se tienen las siguientes definiciones.

**Definición 2.5.** Un punto de equilibrio  $X^*$  de (1) se le llama **hiperbólico**, si ninguno de los valores propios de la matriz  $DF(X^*)$  tiene parte real igual a cero.

**Definición 2.6.** Un punto de equilibrio  $X^*$  de (1) se le conoce como **sumidero**, si todos los valores propios de la matriz  $DF(X^*)$  tienen parte real negativa, se le conoce como **fuelle** si todos los valores propios tienen parte real positiva; y se le conoce como **punto silla** si es hiperbólico y además la matriz mencionada tiene al menos un valor propio con parte real positiva y al menos un valor propio con parte real negativa.

En la literatura de sistemas dinámicos gobernados por ecuaciones diferenciales, como el sistema (2) es una aproximación de (1) cerca del punto de equilibrio  $X^*$ , se pueden determinar la estabilidad del punto de equilibrio de acuerdo a que si  $X^*$

es un sumidero, o una fuente, tratándose de un punto de equilibrio hiperbólico, al menos en una vecindad del punto de equilibrio, ver por ejemplo [7], [9]. Hasta el momento se ha comentado sobre la estabilidad de  $X^*$ , sin embargo, por un cambio de coordenadas, se puede hablar de la estabilidad del origen; es decir, de  $X^* = 0$ .

Lo anterior se escribe explícitamente a continuación.

**Teorema 2.7. (Método Indirecto de Lyapunov)** *Sea  $X^* = 0$  un punto de equilibrio del sistema no lineal dado por  $\dot{X} = F(X)$  donde  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $D \subset \mathbb{R}^n$ , es continuamente diferenciable y  $D$  es un entorno del origen. Sea la matriz Jacobiana*

$$A = \frac{\partial F}{\partial X}(X)|_{X=0}$$

*Entonces, denotando con  $\lambda_i$  los valores propios de  $A$ , ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )*

- *El origen es asintóticamente estable si  $\text{Re}\lambda_i < 0$*
- *El origen es inestable si  $\text{Re}\lambda_i > 0$  para uno o más valores propios de  $A$ .*

La situación se complica cuando el punto de equilibrio no es hiperbólico, es decir, no existe condición alguna cuando  $\text{Re}\lambda_i \geq 0$  para todo  $i$ , y cuando  $\text{Re}\lambda_i = 0$  para algún  $i$ . Equivalentemente, la linealización no es suficiente para determinar la estabilidad del origen como punto de equilibrio del sistema no lineal, y se debe recurrir a alguna otra herramienta, tal es el caso de las Funciones de Lyapunov que se describen a continuación.

**2.2. Funciones de Lyapunov.** Como ya se mencionó en la Introducción, la teoría clásica de la Mecánica nos afirma que un sistema es estable si su energía, una función positiva, es continuamente decreciente, o sea tiene derivada negativa, hasta que el sistema alcanza su estado de equilibrio. El segundo método de Lyapunov es una generalización de este hecho. Antes de presentar el teorema de Lyapunov, se revisará un término importante.

**Definición 2.8.** *Sea  $E$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $F \in C^1(E)$ ,  $V \in C^1(E)$  y  $\phi_t$  una solución del sistema de ecuaciones diferenciales (1). Entonces para  $X \in E$ , la derivada de la función  $V(X)$  a través de la solución  $\phi_t$  es:*

$$\dot{V} = \frac{d}{dt}V(\phi_t)|_{t=0} = D$$

Ahora estamos en condiciones de escribir el teorema más importante de esta sección. La demostración del mismo se puede encontrar en [3], [7] y [9].

**Teorema 2.9.** *Sea  $E$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al punto  $X^*$ . Supóngase que  $F \in C^1(E)$ . Supóngase además que existe una función de valores reales  $V \in C^1(E)$  que satisface  $V(X^*) = 0$  y  $V(x) > 0$  si  $x \neq X^*$ . Entonces:*

- *Si  $\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x \in E$ ,  $X^*$  es estable.*
- *Si  $\dot{V}(x) < 0$  para todo  $x \in E \sim X^*$ ,  $X^*$  es asintóticamente estable.*
- *Si  $\dot{V}(x) > 0$  para todo  $x \in E \sim X^*$ ,  $X^*$  es inestable.*

Considerando las condiciones de la función del teorema anterior, se tienen las siguientes definiciones.

**Definición 2.10.** Si una función  $V(x)$  satisface las primeras hipótesis del teorema anterior y la hipótesis de punto de equilibrio estable, se le conoce como **Función de Liapunov**.

**Definición 2.11.** Si una función  $V(x)$  satisface además la hipótesis del punto de equilibrio asintóticamente estable, se le conoce como **Función de Liapunov Estricta**.

En estos términos, el punto de equilibrio es estable, si para él existe una función de Lyapunov; y es asintóticamente estable, si para él existe una función de Liapunov estricta.

Este método es una potente herramienta de análisis. No obstante, hay dos desventajas. Una de ellas es que no existe un método sistemático para encontrar una función de Lyapunov, por lo tanto hay que proponer una función candidata a función de Lyapunov y probar, muchas de las veces mediante ensayo y error, si ésta cumple con los requisitos de estabilidad. Otra se debe a que el teorema solo brinda condiciones suficientes, por lo que el hecho de no encontrar una función candidata a función de Lyapunov que satisfaga las condiciones de estabilidad o de estabilidad asintótica, no se puede concluir que el origen es inestable o no asintóticamente estable.

**Ejemplo 2.12.** Supongamos que se tiene el sistema no lineal:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_2 + x_2x_3 - x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1x_3 - x_2^3 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - x_3^3\end{aligned}$$

Claramente, el correspondiente sistema lineal es de la forma  $\dot{X} = AX$ , donde

$$A = DF(0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para este sistema, se puede utilizar como función de Lyapunov estricta a la función

$$V(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2.$$

ya que  $V(x) > 0$  y además se cumple

$$\dot{V}(x) = -2(x_1^4 + 2x_2^4 + x_3^4) < 0$$

para  $x \neq 0$ . Así, por el teorema, el origen es asintóticamente estable. Aún más, éste no es un sumidero, ya que los valores propios correspondientes  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_{23} = \pm\sqrt{2}i$  no tienen parte real negativa.

### 3. ELEMENTOS DE TEORÍA DE CONTROL

**3.1. Principales elementos.** En esta sección se describen algunos de los principales elementos de la teoría de control que serán de utilidad para comprender el contenido de la siguiente sección; se describen principalmente los problemas que aborda esta teoría los cuales tienen mucha relación con los sistemas de ecuaciones diferenciales que estamos tratando.

Una idea muy simple y muy familiar sobre el significado de controlar un sistema, se da cuando se ha tomado el volante de un auto, ya que de cierta manera, deseamos conducirlo en determinada dirección, a determinada velocidad, tomando en cuenta hacia donde queremos llegar; otra es cuando se ha manejado la llave de la ducha de la regadera o del lavabo del baño, ya que requerimos regularla para obtener agua a la temperatura que nos convenga. En términos matemáticos, un punto de partida son las ecuaciones

$$(3) \quad \dot{y} = f(y, u), \quad y(0) = x \in \mathbb{R}^n$$

con el lado derecho de la ecuación dependiente de un parámetro  $u$  de un conjunto  $U \subset \mathbb{R}^m$ . El conjunto  $U$  se le conoce como el **conjunto de control**. De hecho, el estudio de las ecuaciones diferenciales que dependen de un parámetro se ha realizado desde hace mucho tiempo, en particular se ha estudiado y encontrado varios resultados sobre la dependencia continua de las soluciones respecto a los parámetros. Los problemas estudiados en la teoría matemática del control son de diferente naturaleza, y un rol básico en su formulación lo juega el concepto de control. Se distinguen controles de dos tipos: de lazo abierto y lazo cerrado.

**Definición 3.1. Control de lazo abierto.** Un control de **lazo abierto** es en general una función arbitraria  $u(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow U$  para la cual la ecuación

$$(4) \quad \dot{y}(t) = f(y(t), u(t)), \quad t \geq 0, \quad y(0) = x,$$

tiene una solución bien definida.

**Definición 3.2. Control de lazo cerrado.** Un control en **lazo cerrado** es una función de la forma  $k : \mathbb{R}^n \rightarrow U$  la cual puede depender de  $t \geq 0$ , tal que la ecuación

$$(5) \quad \dot{y}(t) = f(y(t), k(y(t))), \quad t \geq 0, \quad y(0) = x,$$

tiene una solución bien definida. La función  $k(\cdot)$  se le llama **realimentación o retroalimentación**.

Además se tiene:

**Definición 3.3.** Los controles se les conoce como **estrategias o entradas** y las correspondientes soluciones del sistema se les conoce como **salidas**.

Uno de los principales objetivos de la teoría de control es encontrar una estrategia tal que la correspondiente salida tenga propiedades deseadas, y en base a éstas, se pueden especificar con mayor claridad.

A continuación se describen los principales problemas que aborda la teoría de control; sin embargo, para el propósito de este trabajo sólo se utilizarán los que tengan que ver con el control realimentado.

1. **Controlabilidad.** Se dice que un estado  $z \in \mathbb{R}^n$  es **alcanzable** desde  $x$  en el tiempo  $T$  si existe un control de lazo abierto  $u(\cdot)$ , para la salida  $y(\cdot)$ ,  $y(0) = x$ ,  $y(T) = z$ . Si un estado arbitrario  $z$  es alcanzado desde un estado arbitrario  $x$  en un tiempo  $T$ , entonces el sistema (5) es **controlable**. En algunas situaciones se necesita una propiedad un poco más débil, la de transferir un estado arbitrario a uno determinado, en particular puede ser el origen. Una formulación de caracterizaciones efectivas de los sistemas controlables es una interrogante de la teoría de control que ha sido resulta parcialmente.

2. **Estabilizabilidad.** Un tópico importante es la estabilizabilidad. Se asume que para algún  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $\tilde{u} \in U$ ,  $f(\tilde{x}, \tilde{u}) = 0$ . Una función  $k : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ , tal que  $k(\tilde{x}) = \tilde{u}$  se le llama **estabilizador en realimentación** si  $\tilde{x}$  es un punto de equilibrio estable para el sistema:

$$(6) \quad \dot{y}(t) = f(y(t), k(y(t))), \quad t \geq 0, \quad y(0) = x.$$

En la teoría de ecuaciones diferenciales se conocen algunos métodos para saber cuando un estado de equilibrio es un estado estable. La pregunta es cuando, en la clase de todas las ecuaciones de la forma (6), existe un control  $u$  para el cual  $\tilde{x}$  es un punto de equilibrio estable o es de un nuevo tipo cualitativo.

3. **Observabilidad.** En muchas situaciones de interés práctico uno no observa el estado  $y(t)$  pero si su función  $h(y(t))$ ,  $t \geq 0$ . Por lo tanto, algunas veces es necesario investigar el par de ecuaciones:

$$(7) \quad \dot{y} = f(y, u), \quad y(0) = x.$$

$$(8) \quad w = h(y).$$

La ecuación (8) se le llama **ecuación de observación**. Se dice que el sistema (7)-(8) es **observable** si, conociendo un control  $u(\cdot)$  y una observación  $w(\cdot)$  en un intervalo  $[0, T]$ , se puede determinar de manera única la condición inicial  $x$ .

4. **Estabilizabilidad de sistemas parcialmente observables.** La restricción de que se puede usar solamente una observación parcial  $w$  hace que se complique considerablemente el problema de estabilizabilidad. El estabilizador de realimentación puede ser alguna función que dependa únicamente del observador, y por lo tanto puede ser expresado por la función  $h(\cdot)$ . De esta manera tenemos un sistema en lazo cerrado de la forma:

$$(9) \quad \dot{y}(t) = f(y, k(y)), \quad y(0) = x.$$

Existe una teoría no terminada que permite determinar cuando existe una función  $k(\cdot)$  tal que un punto de equilibrio dado  $\tilde{x}$  es estable para (9).

5. **Realización.** En conexión con el sistema completo (7)-(8) se posee el problema de realización. Para una condición inicial dada  $x \in \mathbb{R}^n$ , el sistema (7)-(8) define una función que transforma controles en lazo abierto  $u(\cdot)$  sobre salidas dadas por (8):  $w(t) = h(y(t))$ ,  $t \in [0, T]$ . Denotemos esta transformación por  $\mathbf{R}$ . ¿Que propiedades tiene? ¿Que condiciones satisface una transformación  $\mathbf{R}$  que es dada por el sistema (7)-(8)? La transformación  $\mathbf{R}$  se le llama función **entrada-salida** del sistema (7)-(8).
6. **Optimalidad.** Los problemas enunciados párrafos atrás son de carácter estructural, en la teoría de control, responden preguntas de teoría de control con al menos la misma intensidad. En los problemas conocidos como **problemas de control en tiempo óptimo**, se trata con controles que no sólo transfieren un estado  $x$  a un estado  $z$ , si no que lo hacen en un tiempo mínimo  $T$ . En otras situaciones el tiempo  $T > 0$  es fijo y se busca un control  $u(\cdot)$  que minimiza la integral

$$\int_0^T g(y(t), u(t)) dt + G(y(T)),$$

en la cual  $g$  y  $G$  son funciones determinadas. Una clase de problemas relacionados consiste del control de impulso óptimo. Se requiere, sin embargo, un concepto modificado de estrategia. Además, muchas veces se requiere optimizar otro tipo de funcional.

7. **Sistemas en Variedades.** Surgen dificultades de diferente naturaleza si el espacio de estados no es todo el espacio  $\mathbb{R}^n$  o un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ , si no una variedad diferencial; particularmente cuando se está interesado en propiedades globales de un sistema de control. El lenguaje y los métodos de la geometría diferencial en la teoría de control comienzan a jugar un papel similar al que es utilizado en la mecánica clásica.
8. **Sistemas de dimensión infinita.** Los problemas mencionados en los párrafos anteriores son problemas que no pierden su significado si, en lugar de ecuaciones diferenciales ordinarias, se toman como ecuaciones que describen el modelo a las ecuaciones en derivadas parciales del tipo hiperbólico o parabólico. Sin embargo, los métodos de soluciones son más complicados.

**3.2. Control Lineal.** Un caso particular de (7) y (8) que en cierta medida se vuelve más simple, es el sistema lineal:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$w = Cx.$$

donde  $A$  y  $B$  son matrices constantes.

Para el sistema lineal se sabe que el sistema es completamente controlable si el rango de la matriz de controlabilidad  $[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$  es  $n$ . Cuando esto se cumple, se dice que el par de matrices  $(A, B)$  es **completamente controlable**. Ver por ejemplo [14] y [4].

#### 4. FUNCIONES DE CONTROL DE LYAPUNOV

Mientras los métodos de dominio de frecuencia han sido un instrumento muy importante en la teoría de control robusto lineal, éstos brillan por su ausencia en las herramientas del control no lineal. Por otro lado, los métodos que se involucran en el espacio de estados han sido, y siguen siendo desarrollados rigurosamente para sistemas generales no lineales, ver [6]. Los métodos no lineales de entrada/salida tienen una larga historia determinando la estabilidad de interconexiones realimentadas de sistemas separados basados en sus propiedades individuales de entrada/salida, aunque la caracterización de estas propiedades se realiza usualmente mediante el método de las raíces del espacio de estados en la teoría de la estabilidad de Lyapunov. Sin embargo, si se formula un problema de control robusto en el espacio de estados, es importante encontrar condiciones necesarias y suficientes para su solución. La condición necesaria y suficiente más importante para la estabilidad de un sistema no lineal es la existencia de una función de Lyapunov. Si bien las funciones de Lyapunov no se pueden calcular en general, han sido utilizadas extensivamente en el análisis de la estabilidad no lineal. La teoría de Lyapunov fue desarrollada para sistemas sin entradas de control, no obstante, ha sido aplicada únicamente en sistemas de control en lazo cerrado o en realimentación, estos es, sistemas para los cuales se les ha seleccionado un control realimentado.

Las funciones de Lyapunov candidatas pueden ser útiles en el diseño de instrumentos, ya que proveen directrices para elegir controles en realimentación puesto que uno puede imponer las restricciones con el fin de hacer la derivada negativa a través de las trayectorias en la construcción de la realimentación. Este método no es nuevo, como se señala en [6], pero se ha hecho más explícito recientemente con la incursión de las funciones de control de Lyapunov.

Para la situación general en el caso en que el control es un control en lazo abierto  $u = u(t)$ , una Función de Control de Lyapunov (CLF por sus siglas en inglés), es una función  $V(x)$  candidata a función de Lyapunov, con la propiedad de que para cualquier  $x \neq 0$  existe un valor admisible  $u$  del control tal que  $\nabla V(x) \cdot f(x, u) < 0$ . En otras palabras, una Función de Control de Lyapunov es simplemente una función candidata a función de Lyapunov cuya derivada se puede hacer negativa puntualmente mediante la elección de valores apropiados del control. Obsérvese que en el caso que se tenga un control en realimentación, ésta función se vuelve más simple, ya que la dependencia del sistema es completamente de la variable  $x$ . Más propiamente

**Definición 4.1.** Una **Función de Control de Lyapunov** para un sistema de la forma

$$(10) \quad \dot{x} = f(x, u)$$

es una función  $V(x) \in C^1$  definida positiva y radialmente no acotada tal que

$$x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \inf_{u \in U} \nabla V(x) \cdot f(x, u) < 0$$

donde  $U$  es un conjunto de valores convexo de controles admisibles de la variable de control  $u$ .

Se sabe que la existencia de una función de Lyapunov es una condición necesaria y suficiente para la estabilidad del sistema sin entradas de control; análogamente la existencia de una CLF es necesaria y suficiente para la estabilizabilidad con una entrada de control, aunque se debe añadir otra condición para garantizar el resultado que se describe más adelante.

**Ejemplo 4.2.** Considere el sistema de segundo orden:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2 \phi(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= u + \psi(x_1, x_2) \end{aligned}$$

donde las funciones  $\phi$  y  $\psi$  son continuas y  $u \in \mathbb{R}$ . La función  $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$  satisface

$$\begin{aligned} \inf_{u \in U} \nabla V(x) \cdot f(x, u) &= \inf_{u \in U} [-x_1^4 + x_1 x_2 \phi(x_1, x_2) + x_2 u + x_2 \psi(x_1, x_2)] \\ &= \begin{cases} x_1^4, & x_2 = 0 \\ -\infty, & x_2 \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Luego es una CLF y el sistema es globalmente asintóticamente estable. Se puede probar que un control que hace al sistema asintóticamente estable, es que se da mediante la igualdad  $u(x_1, x_2) = -x_2 - \psi(x_1, x_2) - x_1 \phi(x_1, x_2)$  [6].

Otro ejemplo que muestra como puede construirse una función de Lyapunov es el siguiente.

**Ejemplo 4.3.** Considere el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\operatorname{sen}x_1 + u\end{aligned}$$

con  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  y  $u = 0$  como el punto de equilibrio  $U = \mathbb{R}$ . Este corresponde a un modelo para un péndulo donde no se han identificado estados que difieran de  $2\pi$ .

La función  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  es definida positiva. Si  $\nabla V(x_1, x_2) \cdot f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - 2x_2\operatorname{sen}x_1 + 2x_2u$ , no existe  $u$  para que se cumpla que sea menor que cero para toda  $x_2$  puesto que no se cumple en  $x_2 = 0$ , luego no es CLF.

Después de ensayo y error se tiene:  $V(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$ . La función anterior es definida positiva. Ahora,  $\nabla V(x_1, x_2) \cdot f(x_1, x_2) = (4x_1 + 2x_2)x_2 + (2x_1 + 2x_2)(-\operatorname{sen}x_1 + u)$ , si  $x_1 + x_2 \neq 0$ , el cual puede ser negativo para una elección apropiada de  $u$ . Pero la expresión es negativa automáticamente para cualquier otro elemento  $(x_1, x_2)$  diferente de cero, ya que si  $x_1 + x_2 = 0$ , entonces se anula el segundo término, pero el primero es  $-2x_2^2$ , que es negativo a menos que  $x_2 = 0$ , que ocurre sólo si  $x_1 = x_2 = 0$ . Luego es una CLF y el sistema es globalmente asintóticamente estable.

Un ejemplo más, pero con la peculiaridad de diferente a los anteriores es el siguiente, conocido como **Sistema Linealizado en Realimentación**.

**Ejemplo 4.4.** Supóngase que existe un difeomorfismo  $\xi = \Phi(x)$  con  $\Phi(0) = 0$  que transforma el sistema (10) sobre el sistema:

$$(11) \quad \dot{\xi} = F\xi + G[\ell_0(\xi) + \ell_1(\xi)u]$$

donde el par de matrices  $(F, G)$  es controlable y las funciones  $\ell_0$  y  $\ell_1$  son continuas con  $\ell_1(\xi)$  no singular para todo  $\xi$ . Supóngase además que el espacio de control  $\mathfrak{U}$  es igual al conjunto de controles admisibles  $U$ , y sea  $P$  la matriz simétrica definida positiva que es solución a la ecuación de Riccati

$$(12) \quad F^T P + P F - P G G^T P + I = 0$$

La función  $V(x) := \Phi(x)^T P \Phi(x) = \xi^T P \xi$  satisface

$$\begin{aligned}\inf_{u \in \mathfrak{U}} \nabla V(x) \cdot f(x, u) &= \inf_{u \in \mathfrak{U}} [\xi^T [F^T P + P F] \xi + 2\xi^T P G [\ell_0(\xi) + \ell_1(\xi)u]] \\ &= \inf_{u \in \mathfrak{U}} [-\xi^T \xi + \xi^T P G [G^T P \xi + 2\ell_0(\xi) + 2\ell_1(\xi)u]] \\ &= \begin{cases} -\xi^T \xi & \text{cuando } \xi^T P G = 0; \\ -\infty & \text{cuando } \xi^T P G \neq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Así,  $V(x)$  construida de esta manera es una función de control de Lyapunov para este sistema, y en consecuencia, el sistema es asintóticamente estabilizable globalmente. Se debe notar que se ha alcanzado la conclusión anterior sin hacer la construcción de la ley de control realimentado para la linealización. De hecho, estos ejemplos ilustran la diferencia metodológica entre las funciones de control de Lyapunov y la función de Lyapunov clásica, la función de control de Lyapunov permite concluir la estabilizabilidad de un sistema con un control realimentado indefinido,

mientras que las funciones de Lyapunov clásicas sólo nos permite concluir la estabilidad de un sistema en lazo cerrado generado por un control de realimentación predeterminado.

Las funciones de Lyapunov son muy importantes en el diseño de controles, principalmente aquellos que son controles realimentados o en realimentación. En lo sucesivo se tratará con sistemas de la forma:

$$(13) \quad \dot{x} = f(x, u),$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  representa el estado del sistema,  $u \in \mathbb{R}^m$  es la entrada del sistema. De hecho, se supone, como se explicó con un poco de detalle en la sección anterior, se tiene un control en lazo cerrado de la forma  $u = k(x)$ , con el fin que la  $f$  en (13) depende únicamente de  $x$ , y por lo tanto, se puede analizar desde el punto de vista de las funciones de Lyapunov considerándolas como condiciones necesarias y/o suficientes.

Antes de enunciar las condiciones de interés, notemos que existe un criterio muy importante en la teoría de control para saber si un sistema tiene un control como el antes descrito, este criterio se conoce como Test de Brockett, mismo que se enuncia a continuación.

**Teorema 4.5.** *Considere el sistema (2) y supóngase que  $f$  es continua y que  $f(0,0) = 0$ . Una condición necesaria para la existencia de un estabilizador continuo  $u = k(x)$  con  $k(0) = 0$ , es que para cada  $\epsilon > 0$  exista  $\delta > 0$  tal que:*

$$\forall y \in B_\delta \exists x \in B_\epsilon, \exists u \in B_\epsilon \text{ tal que } y = f(x, u).$$

En otras palabras, toda vecindad del origen en  $\mathbb{R}^{n+m}$ , debe ser una vecindad del origen en  $\mathbb{R}^n$  cuando se le aplica  $f$ .

Un caso relevante por su sencillez es el caso lineal  $\dot{x} = Ax + Bu$ , pero éste cumple el teorema si  $\text{ran}(A, B) = n$ ; es decir, si el par  $\text{ran}(A, B) = n$  es completamente controlable, como se especificó en la sección 3.2.

Existen muchas familias de sistemas que tiene la forma (13) pero que no satisfacen la propiedad de Brockett. Uno de ellos es el sistema que se conoce como **integrador no holomónico**:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 u_2 - x_2 u_1 \end{aligned}$$

y como se sabe de la literatura, por ejemplo [2], no se le puede encontrar un estabilizador del tipo que se escribe en el teorema.

Por otra parte, el siguiente sistema debido a Arstein:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u(x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= 2ux_1x_2 \end{aligned}$$

cumple el Test, pero no se le puede encontrar un estabilizador de la forma indicada, pero esto no tiene trascendencia puesto que el test nos indica que éste es una condición necesaria, más no suficiente.

Para escribir un resultado que relaciona las Funciones de control de Lyapunov con los controles en realimentación, a continuación se describe una variante de Función de Control de Lyapunov:

**Definición 4.6.** Se dice que (13) satisface una condición de control de Lyapunov global suave (o que (13) tiene una **función de control de Lyapunov global**) si existe una función  $V(x) \in C^1$  no acotada radialmente, definida positiva, nula en el origen y que goza de la siguiente propiedad: para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  existe  $u \in \mathbb{R}^m$  tal que:

$$(14) \quad \nabla V(x) \cdot f(x, u) < 0.$$

En relación a la definición anterior, se tiene el siguiente teorema debido a Kurzweil:

**Teorema 4.7.** *Si existe un estabilizador continuo  $u = k(x)$  para (13), entonces existe una función de control de Lyapunov global suave.*

Se sabe que en general el recíproco al teorema anterior no es cierto; sin embargo, si se tiene un sistema afín como el siguiente:

$$(15) \quad \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x)$$

donde  $f$  y  $g_i$  son campos vectoriales continuos de  $\mathbb{R}^n$ , sí se cumple el sentido inverso del teorema.

Antes de formular el resultado que establece el teorema recíproco, se escriben algunos conceptos adicionales que son además condiciones para establecer el resultado que relaciona la equivalencia.

**Definición 4.8.** Una ley de retroalimentación  $u = k(x)$  es **casí continua**, si es continua en todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

**Definición 4.9.** Se dice que una función de Lyapunov satisface **la propiedad de control pequeño**, si para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $x \in B_\delta$  se cumple (14) para algún  $u \in B_\epsilon$ .

**Observación 4.10.** Si el sistema admite un estabilizador continuo  $u = k(x)$  que satisface  $k(0) = 0$ , entonces la propiedad de control pequeño se cumple automáticamente, como puede verse en [2].

Después de formularse las definiciones, ha llegado el momento de escribir el teorema.

**Teorema 4.11.** *Si existe una función de control de Lyapunov global suave para el sistema afín (4), entonces el sistema es estabilizable globalmente por una retroalimentación casí continua  $u = k(x)$ . Si existe una función de control de Lyapunov que en adición cumple la propiedad de control pequeño, entonces es posible encontrar un estabilizador  $u = k(x)$  que es continuo en todas partes.*

El estudio de las funciones de control ha tenido mucho auge a fines del siglo pasado y en el presente. Por ejemplo, en la década de 1980, Artstein y Sontag producen de forma independiente justificaciones matemáticas teóricas sobre el enfoque del uso de Funciones de control de Liapunov, sobre todo para sistemas afines, con

el fin de determinar fórmulas para las funciones de control de Lyapunov y para los controles realimentados. Si bien estas fórmulas no son muy sofisticadas, son de gran ayuda para estabilizar estos sistemas. Por otra parte, en este siglo, se han utilizado en distintas aplicaciones. Un caso que se puede señalar es el de [11], donde se encuentran funciones de control de Lyapunov para cada robot en cierta clase de robots mediante el problema de coordinación multiagentes. Existen más aplicaciones que quedan fuera de lugar de este escrito, ya que, como el título lo indica, es únicamente una introducción a éstas.

## REFERENCIAS

- [1] Z. Artstein; *Stabilization with relaxed controls*. Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications, 7, (1983) pp 1163-1173 New York. 1998.
- [2] A. Bacciotti. *Stability Analysis Based on Direct Liapunov Method*. Summer School on Mathematical Control Theory. (2001) 2279-2307.
- [3] W. E. Boyce. R. C. DiPrima. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 8th Edition, Wiley. N. J. 2009.
- [4] R. C. Dorf, R. H. Bishop. *Sistemas de Control Moderno*. Prentice Hall. España. 2008.
- [5] E. Fernández Cara y E. Zuazua. *Las Matemáticas del control*. ARBOR Ciencia Pensamiento y Cultura. (2007).
- [6] R. A. Freeman, P. V. Kokotovic. *Robust Nonlinear Control Design: State-Space and Lyapunov Techniques*. Birkhäuser, USA, 2008.
- [7] S. Smale, M. W. Hirsch and R. L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. 2nd Edition. Elsevir, USA, 2004.
- [8] H. K. Khalil *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall. 2nd Edition, N. J. 1996
- [9] L. Perko; *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer Verlag, New York. 2001.
- [10] Y. Lin, E. D. Sotag. *Control Lyapunov Universal Formulas for Restricts Inputs*. Theory and Advanced Technology. (1995) Vol. 10, N. 4
- [11] P. Ögren, M. Egerstedt and X. Hu. *A Control Lyapunov Function Approach to Multiagent Coordination*. IEEE Transactions on Robotics AND Automation, (2002) Vol. 18, No. 5.
- [12] E. D. Sontag. *Mathematical Control Theory, Deterministic Finite Dmensional Systems*. Springer Verlag, New York. 1991.
- [13] J. J. E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewood Clifs, N. J. 1998.
- [14] J. Zabczyk. *Mathematical Control Theory. An Introduction*. Birkhäuser, Boston, 2008.

Lomas del Estadio S/N, Zona Universitaria, Veracruz.  
evmuno@uv.mx, evo2003001@yahoo.com.mx



# CAPÍTULO 9

## OBTENCIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA LA VELARIA DEL AUDITORIO “GUELAGUETZA” EN OAXACA

SILVIA REYES MORA  
EMMANUEL A. ROMANO CASTILLO

IFM - UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

*RESUMEN. En este trabajo se presenta la deducción y solución de un modelo matemático obtenido al tratar de explicar las causas que originaron la ruptura de la velaria del auditorio “Guelaguetza”, localizado en la ciudad de Oaxaca, a tan sólo cuatro meses de haber sido colocada.*

*El primer paso a realizar, es modelar la membrana y estudiar el modelo para conocer las condiciones bajo las cuales la membrana se encuentra en equilibrio; para ello primeramente se estudia el equilibrio de una membrana con bordes, donde aparecen diferentes ecuaciones que relacionan sus esfuerzos (de tracción) y su forma.*

*Un segundo paso es modelar el problema para cuando se conocen los datos reales de las fuerzas que actuaron sobre la membrana y su frontera, y los datos correspondientes a la composición de la membrana, para poder determinar las causas que originaron su ruptura.*

*En este artículo se expone lo que se hizo para responder al primer paso.*

*En particular, los esfuerzos de membrana se identifican con un tensor definido positivo (sólo a tracciones) y su forma con una superficie con curvatura de Gauss negativa debido a la forma original de la misma. Este equilibrio se plantea directamente a través de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, se da solución al mismo y se demuestra que no tiene solución única.*

*Cabe mencionar que falta un análisis mayor para poder conocer las causas que originaron la ruptura de la membrana del Auditorio Guelaguetza. Una gran parte de este análisis mayor tiene que ver con el segundo paso mencionado anteriormente*

**Keywords:** Membranas a tracción, Superficies con curvatura de Gauss, Ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas.

### 1. INTRODUCCIÓN

El auditorio “Guelaguetza” está ubicado al noroeste de la Ciudad de Oaxaca en el Cerro del Fortín, fue construido especialmente para la presentación de la fiesta de la Guelaguetza o “Lunes del Cerro”, de origen prehispánico, hoy convertida en el máximo evento folklórico de los oaxaqueños. El actual auditorio fue construido en 1974. Su diseño semicircular, en una colina, recuerda los antiguos teatros griegos y romanos, donde se aprovechó la pendiente del terreno para disponer las graderías.

La construcción de cantera verde le da un carácter típicamente oaxaqueño. El escenario (estrado) es de forma circular; las graderías dispuestas en tres cuartos del



FIGURA 1. Auditorio de la Guelaguetza en Oaxaca, México.

escenario, ascienden para formar cuatro secciones que dan cabida a más de 10,000 espectadores; desde éstas se contempla una bella vista panorámica de la ciudad y los valles de Oaxaca, que sirve de fondo al escenario. Cuenta con escalinatas y accesos laterales, su exterior está acondicionado con áreas verdes.

A principios del año 2010, el gobierno del estado inició los trabajos de techado del auditorio. Este techado consta de una estructura metálica como se muestra en la figura 2, y de una velaria sostenida por dicha estructura, mástiles y por cables tensores. Es natural que por la ubicación geográfica del auditorio, cualquier velaria (membrana) que sea colocada en este lugar, se verá influenciada por las fuerzas del viento, la lluvia y el sol, provocando una corta vida de la misma. Sin embargo, aproximadamente una quinta parte de la velaria fue colocada, y a tan sólo cuatro meses, una parte de la misma se rompió (ver parte izquierda de la figura 2), la cual es una membrana sostenida por cables tensores y por la estructura metálica, además tenía forma de silla de montar. Es por esta razón que este trabajo, ha sido motivado por una inquietud por parte de las autoridades académicas y gubernamentales; las cuales solicitaron una respuesta al problema de la velaria del auditorio, desde el punto de vista de la Modelación Matemática.

## 2. MARCO TEÓRICO Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las membranas son objetos que conforman una superficie en el espacio, con espesor mínimo, se les puede considerar como estructuras que funcionan únicamente mediante esfuerzos en direcciones tangentes a su superficie media, de compresión o tracción llamados esfuerzos de membrana [3]. Por otro lado, los cables son curvas materiales en el espacio, que junto a las membranas juegan un papel muy importante en Arquitectura, sobre todo en cubiertas.

En cierto modo la geometría influye de modo especial en la respuesta de la estructura de la membrana, pero también en ciertas acciones sobre la misma (por ejemplo las cargas de viento); además de afectar a otros factores no estrictamente estructurales, pero no menos importantes, como su funcionalidad o su impacto visual. Las membranas normalmente se pretensan antes de entrar en servicio, para que adquieran cierta rigidez (como mínimo, se da un pretensado de montaje, tensándolas un poco para desplegarlas sin arrugas). Las membranas abiertas (con bordes), generalmente adoptan formas de silla de montar, las cuales son superficies con curvatura de Gauss negativa [3], [2].

Debido a que el gran objetivo de nuestra investigación, es explicar las causas



FIGURA 2. Estructura metálica y velaria del auditorio.

que generaron la ruptura de la membrana del auditorio, (ver el lado izquierdo de la Figura 2), estamos interesados en estudiar una membrana sostenida por cables y mástiles, por ello el presente trabajo trata sobre membranas en sentido estricto, esto es, sobre membranas a tracción. La investigación se centra en el análisis matemático de las membranas asociadas a su propio despliegue (peso propio, pretensado, viento y, eventualmente, lluvia).

**2.1. Aspectos generales e importantes de las membranas.** Es bien sabido que, para una cierta distribución de cargas, no toda superficie en el espacio corresponde a una membrana. Sólo son membranas aquellas cuya forma permite equilibrar tales cargas con esfuerzos de membrana. Esto implica que el cálculo de membranas siempre lleva asociado de algún modo un problema de búsqueda de forma.

Por otra parte, las membranas funcionan, frente a cargas normales a su superficie, gracias a su curvatura, la cual permite equilibrar dichas cargas con esfuerzos de membrana. Esto ya da idea de la importancia que tiene la existencia de curvatura, pero aún se aprecia mejor considerando el caso límite de una membrana plana.

Una membrana plana, sometida a cargas normales, sólo puede trabajar merced a su propia deformación, que genera curvatura; de modo que la deformación se convierte en efecto primario necesario para el equilibrio, que alcanza valores muy altos por la magnitud de los esfuerzos que aparecen. Por el contrario, en una membrana curva, que permita el equilibrio de las cargas normales, la deformación pasa a ser efecto secundario, con valores más bajos, resultado de los menores esfuerzos existentes. En este punto conviene indicar que, dentro del análisis de membranas pueden distinguirse, en términos generales, las siguientes fases:

- Fase de confección, en la que, como resultado del proceso de confección, se tiene una forma que corresponde a esfuerzos nulos (forma potencial o virtual, porque si se desplegara la membrana con esa forma aparecería ya el peso propio).
- Fase de pretensado, en la que, como resultado de desplegar y aplicar el pretensado a la membrana confeccionada, se llega ya a una forma real, asociada a las acciones de pretensado y peso propio, y la membrana queda apta para entrar en servicio.
- Fase de servicio, en la que, como resultado de la aparición de otras acciones (viento, cargas de uso, etc.) durante la etapa de servicio de la membrana, se llega a otras tantas formas.

Hay que recalcar que, además de curva, la superficie de las membranas es de curvatura de Gauss negativa (curvaturas de sentido contrario en direcciones ortogonales del plano tangente). Esto obedece a un motivo estructural muy claro. Si no fuera así, los esfuerzos de pretensado, siempre de tracción, no podrían estar en equilibrio (sin considerar el peso propio de la membrana, muy pequeño).

Tomando en cuenta lo anterior, en este trabajo se expone el estudio del comportamiento de estas estructuras en la fase de pretensado, con el objetivo de definir rigurosamente el problema completo del equilibrio (forma de la membrana, bordes de la misma, esfuerzos de pretensado), planteándolo a través de un análisis matemático adecuado.

En definitiva, la presente investigación viene motivada en gran medida por estas cuestiones, propias de aplicaciones con esfuerzos de pretensado importantes y donde conviene definirlos de antemano para el mejor comportamiento en servicio de la estructura.

En tal sentido, el punto de partida es el planteamiento matemático del equilibrio de la membrana en la fase de pretensado, considerada como superficie en el espacio, para proceder después a su análisis.

Al plantear dicho equilibrio aparecen productos de variables de forma y variables de esfuerzos cuya suma es nula (despreciando el peso propio, lo que aquí está aún más justificado por la importancia cuantitativa del pretensado).

Dado que en el momento en que se nos planteó el problema, sólo contamos con la fotografía de la Figura 2; entonces nos planteamos el problema de fijar de antemano la forma de la membrana y obtener la distribución de esfuerzos de pretensado que a ella corresponden, además dar el rango necesario a esos esfuerzos para lograr suficiente rigidez y reproducirlos bien en construcción.

Por otra parte, dado que la membrana tiene bordes compuestos por cables (normalmente los más largos y elevados, para evitar ahí elementos de borde rígidos, siempre más pesados, y aplicar con mayor facilidad el pretensado), se considera precisamente esta situación como caso más general. Como se verá, ello supone una importante dificultad añadida con relación a la situación en que todos los bordes son rígidos. Volviendo al asunto del equilibrio en la fase de pretensado, y precisando ya algo más, se trata de un problema que implica a una serie de variables básicas en distintos ámbitos interactivos (más o menos acoplados unos a otros, según el tipo de elemento de borde, por una serie de ecuaciones que los relacionan), como son:

- en la propia membrana, la forma de la superficie y los esfuerzos de la membrana;
- en el contorno de la membrana, la forma del mismo y las cargas (repartidas) transmitidas por los esfuerzos de la membrana;
- en la interfaz membrana-contorno, las cargas (repartidas) de acción y reacción.

Como ya se ha mencionado, desde el punto de vista matemático, el problema más general, y más complejo, corresponde al caso en que los elementos de borde son cables; pero es también el que más suele interesar desde el punto de vista estructural, por reducción de peso propio y por aplicación del pretensado.

**2.2. El método de la densidad de fuerzas.** Lo primero que debemos hacer, es obtener un modelo matemático que describa el equilibrio de la membrana; para ello usaremos el método de la densidad de fuerzas, este método se basa en la utilización de un sistema de ecuaciones lineales, para el equilibrio de una red de cables

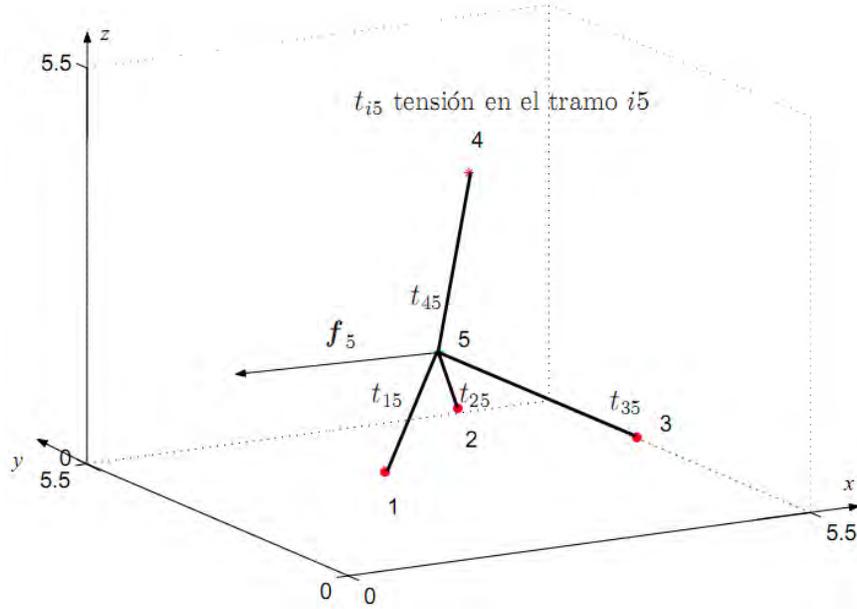


FIGURA 3. Una red de cables pretensados.

pretensados, bajo una relación predefinida fuerza/longitud. La estructura mostrada en la figura 3 se puede interpretar como una red de cables, en la que se conocen las posiciones de los puntos 1,2,3 y 4 y las tracciones  $t_{i5}$  en los cables a lo largo de los tramos  $i5$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . La incógnita del problema es la posición final del punto 5, en el que actúa una fuerza externa  $f_5 = (f_{5x,5y,5z})$ . El método en consideración, propuesto por Linkwitz y Scheck transforma un problema no lineal en uno lineal [6], [7], [11].

Las ecuaciones de equilibrio a lo largo de la dirección  $x$  para el nodo  $i$  son:

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n \frac{t_{ij}}{l_{ij}} (x_i - x_j) = f_{ix}, \quad l_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2},$$

donde el nodo  $i$  está conectado con el nodo  $j$ , y  $t_{ij}$  es la tracción en el mismo tramo  $ij$ , este sistema, debido al término  $l_{ij}$  es no lineal. Para linealizarlo, introducimos las densidades de fuerzas (cuyos valores se deben conocer a priori) definidas por:

$$(2) \quad q_{ij} := \frac{t_{ij}}{l_{ij}},$$

obtenemos así, para el nodo  $i$  en el siguiente sistema lineal en la dirección  $x$ :

$$(3) \quad \sum_{j=1}^n q_{ij} (x_i - x_j) = f_{ix},$$

equivalentemente para las direcciones  $y$  y  $z$ .

**2.3. Equilibrio en la membrana y en sus bordes.** Nuestro objetivo es encontrar las ecuaciones de equilibrio de una membrana a tracción y de un cable, tomando en cuenta la relación entre la forma, los esfuerzos de la membrana y

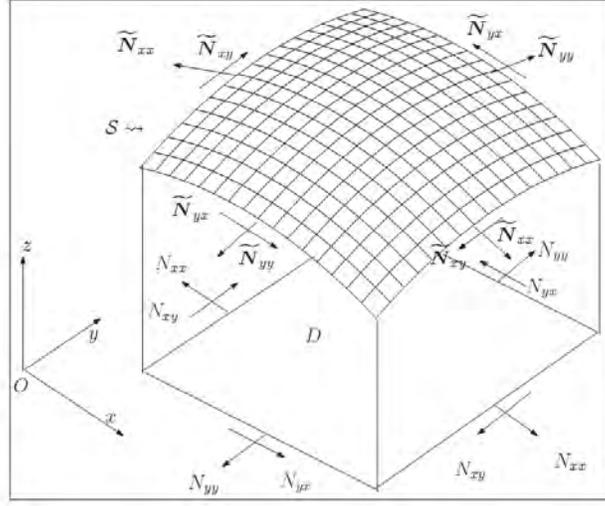


FIGURA 4. Elemento de superficie y esfuerzos correspondientes.

la tracción del cable. En particular expresaremos el equilibrio de la membrana utilizando los esfuerzos naturales de la misma (es decir, aquellos tangentes a la superficie). Resolveremos el problema en el plano, es por eso que consideraremos los esfuerzos proyectados de la misma (es decir, justamente, las proyecciones en el plano horizontal de los esfuerzos de membrana). Procederemos de igual forma para el desarrollo del equilibrio de un cable y formularemos el problema en términos de los parámetros proyectados.

Supongamos que la membrana tiene un borde formado por: bordes con cables y bordes rígidos (como lo es el caso de las membranas del auditorio).

Sea  $f(x, y)$  una función regular definida en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^2$ , la cual representa a una superficie  $S$  con curvatura de Gauss negativa, correspondiente a la membrana de nuestro interés; entonces  $f(x, y)$  satisface:

$$(4) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} < 0.$$

Además podemos parametrizar a la superficie como:  $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , para todo  $(x, y) \in D$ .

En la figura 4 se idealiza un elemento diferencial de membrana  $dS$ , donde  $\tilde{N}_{\alpha, \beta} = \tilde{N}_{\alpha, \beta}(x, y)$ ,  $(\alpha, \beta = 1, 2)$ , denotan los esfuerzos de tracción (esfuerzos tangentes a la superficie  $S$ ) e indica el vector esfuerzo natural que actúa en la cara  $\alpha = \text{cte}$ , a lo largo de la dirección  $\beta$ . Esta convención de esfuerzos puede consultarse en [8], en la cual los esfuerzos normales que producen tensión son positivos.  $N_{\alpha, \beta}$ ,  $(\alpha, \beta = 1, 2)$  denotan a sus proyecciones en el plano horizontal.

Hallaremos el equilibrio trabajando con el tensor de los esfuerzos proyectados en el plano  $XY$ , ya que el tensor de esfuerzos nos da la tracción que actúa en cualquier superficie dentro del medio que nos interesa; al tensor de esfuerzos lo denotamos y definimos por:

$$\sigma = \sigma(x, y) := \begin{pmatrix} N_{xx} & N_{xy} \\ N_{xy} & N_{yy} \end{pmatrix},$$

donde  $N_{xx}$  y  $N_{yy}$  son los esfuerzos normales,  $N_{xy}$  y  $N_{yx}$  son los esfuerzos cortantes sobre las caras.

Suponemos que la membrana está muy tensa, de forma que despreciamos el peso de la misma, y suponiendo que no actúa alguna fuerza exterior, se puede obtener el equilibrio horizontal.

De hecho, para garantizar el equilibrio del elemento, el tensor de esfuerzos  $N_{xy}$  debe ser igual a  $N_{yx}$ . Además, se sabe que las ecuaciones de equilibrio de la resistencia de materiales, relacionan los esfuerzos internos con las fuerzas exteriores aplicadas. Las ecuaciones de equilibrio para elementos bidimensionales, son el resultado de escribir las ecuaciones de equilibrio elástico en términos de los esfuerzos en lugar de las tensiones [12], [1], [10]. Por lo tanto, de las ecuaciones de equilibrio para el campo de tensiones generales de la teoría de la elasticidad lineal se tiene que:

$$I = \begin{cases} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

En cuanto al equilibrio vertical, en la figura 5 se aprecian las componentes verticales de los esfuerzos  $N_{yx} = N_{yy}$  en función de las pendientes de la superficie. Diferenciando obtenemos las relaciones para el equilibrio vertical:

$$(5) \quad \frac{\partial \left( N_{xx} \frac{\partial f}{\partial x} + N_{yx} \frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( N_{xy} \frac{\partial f}{\partial y} + N_{yy} \frac{\partial f}{\partial y} \right)}{\partial y} = 0,$$

es decir,

$$(6) \quad \frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \right) + N_{xx} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Usando el sistema  $I$ , se obtienen las ecuaciones de equilibrio en función del tensor  $N_{\alpha\beta}$ :

$$A = \begin{cases} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0, \\ N_{xx} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \end{cases}$$

Se puede ver que la relación entre los esfuerzos proyectados y los esfuerzos naturales de membrana para  $N_{yy}$  se puede obtener de la forma siguiente:

Teniendo en cuenta que la longitud sobre la que actúa  $\tilde{N}_{yy}$  es  $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}$ , es inmediato reconocer que:

$$(7) \quad N_{yy} = \tilde{N}_{yy} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2} \cos \beta = \tilde{N}_{yy} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}};$$

de forma análoga se obtienen:

$$(8) \quad N_{xx} = \tilde{N}_{xx} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}},$$

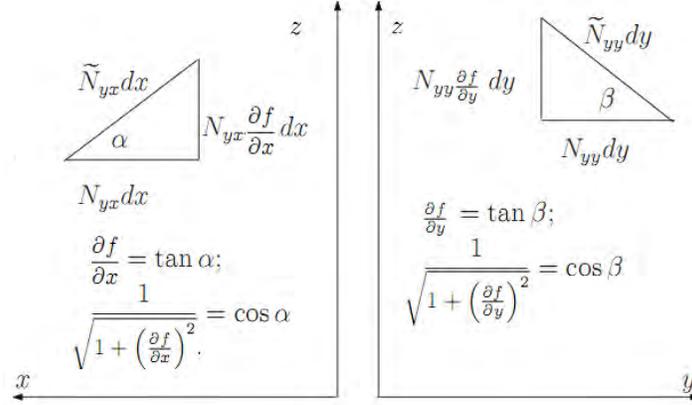


FIGURA 5. Proyecciones verticales del tensor.

$$(9) \quad N_{xy} = \tilde{N}_{xy} = \tilde{N}_{yx} = N_{yx}.$$

#### 2.4. Planteamiento del problema.

El problema que tenemos es: Fijada la forma de la membrana, buscar la distribución de esfuerzos que equilibran el sistema (que verifiquen el equilibrio), siendo, así, el tensor de los esfuerzos  $N_{\alpha\beta}$  la incógnita del problema, con condiciones de contorno adecuadas; notemos que este es el problema inverso correspondiente al problema directo siguiente: a partir del conocimiento de los esfuerzos de membrana determinar si la misma está en equilibrio. Esto es, si modelamos a la membrana como se muestra en la Figura 6; una parametrización tridimensional de la curva (borde de la membrana) es  $r(x) = (x, y(x), f(x, y(x)))$  donde  $-a \leq x \leq a$ .

Como trabajaremos en el plano, entonces el vector normal  $n$  a la curva proyectada  $\Gamma$  parametrizada por  $(x, y(x))$  es

$$n = \frac{(-y', 1)}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

En particular, para los bordes verticales de la ecuación  $x = \pm a$ , el vector normal es:

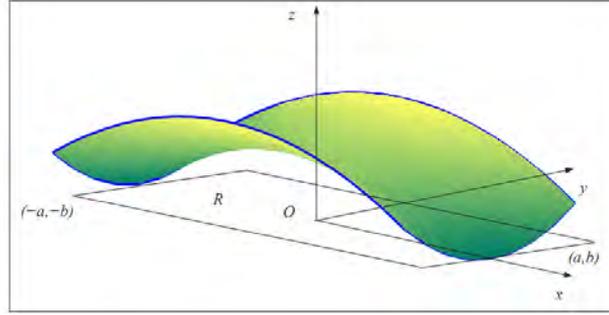
$$n := \begin{cases} (1, 0), & \text{por } x = a; \\ (-1, 0), & \text{por } x = -a. \end{cases}$$

Si  $D$  es el dominio con borde  $\Gamma = \partial D$  y  $f(x)$  es la fuerza de borde, esto es, la fuerza por unidad de longitud repartida a lo largo de  $\Gamma$ , entonces las condiciones de contorno, correspondientes al problema y que reflejan el equilibrio en el borde, se expresan en la ecuación:

$$\sigma \cdot n = f, \quad \text{para todo } x \in \Gamma.$$

Tenemos ahora todos los instrumentos necesarios para plantear el problema completo en el caso general, caso en el que el borde está compuesto, en parte, por cables:

$$\partial D = \Gamma^r \cup \Gamma^c,$$


 FIGURA 6. Modelo de la membrana, definida en el rectángulo  $R$ .

donde  $\Gamma^r$  es el borde rígido y  $\Gamma^c$  es el borde compuesto por cables.

Los datos que tenemos son los siguientes:

1. Membrana identificada con la gráfica de una superficie  $z = f(x, y)$  con curvatura de Gauss negativa;
2. Curvas  $y = \pm y(x)$  candidatas a definir el borde compuesto por cables ( $\Gamma^c$ ), obtenidas resolviendo la ecuación:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (y')^2$ ;
3. Curvas de ecuación  $x = \pm a$  que definen el borde rígido ( $\Gamma^r$ );
4. Borde completo  $\partial D = \Gamma^r \cup \Gamma^c$ ;
5. Distribución de la fuerza de borde rígido  $f^r$  en  $\Gamma^r$ .

El problema consiste en calcular el tensor  $\sigma = N_{\alpha\beta}$  y la fuerza de borde en el cable  $f^c$ , definida en  $\Gamma^c$  tal que

$$II := \begin{cases} \sigma, & \text{sea un tensor positivo en } D; \\ (\nabla \cdot \sigma)_\alpha = \sum_{\beta=1}^2 N_{\alpha\beta}, \beta=0, & \text{para todo } \alpha = 1, 2; \\ N_{xx} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2N_{x,y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, & \text{en } D; \\ \sigma \cdot n = f^r, & \text{en } \Gamma^r; \\ \sigma \cdot n = f^c, & \text{en } \Gamma^c. \end{cases}$$

siendo  $n$  el vector normal exterior a  $\Gamma$ .

Como  $z = f(x, y)$  es una superficie con curvatura de Gauss negativa, la segunda ecuación diferencial del sistema (II) es hiperbólica; tenemos, así, un problema hiperbólico con dos incógnitas (el tensor  $\sigma$  y el vector  $f^c$ ) con condiciones de contorno sobre  $\sigma$ .

### 3. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Vamos a analizar la existencia y unicidad de la solución al problema.

Para la existencia: fijemos  $f^c$  en el sistema (II), y consideramos la superficie  $z = -A^2 x^4 + 6B^2 y^2$  ( $A$  y  $B$  constantes), la curva (candidata a cable)  $y = \frac{A^2}{2B^2} x^2$  y los esfuerzos  $N_{xx} = 1$ ,  $N_{xy} = 0$  y  $N_{yy} = \frac{A^2}{B^2} x^2$ ; la superficie  $z$  y la curva satisfacen

$$N_{xx} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2N_{x,y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

y como se debe cumplir la condición cinco del sistema II, donde  $f^c = \left( -\frac{A^2}{B^2} x, \frac{A^2}{B^2} x^2 \right)$ ;

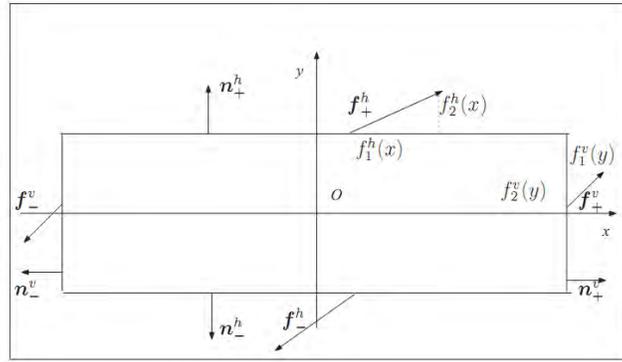


FIGURA 7. Ejemplo del problema con bordes rígidos (suponiendo que la membrana fue atada).

dado que  $y(x)$  es un cable, entonces existe una función  $P_x$  (tracción del cable), tal que

$$(10) \quad P'_x - f_1^c = 0$$

$$(11) \quad (P_x y')' - f_2^c = 0$$

$$P_x = y(x) = \frac{A^2}{2B^2} x^2,$$

lo cual nos lleva a la ecuación sin solución:

$$-3A^2 = 2B^2.$$

Para la unicidad, basta analizar el siguiente ejemplo. Consideremos la Figura 6, si fijamos para la membrana la forma de la silla de montar de ecuación:  $z = g(x, y) = y^2 - x^2 + a^2$ , y para el dominio plano que define el borde rígido, el subconjunto de  $R^2$ , donde

$$R = (-a, a) \times (-b, b) = (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Reconsideremos las ecuaciones de equilibrio del sistema  $A$ . Derivemos la primera con respecto a  $x$ , la segunda con respecto a  $y$ , y restemos término a término, además, al derivar la tercera ecuación, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 N_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 N_{yy}}{\partial y^2} = 0, & \text{en } R; \\ N_{xx} = N_{yy}, & \text{en } R. \end{cases}$$

Si definimos  $W(x, y) = N_{xx}(x, y)$ , entonces se tiene:

$$\begin{cases} N_{xx} = N_{yy}, & \text{en } R; \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, & \text{en } R. \end{cases}$$

Si imponemos una condición sobre el borde rígido. Sean  $n$  y  $f^r$  respectivamente, el vector exterior a la frontera  $\partial R = \Gamma = \Gamma^r$  y la fuerza por unidad de longitud aplicada en la misma frontera (para facilitar la lectura evitemos el superíndice  $r$  de la fuerza  $f^r$  esto es, la fuerza de borde es  $f$ ). Debido a la simetría del dominio y de la superficie, escojamos una distribución para  $f$  que se equilibre en  $\Gamma$ , esto es, igual en valor y dirección y opuesta en sentido, en cada par de puntos simétricos del

borde. Se obtienen, así, las siguientes descomposiciones para  $n$  y  $f$  (ver la Figura 7):

$$\begin{cases} n_+^v := (1, 0), & \text{normal exterior en } x = \pi; \\ n_-^v := (-1, 0), & \text{normal exterior en } x = -\pi; \\ n_+^h := (0, 1), & \text{normal exterior en } y = \frac{\pi}{2}; \\ n_-^h := (0, -1), & \text{normal exterior en } y = -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} f_+^v := (f_1^v(y), f_2^v(y)), & \text{componentes de } f \text{ en } x = \pi; \\ f_-^v := (-f_1^v(y), -f_2^v(y)), & \text{componentes de } f \text{ en } x = -\pi; \\ f_+^h := (f_1^h(x), f_2^h(x)), & \text{componentes de } f \text{ en } y = \frac{\pi}{2}; \\ f_-^h := (-f_1^h(x), f_2^h(x)), & \text{componentes de } f \text{ en } y = -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

donde  $f_\alpha^h$  y  $f_\alpha^v$  son funciones arbitrarias y conocidas. Con estos datos, la condición de borde que expresa el equilibrio se escribe como:  $N_{xx} = f_1^v(y)$  en  $x = \pm\pi$ ,  $N_{xy} = f_2^v(y)$  en  $x = \pm\pi$ , y  $N_{xy} = f_1^h(x)$  en  $y = \pm\frac{\pi}{2}$ ,  $N_{yy} = f_2^h(x)$  en  $y = \pm\frac{\pi}{2}$ .

El primer problema que tenemos es que las relaciones escritas son insuficientes para definir en todo el borde  $\Gamma$  las condiciones de frontera sobre la incógnita  $W$ ; de aquí la imposibilidad de definir correctamente el problema completo de contorno.

De todas formas, obviando esta dificultad y fijando, por ejemplo,  $W = c$  ( $c$  constante) en  $\Gamma$ , debemos resolver:

$$III = \begin{cases} W = c, & \text{en } \Gamma; \\ W_{xx} = W_{yy}, & \text{en } R. \end{cases}$$

La función  $W(x, y) = c$ , resuelve el sistema pero la unicidad no está garantizada ya que la familia de funciones  $W_k(x, y) = c + \cos(ky) \sin(kx)$ , siendo  $k$  cualquier número natural, sigue resolviéndolo.

De lo anterior podemos concluir que el problema de contorno planteado, involucra una ecuación diferencial hiperbólica, con condiciones de contorno tales, que el problema cae en los denominados problemas mal planteados [5]. Además observemos que el sistema (III) define un problema hiperbólico con condición de Dirichlet, esto es, un típico ejemplo de problema en general mal planteado en la teoría de ecuaciones diferenciales [5].

Además, usadno el hecho de que el problema de Cauchy para una ecuación diferencial hiperbólica está bien definido a lo largo de una curva  $\Gamma \subset R^2$  si y sólo si la curva no coincide con ninguna de las curvas pertenecientes a una de las dos familias de características del problema, esto se traduce en que los eventuales cables coinciden con las curvas características de la ecuación diferencial, teniendo así un problema hiperbólico con condiciones de bordes definidas sobre curvas características; tal problema está en general mal planteado.

#### 4. CONCLUSIONES

1. Debido al análisis de existencia y unicidad de solución del problema podemos afirmar que, fijada una forma de membrana, puede que exista más de una distribución de esfuerzos que la equilibre o bien, en caso de que los datos se definan sobre características, pueda que no exista alguna distribución de esfuerzos, por lo tanto la membrana tienda a romperse.
2. Este resultado es importante ya que, aunque no resuelve el problema de explicar las causas que originaron la ruptura de la velaria del auditorio, nos da una idea de que el problema no es tan sencillo como se pensaba, además

de que sienta las bases para continuar con resolver el paso dos planteado en el resumen de este artículo.

*Agradecemos el apoyo económico por parte de la Universidad Tecnológica de la Mixteca, para recabar los datos durante una visita al Auditorio.*

#### REFERENCIAS

- [1] Den Hartog, Jacob P., *Strength of Materials*; Dover Publications, Inc., (1961).
- [2] G. Vigliani, J. Murcia, F. Martínez, *Equilibrium problems in membrane structures with rigid boundaries*, Informes de la Construcción, 61(516), (2009), 57-66.
- [3] J. Murcia, *Tecnología de pasarelas con estructura de membrana*; Informes de la construcción, 59(507), (2007), 21-31.
- [4] Jürgen Mattheib, *Hormigón, armado, armado aligerado, pretensado*; Reverté, Barcelona España, (1980).
- [5] Kirsch A., *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*; Springer Verlag, (1996).
- [6] Linkwitz K., *About formfinding of double-curved structures*. *Engineering Structures*; 21, (1999), 709-718.
- [7] Linkwitz K.; *Formfinding by the "direct approach and pertinent strategies for the conceptual design of prestressed and hanging structures"*, *International Journal of Space Structures*, 14(2), (1999), 73-87.
- [8] M. Neri, M. E. Menconi, M. Vizzari, Vincenzo G. G. Mennella; *Propuesta de una nueva metodología para la ubicación de infraestructuras viarias ambientalmente sostenibles. Aplicación en el tramo viario de la pedemontana Fabriano-Muccia*, Informes de la construcción, 62(517), (2010), 101-112.
- [9] Oficina española de patentes y marca, *Clasificación internacional de patentes*; Oficina española de patentes y marcas, Organización mundial de la propiedad intelectual Ginebra, 1, (1999).
- [10] Popov, Egor P., *Engineering Mechanics of Solids*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., (1990).
- [11] Schek H. J.; *The force density method for formfinding and computation of general networks*, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3, (1974), 115-134.
- [12] Timoshenko S., *Strength of Materials*; 3rd edition, Krieger Publishing Company, (1976).

aromano@mixteco.utm.mx, sreyes@mixteco.utm.mx

# Lógica Matemática



# CAPÍTULO 10

## CONCURRENCIA Y PROPIEDADES LINEALES TEMPORALES EN MODEL CHECKING

JOSÉ RAMÓN ARRAZOLA RAMÍREZ<sup>1</sup>

IVÁN CORTÉS CORTÉS<sup>2</sup>

JESÚS LAVALLE MARTÍNEZ<sup>3</sup>

<sup>1</sup>FCFM, BUAP,

<sup>2,3</sup>FACULTAD DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN, BUAP

RESUMEN. En la presente plática daremos una pequeña introducción a los sistemas de transición que emplearemos para representar sistemas de software; además trataremos diferentes aspectos en la modelación de los sistemas concurrentes, desde aplicaciones sencillas que se ejecutan completamente automáticas hasta aplicaciones más reales donde un conjunto de procesos tienen que comunicarse. Expondremos el problema de la explosión de estados y luego veremos que los sistemas de transición son acompañados con una especificación de las propiedades que nos interesa verificar las cuales definiremos formalmente.

### 1. INTRODUCCIÓN

En las pasadas dos décadas surge un planteamiento muy atractivo hacia la *corrección* de sistemas de control basados en computadora, esto es lo que ahora se conoce como “*model checking*”.

Model Checking es una técnica formal de verificación la cual permite verificar el comportamiento de ciertas propiedades de un sistema dado en base de un adecuado modelo del sistema a través de una sistemática inspección de todos los estados de dicho modelo. Lo atractivo de model checking viene del hecho que es completamente automático, es decir, la curva de aprendizaje para el usuario es muy suave y que ofrece contraejemplos en caso de que el modelo falle al satisfacer una propiedad que sirve como información indispensable de depuración.

Además de esto, el rendimiento de las herramientas de model checking se ha demostrado con el tiempo gracias a un gran número de aplicaciones a la industria.

Las técnicas de verificación de software están siendo aplicadas al diseño de sistemas TIC de una manera más confiable. Brevemente la *verificación* de sistemas es usada para establecer que el diseño o producto bajo consideración cuenta con ciertas propiedades. Las propiedades que se desean validar pueden llegar a ser muy elementales, por ejemplo que un sistema nunca alcance una situación en la cual no pueda progresar (abrazo mortal). Todas estas generalmente son obtenidas en la especificación del sistema, la cual prescribe que es lo que el sistema tiene que hacer y que no. Un defecto es encontrado una vez que el sistema no cumple con alguna propiedad de especificación; el sistema es considerado correcto siempre que satisface todas las propiedades obtenidas en su especificación.

## 2. SISTEMAS DE TRANSICIÓN

Los sistemas de transición son generalmente usados en ciencias de la computación como un modelo que describe el comportamiento del sistema; son básicamente grafos dirigidos donde los nodos representan los estados y los arcos modelan las transiciones, es decir, el cambio de estados; un estado describe alguna información del comportamiento del sistema en cierto momento.

**Ejemplo 2.1.** El estado de un semáforo indica la luz que está encendida.

Las transiciones especifican cómo el sistema puede evolucionar de un estado a otro; en el caso del ejemplo anterior, una transición puede indicar un cambio de un color a otro.

Emplearemos los sistemas de transición con nombres de acciones en las transiciones y proposiciones atómicas para los estados. Los nombres de las acciones los utilizaremos para describir los mecanismos de comunicación entre los procesos. Usaremos las letras del alfabeto griego para determinar las acciones. Las proposiciones atómicas son usadas para formalizar características temporales; estas proposiciones expresan intuitivamente hechos simples conocidos acerca de los estados del sistema a consideración, dichas proposiciones son denotadas con letras minúsculas de nuestro alfabeto.

**Ejemplo 2.2.** Proposiciones atómicas

1.  $x$  es igual a cero
2.  $x$  es menor que 200
3. No hay mas que un litro de fluido en el tanque
4. No hay clientes en la tienda

**Definición 2.3.** Un sistema de transición (TS) es una tupla  $(S, Act, \rightarrow, I, AP, L)$  donde

- $S$  es el conjunto de estados
- $Act$  es el conjunto de acciones
- $\rightarrow \subseteq S \times Act \times S$  es la relación de transición
- $I \subseteq S$  es el conjunto de estados iniciales
- $AP$  es el conjunto de proposiciones atómicas
- $L : S \rightarrow 2^{AP}$  es la función codificadora

Decimos que un TS es finito si  $S, Act$  y  $AP$  son finitos

Escribiremos  $s \xrightarrow{\alpha} s'$  en lugar de  $(s, \alpha, s') \in \rightarrow$

**Observación 2.4.**

1. Note que puede ocurrir que  $I = \emptyset$ , en tal caso, todos los estados no iniciales no presentan algún comportamiento.
2. Es importante enfatizar que *los estados que tienen más de una transición*, la siguiente transición se escoge de manera no determinística (aleatoria).
3. Si el TS cuenta con más de un estado inicial, de manera similar éste se escoge de manera no determinística.
4. Una vez que el sistema descrito por el TS alcanza un estado terminal, el sistema completo se detiene.

**Observación 2.5.** La función codificadora  $L$  relaciona un conjunto  $L(s) \in 2^{AP}$  de proposiciones atómicas a cualquier estado  $s$ .

Intuitivamente todas las proposiciones  $a \in AP$  con  $a \in L(s)$  son satisfechas por el estado  $s$ . Dado que  $\Phi$  es una *fórmula* proposicional lógica entonces  $s$  satisface la fórmula  $\Phi$  si la evaluación inducida por  $L(s)$  hace que la fórmula  $\Phi$  sea verdadera, esto es

$$s \models \Phi \quad \text{sii} \quad L(s) \models \Phi$$

**Observación 2.6.** El conjunto de proposiciones  $AP$  siempre se escoge dependiendo de las características de interés. En la representación de los sistemas de transición, el conjunto de proposiciones  $AP$  generalmente no se indica explícitamente y se asume que  $AP \subseteq S$  con la función codificadora  $L(s) = \{s\}$ .

**Definición 2.7.** Sea  $TS = (S, Act, \rightarrow, I, AP, L)$  un sistema de transición (TS). Para  $s \in S$  y  $\alpha \in Act$  el conjunto de  $\alpha$ -sucesores directos de  $s$  está definido como:

$$Post(s, \alpha) = \{s' \in S : s \xrightarrow{\alpha} s'\} \quad Post(s) = \bigcup_{\alpha \in Act} Post(s, \alpha)$$

El conjunto de  $\alpha$ -predecesores de  $s$  está definido por:

$$Pre(s, \alpha) = \{s' \in S : s' \xrightarrow{\alpha} s\} \quad Pre(s) = \bigcup_{\alpha \in Act} Pre(s, \alpha)$$

**Definición 2.8.** Un estado  $s$  en un sistema de transiciones TS es llamado terminal si y solo si  $Post(s) = \emptyset$

**Definición 2.9.** Sea  $TS = (S, Act, \rightarrow, I, AP, L)$  un sistema de transiciones

1.  $TS$  es llamado determinista por acciones si  $|I| \leq 1$  y  $|Post(s, \alpha)| \leq 1$  para todos los estados  $s$  y las acciones  $\alpha$ .
2.  $TS$  es llamado determinista por  $AP$  si  $|I| \leq 1$  y  $|Post(s) \cap \{s' \in S : L(s') = A\}| \leq 1$  para todos los estados  $s$  y  $A \in 2^{AP}$ .

Hasta ahora hemos descrito el comportamiento de un sistema de transiciones de una manera intuitiva; así que ahora formalizaremos esto con la noción de ejecución. Una ejecución resulta de la resolución del posible indeterminismo en el sistema. De esta manera una ejecución describe un posible comportamiento del sistema de transiciones. Formalmente, tenemos

**Definición 2.10.** Sea un  $TS = (S, Act, \rightarrow, I, AP, L)$  sistema de transiciones. Un fragmento de ejecución finito  $\varrho$  de  $TS$  es una secuencia alternativa de estados y acciones que finalizan con un estado

$$\varrho = s_0 \alpha_1 s_1 \alpha_2 \dots s_n \alpha_n \text{ tal que } s_i \xrightarrow{\alpha_{i+1}} s_{i+1} \text{ para todo } 0 \leq i \leq n$$

donde  $n \geq 0$ . Nos referimos a  $n$  como la longitud del fragmento de ejecución  $\varrho$ . Un fragmento de ejecución infinito  $\rho$  de  $TS$ , es una secuencia alterna infinita de estados y acciones

$$\rho = s_0 \alpha_1 s_1 \alpha_2 s_2 \alpha_3 \dots \text{ tal que } s_i \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \text{ para todo } 0 \leq i$$

**Observación 2.11.**

- Note que la secuencia  $s$  con  $s \in S$  es un fragmento de ejecución finito legal de longitud  $n = 0$ .
- Cada prefijo de longitud impar de un fragmento de ejecución infinito es un fragmento de ejecución finito.

De ahora en adelante, el término *fragmento de ejecución* será usado para denotar cualquiera de los dos términos, fragmento de ejecución finito o fragmento de ejecución infinito.

Los fragmentos de ejecución  $\varrho = s_0\alpha_1 \dots \alpha_n s_n$  y  $\rho = s_0\alpha_1 s_1\alpha_2 \dots$  se escribirán respectivamente como:

$$\varrho = s_0 \xrightarrow{\alpha_1} \dots \xrightarrow{\alpha_n} s_n \quad \text{y} \quad \rho = s_0 \xrightarrow{\alpha_1} s_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots$$

**Definición 2.12.** Un fragmento de ejecución *maximal* es o un fragmento de ejecución finito que termina en un estado terminal, o un fragmento de ejecución infinito.

Un fragmento de ejecución es llamado *inicial* si comienza en un estado inicial, es decir, si  $s_0 \in I$ .

**Definición 2.13.** Una ejecución de un sistema de transiciones  $TS$  es un fragmento de ejecución inicial y maximal.

**Definición 2.14.** Sea  $TS = (S, Act, \rightarrow, I, AP, L)$  un sistema de transiciones. Un estado  $s \in S$  es llamado alcanzable en  $TS$ , si existe un fragmento de ejecución finito e inicial

$$s_0 \xrightarrow{\alpha_1} s_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_n} s_n = s$$

$Reach(TS)$  denota el conjunto de todos los estados alcanzables en  $TS$ .

### 3. SISTEMAS DEPENDIENTES DE DATOS

Las acciones ejecutables de un sistema dependiente de datos típicamente resultan de las ramificaciones condicionales tales como

**if**  $x \% 2 = 1$  **then**  $x := x + 1$  **else**  $x := 2x$  **fi.**

En principio cuando modelamos este fragmento de programa como un sistema de transiciones, las condiciones de transición podrían ser omitidas y las ramificaciones condicionales podrían ser reemplazadas por lo indeterminado, pero generalmente hablando, el resultado de esto es un sistema de transiciones muy abstracto para el cual solo unas pocas propiedades relevantes pueden ser verificadas. Alternativamente las *transiciones condicionales* pueden ser usadas y el grafo resultante (etiquetado con condiciones) puede ser desplegado en un sistema de transiciones que luego puede ser sometido a verificación.

Las etiquetas de las transiciones condicionales son de la forma  $g : \alpha$  donde  $g$  es una condición booleana (llamada guardia) y  $\alpha$  es una acción que es posible una vez que  $g$  se cumpla. Los nodos del grafo son las localizaciones y las transiciones condicionales como arcos; es importante mencionar que éste no es un sistema de transiciones, ya que los arcos son provistos con condiciones. Sin embargo, un sistema de transiciones puede ser obtenido por el “despliegue” del grafo.

Estas ideas son formalizadas al utilizar lo que llamaremos *grafos de programa* sobre un conjunto  $Var$  de variables tipificadas. Esencialmente esto significa que un tipo estandarizado por ejemplo, **integer**, **boolean**, **char** está asociado con cada variable. El tipo de variable  $x$  es llamado el dominio  $dom(x)$  de  $x$ . Denotaremos con  $Eval(Var)$  al conjunto de evaluaciones que asignen valores a las variables.  $Cond(Var)$  será el conjunto de condiciones booleanas sobre  $Var$ , es decir, fórmulas proposicionales lógicas cuyos símbolos proposicionales son de la forma  $\bar{x} \in \bar{D}$  donde  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$  es una tupla formada por parejas de variables distintas en  $Var$  y  $\bar{D}$  es un subconjunto de  $dom(x_1) \times \dots \times dom(x_n)$ . Por ejemplo la proposición

$$(-3 < x - x' \leq 5) \wedge (x \leq 2 \cdot x') \wedge (y = verde)$$

es una condición booleana legal para las variables enteras  $x$  y  $x'$  y  $y$  una variable con  $dom(y) = \{rojo, verde\}$ .

De aquí en adelante, usaremos continuamente notaciones simplificadas para los símbolos proposicionales tales como “ $-3 < x - x' \leq 5$ ” en lugar de  $(x, x') \in \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid 3 < x - x' \leq 5\}$

Inicialmente no restringimos los dominios. El conjunto  $dom(x)$  puede ser un conjunto arbitrario, incluso posiblemente infinito. Aunque en un sistema real de software todos los dominios son finitos. La decisión de que las restricciones sobre los dominios son útiles para la implementación como por ejemplo, cuántos bits son necesarios para la representación de variables de tipo entero se deja hasta una etapa posterior de diseño y es ignorada aquí.

Un *grafo de programa* sobre un conjunto de variables tipificadas es un digrafo cuyos arcos son etiquetados con condiciones sobre estas variables y acciones. El efecto de las acciones está formalizado por el significado de la función

$$Efecto: Act \times Eval(Var) \rightarrow Eval(Var)$$

la cual indica como la evaluación  $\eta$  de variables es cambiada al realizar una acción.

**Ejemplo 3.1.**  $\alpha$  denota la acción  $x := y + 5$ , donde  $x$  y  $y$  son variables enteras y  $\eta$  es la evaluación con  $\eta(x) = 17$  y  $\eta(y) = -2$  entonces

$$Efecto(\alpha, \eta)(x) = \eta(y) + 5 = -2 + 5 = 3, \quad y$$

$$Efecto(\alpha, \eta)(y) = \eta(y) = -2$$

Así  $Efecto(\alpha, \eta)$  es la evaluación que asigna 3 a  $x$  y  $-2$  a  $y$ . Los nodos de un grafo de programa son llamados *localizaciones* y tienen una función de control ya que ellos especifican cuáles de las transiciones condicionales son posibles.

**Definición 3.2.** Un grafo de programa sobre el conjunto  $Var$  de variables tipificadas es una tupla  $(Loc, Act, Efecto, \hookrightarrow, Loc_0, g_0)$ , donde

- $Loc$  es un conjunto de localizaciones y  $Act$  el conjunto de acciones.
- $Efecto : Act \times Eval(Var) \rightarrow Eval(Var)$  es la función de efecto.
- $\hookrightarrow \subseteq Loc \times Cond(Var) \times Act \times Loc$  es la relación de transición condicional.
- $Loc_0 \subseteq Loc$  es un conjunto de localizaciones iniciales
- $g_0 \in Cond(Var)$  es la condición inicial.

La notación  $l \xrightarrow{g:\alpha} l'$  es usada en lugar de  $(l, g, \alpha, l') \in \hookrightarrow$ . Además la condición  $g$  es llamada el guardia de la transición condicional  $l \xrightarrow{g:\alpha} l'$ . Si el guardia es una tautología como por ejemplo  $g = verdad$  o  $g = (x < 1) \vee (x \geq 1)$  entonces simplemente escribimos  $l \xrightarrow{\alpha} l'$ .

El comportamiento en la localización  $l \in Loc$  depende sobre la variable actual de evaluación  $\eta$ . Se realiza una elección no determinística entre todas las transiciones  $l \xrightarrow{g:\alpha} l'$  la cual satisface la condición  $g$  en la evaluación  $\eta$ , es decir,  $\eta \models g$ . La ejecución de la acción  $\alpha$  cambia la evaluación de las variables de acuerdo a  $Efecto(\alpha, \cdot)$ . Luego el sistema cambia a la localización  $l'$ . Si tal transición no es posible, el sistema se detiene.

Cada grafo de programa puede ser interpretado como un sistema de transiciones. El sistema de transiciones de un grafo de programa resulta del “despliegue”. Sus estados consisten de un componente de control, es decir, una localización  $\ell$  del grafo de programa, junto con una evaluación  $\eta$  de las variables. De esta manera

los estados son parejas de la forma  $\langle \ell, \eta \rangle$ . Los estados iniciales son localizaciones iniciales que satisfacen la condición inicial  $g_0$ . Para formular las propiedades del sistema descrito por un grafo de programa, el conjunto  $AP$  de proposiciones es compuesto de localizaciones  $\ell \in Loc_0$  (para poder afirmar en que localización de control se encuentra actualmente el sistema), además de condiciones booleanas para las variables. Por ejemplo, una proposición como

$$(x \leq 5) \wedge (y \text{ es par}) \wedge (\ell \in \{1, 2\})$$

puede ser formulada con variables enteras  $x, y$  y con localizaciones naturales. El etiquetado de los estados es tal que  $\langle \ell, v \rangle$  es etiquetado con  $\ell$  y con todas las condiciones (sobre  $Var$ ) que se cumplan en  $\eta$ . La relación de transición está determinada como sigue. Siempre que  $\ell \xrightarrow{g:\alpha} \ell'$  es una transición condicional en el grafo de programa, y el guardia  $g$  se sigue en la evaluación actual  $\eta$ , entonces existe una transición del estado  $\langle \ell, \eta \rangle$ , para decir que  $\langle \ell', Efecto(\alpha, \eta) \rangle$ . Nótese que la transición no está vigilada. Formalmente:

**Definición 3.3.** (Semánticas del sistema de transiciones de un grafo de programa)  
El sistema de transiciones  $TS(PG)$  de un grafo de programa

$$PG = (Loc, Act, Efecto, \hookrightarrow, Loc_0, g_0)$$

sobre el conjunto  $Var$  de variables es la tupla  $(S, Act, \rightarrow, I, AP, L)$  donde,

- $S = Loc \times Eval(Var)$
- $\rightarrow \subseteq S \times Act \times S$  está definido por la siguiente regla:

$$\frac{\ell \xrightarrow{g:\alpha} \ell' \quad \wedge \quad \eta \models g}{\langle \ell, \eta \rangle \xrightarrow{\alpha} \langle \ell', Efecto(\alpha, \eta) \rangle}$$

- $I = \{ \langle \ell, \eta \rangle : \ell \in Loc_0, \eta \models g_0 \}$
- $AP = Loc \cup Cond(Var)$
- $L(\langle \ell, \eta \rangle) = \{ \ell \} \cup \{ g \in Cond(Var) : \eta \models g \}$

La definición de  $TS(PG)$  determina un gran conjunto  $AP$  de proposiciones. Pero generalmente, sólo una pequeña parte de  $AP$  es necesario para formular las propiedades relevantes del sistema. En lo que sigue, exploraremos los grados de libertad al escoger el conjunto de proposiciones de  $TS(PG)$  y solo emplearemos las proposiciones atómicas necesarias en el contexto que estemos manejando.

**Observación 3.4.** En la definición anterior, la relación de transición está definida empleando lo que es denominado notación-SOS (Semánticas operacionales estructuradas). Esta notación será frecuentemente usada en lo que sigue. La notación

$$\frac{\text{premisa}}{\text{conclusion}}$$

se interpretará de manera similar a una estructura de la forma **if...then**, si la proposición que hace las veces de “numerador” se cumple, entonces la proposición “denominador” se cumplirá también. Además las proposiciones son llamadas *reglas de inferencia* o simplemente *reglas*. Si la premisa es una tautología, puede ser omitida (también la línea). En este último caso la regla es llamada *axioma*.

Frases como “La relación  $\rightarrow$  está definida por las siguientes reglas (y axiomas)” tienen el significado de una definición inductiva donde la relación  $\rightarrow$  está definida como la relación más pequeña que satisface las reglas y los axiomas indicados.

4. MODELANDO SISTEMAS CONCURRENTES

**4.1. Paralelismo y comunicación.** En la realidad la mayoría del software y hardware no son secuenciales, sino puramente paralelos. Describiremos algunos mecanismos para proveer modelos operacionales para sistemas paralelos por medio de sistemas de transición.

Asumiremos que el comportamiento operacional de los procesos que se ejecutan en paralelo son dados por sistemas de transición  $TS_1, \dots, TS_n$ . Nuestro objetivo será definir un operador  $\parallel$ , tal que:

$$TS = TS_1 \parallel \dots \parallel TS_n$$

es un sistema de transición que especifica el comportamiento de la composición paralela de los sistemas de transición  $TS_1$  hasta  $TS_n$ . Asumiremos que el operador  $\parallel$  es asociativo y conmutativo.

Note que el esquema anterior puede ser repetido nuevamente en  $TS_i$ , es decir,  $TS_i$  puede ser un sistema de transición compuesto de varios sistemas de transición:

$$TS_i = TS_{i,1} \parallel TS_{i,2} \parallel \dots \parallel TS_{i,n}$$

Usando de esta manera hereditaria la composición paralela, podemos describir sistemas paralelos de mayor complejidad y describirlos de una manera más estructurada.

*4.1.1. Comunicación e interpolación.* Un paradigma ampliamente aceptado para los sistemas paralelos es la *inteporlación*. Este paradigma es una abstracción del hecho que un sistema está compuesto por componentes relativamente independientes.

El sistema completo es compuesto de los actuales estados individuales de los componentes. Las acciones de los componentes individuales son *fusionadas* con las acciones de otros componentes. La concurrencia es representada por *inteporlación* pura, que es, la elección no-determinista entre las actividades de los procesos (o componentes) que actúan simultáneamente. Denotaremos con  $\parallel\parallel$  al operador de interpolación.

Una importante justificación para la interpolación es el hecho que el efecto de las acciones  $\alpha$  y  $\beta$  concurrentemente ejecutadas parece ser idéntico al efecto cuando  $\alpha$  y  $\beta$  son ejecutadas sucesivamente en orden arbitrario. Esto puede ser enunciado simbólicamente como:

$$\text{Efecto}(\alpha \parallel\parallel \beta, \eta) = \text{Efecto}((\alpha; \beta) + (\beta; \alpha), \eta)$$

donde el operador  $;$  indica una ejecución secuencial,  $+$  representa una elección no-determinista, y  $\parallel\parallel$  indica una ejecución concurrente de actividades independientes.

**Ejemplo 4.1.** Supongamos dos asignaciones a dos variables independientes

$$\underbrace{x := x + 1}_{\alpha} \parallel\parallel \underbrace{y := y - 2}_{\beta}$$

Cuando inicialmente  $x = 0$  y  $y = 7$ ,  $x$  tiene el valor 1 y  $y$  tiene el valor 5 después de ejecutar  $\alpha$  y  $\beta$  independientemente de que las asignaciones ocurran concurrentemente, o en orden arbitrario sucesivo. Note que la independencia de las acciones es crucial. Para acciones dependientes comúnmente el orden de las acciones es esencial.

Ahora estamos en la posición para definir formalmente la interpolación (denotada por  $\parallel\parallel$ ) de los sistemas de transición. El sistema de transición  $TS_1 \parallel\parallel TS_2$  representa

el sistema paralelo que resulta de la fusión de las acciones de los componentes descritos por  $TS_1$  y  $TS_2$ .

Asumiremos que no hay comunicación y no hay argumentos sobre variables compartidas. Los estados globales de  $TS_1 ||| TS_2$  son parejas  $\langle s_1, s_2 \rangle$  que consisten de los estados locales  $s_i$  de los componentes  $TS_i$ . Las transiciones de salida del estado global  $\langle s_1, s_2 \rangle$  consisten de las transiciones de salida de  $s_1$  junto con las de  $s_2$ . En consecuencia, siempre que el sistema compuesto esté en el estado  $\langle s_1, s_2 \rangle$  se realizará una acción no-determinista entre todas las transiciones de salida del estado local  $s_1$  y  $s_2$ .

**Definición 4.2 (Interpolación de sistemas de transición).** Sean  $TS_i = (S_i, Act_i, \rightarrow_i, I_i, AP_i, L_i)$   $i = 1, 2$  dos sistemas de transición. El sistema de transición  $TS_1 ||| TS_2$  está definido por:

$$TS_1 ||| TS_2 = (S_1 \times S_2, Act_1 \cup Act_2, \rightarrow, I_1 \times I_2, AP_1 \cup AP_2, L)$$

donde la relación de transición  $\rightarrow$  está definida por las siguientes reglas:

$$\frac{s_1 \xrightarrow{\alpha}_1 s'_1}{\langle s_1, s_2 \rangle \xrightarrow{\alpha} \langle s'_1, s_2 \rangle} \quad \text{y} \quad \frac{s_2 \xrightarrow{\alpha}_2 s'_2}{\langle s_1, s_2 \rangle \xrightarrow{\alpha} \langle s_1, s'_2 \rangle}$$

y la función etiquetadora está definida por  $L(\langle s_1, s_2 \rangle) = L(s_1) \cup L(s_2)$ .

*4.1.2. Comunicación vía variables compartidas.* El operador de interpolación  $|||$  puede ser usado para modelar concurrencia asíncrona en la cual los subprocesos actúan completamente independientes de todos los demás. Sin embargo, el operador de interpolación para los sistemas de transición es demasiado simple para la mayoría de los sistemas paralelos con componentes concurrentes y con comunicación. Un ejemplo claro es aquel sistema que tenga variables compartidas.

Definiremos un operador de interpolación directamente sobre los grafos de programa. La interpolación de grafos de programa, denotada como  $PG_1 ||| PG_2$  genera un sistema de transiciones  $TS(PG_1 ||| PG_2)$  que describe fielmente un sistema paralelo cuyos componentes se comunican por medio de variables compartidas. Note que en general  $TS(PG_1 ||| PG_2) \neq TS(PG_1) ||| TS(PG_2)$ .

**Definición 4.3 (Interpolación de grafos de programa).** Sea  $PG_i = (Loc_i, Act_i, Efecto_i, \hookrightarrow_i, Loc_{0,i}, g_{0,i})$  para  $i = 1, 2$  dos grafos de programa sobre las variables  $Var_i$ . El grafo de programa  $PG_1 ||| PG_2$  sobre  $Var_1 \cup Var_2$  está definido por

$$PG_1 ||| PG_2 = (Loc_1 \times Loc_2, Act_1 \uplus Act_2, Efecto, \hookrightarrow, Loc_{0,1} \times Loc_{0,2}, g_{0,1} \wedge g_{0,2})$$

donde  $\hookrightarrow$  está definido por las reglas

$$\frac{\ell_1 \xrightarrow{g:\alpha}_1 \ell'_1}{\langle \ell_1, \ell_2 \rangle \xrightarrow{g:\alpha} \langle \ell_1, \ell_2 \rangle} \quad \text{y} \quad \frac{\ell_2 \xrightarrow{g:\alpha}_2 \ell'_2}{\langle \ell_1, \ell_2 \rangle \xrightarrow{g:\alpha} \langle \ell_1, \ell'_2 \rangle},$$

$$Efecto_i(\alpha, \eta)(v) = \begin{cases} Efecto_i(\alpha, \eta | Var_i)(v) & \text{si } v \in Var_i \\ \eta(v) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Los grafos de programa  $PG_1$  y  $PG_2$  tienen las variables  $Var_1 \cap Var_2$  en comun; estas son las variables compartidas. Las variables  $Var_1 \setminus Var_2$  son las variables locales en  $PG_1$  y las variables  $Var_2 \setminus Var_1$  son las variables locales en  $PG_2$ .

La distinción entre las variables locales y compartidas tiene además un impacto sobre las acciones del grafo de programa compuesto  $PG_1 ||| PG_2$ . Las acciones que

accesan es decir que inspeccionan o modifican las variables compartidas pueden ser consideradas como críticas; de otra manera son vistas como no críticas.

En particular una acción no crítica de  $PG_1$  puede ser ejecutada en paralelo con una acción crítica o no crítica de  $PG_2$  ya que sólo tendrá efecto en sus variables locales. Por simetría, lo mismo aplica para las secciones no críticas de  $PG_1$  y  $PG_2$ . Sin embargo, las acciones críticas de  $PG_1$  y  $PG_2$  no pueden ser ejecutadas simultáneamente ya que el valor de las variables compartidas depende del orden en que se ejecuten estas acciones.

Note que, cualquier estado global donde las acciones críticas de  $PG_1$  y  $PG_2$  son permitidas, describen una situación de concurrencia que tiene que ser resuelta con alguna apropiada estrategia de programación.

#### Observación 4.4.

- Para modelar un sistema paralelo por medio de un operador de interpolación para grafos de programa, es decisivo que las acciones  $\alpha \in Act$  sean indivisibles.
- Empleando grafos de programa, una secuencia de instrucciones puede ser declarada atómica cuando se escribe como una etiqueta de un arco.
- En los programas en pseudocódigo empleados aquí, una serie de instrucciones pueden ser declaradas atómicas rodeándolas de paréntesis angulares  $\langle \dots \rangle$ .

*4.1.3. El saludo (Apretón de manos).* En esta subsección consideraremos un mecanismo por el cual procesos concurrentes interactúan vía, un “saludo” (apretón de manos, en inglés, handshaking). El término “saludos” significa que los procesos concurrentes que quieren interactuar tienen que hacerlo de manera síncrona; es decir, los procesos pueden interactuar sólo si ambos participan en esta interacción al mismo tiempo.

La información que es intercambiada puede ser de diferente naturaleza, desde un simple valor entero hasta complejas estructuras de datos como arreglos de registros; de ahora en adelante, no estaremos interesados en el contenido de los mensajes intercambiados; en su lugar adoptaremos un punto de vista abstracto y sólo consideraremos las acciones de comunicación que representa la ocurrencia de un “saludo” y no el contenido. Para hacer esto, distinguimos un conjunto  $H$  de acciones de saludo con  $\tau \notin H$ . El paso de mensajes puede ocurrir, sólo si ambos procesos involucrados están listos para ejecutar la misma acción de saludo. Todas las acciones fuera de  $H$  (i.e.  $\alpha \in Act \setminus H$ ) son independientes y por lo tanto pueden ser ejecutadas de manera autónoma en una forma interpolada.

**Definición 4.5 (Saludo (Paso de mensajes sincronizados)).** Sea  $TS_i = (S_i, Act_i, \rightarrow_i, I_i, AP_i, L_i)$  con  $i = 1, 2$  un sistema de transición y  $H \subseteq Act_1 \cap Act_2$  con  $\tau \notin H$ . El sistema de transición  $TS_1 \parallel_H TS_2$  está definido como sigue:

$$TS_1 \parallel TS_2 = (S_1 \times S_2, Act_1 \cup Act_2, \rightarrow, I_1 \times I_2, AP_1 \cup AP_2, L)$$

donde  $L(\langle s_1, s_2 \rangle) = L_{s_1} \cup L(s_2)$  y donde la relación de transición  $\rightarrow$  está definida por las siguientes reglas:

- Interpolación para  $\alpha \in H$ :

$$\frac{s_1 \xrightarrow{\alpha}_1 s'_1}{\langle s_1, s_2 \rangle \xrightarrow{\alpha} \langle s'_1, s_2 \rangle} \quad \frac{s_2 \xrightarrow{\alpha}_2 s'_2}{\langle s_1, s_2 \rangle \xrightarrow{\alpha} \langle s_1, s'_2 \rangle}$$

- Saludo para  $\alpha \in H$

$$\frac{s_1 \xrightarrow{\alpha}_1 s'_1 \wedge s_2 \xrightarrow{\alpha}_2 s'_2}{\langle s_1, s_2 \rangle \xrightarrow{\alpha} \langle s'_1, s'_2 \rangle}$$

$TS_1 \parallel TS_2$  abrevia  $TS_1 \parallel_H TS_2$  para  $H = Act_1 \cap Act_2 \setminus \{\tau\}$

**Observación 4.6 (Conjunto vacío de acciones de saludo).** Cuando el conjunto  $H$  de acciones de saludo es vacío, todas las acciones de los procesos involucrados pueden tomar lugar de manera autónoma, i.e. en este caso particular, el saludo se reduce a interpolar

$$TS_1 \parallel TS_2 = TS_1 \parallel \parallel TS_2.$$

El operador  $\parallel_H$  define el saludo entre dos sistemas de transición. El “saludo” es conmutativo, pero en general no es asociativo. En general, tenemos lo siguiente:

$$TS_1 \parallel_H (TS_2 \parallel_{H'} TS_3) \neq (TS_1 \parallel_H TS_2) \parallel_{H'} TS_3 \quad \text{para } H \neq H'.$$

Sin embargo, para un conjunto fijo  $H$  de acciones de saludo sobre el cual todos los procesos se sincronizan, el operador  $\parallel_H$  es asociativo, esto es:

$$TS = TS_1 \parallel_H TS_2 \parallel \cdots \parallel_H TS_n$$

denota la composición paralela de los sistemas de transición  $TS_1$  a  $TS_n$  donde  $H \subseteq Act_1 \cap Act_2 \cap \cdots \cap Act_n$ .

En algunos casos, los procesos se comunican en parejas sobre las acciones que tienen en común. Denotaremos con  $TS_1 \parallel \cdots \parallel TS_n$  la composición paralela de  $TS_1$  a  $TS_n$  (con  $n > 0$ ) donde  $TS_i$  y  $TS_j$  ( $0 < i \neq j \leq n$ ) se sincronizan sobre el conjunto de acciones  $H_{i,j} = Act_i \cap Act_j$  tal que  $H_{i,j} \cap Act_k = \emptyset$  para  $k \notin \{i, j\}$ .

**4.1.4. Sistemas de canales.** En esta sección introduciremos los sistemas de canales, sistemas paralelos donde los procesos se comunican por lo que llamamos *canales*, búferes tipo FIFO (por sus siglas en inglés) que pueden contener mensajes. Consideraremos que los sistemas de canales son cerrados, esto es, los procesos pueden comunicarse con otros procesos del sistema (vía canales) pero no con procesos fuera del sistema.

Intuitivamente, un sistema de canales, consiste de  $n$  procesos.  $P_1, \dots, P_n$  (dependientes de datos); cada proceso  $P_i$  es especificado por un grafo de programa  $PG_i$  el cual es extendido con acciones de comunicación. Las transiciones de estos grafos de programa son cualquiera de las dos, las transiciones condicionales (etiquetadas con guardias y acciones) o una de las acciones de comunicación con su respectivo significado intuitivo:

$c!v$  Transmite el valor  $v$  por el canal  $c$ .

$c?x$  Recibe un mensaje por el canal  $c$  y lo asigna a la variable  $x$ .

Cuando consideramos al canal  $c$  como un búfer, la acción de comunicación  $c!v$ , pone el valor  $v$  en la cola de este, siempre que  $c?x$  recupere un elemento del frente de  $c$  mientras lo asigna a  $x$ . Asumimos implícitamente que la variable  $x$ , es del tipo correcto, esto es, que tiene un tipo que es compatible con los mensajes que son puestos en el canal  $c$ .

Denotaremos con  $Comm$  al conjunto de acciones de comunicación donde  $Chan$  es un conjunto de canales, con un elemento típico  $c$ .

$$Comm = \{c!v, c?x : c \in Chan, v \in \text{dom}(c), x \in Var \text{ con } \text{dom}(c) \subseteq \text{dom}(x)\}$$

Un canal  $c$  tiene una capacidad finita o infinita que indica el número máximo de mensajes que puede almacenar y un tipo (o dominio) que especifica el tipo de mensajes que pueden ser transmitidos por  $c$ . Símbolicamente se tiene que el canal  $c$  tiene una capacidad  $\text{cap}(c) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  y un dominio  $\text{dom}(c)$ .

La capacidad de un canal define el tamaño correspondiente del búfer, i.e. el número de mensajes aún no leídos que pueden ser almacenados en el búfer. Cuando  $\text{cap}(c) \in \mathbb{N}$ ,  $c$  es un canal con capacidad finita;  $\text{cap}(c) = \infty$  indica que  $c$  tiene una capacidad infinita. Note que el caso especial cuando  $\text{cap}(c) = 0$  es permitido; en este caso, el canal  $c$  no tiene búfer, entonces la comunicación por medio del canal  $c$  corresponde al tipo “saludo” (transmisión y repetición simultanea) más el intercambio de algunos datos. Cuando  $\text{cap}(c) > 0$  hay un retardo entre la transmisión y la recepción de un mensaje, esto es lo que se conoce como paso de mensajes asíncronos. El envío y recepción de mensajes de un canal  $c$  con  $\text{cap}(c) \neq 0$ , puede que nunca aparezca simultáneamente.

Ambos tipos de paso de mensajes, síncronos y asíncronos pueden ser modelados por medio de un sistema de canales.

**Definición 4.7 (Sistemas de canales).** Un grafo de programa sobre  $(Var, Chan)$  es una tupla

$$PG = (Loc, Act, Effect, \hookrightarrow, Loc_0, g_0)$$

- $Loc$  es un conjunto de localizaciones y  $Act$  es un conjunto de acciones.
- $Effect : Act \times Eval(Var) \rightarrow Eval(Var)$  es la función de efecto.
- $\hookrightarrow \subseteq Loc \times Cond(Var) \times (Act \cup Comm) \times Loc$ .
- $Loc_0 \subseteq Loc$ , es un conjunto de localizaciones iniciales.
- $g_0 \in Cond(Var)$  es la condición inicial.

Un sistema de canales  $CS$  sobre  $(Var, Chann)$  consiste de un grafo de programa  $PG_i$  sobre  $(Var_i, Chann)$  (para  $1 \leq i \leq n$ ) con  $Var = \bigcup_{1 \leq i \leq n} Var_i$ . Lo denotamos como

$$CS = [PG_1 | \dots | PG_n]$$

La relación de transición  $\hookrightarrow$  de un grafo de programa sobre  $(Var, Chann)$  consiste de dos tipos de transiciones condicionales: la etiquetada con un guardia y una acción,  $\ell \xrightarrow{g:\alpha} \ell'$  y una transición condicional de la forma  $\ell \xrightarrow{g:c!v} \ell'$  (para enviar  $v$  por medio de  $c$ ) y  $\ell \xrightarrow{g:c?x} \ell'$  (para recibir un mensaje por medio de  $c$ ) que están etiquetadas con acciones de comunicación. Para fines de simplicidad, asumiremos en lo siguiente que el guardia es satisfecho.

- *Saludo.* Si  $\text{cap}(c) = 0$ , entonces el proceso  $P_i$  puede transmitir un valor  $v$  sobre el canal  $c$  al realizar

$$\ell_i \xrightarrow{c!v} \ell'_i$$

sólo si otro proceso  $P_j$ , por decir, “ofrece” una acción complementaria de recepción, i.e. si puede realizar

$$\ell_j \xrightarrow{c?x} \ell'_j.$$

$P_i$  y  $P_j$  deben de ser capaces de realizar simultáneamente  $c!v$  en  $P_i$  y  $c?x$  en  $P_j$ ; así de esta manera, el paso de mensajes entre  $P_i$  y  $P_j$  puede tomar lugar. El efecto del paso de mensajes corresponde al asignación distribuida de  $x := v$ .

Note que cuando el “saludo” sólo es usado para propósitos de sincronización, no tiene relevancia el nombre del canal, ni el valor de  $v$

- *Paso de mensajes asíncronos.* Si  $\text{cap}(c) > 0$ , entonces el proceso  $P_i$  puede realizar la transición condicional

$$\ell \xrightarrow{c!v} \ell'_i$$

si y sólo si el canal  $c$  no está lleno, es decir, si menos que  $\text{cap}(c)$  mensajes están almacenados en  $c$ . En este caso,  $v$  está almacenado en la cola de  $c$ . Los canales son considerados búferes FIFO (por sus siglas en inglés). Por consiguiente,  $P_j$  puede realizar

$$\ell_j \xrightarrow{c?x} \ell'_j$$

si y sólo si el búfer de  $c$  no está vacío. En este caso, el primer elemento  $v$  del búfer es extraído y asignado a  $x$  (de una manera atómica).

La siguiente definición formaliza el comportamiento sucesivo de un sistema de canales por medio de un sistema de transición. El concepto básico es similar al mapeo de un grafo de programa en un sistema de transición. Sea  $CS = [PG_1, \dots, PG_n]$  un sistema de canales sobre  $(Chann, Var)$ . Los estados globales de  $TS(CS)$  son tuplas de la forma

$$\langle \ell_1, \dots, \ell_n, \eta, \xi \rangle$$

donde  $\ell_i$  indica la localización actual del componente  $PG_i$ ,  $\eta$  almacena los valores actuales de las variables y  $\xi$  guarda (como secuencias) el contenido actual de los diferentes canales. Formalmente,  $\eta \in Eval(Var)$  es una evaluación de las variables y  $\xi$  es una evaluación del canal, es decir, un mapeo desde un canal  $c \in Chann$  en una secuencia  $\xi(c) \in \text{dom}(c)^*$  tal que la longitud de la secuencia no puede exceder la capacidad de  $c$ , es decir,  $\text{len}(\xi(c)) \leq \text{cap}(c)$  donde  $\text{len}(\cdot)$  denota la longitud de una secuencia.  $Eval(Chan)$  denota el conjunto de todas las evaluaciones del canal. Para los estados iniciales, los componentes de control  $\ell_i \in Loc_{0,i}$ , debe ser inicializado y la variable de evaluación  $\eta$  debe satisfacer la condición inicial  $g_0$ . Además asumimos que cada canal está vacío, lo que denotamos con  $\epsilon$ .

Antes de introducir los detalles de las semánticas de un sistema de transiciones, introduciremos algunas notaciones. La evaluación de canal  $\xi(c) = v_1 v_2 \dots v_k$  (donde  $\text{cap}(c) \geq k$ ) denota que  $v_1$  se encuentra al frente del búfer  $c$ ,  $v_2$  es el segundo elemento y así sucesivamente hasta  $v_k$ , que es el elemento que se encuentra al final de  $c$ ; en este caso  $\text{len}(\xi(c)) = k$ . Diremos que  $\xi[c := v_1, \dots, v_k]$  denota las evaluaciones de canal donde la secuencia  $v_1, \dots, v_k$  es asignada a  $c$  sin afectar a todos los demás canales; simbólicamente:

$$\xi[c := v_1, \dots, v_k](c') = \begin{cases} \xi(c') & \text{si } c \neq c' \\ v_1 \dots v_k & \text{si } c = c'. \end{cases}$$

La evaluación de canal  $\xi_0$  envía cualquier canal a la secuencia vacía, denotada con  $\epsilon$ , simbólicamente, para cualquier canal  $c$ ,  $\xi_0(c) = \epsilon$ . Sea  $\text{len}(\epsilon) = 0$ . El conjunto de acciones de  $TS(CS)$  consiste de las acciones  $\alpha \in Act_i$  del componente  $PG_i$  y el símbolo  $\tau$  representa todas las acciones de comunicación donde se intercambian datos.

## REFERENCIAS

- [1] J. P. Katoen, Christel Baier, *Principles of Model Checking*, MIT Press, 2008.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel  
Puebla, Pue. C.P. 72570

Facultad del Ciencias de la Computación  
Avenida 14 Sur y Boulevard Valsequillo, Colonia San Manuel  
Puebla, Pue. C.P. 72570

arrazola@fcfm.buap.mx, dceivanc@hotmail.com, jlavallenator@gmail.com



# CAPÍTULO 11

## EL TEOREMA DE COMPACIDAD

JOSÉ ARRAZOLA RAMÍREZ  
IVÁN MARTÍNEZ RUIZ  
MIGUEL PÉREZ GASPAR  
FCFM, BUAP

RESUMEN. Un resultado importante en Lógica es el Teorema de Compacidad, el cual establece que dado un conjunto  $\Gamma$  de sentencias en un lenguaje de primer orden  $\mathcal{L}$ , se cumple que  $\Gamma$  admite un modelo siempre que todo subconjunto finito de  $\Gamma$  lo admite. El objetivo de este trabajo será presentar el Teorema de Compacidad para el Cálculo Proposicional Clásico. Finalmente, estudiaremos el Teorema de Compacidad en su forma más general.

### 1. INTRODUCCIÓN

Gödel es reconocido como uno de los más importantes lógicos de todos los tiempos, su trabajo ha tenido un impacto inmenso en el pensamiento científico y filosófico del siglo XX. Gödel, al igual que otros pensadores como Bertrand Russell, A. N. Whitehead y David Hilbert, intentó emplear la lógica y la teoría de conjuntos para comprender los fundamentos de la matemática. A Gödel se le conoce mejor por sus dos teoremas de la incompletitud, publicados en 1931 cuando tenía 25 años de edad, un año después de finalizar su doctorado en la Universidad de Viena.

El más célebre de sus teoremas de incompletitud establece que todo sistema axiomático recursivo auto-consistente y lo suficientemente poderoso como para describir la aritmética de los números naturales (la aritmética de Peano), existen proposiciones verdaderas sobre los naturales que no pueden demostrarse a partir de los axiomas. Para demostrar este teorema desarrolló una técnica denominada numeración de Gödel, la cual codifica expresiones formales como números naturales. También demostró que la hipótesis del continuo no puede refutarse con los axiomas aceptados en la teoría de conjuntos, si dichos axiomas son consistentes. Realizó importantes contribuciones a la teoría de la demostración al esclarecer las conexiones entre las lógicas clásica, intuicionista y modal. Un resultado más de Gödel, no menos importante que los anteriores, denominado *Teorema de Completitud*, establece que toda teoría  $T$  de primer orden es consistente si y sólo si admite un modelo; es decir, podemos asegurar que en nuestra teoría  $T$  no existen fórmulas tales que ella y su negación son válidas. La propiedad de consistencia es importante en Lógica, pues toda teoría inconsistente se convierte en una teoría trivial donde todas sus fórmulas son válidas. Si bien una teoría consistente  $T$  puede ser incluso infinita, el Teorema de Compacidad, que estudiaremos en este trabajo, nos garantiza que la existencia de un modelo para  $T$  equivale a la existencia de un modelo para todo subconjunto finito de  $T$ . En particular, estudiaremos el Teorema de Compacidad para el Cálculo Proposicional Clásico, así como una de sus equivalencias.

## 2. NOTACIÓN Y TERMINOLOGÍA

En lo que sigue únicamente se presentarán las definiciones más relevantes que se utilizarán a lo largo del presente trabajo; de igual forma, introduciremos algunas notaciones, con el objetivo de lograr una mayor comprensión del mismo.

**Definición 2.1.** Una Teoría formal  $\mathcal{F}$  consiste de:

1. Un conjunto numerable llamado el conjunto de símbolos de  $\mathcal{F}$ . A cada sucesión finita de símbolos se le llamará una expresión en  $\mathcal{F}$ .
2. Un conjunto de expresiones, llamado el conjunto de fórmulas bien formadas, el cual se abrevia como wfs.
3. Un conjunto de fórmulas bien formadas, el cual recibe el nombre de conjunto de axiomas en  $\mathcal{F}$ .
4. Un conjunto finito  $\{R_1, R_2, \dots, R_m\}$  de relaciones entre wfs llamadas reglas de inferencia. Si dada una wf  $\varphi$  existe un conjunto de wfs  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  y  $j \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi) \in R_j$ , diremos que  $\varphi$  es una consecuencia directa de las fórmulas dadas a partir de  $R_j$ .

Si dada cualquier fórmula  $\varphi$ , es posible determinar si es un axioma,  $\mathcal{F}$  recibe el nombre de Teoría Axiomática.

En particular, trabajaremos con el lenguaje  $\mathcal{L}$ , que consiste de lo siguiente:

1. Un conjunto numerable  $\{p_n : n \in \omega\}$  de letras, denominadas letras proposicionales o fórmulas atómicas.
2. Un conectivo de aridad 1, denotado por  $\neg$ , llamado negación, un conectivo binario denotado por  $\rightarrow$ , denominado implicación.
3. Un conjunto de símbolos auxiliares:  $()$

**Definición 2.2.** El conjunto de fórmulas bien formadas, denotado por FOR, es el  $\subseteq$ -mínimo conjunto que cumple las siguientes condiciones:

- (a) Toda fórmula atómica pertenece a FOR.
- (b) Si  $\varphi, \psi \in \text{FOR}$ , entonces  $\neg\varphi, \varphi \rightarrow \psi \in \text{FOR}$ .

**Definición 2.3.** Denotaremos por  $L$  a la Teoría axiomática del Cálculo Proposicional Clásico. Si  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  son fórmulas, entonces las siguientes fórmulas son los axiomas de  $\mathcal{L}$ :

- (A1)  $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (A2)  $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
- (A3)  $(\neg\gamma \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\gamma \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma)$

La única regla de inferencia de  $\mathcal{L}$  es modus ponens (MP):  $\psi$  es consecuencia directa de  $\varphi \rightarrow \psi$  y  $\varphi$ .

**Definición 2.4.** Sea  $\mathcal{F}$  una teoría formal.

1. Una prueba en  $\mathcal{F}$  es una sucesión finita  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  de fórmulas tal que para cada  $i \leq n$ ,  $\alpha_i$  es un axioma o consecuencia directa de fórmulas previas a partir de alguna regla de inferencia.
2. Un Teorema en  $\mathcal{F}$  es una fórmula  $\alpha$  tal que existe una prueba  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , con  $\alpha_n = \alpha$ .

**Observación 2.5.**

1. Denotaremos a un teorema de una teoría formal  $\mathcal{F}$  con  $\vdash_{\mathcal{F}} \alpha$ , en caso de no existir ambigüedad sólo escribiremos  $\vdash \alpha$ .

2. Denotaremos con  $\text{Th}(\mathcal{F})$  al conjunto de Teoremas de la Teoría  $\mathcal{F}$ .

Introducimos los siguientes conectivos en el Cálculo Proposicional Clásico como abreviaciones de fórmulas:

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta &= \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta) \\ \alpha \vee \beta &= \neg\alpha \rightarrow \beta \\ \alpha \leftrightarrow \beta &= (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)\end{aligned}$$

El siguiente resultado justifica las construcciones y definiciones recursivas en Cálculo Proposicional Clásico.

**Proposición 2.6.** *Sea  $A$  un conjunto no vacío,  $H_{\square} : A^2 \rightarrow A$  una función con  $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ ,  $H_{\neg} : A \rightarrow A$  función y  $H : \text{Atom} \rightarrow A$ , donde  $\text{Atom} = \{p : p \text{ es fórmula atómica}\}$ . Entonces existe una única función  $F : \text{FOR} \rightarrow A$  que cumple las siguientes propiedades.*

1.  $F \upharpoonright_{\text{Atom}} = H$
2.  $F(\varphi \square \psi) = H_{\square}(F(\varphi), F(\psi))$  para  $\varphi, \psi \in \text{FOR}$  y  $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$
3.  $F(\neg\varphi) = H_{\neg}(F(\varphi))$

A partir del resultado anterior podemos establecer adecuadas funciones mediante las cuales generar tablas de verdad comúnmente empleadas en los cursos básicos de lógica proposicional clásica.

**Definición 2.7.** Sean  $A = \{0, 1\}$ ,  $H_{\square} : A^2 \rightarrow A$  y  $H_{\neg} : A \rightarrow A$  definida por

1.  $H_{\wedge}(x, y) = \min\{x, y\}$
2.  $H_{\vee}(x, y) = \max\{x, y\}$
3.  $H_{\rightarrow}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ 0 & \text{si } x > y \end{cases}$
4.  $H_{\neg}(x) = 1 - x$

**Definición 2.8.** Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal. Una  $\mathcal{L}$ -asignación es una función

$$M : \{p : p \text{ es fórmula atómica}\} \rightarrow \{0, 1\}$$

Por la Proposición 2.6, existe una única función  $v_M : \text{FOR} \rightarrow \{0, 1\}$  extensión de  $M$ , respecto a las funciones que se presentan en la Definición 2.7. A esta función se le denominará valuación inducida por la asignación  $M$ .

**Observación 2.9.** Si  $\varphi$  tiene exactamente  $n$  átomos, existen exactamente  $2^n$   $\mathcal{L}$ -asignaciones diferentes (por lo tanto  $2^n$  valuaciones distintas), las cuales generalmente se presentan como una tabla de verdad con  $2^n$  filas.

**Definición 2.10.** Sea  $M$  un asignación. Una fórmula  $\alpha$  es llamada *verdadera* bajo  $M$  si  $v_M(\alpha) = 1$ . En otro caso, diremos que  $\alpha$  es falsa bajo  $M$ .

**Definición 2.11.** Un conjunto de fórmulas  $\Delta$  es llamado *satisfactible* si existe una asignación  $M$  tal que  $v_M(\alpha) = 1$  para toda  $\alpha \in \Delta$ .

**Definición 2.12.** Sea  $\Delta$  un conjunto de fórmulas. Diremos que una fórmula  $\beta$  es consecuencia lógica de  $\Delta$ , lo cual denotaremos por  $\Delta \models \beta$ , si  $\beta$  es verdadera bajo todas las asignaciones que hacen satisfactible a  $\Delta$ .

**Observación 2.13.** Si  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \beta$  escribiremos únicamente  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \beta$ .

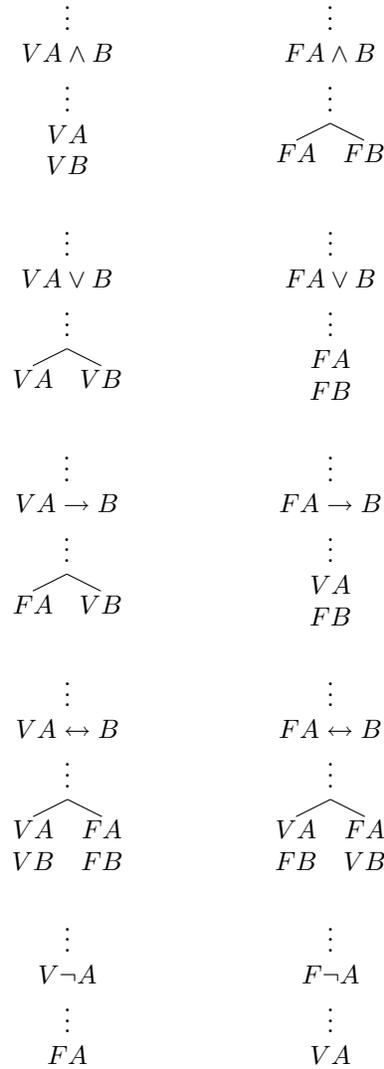


FIGURA 1. Reglas Básicas de Tabla

**Definición 2.14.** Una fórmula es lógicamente válida (o es *tautología*) si es verdadera bajo cualquier asignación  $M$ .

**Observación 2.15.** Una fórmula  $\varphi$  es consecuencia lógica de  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  si  $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$  es lógicamente válida.

El siguiente resultado establece la equivalencia sintáctica y semántica de toda fórmula. Una teoría  $\mathfrak{F}$  es robusta y completa si:

**Teorema 2.16.** (*Complejitud y Robustez*) Sea  $\varphi \in FOR$ . Entonces  $\vdash \varphi$  si y sólo si  $\models \varphi$ , es decir, todo teorema en la teoría es una fórmula lógicamente válida y viceversa.

3. EL MÉTODO DE TABLEAU

Un nombre más descriptivo para tableaux son los árboles de satisfactibilidad.

**Definición 3.1.** Una fórmula con asignación es una expresión de la forma  $V\varphi$  o  $F\varphi$ , donde  $\varphi$  es una fórmula.

**Definición 3.2.** Una tabla con asignación es un árbol binario  $\tau$ , donde cada nodo consiste de una fórmula con asignación.

Análogo a la definición de valores de verdad de fórmulas que involucran conectivos, definiremos las reglas básicas de tablas de asignación para fórmulas, las cuales quedan en realidad determinadas por las reglas de valuación. Estas reglas se presentan en la Figura 1.

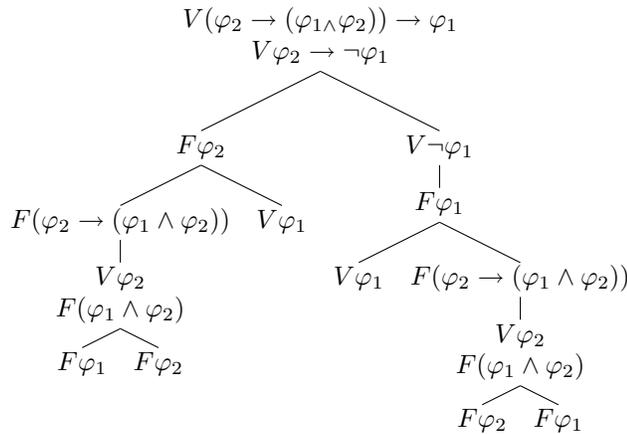
**Definición 3.3.** Sean  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  un conjunto finito de fórmulas con asignación. Una tabla que inicia con  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  es una tabla que se obtiene a partir de aplicar repetidamente las reglas de tabla.

Es posible establecer una relación de orden parcial de la siguiente manera  $\varphi \leq \psi$  en caso de que  $\psi$  se obtiene a partir de  $\varphi$  mediante la aplicación de una o mas reglas de tabla.

**Definición 3.4.**

1. Diremos que una trayectoria de una tabla es cerrada si contiene simultáneamente un par de fórmulas de la forma  $V\varphi$  y  $F\varphi$ .
2. Diremos que una tabla es cerrada si cada una de sus trayectorias lo es. En otro caso, diremos que la trayectoria es abierta.

**Ejemplo 3.5.** Ejemplo de una tabla abierta.



**El método de tableau :**

1. Para verificar que una fórmula  $\varphi$  es válida, se elabora una tabla que inicia con  $F\varphi$ . Si todas las trayectorias del árbol son cerradas, entonces  $\varphi$  es lógicamente válida.
2. Para verificar si  $\varphi$  es consecuencia lógica de  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , se forma una tabla que inicia con  $V\varphi_1, V\varphi_2, \dots, V\varphi_n, F\varphi$ . Si la tabla es cerrada, entonces  $\varphi$  es consecuencia lógica.

3. Para verificar que  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  es satisfactible, se elabora una tabla con asignación que inicia con  $V\varphi_1, \dots, V\varphi_n$ . Si la tabla no es cerrada, entonces  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  es satisfactible.

#### 4. TEOREMA PRINCIPAL

**Lema 4.1.** *Sean  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  fórmulas con o sin asignación. Si  $\tau$  es una tabla finita cerrada que inicia con  $V\varphi_1, \dots, V\varphi_n$ , entonces  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  no es satisfactible.*

*Demostración.* Inmediata de las definiciones. □

**Definición 4.2.**

1. Diremos que una trayectoria de tabla es repleta si cuando contiene la fórmula superior una regla de tabla, entonces contiene algunas de las ramas.
2. Diremos que una tabla es repleta si todas sus trayectorias son repletas.

**Lema 4.3.** *Toda tabla finita se puede extender a una tabla repleta.*

*Demostración.* Basta aplicar reglas de tabla hasta que ya no sea posible. □

A fin de demostrar el Lema 4.6, se introduce la siguiente definición.

**Definición 4.4.** Sea  $S$  un conjunto de fórmulas con o sin asignación. Diremos que  $S$  es un conjunto de *Hintikka* si:

1. Si  $S$  contiene la fórmula superior de una regla de tabla entonces contiene a alguna de sus ramas.
2.  $S$  no contiene un par de fórmulas atómicas conjugadas, es decir, de la forma  $V\varphi$  y  $F\varphi$ .

**Lema 4.5.** *Si  $S$  es un conjunto de Hintikka, entonces  $S$  es satisfactible.*

*Demostración.* Defínase una asignación:

$$M(p) = \begin{cases} V & \text{si } V_p \\ F & \text{si } F_p \end{cases}$$

Si las fórmulas de  $S$  son con asignación. ó

$$M(p) = \begin{cases} V & \text{si } p \in S \\ F & \text{si } F \notin S \end{cases}$$

Por inducción se prueba que  $v_M(\varphi) = V$ , para cada fórmula  $\varphi$  es  $S$ . □

**Lema 4.6.** *Sea  $\tau$  es una tabla repleta que comienza con  $V\varphi_1, \dots, V\varphi_n$ . Si  $\tau$  es abierta, entonces  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  es satisfactible.*

Para demostrar el Lema 4.6, basta señalar que una trayectoria abierta repleta es un conjunto de Hintikka. Por lo tanto, si una tabla repleta comienza con  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  es abierta, el Lema de Hintikka implica que  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  es satisfactible.

De la combinación de los Lemas 4.1 , 4.3 y 4.6, se obtiene:

**Teorema 4.7.** *(Teorema de Completitud).  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  es satisfactible si y sólo si ninguna tabla finita cerrada comienza con  $V\varphi_1, \dots, V\varphi_n$ .*

**Corolario 4.8.** *Una fórmula  $\varphi$  es lógicamente válida si y sólo si existe una tabla cerrada que comienza con  $F\varphi$ .*

Usando la misma técnica se obtiene un resultado correspondiente a la Deducción Lógica.

**Corolario 4.9.** *Una fórmula  $\psi$  es consecuencia lógica de  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  si y sólo si existe una tabla de asignación cerrada que comienza con  $V\varphi_1, \dots, V\varphi_n, F\psi$ .*

## 5. ÁRBOLES Y EL LEMA DE KÖNIG

Un enunciado importante en Matemáticas es el Axioma de Elección, que establece que dada una colección  $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$  de conjuntos no vacíos ajenos dos a dos, existe un conjunto  $A$  tal que  $|U_\alpha \cap A| = 1$ , para todo  $\alpha \in I$ . Existen diversas propiedades equivalentes a este principio, en particular enunciamos dos de ellas, a saber, el Lema de Zorn y el Teorema de Tychonoff, las cuales se emplearán mas adelante:

**Lema 5.1.** *(Lema de Zorn) Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena (subconjunto totalmente ordenado) tiene una cota superior, contiene al menos un elemento maximal.*

**Teorema 5.2.** *(Teorema de Tychonoff) Sea  $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  familia de espacios topológicos.  $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$  es compacto si y sólo si para todo  $\alpha \in I : X_\alpha$  es compacto.*

Hasta este punto, la discusión de los árboles ha sido informal. Haremos una pausa para dotar al concepto de árbol de una terminología precisa.

**Definición 5.3.** Un árbol es un conjunto parcialmente ordenado  $(T, \prec)$  con primer elemento, tal que para cualquier  $x \in T$ , el conjunto  $\{a \in T : a \prec x\}$  está bien ordenado.

**Definición 5.4.** Sea  $(T, \prec)$  un árbol. Para cada  $x \in T$  se define la altura de  $T$ , denotada por  $\text{ht}(a)$ , como el conjunto  $\text{type}\{a \in T : a \prec x\}$ . Donde  $\text{type}$  es el tipo de orden de  $\{a \in T : a \prec x\}$  y es el único número ordinal isomorfo a  $\{a \in T : a \prec x\}$ . Pediremos que el árbol  $T$  tenga un único elemento con altura 0, que llamaremos raíz de  $T$ .

**Definición 5.5.** Para cada  $\alpha$  ordinal, el  $\alpha$ -ésimo nivel del árbol  $T$  es el conjunto  $T_\alpha = \{y \in T : \text{ht}(y) = \alpha\}$ .

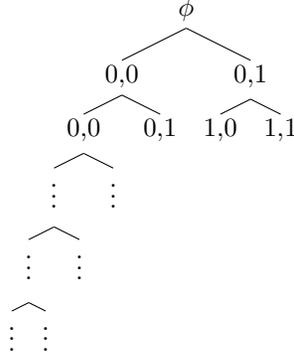
**Definición 5.6.** Diremos que  $y$  es un predecesor inmediato de  $x$  o  $x$  es sucesor inmediato de  $y$  si se tiene que  $y \prec x$  y no existe  $z$  tal que  $y \prec z \prec x$ . Un subárbol de un árbol  $T$  es un subconjunto  $T' \subseteq T$  tal que para todo  $x \in T', \{y \in T : y \prec x\} \subseteq T'$ .

**Definición 5.7.** Sea  $(T, \prec)$  un árbol. Entonces:

1. Un nodo final en un árbol  $T$  es un nodo  $x$  que no tiene sucesores inmediatos.
2. Una rama (o trayectoria) en  $T$  es un subconjunto  $R \subseteq T$  que contiene a la raíz de  $T$  y para cada  $x \in R$  o bien  $x$  es un nodo final o bien existe un único sucesor inmediato  $y \in R$ .

**Definición 5.8.** Un árbol  $T$  es finitamente ramificado si cada nodo  $x \in T$  tiene una cantidad finita de sucesores inmediatos. Diremos que  $T$  es diádico si cada nodo tiene a lo más dos sucesores inmediatos.

**Ejemplo 5.9.** Sea  $T = 2^{<\omega} = \{f : n \rightarrow \{0,1\} \mid n \in \omega\}$  y sea  $\leq$  la relación en  $T$  tal que  $f \leq g$  si y sólo si  $\text{dom}(f) \leq \text{dom}(g)$  y  $g \upharpoonright_{\text{dom}(f)} = f$ .



$f : 1 = \{0\} \rightarrow \{0,1\}$ , entonces  $0 \mapsto 0$  ó  $0 \mapsto 1$ .  
Entonces,  $T$  es un árbol diádico, con única raíz  $\phi$ .

**Teorema 5.10.** (*Lema de König*) Sea  $(T, \prec)$  un árbol infinito de ramificación finita. Entonces  $T$  tiene una rama infinita.

*Demostración.* Sea  $T' = \{x \in T : x \text{ tiene infinitos sucesores}\}$ . Se cumple que  $T' \neq \emptyset$  pues en particular si  $a_0 = \min T$  entonces  $a_0 \in T'$ . Más aún,  $T'$  es un subárbol de  $T$ . En efecto, si  $x \in T'$  y  $y \prec x$  entonces todo sucesor de  $x$  es también un sucesor de  $y$ , con lo cual  $y \in T'$ . Por la propiedad del palomar (o de las casillas), dado que  $T$  es de ramificación finita, para cada  $x \in T'$  existe al menos un sucesor inmediato y tal que  $y \in T'$ . Recursivamente construimos una rama infinita  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ , eligiendo  $x_0 = a_0$  y suponiendo que hemos elegido  $x_n \in T'$ , elegimos  $x_{n+1}$  sucesor inmediato de  $x_n$  tal que  $x_{n+1} \in T'$ .  $\square$

**Definición 5.11.** Diremos que un conjunto de fórmulas  $\Delta$  es finitamente satisfactible, si para todo subconjunto finito  $\Gamma \subseteq \Delta$ , se cumple que  $\Gamma$  es satisfactible.

**Teorema 5.12.** (*Teorema de Compacidad caso Numerable*). Sea  $\Delta$  un conjunto numerable de fórmulas proposicionales. Si  $\Delta$  es finitamente satisfactible, entonces  $\Delta$  es satisfactible.

*Demostración.* Sea  $\Gamma = \{\varphi_n : n \in \omega\}$ . Consideremos  $\varphi_0$  y constrúyase una tabla repleta  $\tau_0$  para  $\varphi_0$ . Dado que  $\{\varphi_0\}$  es satisfactible entonces existe al menos una rama abierta de  $\tau_0$ . Adjuntemos ahora la fórmula  $\varphi_1$  al final de cada rama abierta y sea  $\tau_1$  una tabla repleta. Como  $\{\varphi_0, \varphi_1\}$  es satisfactible, entonces existe al menos una rama abierta  $\tau_0$  y así sucesivamente, constrúyase para  $n \in \omega$  una tabla  $\tau_n$ .

Sea  $\tau = \bigcup_{n \in \omega} \tau_n$ . Entonces

1.  $\tau$  es una tabla repleta.
2.  $\tau$  es finita.
3.  $\tau$  es de ramificación infinita.

Por el Lema de König, existe una trayectoria  $S \in \tau$  tal que  $\Gamma \subseteq S$ .

La trayectoria debe pasar por todas las fórmulas. Se cumple que  $S$  es de Hintikka. Esto implica que  $S$  es satisfactible, con lo cual  $\Gamma$  es satisfactible  $\square$

**Teorema 5.13.** (*Teorema de Compacidad caso no Numerable*). Sea  $\Delta$  un conjunto no numerable de fórmulas proposicionales. Si  $\Delta$  es finitamente satisfactible, entonces  $\Delta$  es satisfactible.

Sea  $N$  el conjunto de átomos de las fórmulas en  $\Gamma$ . Presentamos tres pruebas distintas para este resultado.

*Demostración.*

**Primera prueba:** Consideremos la colección

$$\mathcal{F} = \{\Delta : \Delta \text{ es finitamente satisfactible y } \Gamma \subseteq \Delta\}$$

y consideramos la contención usual. Veamos que  $\{\mathcal{F}, \subseteq\}$  cumple con las hipótesis del Lema de Zorn. Sea  $\mathcal{C} = \{C_\alpha : \alpha \in I\}$  cadena en  $\mathcal{F}$ , es decir,  $(\forall (F, G) \in \mathcal{C})(F \subseteq G \text{ ó } G \subseteq F)$ . Entonces  $\Delta = \bigcup \mathcal{C}$  es cota superior de  $\mathcal{C}$ . Por el lema de Zorn, existe  $\Gamma^*$  elemento maximal de  $\mathcal{F}$ . Nótese que para cada  $\varphi \notin \Gamma^*$ ,  $\Gamma^* \cup \{\varphi\}$  no es finitamente satisfactible.

**Afirmación 1.**  $\Gamma^*$  es de Hintikka.

Por ser finitamente generado  $\Gamma'$  no contiene fórmulas de la forma  $V\varphi$  y  $F\varphi$ . Además, si  $\Gamma$  contiene un nodo  $\gamma$  más y no contiene alguna de las ramas que la bifurca al añadir una regla y no contiene alguna de las ramas que la bifurca, al añadir a  $\Gamma^*$  una de ellas obtendríamos un conjunto  $\Gamma'$  finitamente satisfactible con  $\Gamma^* \subseteq \Gamma'$ , lo cual es una contradicción.  $\Gamma$  es de Hintikka y así es satisfactible.

**Segunda prueba:** (Por inducción transfinita).

Enumeremos todas las  $N$ -fórmulas por  $\{A_\xi : \xi < \alpha\}$ . Recursivamente definamos un conjunto de fórmulas  $\{S_\xi : \xi < \alpha\}$  como sigue:

1.  $S_0 = \Gamma$ ;
2.  $S_{\beta+1} = \begin{cases} S_\beta \cup \{A_\beta\} & \text{si es suc. finit. satis.} \\ S_\beta & \text{en otro caso} \end{cases}$
3.  $S_\eta = \bigcup_{\beta < \eta} S_\beta$ . si  $\eta$  es límite.

**Afirmación 2.**  $(\forall \beta < \alpha) (S_\beta)$  es finitamente satisfactible.

1.  $S_0$  es finitamente satisfactible, por hipótesis.
2. Supongamos que  $(\forall \gamma < \beta)(S_\gamma)$  es finitamente satisfactible.
  - a) Si  $\beta = \gamma+1$  para algún  $\gamma$ , entonces  $S_\beta = S_{\gamma+1} = S_\beta \cup \{A_\beta\}$  ó  $S_{\gamma+1} = S_\beta$ .
  - b) Si  $\beta$  es límite, entonces  $\Gamma_0 \subseteq S_\beta = \bigcup_{\gamma < \beta} S_\gamma$  finito. Existe  $\gamma_0 < \beta$  tal que  $\Gamma_0 \subseteq S_{\gamma_0}$  y así  $\Gamma_0$  es satisfactible por hipótesis. En particular,  $S_\gamma = \bigcup_{\beta < \alpha} S_\beta$  lo es.

Se verifica que  $S_\alpha$  es de Hintikka, con lo cual  $S_\alpha$  es satisfactible y así  $\Gamma$  lo es.

**Tercera prueba:** Sea  $X = \{0, 1\}^N = 2^N$  el espacio topológico de todas las asignaciones.  $M : N \rightarrow \{0, 1\}$ , donde  $\{0, 1\}$  tiene la topología discreta.

Por el teorema de Tychonoff,  $X$  es compacto.

Cada elemento de  $X$  es una asignación en un conjunto de fórmulas.

Para cada fórmula  $\varphi$ , defínase  $X_\varphi = \{M \in X : v_M(\varphi) = 0\}$ .

**Afirmación 3.**  $(\forall \varphi)$ ,  $X_\varphi$  es cerrado.

Sea  $M \notin X_\varphi$ . Entonces  $v_M(\varphi) = 0$ . Sea  $N' = \{p \in N : p \text{ es átomo de } \varphi\}$ .

Sea  $U = \bigcap_{n=1}^k \pi_n^{-1}(\{M(P_n)\})$ , entonces  $U$  es abierto,  $M \in U$  para toda asignación  $R \in U$ ,  $v_k(\varphi) = 0$ . Se sigue que  $X_\varphi^c$  es abierto. Veamos que  $\Gamma$  es satisfactible. Por hipótesis,  $\Gamma$  es finitamente satisfactible.

**Afirmación 4.**  $X$  cumple la P.I.F.

Sea  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  fórmulas con  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq \Gamma$ . Existe  $M \in X$  tal que para todo  $i \leq n$   $v_M(\varphi_i) = 1$  (por hipótesis), entonces  $M \in \bigcap_{i=1}^n X_{\varphi_i} \neq \emptyset$ . Por tanto,  $X$  cumple la P.I.F.

Por la compacidad de  $X$ ,

$$\bigcap_{\varphi \in \Gamma} X_\varphi \neq \emptyset$$

es decir, existe  $M$  tal que para todo  $\varphi \in \Gamma : M \in X_\varphi$ . Se concluye que  $\Gamma$  es satisfactible. □

**Observación 5.14.** Un resultado útil para poder demostrar el Teorema de Compacidad es el Lema de Zorn o, equivalentemente, el Teorema de Tychonoff, los cuales son propiedades equivalentes al Axioma de Elección. Sin embargo, es posible demostrar que el Teorema de Compacidad es una versión más débil que el Axioma de Elección, siendo equivalente a una propiedad llamada el *Teorema del Ideal Primo* en álgebras booleanas, ver [4].

**Observación 5.15.** Se puede utilizar el Teorema de Compacidad para demostrar el Lema de König, por tanto, estos dos resultados son equivalentes.

**Proposición 5.16.** *Asúmase el Teorema de Compacidad, entonces todo árbol numerable infinito de ramificación finita tiene una trayectoria infinita.*

*Demostración.* Sea  $(T, \leq)$  un árbol infinito numerable de ramificación finita.

Para cada  $n \in \omega$ , sea  $T_n = \{x \in T : ht(x) = n\}$ . Nótese que para cada  $n \in \omega : T_n$  es finito.

Fijemos un conjunto de símbolos proposicionales indicados como  $S = \{B_\gamma : \gamma \in T\}$ . Definase los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \left\{ \bigvee \{B_x : x \in T_n\} : n \in \omega \right\} \\ \Gamma_2 &= \{(B_y \rightarrow B_x) : x < y, x, y \in T\} \\ \Gamma_3 &= \{\neg(B_x \wedge B_y) : x, y \in T_n, x \neq y, n \in \omega\} \end{aligned}$$

Sea  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ . El conjunto  $\Gamma_1$  nos permitirá construir una rama infinita. El conjunto  $\Gamma_2$  se utilizará para garantizar que el conjunto que se forma es cerrado hacia abajo. Finalmente el conjunto  $\Gamma_3$  verificará que existe a lo más de un nodo de altura  $n$ .

**Afirmación 5.**  $\Gamma$  es satisfactible

Sea  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$  y sea  $n = \max\{0, \{k : \bigvee\{B_x : x \in T_k\} \in \Gamma_0\}\}$ . Dado que  $T_n \neq \emptyset$ , existe  $\sigma \in T_n$ . Sea la asignación  $M_\sigma$ .

$$M_\sigma(B_\rho) = \begin{cases} V & \text{si } \rho < \sigma \\ F & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea  $\varphi \in \Gamma_0$ .

1. Si  $\varphi$  es una disyunción entonces  $\varphi = \bigvee\{B_x : x \in \Gamma_k\}$  para algún  $k \leq n$ . Entonces debe existir  $x \in T_k$  tal que  $x < \sigma$ . Esto implica que  $M_\sigma(\varphi_x) = V$ , entonces  $M_\sigma(\bigvee\{B_y : y \in \Gamma_k\}) = V$ .
2. Si  $\varphi = B_y \rightarrow B_x$  y  $M_\sigma(B_y) = V$ , entonces  $y < \sigma$ . Pero  $x < y$ , entonces  $x < \sigma$ . Por tanto,  $M_\sigma(B_x) = V$ .
3. Si  $\varphi = \neg(B_x \wedge B_y)$ , entonces si  $M_\sigma(\varphi) = F$ , entonces  $M_\sigma(B_x) = V = M_{B_y}$ , entonces  $x < \sigma \wedge y < \sigma$ , luego  $x, y \in T_k$  para algún  $k$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $M_\sigma(\varphi) = V$ .

**Afirmación 6.**  $v_{M_\sigma}$  hace satisfactible a  $\Gamma_0$ .

Se sigue que  $\Gamma$  es satisfactible. Por tanto, existe  $M^*$  asignación tal que para toda  $\varphi \in \Gamma$  se cumple  $v_{M^*}(\varphi) = 1$ . Sea  $\pi = \{\rho : v_{M^*}(B)_\rho = 1\}$ .

**Afirmación 7.**  $\pi$  es una rama infinita.

Se verifica lo siguiente:

1.  $(\forall n \in \omega)(\exists x \in T_n)(x \in \pi)$  (por  $\Gamma_1$ ).
2.  $\forall n(\neg \exists x, y \in T_n)(x \neq y \wedge x, y \in \pi)$  (por  $\Gamma_3$ ).
3.  $\pi$  es infinita (por  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_3$ ).

□

## 6. TEORÍA DE GRÁFICAS

En esta sección se presentan algunas aplicaciones de combinatoria del teorema de compacidad para el cálculo proposicional.

La teoría de grafos (también llamada teoría de las gráficas) estudia las propiedades de los grafos (también llamadas gráficas). Un grafo es un conjunto, no vacío, de objetos llamados vértices (o nodos) y una selección de pares de vértices, llamados aristas (edges en inglés) que pueden ser orientados (dirigidos) o no. Típicamente, una gráfica se representa mediante una serie de puntos (los vértices) conectados por líneas (las aristas), ver Figura 2.

El trabajo de Leonhard Euler, en 1736, sobre el problema de los puentes de Königsberg es considerado el primer resultado de la teoría de grafos. También se considera uno de los primeros resultados topológicos en geometría (que no depende de ninguna medida). Este ejemplo ilustra la profunda relación entre la teoría de grafos y la topología.

En 1852 Francis Guthrie planteó el problema de los cuatro colores que plantea si es posible, utilizando solamente cuatro colores, colorear cualquier mapa de países de tal forma que dos países vecinos nunca tengan el mismo color. Este problema, que no fue resuelto hasta un siglo después por Kenneth Appel y Wolfgang Haken, puede ser considerado como el nacimiento de la teoría de grafos. Al tratar de resolverlo, los matemáticos definieron términos y conceptos teóricos fundamentales de los grafos.

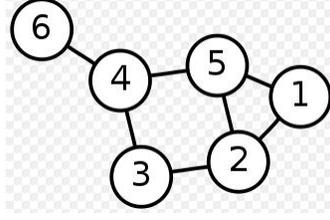


FIGURA 2. Diagrama de una gráfica con 6 vértices y 7 aristas

**Definición 6.1.** Una gráfica dirigida es una pareja  $(V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto de vértices y  $E \subseteq V \times V$  es llamado el conjunto de aristas.

Si  $(u, v) \in E$ , diremos que  $v$  es adyacente a  $u$  ó que existe una arista de  $u$  a  $v$ .

**Definición 6.2.** Sea  $G = (V, E)$  una gráfica. Diremos que  $G' = (V', E')$  es subgráfica de  $G$  si  $V' \subseteq V$  y  $E' = E \upharpoonright_{V' \times V'}$ .

**Definición 6.3.** Sea  $G = (V, E)$  una gráfica y  $k \in \omega$ . Una coloración  $k$  de  $G$  es una función

$$f : V \rightarrow \{0, 1, \dots, k-1\} = k$$

tal que  $f(u) \neq f(v)$  si  $u$  y  $v$  son adyacentes.

**Teorema 6.4.** Sea  $G = (V, E)$  una gráfica numerable y sea  $k \in \omega$ . Si toda subgráfica de  $G$  es colorable  $k$ , entonces  $G$  es colorable  $k$ .

*Demostración.* Fijemos un conjunto de átomos.

$$S = \{B_{u,i} : u \in V, i < k\}$$

donde  $B_{u,i}$  (cuando es verdadero) se interpretará como la coloración  $i$  para el vértice  $u$ .

Definimos los siguientes conjuntos de fórmulas:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \left\{ \bigvee \{B_{u,i} : i < k\} : u \in V \right\} \\ \Gamma_2 &= \{ \neg(B_{u,i} \wedge B_{u,j}) : 0 \leq i < j < k, u \in V \} \\ \Gamma_3 &= \{ \neg(B_{u,i} \wedge B_{v,i}) : i \in K, u \neq v, (u, v) \in E \} \end{aligned}$$

Sea  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ .

**Afirmación 8.**  $\Gamma$  es satisfactible.

Sea  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$  finito.

Sea  $V_0 = \{x_1, \dots, x_n\}$  el conjunto de vértices  $x \in V$  tales que  $B_{x,i} \in \Gamma_0$  para algún  $i \leq k$ .

Sea  $G_0 = (V_0, E_0)$  la subgráfica de  $G$  determinada por  $V_0$ . Como  $G$  es finitamente colorable  $k$ , sea  $c : V_0 \rightarrow \{0, \dots, k-1\}$  una coloración  $k$ .

Entonces defínase una asignación  $M$  tal que

$$M(B_{u,i}) = \begin{cases} V & \text{si } u \in V_0 \text{ y } c(u) = i \\ F & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Afirmación 9.**  $M$  hace satisfactible a  $\Gamma_0$ .

1. Sea  $\varphi = \bigvee \{B_{u,i} : u \in V_0, i < k\}$ , entonces  $M(\varphi) = V$ .
2. Sea  $\varphi = \neg(B_{u,i} \wedge B_{u,j})$ , entonces  $M(\varphi) = V$  (por  $\Gamma_2$ ).

3.  $\varphi = \neg(B_{v,i})$ , entonces  $M(\varphi) = V$  (por  $\Gamma_3$ ).

Así,  $\Gamma_0$  es satisfactible y por tanto  $\Gamma$  lo es.

Sea  $v$  una valuación tal que para todo  $(\varphi \in \Gamma)(v(\varphi) = V)$  y sea  $c : V \rightarrow \{0, 1, \dots, k-1\}$  dada por  $c(u) = i_u$  tal que  $B_{u,i_u}$  es el único átomo tal que  $v(B_{u,i_u}) = V$ .  $c$  es función por  $\Gamma_2$ . Por lo tanto,  $c$  es coloración  $k$ .

□

Finalmente, se puede obtener una aplicación más del Teorema de Compacidad en la teoría de órdenes parciales.

## 7. TEOREMA DE COMPACIDAD EN CÁLCULO PREDICATIVO

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje de primer orden. Una teoría de primer orden en un lenguaje  $\mathcal{L}$  será una teoría formal  $K$  cuyos símbolos y wfs son los símbolos y wfs de  $\mathcal{L}$  y cuyos axiomas y reglas de inferencia son especificadas de la siguiente manera. Los axiomas de  $K$  son divididos en dos clases: los axiomas lógicos y axiomas propios.

### Axiomas Lógicos.

**Definición 7.1.** Si  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son fórmulas de  $\mathcal{L}$ , entonces los siguientes son axiomas lógicos de  $K$ :

- (A1)  $\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B})$ .
- (A2)  $(\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}))$ .
- (A3)  $(\neg\mathcal{C} \rightarrow \neg\mathcal{B}) \rightarrow ((\neg\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{C})$ .
- (A4)  $(\forall x_i)\mathcal{B}(x_i) \rightarrow \mathcal{B}(t)$  donde  $\mathcal{B}(x_i)$  es una wf de  $K$ ,  $t$  es un término de  $K$  tal que  $t$  está libre de  $x_i$  en  $\mathcal{B}(x_i)$ .
- (A5)  $(\forall x_i)(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow ((\forall x_i)\mathcal{C}))$  donde  $\mathcal{B}$  es una wf de  $K$  que no posee ocurrencias libres de  $x_i$ .

**Axiomas Propios.** Estos no pueden ser especificados, dado que ellos varían de teoría a teoría. Una teoría de primer orden donde no existan axiomas propios es llamada Cálculo de predicados de primer orden.

**Reglas de Inferencia.** Las reglas de inferencia de cualquier teoría de primer orden son:

1. Modus ponens:  $\mathcal{C}$  se sigue de  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ .
2. Gen:  $(\forall x_i)\mathcal{B}$  se sigue de  $\mathcal{B}$ .

**Definición 7.2.** Sea  $K$  una teoría de primer orden en un lenguaje  $\mathcal{L}$ . Por un *modelo* de  $K$  nos referimos a una interpretación de  $\mathcal{L}$ , para la cual todos los axiomas de  $K$  son verdaderos.

Se verifica que para toda fórmula  $\varphi \in K$  y todo modelo  $M$  de  $K$ , si  $\varphi$  admite una prueba lógica en  $K$  entonces  $\varphi$  es verdadero en  $M$ . En este caso, diremos que  $K$  es satisfactible.

### Definición 7.3.

1. Una fórmula  $\varphi$  es denominada *lógicamente válida*, si es válida en toda interpretación  $\mathfrak{M}$ .
2. Una teoría  $K$  es *consistente*, si no existe una wf  $\mathcal{B}$  y su negación  $\neg\mathcal{B}$  ambas demostrables en  $K$ .

3. Una teoría  $K'$  se dice que es una *extensión* de una teoría  $K$ , si todo teorema de  $K$  es un teorema de  $K'$ .
4. Una teoría  $K$  se dice que es *completa* si, para toda wf cerrada  $\mathcal{B}$  de  $K$  ó bien  $\vdash_K \mathcal{B}$  o  $\vdash_K \neg\mathcal{B}$
5. Un *término cerrado* es un término sin variables libres.
6. Una teoría  $K$  es una *teoría scapegoat* si, para cualquier wf  $\mathcal{B}(x)$  que tiene a  $x$  como única variable libre, existe un término  $t$  tal que

$$\vdash_K (\exists x)\neg\mathcal{B}(x) \rightarrow \neg\mathcal{B}(t)$$

La demostración de los siguientes resultados se puede consultar en [3].

**Lema 7.4.** (*Lema de Lindenbaum*). *Si  $K$  es una teoría consistente, entonces existe una extensión consistente y completa de  $K$ .*

El teorema de completitud de Gödel es un importante teorema de la lógica matemática, que fue demostrado por primera vez por Kurt Gödel en 1929 y que en su forma más conocida establece lo siguiente:

**Teorema 7.5.** (*Teorema de Completitud de Gödel*). *En cualquier Cálculo Predicado, los teoremas son precisamente las wfs lógicamente válidas.*

Una fórmula es lógicamente válida si es verdadera en todo modelo para el lenguaje utilizado en la fórmula. Para expresar de manera formal el teorema de completitud de Gödel, se debe recordar el significado de la palabra modelo en este contexto.

**Proposición 7.6.** *Toda teoría consistente  $K$  tiene un modelo numerable.*

**Corolario 7.7.** *Cualquier  $\mathcal{B}$  wf lógicamente válida de una teoría  $K$  es un teorema de  $K$ .*

Como consecuencia de los resultados anteriores, para verificar que una teoría de primer orden  $K$  es consistente, basta demostrar que  $K$  admite un modelo. El siguiente resultado nos garantiza que la existencia de un modelo para  $K$  equivale a la existencia de un modelo para cada uno de sus subconjuntos finitos.

**Definición 7.8.** Una teoría  $K$  de primer orden es *finitamente satisfactible* si para todo  $\Gamma \subseteq K$  subconjunto finito se cumple que  $\Gamma$  es satisfactible.

**Teorema 7.9.** (*Teorema de Compacidad*) *Sea  $\Gamma$  es un conjunto de wfs en un lenguaje de primer orden  $\mathcal{L}$ . Si todo subconjunto finito de  $\Gamma$  tiene un modelo, entonces también lo tiene  $\Gamma$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\Gamma$  no tiene un modelo. Entonces por el teorema de Completitud  $\Gamma$  es inconsistente. Por lo tanto existen pruebas de  $\Gamma \vdash \theta$  y  $\Gamma \vdash \neg\theta$  para alguna sentencia  $\theta$ . Estas pruebas son finitas, por lo que cada una implica un número finito de supuestos de  $\Gamma$ . Poner estos supuestos juntos da un subconjunto finito  $\Delta$  de tal manera que las dos pruebas anteriores son también pruebas de  $\Delta \vdash \theta$  y  $\Delta \vdash \neg\theta$ . Por tanto  $\Delta$  es inconsistente. Por el Teorema de Robustez  $\Delta$  no tiene modelos.  $\square$

## 8. UNA INTERPRETACIÓN TOPOLÓGICA DEL TEOREMA DE COMPACIDAD

Cuando se estudia por primer ocasión el Teorema de Compacidad, hay una pregunta que surge de forma natural: ¿Qué relación existe entre el Teorema de Compacidad y la noción de compacidad en espacios topológicos? En realidad, la relación

es tan estrecha que el Teorema de Compacidad es equivalente a la propiedad de compacidad de ciertos espacios topológicos asociados a Teorías de Primer Orden, como veremos a continuación.

**Definición 8.1.** Si una Teoría  $K$  es consistente y completa, diremos que  $K$  es maximal.

Sea  $\mathbb{M}$  el conjunto de Teorías Maximales. Para cada fórmula  $\varphi$ , definase  $U(\varphi) = \{\mathcal{T} \in \mathbb{M} : \varphi \in \mathcal{T}\}$ . Sea  $\tau$  la topología para  $\mathbb{M}$  que tiene por subbase a  $\{U(\varphi) : \varphi \in FOR\}$ . En realidad, la anterior es base para una topología, pues  $U(\varphi) \cap U(\psi) = U(\varphi \wedge \psi)$ . Más aún, dado que trabajamos con teorías completas se verifica que  $\mathbb{M} \setminus U(\varphi) = U(\neg\varphi)$ , con lo cual  $\mathbb{M}$  es un espacio cero-dimensional.

**Teorema 8.2.**

1. El espacio  $\mathbb{M}$  es Hausdorff y totalmente desconexo.
2. El espacio  $\mathbb{M}$  es compacto si y sólo si toda Teoría  $K$  finitamente satisfactible es satisfactible.

*Demostración.*

1. Sean  $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$  teorías maximales. Entonces existe una fórmula  $\varphi$  tal que  $\varphi \in \mathcal{T}_1$  y  $\neg\varphi \in \mathcal{T}_2$ , es decir,  $\mathcal{T}_1 \in U(\varphi)$  y  $\mathcal{T}_2 \in U(\neg\varphi)$ , donde  $U(\varphi) \cap U(\neg\varphi) = \emptyset$ . De esta forma, cualesquiera dos puntos distintos pertenecen a elementos distintos de una partición de  $\mathbb{M}$  en abiertos ajenos, con lo cual el espacio es totalmente desconexo, además de ser Hausdorff.
2. La propiedad de compacidad se puede verificar a partir de cubiertas de abiertos básicos. Si  $\mathcal{T} = \{\varphi_i : i \in I\}$ , para algún conjunto  $I$  de índices, entonces  $\bigcap_{i \in I} U(\varphi_i) \neq \emptyset$  si y sólo si  $\mathcal{T}$  es satisfactible. Por el Teorema de Compacidad, lo anterior ocurre si y sólo si para todo subconjunto finito  $J \subseteq I$  se verifica que  $\bigcap_{i \in J} U(\varphi_i) \neq \emptyset$ . En consecuencia, el Teorema de Compacidad garantiza la propiedad de la Intersección Finita en  $\mathbb{M}$ , con lo cual se verifica la propiedad. □

**Teorema 8.3.** Sea  $\mathcal{T}$  una teoría, un conjunto de sentencias tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe un modelo finito para  $\mathcal{T}$  con al menos  $n$  elementos. Entonces  $\mathcal{T}$  admite un modelo infinito.

*Demostración.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $\varphi_n = \exists x_1 \cdots \exists x_n : \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j$ . Entonces  $\varphi_n$  se interpreta en una estructura  $X$  como:  $X$  tiene al menos  $n$  elementos. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $\mathcal{T}_n = \mathcal{T} \cup \{\varphi_i : 1 \leq i \leq n\}$ . Finalmente, sea  $\mathcal{T}_\infty = \bigcup \mathcal{T}_n$ . Por hipótesis,  $\mathcal{T}_n$  admite un modelo para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $\mathcal{F}$  subconjunto finito de  $\mathcal{T}_\infty$ . Entonces en particular  $\mathcal{F}$  admite una cantidad finita de fórmulas de la forma  $\varphi_n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}_{n_0}$ . Dado que  $\mathcal{T}_{n_0}$  es satisfactible, también lo es  $\mathcal{F}$ . Por tanto, todo subconjunto finito de  $\mathcal{T}_\infty$  admite un modelo y luego, por el Teorema de Compacidad,  $\mathcal{T}_\infty$  admite un modelo, el cual es un modelo infinito para  $\mathcal{T}$ . □

Generalizando el resultado anterior para cardinales infinitos, se puede demostrar el siguiente resultado.

**Teorema 8.4.** Sea  $\kappa \geq \aleph_0$ . Si  $\mathcal{T}$  es una teoría que admite modelos infinitos numerables, entonces  $\mathcal{T}$  admite un modelo de cardinalidad al menos  $\kappa$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{L}^*$  una extensión del lenguaje  $\mathcal{L}$  al añadir símbolos constantes  $c_\alpha$  para cada  $\alpha < \kappa$ . Para  $\alpha \neq \beta \in \kappa$ , defínase la sentencia  $\varphi_{\alpha,\beta} = c_\alpha \neq c_\beta$  y sea  $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \varphi_{\alpha,\beta} : \alpha < \beta < \kappa$ . Usando un argumento similar a la demostración anterior, dado que  $\mathcal{T}$  admite modelos infinitos numerables, todo subconjunto finito de  $\mathcal{T}^*$  es satisfactible. Por el Teorema de Compacidad,  $\mathcal{T}^*$  es satisfactible y así un modelo para  $\mathcal{T}^*$  es un modelo de  $\mathcal{T}$  de cardinalidad al menos  $\kappa$ .  $\square$

El resultado anterior se puede extender al introducir la noción de submodelos elementales, lo cual no incluiremos en este trabajo, para demostrar que dada una estructura de tamaño arbitrario, es posible encontrar una subestructura de cualquier cardinalidad que contiene toda la información referente a satisfactibilidad de la estructura dada. Los resultados que involucran lo anterior se conocen como los Teoremas de Löwenheim-Skolem. Una consecuencia interesante de lo anterior, por tanto el Teorema de Compacidad es el siguiente:

**Teorema 8.5.** *Sea  $G$  un grupo simple infinito. Entonces para todo cardinal  $\kappa$  tal que  $\aleph_0 \leq \kappa \leq |G|$ , se cumple que  $G$  admite un subgrupo simple de cardinalidad  $\kappa$ .*

#### REFERENCIAS

- [1] E. G. Simpson, *Mathematical Logic*, Department of Mathematics, The Pennsylvania State University, University Park, State Collage PA 16802.
- [2] K. Kunen, *The Foundations of Mathematics*, Volumen 19 de Studies in logic, Edición ilustrada, College Publications, 2009.
- [3] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, CHAPMAN & HALL/CRC, Fourth Edition, 1997.
- [4] H. Rasiowa and R. Sikorski, *The mathematics of methamathematics*, PWN Warszawa, (1970).
- [5] D. van Dalen, *Logic and Structure*, Springer, Fourth Edition, 2004.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
 Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel  
 Puebla, Pue. C.P. 72570  
 arrazola@fcfm.buap.mx, imartinez@fcfm.buap.mx, miguetux@hotmail.com

# CAPÍTULO 12

## UNA INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS CATEGORISTA DE LA LÓGICA

LUIS ESTRADA GONZÁLEZ<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>FACULTAD DE HUMANIDADES, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

<sup>2</sup>DEPARTAMENTO DE FILOSOFÍA, UNIVERSIDAD DE TARTU, ESTONIA

RESUMEN. En este capítulo ofrezco una introducción panorámica al análisis categorista de la lógica. Presento la definición de topos enfatizando su axioma de comprensión y describo su lógica interna para, finalmente, examinar algunas relaciones de la teoría de topos con la teoría de conjuntos en el proyecto de dar una fundamentación conjuntista de la matemática.

### 1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo está pensado como una introducción panorámica al análisis categorista de la lógica que sirva tanto al lógico de orientación matemática como al de orientación filosófica, así como al lector interesado en los fundamentos de la matemática que quiera conocer los rudimentos de la propuesta categorista. Podría decirse, parafraseando a un antiguo profesor, que este texto trata de lo que tiene que saber de teoría de categorías un lógico educado. No se cuenta en español con un texto semejante, mientras que el texto más conocido en inglés, [11], tiene serias deficiencias conceptuales y filosóficas que han sido bien documentadas en [18].

Presupongo que el lector está familiarizado con los elementos de álgebra y teoría del orden, así como que conoce la notación lógica y los rudimentos de lógica clásica e intuicionista. Dicho esto, el plan del capítulo es como sigue. En la segunda sección presento algunas nociones básicas de teoría de categorías necesarias para el resto del capítulo; otras nociones que, aunque necesarias para la exposición pero que no se repiten tan frecuentemente, son definidas en el lugar donde aparecen por primera vez. En la tercera sección defino la noción de topos, enfatizando en el axioma de comprensión, uno de sus componentes principales. En la cuarta sección describo la lógica interna de un topos, incluyendo aspectos modelo-teóricos y de teoría de pruebas. Finalmente, en la quinta sección discuto la relación de la teoría de topos con la teoría de conjuntos y examino algunas cuestiones más generales relacionadas con una fundamentación conjuntista de la matemática.

### 2. NOCIONES BÁSICAS DE TEORÍA DE CATEGORÍAS

Una *categoría*  $\mathbf{C}$  consta de una colección de *objetos* y una de *morfismos* que satisfacen las siguientes condiciones:

---

Dedico este texto a quienes han cuestionado las reglas por mor del avance intelectual y han sufrido por ello, así como a quienes han sido víctimas de fraude. Agradezco a Axel Barceló Aspeitia, Carlos César Jiménez, Ivonne Pallares Vega, Carlos Alberto Romero Castillo y un dictaminador anónimo sus gentiles comentarios a una versión previa de este texto.

*Morfismos:* para todo par  $X, Y$  de objetos en una categoría  $\mathbf{C}$  hay una colección de *morfismos* de  $X$  a  $Y$  en  $\mathbf{C}$ .<sup>1</sup> Cada morfismo  $f$  tiene asociados dos objetos, no necesariamente distintos entre sí, uno de los cuales es llamado “dominio de  $f$ ” y el otro “codominio de  $f$ ”. Lo anterior se denota ‘ $f: X \rightarrow Y$ ’, donde  $X$  es el dominio y  $Y$  el codominio.

*Composición:* para todo par de morfismos  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  tales que el dominio de uno es el codominio del otro, hay un morfismo que es *la composición de  $f$  y  $g$* , denotada ‘ $(g \circ f): X \rightarrow Z$ ’. ‘ $(g \circ f)$ ’ se lee “ $f$  seguida de  $g$ ”, “ $g$  de  $f$ ”, “ $g$  tras  $f$ ” o también “ $g$  (se hace o ejecuta) después de (hacer o ejecutar)  $f$ ”.

*Morfismo identidad:* para todo objeto  $X$  hay un morfismo  $id_X$  (ó  $1_X$ ), llamado “identidad en  $X$ ”, en el que el dominio y el codominio son el mismo ( $X$ ).

La identidad, los morfismos y la composición satisfacen dos axiomas:

*Identidad:* para cualquier morfismo  $f: X \rightarrow Y$  de  $\mathbf{C}$ ,

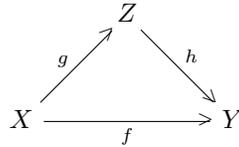
$$(id_Y \circ f) = f \text{ y } (f \circ id_X) = f$$

*Asociatividad:* para cualesquiera morfismos  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  y  $h: Z \rightarrow W$  de  $\mathbf{C}$ ,

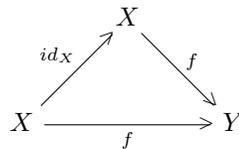
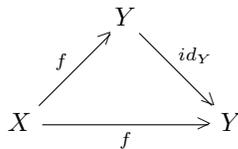
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

En teoría de categorías las nociones de morfismo y composición (de morfismos) y sus propiedades son básicas en la formulación, definición y construcción de otros conceptos matemáticos, a diferencia del proceder en las teorías de conjuntos usuales, en las que la noción de membresía es fundamental.

Una manera alternativa para expresar determinadas igualdades entre morfismos consiste en afirmar que ciertos *diagramas* conmutan, donde un diagrama consiste en cierta organización de flechas (morfismos) y vértices (objetos) en una categoría dada. Se dice que un diagrama *conmuta* si para cada par  $X, Y$  de objetos en una categoría dada  $\mathbf{C}$ , cualquier morfismo en  $\mathbf{C}$  de  $X$  a  $Y$  es representada como el mismo morfismo en  $\mathbf{C}$ . Por ejemplo, supongamos que  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: X \rightarrow Z$  y  $h: Z \rightarrow Y$  son morfismos en una categoría dada  $\mathbf{C}$  cuyo diagrama es el siguiente:



Decir que el diagrama conmuta significa que  $h \circ g = f$ ; este tipo de igualdades serán importantes en otras construcciones. Un ejemplo de diagramas conmutativos lo dan los axiomas para los morfismos identidad,  $(id_Y \circ f) = f$  y  $(f \circ id_X) = f$ , representados a continuación mediante diagramas conmutativos:



<sup>1</sup>El subíndice ‘ $\mathbf{C}$ ’ indica de qué categoría se trata y puede omitirse si el contexto permite saber cuál es.

El lector haría bien en dibujar, cuando corresponda, los diagramas conmutativos de las nociones definidas a continuación.

Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  en una categoría  $\mathbf{C}$  se llama *isomorfismo* si hay un morfismo  $g: Y \rightarrow X$  en  $\mathbf{C}$  tal que  $g \circ f = id_X$  y  $f \circ g = id_Y$ . Dos objetos en una categoría son *isomorfos* si hay por lo menos un isomorfismo entre ellos.

Sea  $\mathbf{C}$  una categoría dada. Un objeto  $Y$  de  $\mathbf{C}$  es un *objeto terminal* si para cada objeto  $X$  de  $\mathbf{C}$  hay exactamente un morfismo  $f: X \rightarrow Y$ . Un objeto  $W$  de  $\mathbf{C}$  es un *objeto inicial* si para cualquier objeto  $Z$  hay un único morfismo  $f: W \rightarrow Z$ . Un objeto terminal (inicial) es único salvo isomorfismo. Por ello un objeto terminal suele denotarse ' $\mathbf{1}$ ' y el único morfismo de un objeto  $X$  a un objeto terminal se denota ' $!_X$ '. Un objeto inicial suele denotarse ' $\mathbf{0}$ ' y único morfismo de un objeto  $X$  a un objeto inicial se denota ' $0_X$ '.

Sean  $X$  y  $Y$  objetos de una categoría dada  $\mathbf{C}$ . Se denomina *elemento de  $X$*  a cualquier morfismo  $a: \mathbf{1} \rightarrow X$  y *elemento generalizado de  $X$*  a cualquier morfismo  $y: Y \rightarrow X$ . Si  $g: X \rightarrow Y$  y  $h: X \rightarrow Y$  son morfismos en una categoría dada, la igualdad  $g = h$  implica que, para todo elemento generalizado  $x$  de  $X$ ,  $g \circ x = h \circ x$ .

Sea  $m: M \rightarrow X$  un morfismo de una categoría dada  $\mathbf{C}$ . Se dice que  $m$  es un *monomorfismo en  $\mathbf{C}$*  si para cualquier par de morfismos  $s_1$  y  $s_2$  de un objeto  $Y$  a  $M$ ,  $m \circ s_1 = m \circ s_2$  implica que  $s_1 = s_2$ . De manera contrapositiva, un morfismo  $m: M \rightarrow X$  es un monomorfismo si  $s_1 \neq s_2$  implica que  $m \circ s_1 \neq m \circ s_2$ . Los monomorfismos suelen representarse con una flecha especial:  $M \rightarrow X$ . Sean  $S$  y  $Z$  dos objetos de una categoría dada.

Si  $m_1$  y  $m_2$  son monomorfismos de una categoría  $\mathbf{C}$ , ' $m_1 \leq m_2$ ' indica que  $m_1 = m_2 \circ u$ , donde  $u$  es un (único) morfismo en  $\mathbf{C}$ . La relación  $\leq$  entre monomorfismos es claramente un preorden.  $m_1$  y  $m_2$  son *equivalentes* (denotado ' $m_1 \simeq m_2$ ') si  $m_1 \leq m_2$  y  $m_2 \leq m_1$ , esto es, si  $m_1 = m_2 \circ u$  para algún isomorfismo  $u$  en  $\mathbf{C}$ .  $\simeq$  es claramente una relación de equivalencia.

Un *subobjeto  $s$  de  $Z$  (con forma  $S$ )* es (una clase de equivalencia con respecto a  $\simeq$  de) un monomorfismo  $s$  de  $S$  a  $Z$ . Por tanto, un subobjeto  $s$  de  $Z$  con forma  $S$  preserva la distinción de elementos (generalizados) de  $S$ , como indica la versión contrapositiva de la definición de monomorfismo.

Sea  $O$  un objeto de una categoría dada  $\mathbf{C}$  y sean  $s: S \rightarrow O$  un subobjeto de  $O$  (de forma  $S$ ) y  $x: X \rightarrow O$  un elemento (generalizado) de  $O$ . Se dice que  $x$  *está en*, *o es miembro de*, *el subobjeto  $s$* , simbolizado como ' $x \in s$ ' si hay algún morfismo  $h: X \rightarrow S$  en  $\mathbf{C}$  tal que  $x = s \circ h$ . Dados dos subobjetos de  $O$ ,  $s: S \rightarrow O$  y  $t: T \rightarrow O$ , se dice que  $s$  *es anterior (menor) o igual a  $t$* , simbolizado ' $s \leq t$ ', si hay algún morfismo  $f: S \rightarrow T$  de  $\mathbf{C}$  tal que  $s = t \circ f$ .  $s$  es *estrictamente menor* que  $t$  si tal  $f$  es único.

Sean  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: X \rightarrow Y$  morfismos de una categoría dada  $\mathbf{C}$ . Un *igualador* en  $\mathbf{C}$  para  $f$  y  $g$  está dado por un objeto  $W$  y un morfismo  $i: W \rightarrow X$  de  $\mathbf{C}$  con las siguientes dos propiedades: (1)  $f \circ i = g \circ i$ ; y (2) para cualquier morfismo dado  $h: Z \rightarrow X$  de  $\mathbf{C}$ , si  $f \circ h = g \circ h$  entonces hay exactamente un morfismo en  $\mathbf{C}$   $k: Z \rightarrow W$  para el cual  $h = i \circ k$ .

Un objeto  $X \times Y$  de una categoría  $\mathbf{C}$  junto con un par de morfismos  $p_1: X \times Y \rightarrow X$  y  $p_2: X \times Y \rightarrow Y$  es un *producto (binario)* para  $X$  y  $Y$  si para cada  $\mathbf{C}$ -objeto  $W$  y cada par de morfismos  $f_1: W \rightarrow X$  y  $f_2: W \rightarrow Y$  hay exactamente un morfismo  $f: W \rightarrow X \times Y$  para el cual se cumple que  $f_1 = p_1 \circ f$  y  $f_2 = p_2 \circ f$ . Los morfismos  $p_1$  y  $p_2$  se llaman "morfismos proyección" (primera y

segunda proyección, respectivamente). El morfismo  $f: W \rightarrow X \times Y$  también suele denotarse como  $\langle f_1, f_2 \rangle: W \rightarrow X \times Y$ .

Considérese ahora un par de objetos  $X$  y  $Y$  cualesquiera de una categoría dada  $\mathbf{C}$ . Un *coproducto para  $X$  y  $Y$*  en  $\mathbf{C}$  está dado por un objeto  $X + Y$  y dos morfismos  $i_1: X \rightarrow X + Y$  y  $i_2: Y \rightarrow X + Y$  de  $\mathbf{C}$  con la siguiente propiedad: para cualquier objeto  $W$  y cualquier par de morfismos  $f: X \rightarrow W$  y  $g: Y \rightarrow W$  de  $\mathbf{C}$ , hay exactamente un morfismo  $h: X + Y \rightarrow W$  que satisface  $h \circ i_1 = f$  y  $h \circ i_2 = g$ . El morfismo  $h$  también suele denotarse  $\langle g, f \rangle: X + Y \rightarrow W$ .

Sean  $W, X, Y$  y  $Z$  objetos de una categoría y  $f: W \rightarrow Y$  y  $g: X \rightarrow Z$  dos morfismos en dicha categoría. El *producto de los morfismos  $f$  y  $g$*  es el único morfismo  $f \times g: W \times X \rightarrow Y \times Z$  que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc}
 & W & \xrightarrow{f} & Y \\
 & \nearrow p_W & & \nwarrow p_Y \\
 W \times X & \xrightarrow{f \times g} & & Y \times Z \\
 & \searrow p_X & & \swarrow p_Z \\
 & X & \xrightarrow{g} & Z
 \end{array}$$

i.e.  $f \times g = \langle f \circ p_W, g \circ p_X \rangle$ .

Dados dos objetos  $X$  y  $Y$  en una categoría  $\mathbf{C}$ , un *exponencial de  $Y$  por  $X$*  consiste en un objeto  $Y^X$  y un morfismo  $ev_{X,Y}: Y^X \times X \rightarrow Y$  tal que para cada objeto  $Z$  y morfismo  $g: Z \times X \rightarrow Y$  hay un único morfismo  $\bar{g}: Z \rightarrow Y^X$  tal que  $g = ev_{X,Y} \circ \bar{g} \times X$ .

Se dice que una categoría dada “tiene productos (coproductos, exponenciales)” si hay un producto (coproducto, exponencial) para cualesquiera dos objetos de esa categoría. Los productos, coproductos y exponenciales para dos objetos dados también son únicos salvo isomorfismo.

Veamos a continuación cómo definir nociones lógicas en términos categoristas, esto es, usando usando las propiedades de los morfismos y sus composiciones.

### 3. LA NOCIÓN DE TOPOS

Las categorías que me interesan son los topos. Después daré una definición más precisa, pero por el momento piénsese en un objeto  $O$  de un topos como un tipo, colección de cosas o conjunto generalizado -los  $O$ s.<sup>2</sup> Así, un objeto  $O$  es el objeto de los  $o$ . El modo básico de obtener una lógica en un topos es a través de una noción generalizada de comprensión de subobjetos por “propiedades”. Las propiedades son *locales*, es decir, toda propiedad tiene un dominio de significación fijo porque una propiedad siempre es la propiedad de los  $o$ s de algún  $O$  en alguna categoría  $\mathbf{C}$ . Las propiedades son además *proposiciones variables*: si  $\varphi$  es una propiedad con dominio de significación  $O$  y  $a$  es un elemento constante de tipo  $O$ ,  $\varphi(a)$  es una proposición. De este modo, llamaré *función proposicional en  $O$*  a una propiedad con dominio de significación  $O$ . Toda función debe tener un codominio, así que un topos incluirá un objeto  $\Omega$  de *proposiciones* o *valores de*

<sup>2</sup>En esta elucidación de la noción de topos en términos lógicos sigo muy de cerca la exposición en [1].

*verdad* (que es único en el topos, salvo isomorfismo). Sus elementos  $p: \mathbf{1} \rightarrow \Omega$  son proposiciones y sus elementos generalizados  $\varphi: O \rightarrow \Omega$  son proposiciones variables y por tanto funciones proposicionales. Si la proposición  $p$  se descompone como  $p = \varphi(a) = \varphi \circ a: \mathbf{1} \rightarrow O \rightarrow \Omega$ , entonces  $p$  resulta de evaluar la función proposicional  $\varphi$  para el elemento  $a$  de  $O$ .

Asumiré que hay una proposición *verdadero*:  $\mathbf{1} \rightarrow \Omega$ . Entonces, para cualquier objeto  $O$  en un topos, la composición  $\text{verdadero}_O!_O: O \rightarrow \mathbf{1} \rightarrow \Omega$  denota una función proposicional constante en  $O$ , cuyo valor es verdadero, que representaré con '*verdadero* <sub>$O$</sub> '. Las funciones proposicionales especifican subobjetos del siguiente modo. Dada una función proposicional  $\varphi: O \rightarrow \Omega$ , la parte de los  $os$  para los cuales  $\varphi$  es verdadera se obtiene como un igualador de  $\varphi$  y *verdadero* <sub>$O$</sub> . Tal igualador es un subobjeto  $s: S \rightarrow O$  que será llamado *extensión* de la función proposicional  $\varphi$ . El morfismo *verdadero* recibe así el nombre de *clasificador de subobjetos*. De manera más formal, un clasificador de subobjetos para una categoría con objeto terminal e igualadores se define como un morfismo *verdadero*:  $\mathbf{1} \rightarrow \Omega$  tal que satisface el siguiente

**Axioma de comprensión:** para cada función proposicional  $\varphi: O \rightarrow \Omega$ , hay un igualador de  $\varphi$  y *verdadero* <sub>$O$</sub>  y cada monomorfismo  $s: S \rightarrow O$  es dicho igualador para una única  $\varphi$ .

De este modo, las propiedades que estudiaremos son del tipo "estar contenido en un subobjeto  $m$  de un objeto  $O$  (en cierta categoría  $\mathbf{C}$ )". Un topos se define entonces como una categoría con igualadores, coigualadores, productos (binarios), coproductos, exponenciales y un clasificador de subobjetos.

La conexión de estas definiciones con las nociones lógicas tradicionales es menos misteriosa de lo que parece a simple vista. Considérese el diagrama en la definición de igualador:

$$\begin{array}{ccccc} W & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow k & \uparrow j & \xrightarrow{g} & \\ & & Z & & \end{array}$$

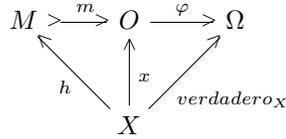
Como caso particular, para el axioma de comprensión se tiene:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{m} & O & \xrightarrow{\varphi} & \Omega \\ & \searrow h & \uparrow x & \xrightarrow{\text{verdadero}_O} & \\ & & X & & \end{array}$$

El único morfismo de  $X$  a  $\Omega$  que hace que este diagrama conmute es *verdadero* <sub>$X$</sub> :

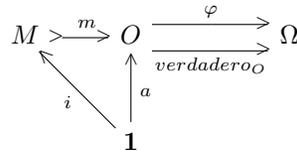
$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{m} & O & \xrightarrow{\varphi} & \Omega \\ & \searrow h & \uparrow x & \xrightarrow{\text{verdadero}_O} & \\ & & X & \xrightarrow{\text{verdadero}_X} & \end{array}$$

Y así se tiene el siguiente diagrama:

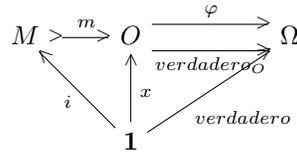


Nótese que, según la definición de igualador,  $h$  debe ser el único morfismo que, entre otras cosas,  $x = m \circ h$ . Pero con esto se satisface la definición de  $x \in m$ . De este modo, lo que dice el axioma de comprensión es que  $\varphi(x) = \text{verdadero}_X$  (por el triángulo conmutativo de la derecha) si y sólo si  $x \in m$  (por el triángulo conmutativo de la izquierda).

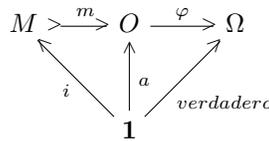
Esto es todavía más perspicuo cuando  $X$  es un terminal,  $\mathbf{1}$ :



El único morfismo de  $\mathbf{1}$  a  $\Omega$  que hace que este diagrama conmute es *verdadero*:



Y así se tiene el siguiente diagrama:



Como este diagrama conmuta, lo que está expresado en él es que  $\varphi(a) = \text{verdadero}$  (por el triángulo conmutativo de la derecha) si y sólo si  $a \in m$  (por el triángulo conmutativo de la izquierda).

#### 4. LA LÓGICA INTERNA DE UN TOPOS

El axioma de comprensión permite definir otras nociones lógicas, por ejemplo, el morfismo *falso* y las conectivas usuales (negación,  $\neg$ ; conjunción,  $\wedge$ ; disyunción,  $\vee$ ; condicional,  $\Rightarrow$ ; cuantificador universal,  $\forall$ ; cuantificador particular,  $\exists$ ). En un

topos, un morfismo  $k : (\Omega \times \dots \times \Omega)^{\Omega^{\dots \Omega^x}} \rightarrow \Omega$  (con  $\Omega \times \dots \times \Omega$   $n$  veces y  $\Omega^{\dots \Omega^x}$   $t$  veces,  $n, t \geq 0$ ),  $k : \Omega^{n_m} \rightarrow \Omega$  para abreviar, es una *conectiva  $n$ -aria* de orden  $m$ ,

donde  $m = 0$  si y sólo si  $\Omega^{\dots \Omega^x} \cong \mathbf{1}$  y en cualquier otro caso  $m = (t + 1)$ .<sup>3</sup> Por razones de concisión omitiré los detalles de las definiciones de las conectivas en un

<sup>3</sup>Las proposiciones, esto es, los morfismos  $\mathbf{1} \rightarrow \Omega$ , pueden considerarse conectivas 0-arias (y pueden ser de cualquier orden) con  $(\Omega \times \dots \times \Omega) \cong \mathbf{1}$ .

topos; los ejemplos de *falso* y la conjunción servirán para ilustrar la idea general tras esas definiciones.

*falso* se define como el morfismo tal que  $0_1$ , el único morfismo de  $\mathbf{0}$  a  $\mathbf{1}$ , iguala *falso* y *verdadero*:

$$\mathbf{0} \xrightarrow{0_1} \mathbf{1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{falso} =_{def.} \varphi_{0_1}} \\ \xrightarrow{\text{verdadero}_1} \end{array} \Omega$$

El diagrama conmutativo completo para este igualador luce como sigue:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \xrightarrow{0_1} & \mathbf{1} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{falso}} \\ \xrightarrow{\text{verdadero}_1} \end{array} & \Omega \\ & \searrow l & \uparrow !_X & & \\ & & X & & \end{array}$$

El único morfismo de  $X$  a  $\Omega$  que hace que este diagrama conmute es  $\text{verdadero}_X$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \xrightarrow{0_1} & \mathbf{1} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{falso}} \\ \xrightarrow{\text{verdadero}_1} \end{array} & \Omega \\ & \searrow l & \uparrow !_X & \nearrow \text{verdadero}_X & \\ & & X & & \end{array}$$

Y así se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \xrightarrow{0_1} & \mathbf{1} & \xrightarrow{\text{falso}} & \Omega \\ & \searrow h & \uparrow !_X & \nearrow \text{verdadero}_X & \\ & & X & & \end{array}$$

Lo que expresa este diagrama conmutativo es que  $\text{falso} = \text{verdadero}_X$  (por el triángulo conmutativo de la derecha) si y sólo si  $\mathbf{0}$  tiene un elemento generalizado (por el triángulo conmutativo de la izquierda). Nótese que esto se obtendría al menos una vez, a saber, considerando el elemento maximal de  $\mathbf{0}$ :  $\mathbf{0}$  mismo. Pero esto no cuenta todavía como un caso en el que haya un elemento propio de  $\mathbf{0}$  que iguale *falso* y *verdadero*. ¿Hay tal caso?

Supóngase que  $X$  es un terminal,  $\mathbf{1}$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \xrightarrow{0_1} & \mathbf{1} & \xrightarrow{\text{falso}} & \Omega \\ & \searrow \gamma & \uparrow id_1 & \nearrow & \\ & & \mathbf{1} & & \end{array}$$

El único morfismo de  $\mathbf{1}$  a  $\Omega$  que hace que este diagrama conmute es *verdadero* y así se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{0} & \xrightarrow{0_1} & \mathbf{1} & \xrightarrow{\text{falso}} & \Omega \\
 & \searrow \gamma & \uparrow \text{id}_1 & \nearrow \text{verdadero} & \\
 & & \mathbf{1} & & 
 \end{array}$$

Dado que este diagrama conmuta, lo que expresa es que  $\text{falso} = \text{verdadero}$  (por el triángulo conmutativo de la derecha) si y sólo si  $\mathbf{0}$  tiene al menos un elemento (por el triángulo conmutativo de la izquierda). Pero si  $\mathbf{0}$  tiene otro elemento además del elemento generalizado maximal (la identidad en  $\mathbf{0}$ ) entonces todos los objetos de la categoría son isomorfos de modo que, para todo propósito matemático, es como si hubiera sólo un objeto (y un solo morfismo) en la categoría, así que a final de cuentas en realidad ese elemento de  $\mathbf{0}$  tiene que ser él mismo. Una *categoría degenerada* se define precisamente como una categoría en la que todos los objetos son isomorfos y sólo en esas categorías se tendría que  $\text{falso} = \text{verdadero}$ . Ahora, si  $\mathbf{0}$  no tiene elementos, no todos los elementos de la categoría son isomorfos y en ese caso tenemos tres opciones:  $\text{falso} < \text{verdadero}$ ,  $\text{verdadero} < \text{falso}$  ó  $\text{falso}$  y  $\text{verdadero}$  son incomparables. Pero no son incomparables ya que  $\text{verdadero}$  es el mayor elemento en el orden formado por las proposiciones. Esto también excluye que  $\text{verdadero} < \text{falso}$ . Entonces la única opción para una categoría no degenerada es lo usual, que  $\text{falso} < \text{verdadero}$ , lo que implica que  $\text{falso} \neq \text{verdadero}$ .

La conjunción se define como un morfismo  $\wedge : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$  tal que  $\langle \text{verdadero}, \text{verdadero} \rangle : \mathbf{1} \rightarrow \Omega \times \Omega$  es el igualador de  $\wedge$  y  $\text{verdadero}_{\Omega \times \Omega}$ . El diagrama correspondiente

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{\langle \text{verdadero}, \text{verdadero} \rangle} & \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \\
 & \searrow \text{id}_1 & \uparrow \langle p, q \rangle & \xrightarrow{\text{verdadero}_{\Omega \times \Omega}} & \\
 & & \mathbf{1} & & 
 \end{array}$$

expresa que  $\wedge \circ \langle p, q \rangle$  (más comúnmente escrito  $p \wedge q$ ) es el mismo morfismo que  $\text{verdadero}$  si y sólo si  $p = \text{verdadero}$  y  $q = \text{verdadero}$ . De hecho, las condiciones de conmutatividad de este diagrama implican más, a saber, que  $p \wedge q$  es el ínfimo de los conyuntos con respecto a cierto orden que forman las proposiciones. El resto de las conectivas reciben caracterizaciones análogas:

- La negación es un morfismo  $\neg : \Omega \rightarrow \Omega$  tal que  $\text{falso} : \mathbf{1} \rightarrow \Omega \times \Omega$  es el igualador de  $\neg$  y  $\text{verdadero}_{\Omega}$ .
- La disyunción es un morfismo  $\vee : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$  tal que la imagen de  $[\langle \text{verdadero}, \text{id}_{\Omega} \rangle, \langle \text{id}_{\Omega}, \text{verdadero} \rangle] : \mathbf{1} \rightarrow \Omega \times \Omega$  es el igualador de  $\vee$  y  $\text{verdadero}_{\Omega \times \Omega}$ .<sup>4</sup>
- El condicional es un morfismo  $\Rightarrow : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$  tal que  $e \leq : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega \times \Omega$  es el igualador de  $\Rightarrow$  y  $\text{verdadero}_{\Omega \times \Omega}$ , donde a su vez  $e$  es el igualador de  $\wedge$  y la primera proyección.

<sup>4</sup>La *imagen* de un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  en una categoría  $\mathbf{C}$ , denotada ' $\text{Im}(f : X \rightarrow Y)$ ', se define como un monomorfismo  $h : I \rightarrow Y$  que cumple las siguientes dos condiciones: (1) hay un morfismo  $g : X \rightarrow I$  tal que  $f = h \circ g$ ; (2) para cualquier objeto  $W$  y morfismos  $k : X \rightarrow W$  y  $l : W \rightarrow Y$  tales que  $f = l \circ k$ , hay un único morfismo  $m : I \rightarrow W$  tal que  $k = m \circ g$  y  $h = l \circ m$ .

- El cuantificador universal es un morfismo  $\forall_X : \Omega^X \rightarrow \Omega$  tal que  $\lambda_x \cdot \text{verdadero}_X$  es el igualador de  $\forall_X$  y  $\text{verdadero}_{\Omega^X}$ .<sup>5</sup>
- El cuantificador particular es un morfismo  $\exists_X : \Omega^X \rightarrow \Omega$  tal que  $\text{Im}(p_X \circ \epsilon_X)$  es el igualador de  $\exists_X$  y  $\text{verdadero}_{\Omega^X}$ .

Dado que un topos es una categoría con exponenciales, para cualquier  $X$  del topos uno tiene  $\Omega^X$ ,  $\Omega^{\Omega^X}$ , etc., objetos que pueden fungir como colecciones de propiedades, colecciones de colecciones de propiedades, etcétera, definidas sobre  $X$ , de modo que uno puede tener proposiciones de orden superior.

Hay una correspondencia entre la lógica clásica y un álgebra booleana, a saber, dicha lógica es un álgebra con dos elementos en la que las operaciones satisfacen ciertas condiciones. Esos dos elementos son los valores de verdad, las operaciones son las conectivas y las condiciones que satisfacen están determinadas por las conocidas tablas de verdad. Una correspondencia similar puede establecerse para la lógica interna de un topos  $\mathcal{E}$ ; en este caso el álgebra correspondiente es aquella inducida por  $\Omega$  y las conectivas. Dicho de otro modo, la lógica interna de un topos es el álgebra de sus proposiciones. Esta lógica se denomina *interna*, y es la adecuada para razonar acerca de los objetos del topos en cuestión, porque está determinada por la definición de esos objetos y sus conexiones y se formula en esos términos; no es un canon de estudio impuesto “externamente”. Usar otra lógica podría alterar las propiedades definitorias de esos objetos y, en ese caso, ya no sería una lógica para los objetos considerados inicialmente.

Hay un teorema que establece condiciones necesarias y suficientes para que una proposición  $p$  sea el mismo morfismo que *verdadero* en un topos  $\mathcal{E}$ . Si ‘ $p \Vdash_{\mathcal{E}} q$ ’ denota que si el morfismo  $p$  es el mismo morfismo que *verdadero* entonces también  $q$  lo es (‘ $\Vdash_{\mathcal{E}} p$ ’ implica que en  $\mathcal{E}$   $p = \text{verdadero}$ ), y si  $\Vdash_I$  es la relación de consecuencia lógica intuicionista entonces se obtiene el siguiente teorema:

**Teorema 4.1.** *Para toda proposición  $p$ ,  $\Vdash_{\mathcal{E}} p$  para todo topos  $\mathcal{E}$  si y sólo si  $\Vdash_I p$ .*

Es decir, en general  $\Omega$  es un álgebra de Heyting.<sup>6</sup>

Diferentes topos pueden tener diferentes lógicas internas (aunque por el teorema anterior en todos valen por lo menos las leyes intuicionistas). Ya que las definiciones de las nociones lógicas son las mismas para todo topos, la diferencia en las lógicas internas se debe a las características propias de los objetos de cada topos.<sup>7</sup> Por ejemplo, no es difícil mostrar que la lógica interna de la categoría **Conjuntos**, donde  $\Omega$  sólo tiene dos elementos, es clásica. Un ejemplo de un topos cuya lógica interna no es clásica es la categoría de multigráficas dirigidas irreflexivas,  $S^{\downarrow}$ .<sup>8</sup> Un objeto de  $S^{\downarrow}$  es cualquier par de conjuntos  $F$  y  $V$  con un par de funciones  $s : F \rightarrow V$  y  $t : F \rightarrow V$ , donde  $F$  es un conjunto de “flechas” y  $V$  un conjunto de “vértices”. Si  $x$  es un elemento de  $F$ , una flecha,  $s(x)$  es su vértice de “salida” u “origen”, mientras que  $t(x)$  es su vértice de llegada. Un morfismo en  $S^{\downarrow}$  es un mapeo  $f$  que preserva las relaciones de salida y llegada entre gráficas.

<sup>5</sup>La *adjunción producto/exponencial* dice que a cada morfismo  $f : X \times Y \rightarrow Z$  le corresponde un morfismo  $\lambda_x \cdot f : X \rightarrow Z^Y$ , el nombre de  $f$ .

<sup>6</sup>Una prueba puede encontrarse en [11, § 8.3 (la parte de corrección) y § 10.6 (la parte de completación)].

<sup>7</sup>Para una discusión más detallada véase [9].

<sup>8</sup>Omitiremos la prueba de que  $S^{\downarrow}$  es un topos. Para una breve pero cuidadosa exposición de algunas características de esta categoría véase [24] o [16, 141ss y 338ss (pp. 155ss y 377ss de la edición en castellano)].

$\Omega_{S^{\downarrow\downarrow}}$  tiene tres elementos, es decir, hay tres diferentes morfismos  $\mathbf{1} \rightarrow \Omega_{S^{\downarrow\downarrow}}$  a los que llamaremos *verdadero* $_{S^{\downarrow\downarrow}}$ , *falso* $_{S^{\downarrow\downarrow}}$  y  $\mu_{S^{\downarrow\downarrow}}$  (un valor intermedio) con el orden  $falso_{S^{\downarrow\downarrow}} < \mu_{S^{\downarrow\downarrow}} < verdadero_{S^{\downarrow\downarrow}}$ . El morfismo negación en esta categoría da las siguientes igualdades de morfismos:

$$\neg verdadero_{S^{\downarrow\downarrow}} = \neg \mu_{S^{\downarrow\downarrow}} = falso_{S^{\downarrow\downarrow}} \quad \neg falso_{S^{\downarrow\downarrow}} = verdadero_{S^{\downarrow\downarrow}}$$

En la categoría  $S^{\downarrow\downarrow}$ , cuando  $p = \mu_{S^{\downarrow\downarrow}}$ , se tiene que  $\neg \circ \neg \circ p \neq p$ , pues  $\neg \mu_{S^{\downarrow\downarrow}} = falso_{S^{\downarrow\downarrow}}$  y por tanto  $\neg \neg \mu_{S^{\downarrow\downarrow}} = \neg falso_{S^{\downarrow\downarrow}} = verdadero_{S^{\downarrow\downarrow}} \neq \mu_{S^{\downarrow\downarrow}}$ . También se puede demostrar que  $p \vee \neg p$  no es una proposición válida en la lógica interna de  $S^{\downarrow\downarrow}$ . Para que la composición  $\vee \circ \langle p, \neg p \rangle$  sea igual al morfismo *verdadero* es necesario que alguna de las proposiciones  $p$  ó  $\neg p$  sea igual a *verdadero*. Si  $p = \mu_{S^{\downarrow\downarrow}}$  entonces  $\neg p = falso_{S^{\downarrow\downarrow}}$ . Como ninguna de esas proposiciones es igual a *verdadero* $_{S^{\downarrow\downarrow}}$  entonces la composición  $\vee \circ \langle p, \neg p \rangle$  tampoco es igual a *verdadero* $_{S^{\downarrow\downarrow}}$ . En resumen,  $\Omega_{S^{\downarrow\downarrow}}$  no es un álgebra booleana y la lógica interna de  $S^{\downarrow\downarrow}$  no es clásica.

Cabe mencionar que la lógica interna de un topos no tiene que ser sólo o intuicionista o clásica, también puede ser una lógica intermedia. Una lógica intermedia es una lógica que añade axiomas a la lógica intuicionista pero sin que la lógica resultante colapse en la lógica clásica. Una de las lógicas intermedias más conocida es la lógica de Dummett, que agrega a la lógica intuicionista el axioma  $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$ ; ésta es la lógica interna de cualquier topos **Conjuntos**<sup>P</sup>, categorías de funtores de un preorden linealmente ordenado **P** (por ejemplo  $\omega$ ,  $\mathbb{Q}$  ó  $\mathbb{R}$ ) a **Conjuntos** (cfr. [11, § 10.6]).<sup>9</sup>

A continuación presento algunas características que tiene la lógica interna de un topos:

(LI1) Las proposiciones forman un orden parcial, i. e. para cualesquiera proposiciones  $p$ ,  $q$  y  $r$ :

(LI1a)  $p \leq p$

(LI1b) Si  $p \leq q$  y  $q \leq p$  entonces  $p = q$

(LI1c) Si  $p \leq q$  y  $q \leq r$  entonces  $p \leq r$

(LI2) Hay una proposición llamada *verdadero* con la siguiente propiedad:

$$\text{Para toda proposición } p, p \leq \textit{verdadero}$$

(LI3) Puede definirse una proposición llamada *falso* que tiene la siguiente propiedad:

$$\textit{falso} \leq \textit{verdadero}$$

(LI4) De (LI2) y (LI3) uno puede obtener

$$\text{Para toda proposición } p, \textit{falso} \leq p$$

(LI5) Las conectivas tienen las siguientes condiciones de verdad:

$\neg p = \textit{verdadero}$  si y sólo si  $p = \textit{falso}$ , de otro modo  $\neg p = \textit{falso}$

$(p \wedge q) = \inf(p, q)$

$(p \vee q) = \sup(p, q)$

$(p \Rightarrow q) = \textit{verdadero}$  si y sólo si  $p \leq q$ , de otro modo  $(p \Rightarrow q) = q$

$(\forall_X . p) = \inf(x \in X : p)$

$(\exists_X . p) = \sup(x \in X : p)$

(LI6) El análisis categorista no implica, sino más bien asume, una noción tradicional de consecuencia lógica, la “tarskiana”: ‘ $p \Vdash_{\mathcal{E}} q$ ’ denotará que  $q$  es *consecuencia*

<sup>9</sup>Un *functor* es un mapeo entre categorías tal que a cada objeto de la categoría dominio le asocia uno de la categoría codominio y lo mismo para los morfismos siempre y cuando se preserven los morfismos identidad y la composición de morfismos.

*lógica* de  $p$  en un topos  $\mathcal{E}$ , es decir, que si en  $\mathcal{E}$   $p$  es el mismo morfismo que *verdadero*,  $q$  también lo es.  $\Vdash_{\mathcal{E}} p$  significa que, en  $\mathcal{E}$ ,  $p$  es el mismo morfismo que *verdadero*.

La lógica interna de un topos también puede caracterizarse mediante reglas de inferencia (véase [19, capítulo 15]). Un *secuente* es una expresión  $\Gamma : p$ , donde  $\Gamma$  es un conjunto finito (posiblemente vacío) de fórmulas y  $p$  es una fórmula. Un secuente es *verdadero* si y sólo si  $p$  es consecuencia de  $\Gamma$ . Cuando un secuente  $\Gamma : p$  es verdadero se escribe

$$\Gamma \vdash p$$

(por ejemplo, se tiene  $\neg\neg p \vdash p$  en lógica clásica pero no en la intuicionista, y se tiene  $p, \neg p \vdash q$  tanto en la lógica clásica como intuicionista, pero no en una paraconsistente).

Primero están las *reglas estructurales*. De los secuentes sobre la línea puede inferirse el que está abajo. El asterisco indica que el secuente de abajo se sigue de un conjunto vacío de premisas:

$$\text{Secuente trivial: } \frac{*}{p : p}$$

$$\text{verdadero y falso: } \frac{*}{: \textit{verdadero}} \quad \frac{*}{\textit{falso} : p}$$

$$\text{Debilitamiento: } \frac{\Gamma : p}{\Gamma, q : p}$$

Para cualquier término  $s$  libre por  $x$  en todas las fórmulas:

$$\text{Sustitución: } \frac{\Gamma : p}{\Gamma(x/s) : p(x/s)}$$

Si toda variable libre en  $q$  es libre en  $\Gamma$  o en  $p$ :

$$\text{Corte: } \frac{\Gamma, q : p \quad \text{y} \quad \Gamma : q}{\Gamma : p}$$

Hay una *regla para conectiva* reversible para cada conectiva. De los secuentes sobre la doble línea se puede inferir el de abajo y del de abajo puede inferirse cualquiera de los de arriba:

$$\frac{\Gamma, p : \textit{falso}}{\Gamma : \neg p} \qquad \frac{\Gamma : p \quad \text{y} \quad \Gamma : q}{\Gamma : p \wedge q}$$

$$\frac{\Gamma, p : \theta \quad \text{y} \quad \Gamma, q : \theta}{\Gamma, p \vee q : \theta} \qquad \frac{\Gamma, p : q}{\Gamma : p \Rightarrow q}$$

y, si la variable  $x$  no es libre en  $\Gamma$  ó  $q$ :

$$\frac{\Gamma : p}{\Gamma : (\forall x)p} \qquad \frac{\Gamma, p : q}{\Gamma, (\exists x)p : q}$$

## 5. TEORÍA CATEGORISTA DE CONJUNTOS

Un topos es equiconsistente con *BZ* (“Bounded Zermelo”) *menos Infinito*, una teoría de conjuntos cuyos axiomas son<sup>10</sup>:

**Extensionalidad:** si los conjuntos  $x$  y  $y$  tienen los mismos miembros entonces son el mismo conjunto.

**Conjunto vacío:** hay un conjunto vacío, es decir, un conjunto sin miembros.

**Pares:** dados cualesquiera conjuntos  $x$  y  $y$ , hay un conjunto par cuyos únicos miembros son  $x$  y  $y$ .

**Uniones:** para todo conjunto  $x$  hay un conjunto  $y$  cuyos miembros son todos los miembros de todos los miembros de  $x$ .

**Conjunto potencia:** para cualquier conjunto  $x$ , hay un conjunto  $y$  cuyos miembros son todos los conjuntos cuyos miembros son también elementos de  $x$ .

**Fundación:** todo conjunto no vacío tiene un miembro “mínimo”.

**Separación (o Reemplazo restringido):** dado un conjunto  $x$ , podemos formar un nuevo conjunto  $y$  que consiste solamente de aquellos miembros de  $x$  que satisfacen cierta propiedad  $\varphi$ .

Las pruebas de equiconsistencia no son sencillas pues dependen en gran medida de la traducción entre la terminología de los (modelos de los) topos y la terminología en (los modelos de) las teorías basadas en la noción de membresía, que en general no es homofónica (es decir, no es posible simplemente traducir “función” por “morfismo”, “conjunto” por “objeto” o “conjunto vacío” por “objeto inicial”). Para mis propósitos actuales es suficiente motivar los paralelismos pertinentes tan intuitivamente como sea posible. Para detalles de las pruebas de equiconsistencia y en general acerca de las relaciones entre los topos y las teorías de conjuntos basadas en la noción de membresía de pueden consultarse [17], [20], [21].

Un topos tiene el mismo poder expresivo que ZFC, aunque no la misma fuerza deductiva, si se le agregan los axiomas *Infinito*, *Buena puntuación* y *Elección*:

*Infinito:* hay un objeto de números naturales. Sea  $\mathbf{C}$  una categoría con objeto terminal  $\mathbf{1}$ . Se dice que  $\mathbf{C}$  tiene objeto de números naturales si en  $\mathbf{C}$  hay un objeto  $N$ , un morfismo  $o: \mathbf{1} \rightarrow N$  y un morfismo  $s: N \rightarrow N$  con la siguiente propiedad: para todo objeto  $X$  de  $\mathbf{C}$ , si hay morfismos  $o': \mathbf{1} \rightarrow X$  y  $s': X \rightarrow X$  entonces hay un único morfismo  $h: N \rightarrow X$  en  $\mathbf{C}$  tal que  $(h \circ o) = o'$  y  $(s' \circ h) = (h \circ s)$  (i.e. hace que el siguiente diagrama conmute):

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \xrightarrow{s} & N & \xrightarrow{s} & N \\ & \searrow o' & \downarrow h & & \downarrow h \\ & & X & \xrightarrow{s'} & X \end{array}$$

Este objeto es capaz de soportar funciones recursivas y es el requisito para hacer por lo menos algo de matemática básica (aritmética) en una teoría de conjuntos.<sup>11</sup> Con este axioma, un topos es equiconsistente con *BZ*.

<sup>10</sup>En esta sección usaré la siguiente convención: un **axioma en negritas** nombra un axioma de una teoría de conjuntos basada en la noción de membresía, mientras que un *axioma en itálicas* nombra un axioma de una teoría categorista de conjuntos. Para los axiomas de las teorías de conjuntos basadas en la noción de membresía aquí expuestas véase [13].

<sup>11</sup>En jerga más usual, **Infinito** dice que hay un conjunto con infinitos miembros.

*Buena puntuación:* dados dos morfismos  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : X \rightarrow Y$ ,  $f = g$  si  $f \circ y = g \circ y$  para todo elemento  $y$  de  $Y$ .

*Elección:* todo epimorfismo tiene una sección.<sup>12</sup> En términos de membresía este axioma, llamado simplemente ‘C’ por su nombre en inglés (*Choice*), dice que para todo conjunto de conjuntos no vacíos mutuamente disjuntos hay un conjunto que tiene exactamente un miembro común con cada uno de esos conjuntos. Esto es equivalente a decir que toda función sobreyectiva tiene una inversa por la derecha, lo que justifica la formulación categorista.

Un topos con los anteriores axiomas se denomina ETCS (por *elementary theory of the category of sets*) y, como ya se señaló, tiene el mismo poder expresivo que ZFC pero no la misma fuerza deductiva; ETCS más bien es equiconsistente con BZC (*Bounded Zermelo* más **Elección**). Por ejemplo, en ETCS no puede probarse que  $\aleph_\omega$  exista (véase [12]), ni que todo conjunto pueda integrarse a uno transitivo ni el teorema del isomorfismo (o “del colapso”) de Mostowski (todo enunciado acerca de conjuntos puede convertirse en un enunciado acerca de relaciones extensionales bien fundadas que son invariantes bajo isomorfismo), véase [14, §9,3].

Empero, la igualdad de poder expresivo significa que alguna extensión de ETCS tiene la misma fuerza deductiva que ZFC. El axioma que debe ser añadido es

*Reemplazo (completo):* sea  $A$  un objeto de un topos que satisfaga los anteriores axiomas. Supóngase que a cada  $x \in A$  se le asigna un objeto  $S_x$ , único salvo isomorfismo, mediante una relación  $R(x, Y)$  expresable en el topos. Entonces hay un objeto  $S$  y un morfismo  $f : S \rightarrow A$  con la siguiente propiedad: para cada for each  $x \in A$  y cualquier  $S_x$  con  $R(x, S_x)$  hay algún morfismo  $m : S_x \rightarrow S$  que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} S_x & \xrightarrow{m} & S \\ \downarrow ! & & \downarrow f \\ \mathbf{1} & \xrightarrow[x]{} & SA \end{array}$$

La versión usual dice que si  $\varphi$  es una fórmula funcional que relaciona cada conjunto  $x$  a un único conjunto  $y$  entonces puede formarse un nuevo conjunto  $v$  a partir de un conjunto dado  $w$  del siguiente modo: coléctense todos los conjuntos a los cuales los miembros de  $w$  están relacionados mediante  $\varphi$ . Nótese que *Reemplazo* puede “sacarnos”, por decirlo así, del conjunto  $w$  al formar el conjunto  $v$ . A diferencia de lo que sucede con **Separación**, los elementos del nuevo conjunto  $v$  no necesitan ser miembros de  $w$ .

Ya que es equiconsistente con una teoría de conjuntos, si bien débil, un topos puede considerarse como un universo de conjuntos y, dado que porciones de la matemática pueden reconstruirse en una teoría de conjuntos, los topos también permiten reconstruir parte de la matemática, algunos tanto como ZFC. Así, los resultados de equiconsistencia tienen importantes repercusiones para el proyecto de dar una fundamentación conjuntista de la matemática, entendiendo ese proyecto a la manera de Lawvere, esto es, como la formulación de un sistema de axiomas de primer orden en el que todos los objetos matemáticos usuales puedan definirse y

<sup>12</sup>Un *epimorfismo* es un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  tal que, para cada objeto  $T$  y morfismos  $h : Y \rightarrow T$  y  $k : Y \rightarrow T$ , si  $h \circ f = k \circ f$  entonces  $h = k$ . Considérese un morfismo  $f : X \rightarrow Y$ . Una *sección* de  $f$  es un morfismo  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $g \circ f = id_X$ .

en el que se puedan probarse sus propiedades usuales, “propuestas para organizar la matemática”, como diría Mac Lane.<sup>13</sup> Entre ellas cabe mencionar las posibles respuestas a las objeciones de Feferman. Él ha dicho en numerosas ocasiones que las nociones de *categoría* o *topos* presuponen las de *colección* y *operación* y que una fundamentación de la matemática debe proporcionar explicaciones sistemáticas de las nociones presupuestas; las teorías de conjuntos usuales sí harían eso pero la teoría de categorías no.<sup>14</sup> La segunda objeción la toma de Terry Tao y dice que no es claro cómo formular en términos categoristas ciertas construcciones de localizaciones en álgebra homológica que usan inducción transfinita y recursión. La respuesta a la primera es que tiene razón, pero una fundamentación categorista no propone a los axiomas generales de una categoría como fundamentación. Los axiomas de un topos, en cuanto equiconsistentes como mínimo con BZ menos **Infinito**, ya proveen una explicación de las nociones de colección u operación, y no las presuponen más de lo que lo hace BZ menos **Infinito**. Un razonamiento análogo vale para ETCS+*Reemplazo* y ZFC. A la segunda objeción puede responderse que, si esas u otras construcciones son formulables en ZFC, también lo son (por equiconsistencia) en ETCS+*Reemplazo*.

Los resultados de equiconsistencia no deben hacernos perder de vista que hay importantes diferencias conceptuales en el tratamiento categorista de los conjuntos y el tratamiento que se hace en teorías como ZF. Enumeraré a continuación algunas de ellas:

- La mayoría de las teorías axiomáticas de conjuntos están basadas en la noción de membresía, mientras que una teoría categorista de conjuntos está basada en la noción de composición de funciones.
- En ZF y otras teorías de conjuntos basadas en la noción de membresía, “ser elemento de” y “ser miembro de” son sinónimos, pues en esas teorías sólo hay un tipo de entidad básica: un elemento de un conjunto es a su vez un conjunto. En una teoría categorista de conjuntos, ser un elemento de un objeto (conjunto) es ser un cierto tipo de morfismo (función), mientras que ser un miembro de un conjunto es ser un morfismo que satisfaga ciertas igualdades de morfismos (véanse las definiciones respectivas en la sección 1).
- Los elementos son “globales” en ZF: un conjunto puede ser elemento de diferentes conjuntos. En una teoría categorista de conjuntos los elementos son “locales”, es decir, ya que un elemento de un objeto  $X$  es un morfismo con codominio  $X$ , un elemento de  $X$  no puede ser elemento de otro objeto  $Y$  pues sería otro morfismo.
- A diferencia de lo que sucede en una teoría categorista de conjuntos, la membresía en ZF y teorías similares no es invariante bajo isomorfismo: si  $x$  es un miembro de  $X$  y éste es isomorfo a  $Y$ ,  $x$  no es necesariamente un miembro de  $Y$ .

Por otro lado, en algunos topos son verdaderos, por ejemplo, el axioma de elección y la hipótesis del continuo y en otros no. ¿Cuál entre todos los topos es *el verdadero universo* de conjuntos? Dado que se considera que para poder hacer matemática se necesita por lo menos la aritmética usual, es común restringirse a los topos con

<sup>13</sup>Ofrecer una fundamentación de este tipo *no* implica negar que se pueda trabajar con los objetos matemáticos antes de darles una fundamentación y tampoco implica que las fundamentaciones sean fijas. Algunos llamarían a esto más bien “antifundacionismo”, pero la corrección de la etiqueta depende de si el carácter fijo y reductivo es esencial a una fundamentación. Véase [21].

<sup>14</sup>Véase por ejemplo [10]. Feferman también considera que teorías como ZF son inadecuadas como fundamentos, pero que en el aspecto recién mencionado son mejores que la teoría de categorías.

un objeto de números naturales, es decir, que satisfagan el axioma *Infinito*. Hay quienes además tratan de elegir un topos o una clase de topos como los verdaderos universos de conjuntos. Personalmente no me siento compelido a pensar en un solo topos o una sola clase de topos como el verdadero universo de conjuntos debido a que las expresiones matemáticas tienen un contenido semántico mínimo que puede ser interpretado en todo topos debido a las propiedades universales de las nociones aludidas, pero que a su vez adquieren una referencia (en el caso de los términos) o valor de verdad (en el caso de los enunciados) determinados dependiendo de las características peculiares, los axiomas propios, de cada topos. Esta idea ha sido desarrollada con el nombre de *matemática local* por John L. Bell (véanse [3], [4], [5]).

Bell ha afirmado también que las *leyes universales* o *invariantes de la matemática* son aquellas que valen en todo topos, esto es, en todo universo de conjuntos donde puede ser reconstruida la matemática. Dado el **Teorema 4.1**, esas leyes universales serían las de una lógica intuicionista de orden superior. No creo que esa afirmación sea cierta, pero discutir esto, aunque sea mínimamente, requiere más espacio del que dispongo a estas alturas y en todo caso excedería los propósitos de este capítulo.

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo he expuesto los rudimentos de la lógica interna de un topos y he incluido una somera discusión de la perspectiva categorista en el proyecto de dar una fundamentación conjuntista de la matemática. Sin embargo, hay otros temas de interés para los lógicos que, por motivos de espacio, no he podido discutir aquí, pero que un lógico muy bien educado en teoría de categorías debería conocer:

- El análisis categorista de las paradojas de autorreferencia iniciado en [15]. La idea central es que esas paradojas, y resultados limitativos como los de Gödel y Tarski, son instancias (de una versión generalizada) del teorema de Cantor (véase también [25]).
- Versiones categoristas de pruebas de independencia como la de Cohen (véase [17]).
- Semántica functorial, esto es, teoría de modelos en términos de funtores. Véase [2].

Entre otras discusiones filosóficas suscitadas por el análisis categorista de la lógica cabe destacar:

- La contribución de las definiciones categoristas al debate acerca del significado de las conectivas lógicas (cfr. [9]).
- El problema de explicar la situación en una categoría degenerada donde *verdadero* = *falso* (cfr. [8], [7]).
- Las características de la lógica interna de un topos mencionadas en la sección 4 pueden dualizarse de manera tal que la lógica descrita sea paraconsistente en lugar de intuicionista y, de hecho, parece que no hace falta alterar la estructura categorista de un topos, sólo los nombres y las conceptualizaciones de ciertos objetos y morfismos, para que la lógica interna de un topos sea en general paraconsistente (véanse [22], [23], [6]). Eso contradeciría ciertas concepciones muy arraigadas acerca de la lógica interna y habría que explicar la validez de ciertos teoremas, por ejemplo, el **Teorema 4.1**.

## REFERENCIAS

- [1] S. Awodey, *Structure in mathematics and logic: A categorical perspective*, *Philosophia Mathematica*, 4 (1996), 209–237.
- [2] S. Awodey y A. Bauer, *Introduction to Categorical Logic*, no publicado, disponible en <http://www.andrew.cmu.edu/user/awodey/catlog/notes/catlog1A.pdf>
- [3] J. L. Bell, *From absolute to local mathematics*, *Synthese*, 69 (1986), 409–426.
- [4] J. L. Bell, *Toposes and Local Set Theories: An Introduction*, Oxford Clarendon Press, 1988.
- [5] J. L. Bell, *Lectures on the Foundations of Mathematics*, no publicado, disponible en [publish.uwo.ca/~jbell/foundations%20of%20mathematics.pdf](http://publish.uwo.ca/~jbell/foundations%20of%20mathematics.pdf)
- [6] L. Estrada González, *Complement-topoi and dual intuitionistic logic*, *Australasian Journal of Logic*, 9 (2010), 26–44.
- [7] L. Estrada González, *Models of possibilism and trivialism*, *Logic and Logical Philosophy*, 22 (2012), 175–205.
- [8] L. Estrada González, *Lecciones de la degeneración (O: ¿Qué hay de malo con la trivialidad?)*, *Mathesis*, por aparecer.
- [9] L. Estrada González e I. Pallares Vega, *La diferencia entre lógicas y el cambio de significado de las conectivas: un enfoque categorista*, *Theoria. Revista internacional de historia, teoría y fundamentos de la ciencia*, 26 (2011), 133–154.
- [10] S. Feferman, *Enriched Stratified Systems for the Foundations of Category Theory*, en G. Sica (ed.), *What is Category Theory?*, Polimetrica, Monza, 2006, 185–204.
- [11] R. Goldblatt, *Topoi: The Categorical Analysis of Logic*, edición revisada, North Holland Publishing Co., Ámsterdam, 1984.
- [12] M. R. Holmes, *Alternative axiomatic set theories*, *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2012), disponible en <http://plato.stanford.edu/entries/settheory-alternative/>
- [13] T. Jech, *Set theory*, *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2008), disponible en <http://plato.stanford.edu/entries/set-theory/>
- [14] P. Johnstone, *Topos Theory*, Academic Press, Nueva York, 1977.
- [15] F. W. Lawvere, *Diagonal arguments and Cartesian closed categories*, en *Category Theory, Homology Theory and their Applications, II (Battelle Institute Conference, Seattle, Wash., 1968, Vol. Two)*, Springer-Verlag, Berlín, 1969, 134–145.
- [16] F. W. Lawvere y S. H. Schanuel, *Conceptual Mathematics. A First Introduction to Categories*, segunda reimpresión, Cambridge University Press, 2000. Versión castellana: *Matemáticas conceptuales. Una primera introducción a categorías*, México: Siglo XXI, 2002. Traducción de Francisco Marmolejo Rivas, con asistencia de Ivonne Pallares Vega.
- [17] S. Mac Lane y I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, Springer-Verlag, 1992.
- [18] C. McLarty, *Uses and abuses of the history of topos theory*, *British Journal for the History of Science*, 41 (1990), 351–375.
- [19] C. McLarty, *Elementary Categories, Elementary Toposes*, Oxford Clarendon Press, Toronto, 1995.
- [20] C. McLarty, *Exploring categorical structuralism*, *Philosophia Mathematica*, 12 (2004), 37–53.
- [21] C. McLarty, *Recent debate over categorical foundations*, en G. Sommaruga (ed.), *Foundational Theories of Classical and Constructive Mathematics*, Springer, 2011, 145–154.
- [22] C. Mortensen, *Inconsistent Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [23] C. Mortensen, *Closed set logic*, en R. T. Brady (ed.), *Relevant Logics and Their Rivals, vol. II*, Ashgate Publishing, 2003, 254–154.
- [24] S. Vigna, *A guided tour in the topos of graphs*, reporte técnico 199–7, Università di Milano, Dipartimento di Scienze dell’Informazione, 1997, disponible en <http://vigna.dsi.unimi.it/papers.ToposGraphs.pdf>
- [25] N. S. Yanofsky, *A universal approach to self-referential paradoxes, incompleteness and fixed points*, *Bulletin of Symbolic Logic*, 9 (2003), 362–386.

Facultad de Humanidades, Universidad Autónoma del Estado de Morelos  
 Avenida Universidad 1001, Colonia Chamilpa  
 Cuernavaca, Morelos, C.P. 62209

Departamento de Filosofía, Universidad de Tartu  
Jakobi 2, 3rd floor  
51003 Tartu, Estonia  
loisayaxsegrob@gmail.com



# Probabilidad y Estadística



# CAPÍTULO 13

## MODELO TRINOMIAL PARA LA VALUACIÓN DE OPCIONES

ROCÍO ALDUCIN YÓBAL  
VÍCTOR HUGO VÁZQUEZ GUEVARA  
FCFM, BUAP

RESUMEN. Se presenta el modelo Trinomial para la valuación de opciones europeas. Este algoritmo es una extensión del modelo Binomial propuesto por Cox, Ross y Rubinstein, dicha extensión radica en que el modelo Binomial considera dos posibles movimientos en el precio del subyacente (el precio del subyacente puede subir o bajar), mientras que el modelo Trinomial toma en cuenta tres movimientos, esto es, el precio del subyacente no sólo sube o baja sino que también puede ocupar un estado intermedio. Como el modelo Trinomial resulta ser una versión discreta del modelo de Black-Scholes y Merton, para el movimiento del precio del subyacente al final se muestra algunos ejemplos numéricos en donde se ilustra la convergencia de los modelos.

### 1. INTRODUCCIÓN

En el contexto de los instrumentos financieros, las opciones son productos muy populares y difundidos, debido a que ayudan a disminuir el riesgo en algunas negociaciones, es por eso que son pieza fundamental en el mercado financiero moderno; además, por su apalancamiento (una inversión será más apalancada cuando debamos invertir una menor cantidad de capital del esperado con el fin de obtener resultados económicos y financieros adecuados, es decir, mayor rentabilidad), de una pequeña inversión se pueden obtener grandes beneficios, y por su versatilidad permiten al inversionista realizar estrategias para lograr sus objetivos dentro del mercado, por otra parte tienen facilidad de combinarse con otros instrumentos financieros [7]. De esto, la importancia del estudio de las opciones para los inversionistas es debida a la especulación y a la cobertura que ofrecen [5]. Pero ¿qué son las opciones?

**Definición 1.1 (Opción).** Es un contrato entre dos entes financieros (tenedor y escritor) que da el derecho al tenedor pero no la obligación de comprar o vender cierta cantidad de acciones a cierto precio (llamado precio de ejercicio) en determinada fecha (también llamada fecha de expiración o maduración).

Como las opciones son instrumentos financieros que derivan su valor de otro instrumento llamado activo subyacente, suelen a medida denominarse **derivados**. Las opciones, por ser contratos que se emiten sobre un determinado activo subyacente y poseen una fecha de expiración, son contratos normalizados, lo que ayuda a dar mayor liquidez a los mercados financieros, ya que los inversionistas se concentran en los títulos de éstas y aumentan la negociación. Existen diversos tipos de opciones dentro del mercado financiero, pero las que se manejarán son las plain vanilla: opciones europeas y opciones americanas.

**Definición 1.2 (Opción europea).** Es el tipo de opción que sólo se puede ejercer en la fecha de expiración.

**Definición 1.3 (Opción americana).** Es el tipo de opción que se puede ejercer en cualquier fecha igual o anterior a la fecha de expiración y sólo se puede ejercer una única vez.

En el mundo real de las finanzas existen gran variedad de tipos de opciones, pero en este trabajo sólo se estudiarán estos dos tipos. Las opciones Europeas y Americanas, que a su vez se subdividen en opciones tipo Call y las tipo Put.

**Definición 1.4 (Opción Call).** Las opciones Call son las que dan el derecho de adquirir un bien.

**Definición 1.5 (Opción Put).** Las opciones Put son las que dan el derecho de vender un bien.

Como se mencionó en la definición de opción, en el contrato se estipulan diversos parámetros que serán denotados de la siguiente manera:

- $S_0$ , denota el precio del activo subyacente al inicio del contrato (esto es, en  $t = 0$ ),
- $E$ , indica el precio de ejercicio al cual se comprará o venderá el bien,
- $r$ , es la tasa interés libre de riesgo,
- $T$ , es la fecha de expiración.

## 2. PROBLEMA DE LA VALUACIÓN

El problema de la valuación de opciones, es determinar cual es el valor justo que debe pagar el tenedor de la opción por adquirir el derecho de comprar o vender el activo subyacente. Supóngase que  $E$  es el precio de ejercicio y  $S(T)$  es el precio del bien en la fecha de expiración de una opción europea call [5]. Si en el tiempo de expiración se tiene que  $S(T) > E$ , entonces el tenedor de la opción podrá ejercer su derecho y comprará el activo por la cantidad  $E$  para venderlo en el mercado por  $S(T)$ , obteniendo una ganancia de  $S(T) - E$ . De otra manera, si  $E > S(T)$  entonces al tenedor no le conviene ejercer su derecho y no obtendrá ganancias. Como el precio de la opción no puede ser negativo, entonces al tiempo de expiración, el valor de la opción estará dado por la siguiente expresión,

$$C = \max(S(T) - E, 0),$$

donde,  $C$  denota el precio de la opción Call, a esta ecuación se le conoce como el valor intrínseco de la opción. Por otro lado, si se considera a un tenedor de una opción Put y en el tiempo de expiración se tiene que  $E > S(T)$ , entonces el tenedor podrá comprar el activo en  $S(T)$  en el mercado y ejercer su derecho vendiendo el bien al precio  $E$ , obteniendo una ganancia de  $E - S(T)$ . De otra manera, si  $S(T) > E$  entonces el tenedor no ejercerá su derecho y no tendrá ganancias. El valor de la opción put tampoco puede tomar valores negativos, de esta forma el valor intrínseco de la opción será,

$$P = \max(E - S(T), 0),$$

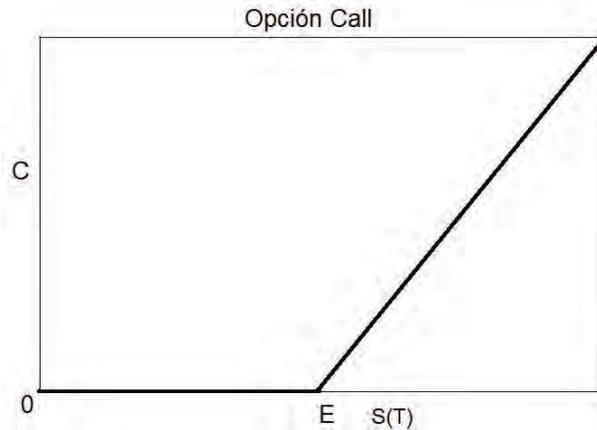


FIGURA 1. Diagrama de la función de pagos para una opción Call

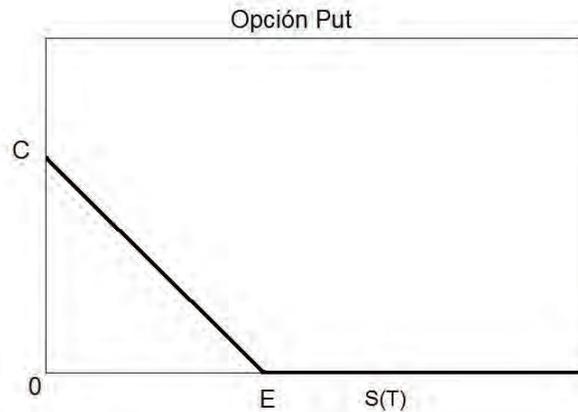


FIGURA 2. Diagrama de la función de pagos para una opción Call

en donde, P denota el valor de una opción Put en la fecha de expiración.

Se observa que en ambos casos, en la fecha de vencimiento el tenedor obtendrá un beneficio o no (debido a si desea ejercer su derecho o no), sin embargo, ¿qué pasa con el escritor? si el tenedor ejerce su derecho el escritor tendrá un pérdida, es por eso que al inicio del contrato el tenedor debe pagar una prima por obtener el derecho de comprar o vender los activos preescritos en el contrato, y de esta forma no afectar al escritor. En las figuras 1 y 2 se muestran las gráficas de las funciones de pagos de una opción call y una put europea [1] [5].

Uno de los beneficios al realizar transacciones con las opciones es que ayudan a disminuir riesgos, es por eso que los inversionistas han buscado tener cobertura mediante la combinación de opciones Call y Put sobre el mismo bien, algunos de estas combinaciones son: el **bottom straddle** y el **bull spread**[5].

## 3. MODELO TRINOMIAL

En el mundo de las finanzas existen diversos modelos para valorar opciones, el más difundido ha sido el de Black, Scholes y Merton, en este modelo se considera que el precio del activo subyacente sigue un movimiento browniano geométrico,

$$(1) \quad S(t) = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}W},$$

donde  $W \sim N(0, 1)$ ,  $\sigma$  es la volatilidad y  $r$  es la tasa de interés libre de riesgo.

La volatilidad es el parámetro que mide las fluctuaciones del activo subyacente, durante cierto periodo de tiempo. Dentro de la valuación de opciones existen diversos tipos de volatilidad, entre ellos sobresalen la **volatilidad histórica** y la **volatilidad implícita**[5]. La tasa de interés  $r$ , es la tasa de interés interbancaria y se considera con componente continuo.

Sin embargo, existen otros modelos que son interesantes por su eficacia computacional y que resultan ser una versión discreta del modelo (1) como lo son, los modelos de árboles binomiales y árboles trinomiales, en estos modelos los parámetros que se manejan son los estipulados en el contrato, además cabe mencionar que estos modelos consideran un parámetro de volatilidad constante.

Los árboles binomiales han sido una de las herramientas más utilizadas dentro de la valuación de opciones. El modelo binomial estándar de Cox-Ross-Rubinstein (CRR) consta de un conjunto de nodos, que representan los posibles precios del subyacente durante la vida de la opción, se le llama *binomial* por que en cada nodo el precio del activo subyacente puede subir o bajar. Una generalización natural de este modelo se tiene al extender el número de posibles valores que puede tomar el activo, la idea es permitir que el precio del subyacente no sólo suba o baje, sino que pueda tomar un valor intermedio en la etapa siguiente, esto es, en lugar de considerar un árbol binomial se tomará en cuenta un árbol *trinomial*. La figura 3 ilustra un árbol trinomial de un paso, junto con sus parámetros correspondientes.

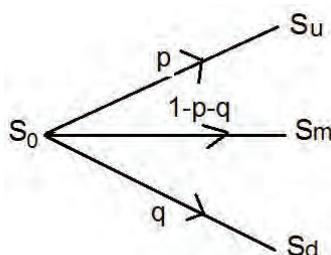


FIGURA 3. Árbol trinomial de un paso

De acuerdo a la figura 3, se observa que el precio del subyacente puede moverse a uno de los tres nodos: con probabilidad  $p$ , tomará el valor  $S_u$ ; con probabilidad  $q$ ,

bajará y su valor será  $Sd$ ; y con probabilidad  $1 - p - q$ , el precio del activo será  $Sm$ . Los parámetros del modelo trinomial son obtenidos de manera análoga al modelo binomial, esto es,  $u, d, m$ , las probabilidades de transición  $p$  y  $q$  se obtienen de los dos primeros momentos de la distribución del movimiento browniano geométrico que describe al precio del activo subyacente en el modelo (1), además considere que  $d < m < u$ .

El objetivo es encontrar el valor justo  $C$  que debe pagar el tenedor de una opción europea Call. Al igual que en el modelo de Black, Scholes y Merton, en esta propuesta se construye un portafolio que comprende al subyacente, a la opción y que al final del periodo de inversión proporciona el mismo rendimiento en todas las posibles trayectorias que puede tomar el precio del activo subyacente, esto es debido a que no se permiten oportunidades de arbitraje [8].

Se considera un portafolio libre de riesgos formado por cierta cantidad de acciones del subyacente y de la opción, lo que se quiere es que el portafolio mantenga su valor esperado, independientemente si el precio del subyacente sube, baja o se mantiene en  $T$ , esto se consigue mediante la proporción adecuada de los activos y de la opción. El portafolio tendrá una posición larga de  $\lambda$  acciones y una posición corta en una opción, se calcula el valor de  $\lambda$  para que el portafolio no tenga riesgos (que ofrezca siempre los mismos pagos). Si el precio del activo subyacente sube, el valor del portafolio al final de la vida de la opción será

$$\lambda S_0 u - C_u$$

si el precio del subyacente baja, el valor del portafolio es

$$\lambda S_0 d - C_d$$

y si el precio del bien se mantiene, éste valdrá

$$\lambda S_0 m - C_m.$$

Para calcular a  $\lambda$  se debe encontrar la solución al siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \lambda S_0 u - C_u &= \lambda S_0 d - C_d \\ \lambda S_0 u - C_u &= \lambda S_0 m - C_m \\ \lambda S_0 d - C_d &= \lambda S_0 m - C_m \end{aligned}$$

este sistema tiene solución, si y solo si

$$(2) \quad \lambda = \frac{C_u - C_d}{S_0 u - S_0 d} = \frac{C_u - C_m}{S_0 u - S_0 m} = \frac{C_d - C_m}{S_0 d - S_0 m}$$

En este caso, se dice que la opción es alcanzable [8]. Por otro lado, el valor del portafolio en  $t = 0$  es

$$\lambda S_0 - C,$$

el cual debe coincidir con el valor presente del portafolio en cualquiera de las tres ecuaciones anteriores,

$$(3) \quad \lambda S_0 - C = e^{-rT}(\lambda S_0 u - C_u) = e^{-rT}(\lambda S_0 m - C_m) = e^{-rT}(\lambda S_0 d - C_d).$$

Por ejemplo si se toma

$$\lambda S_0 - C = e^{-rT}(\lambda S_0 u - C_u)$$

entonces,

$$C = (\lambda S_0 u - C_u)e^{-rT} - \lambda S_0$$

tomando a

$$\lambda = \frac{C_u - C_m}{S_0 u - S_0 m}$$

se tiene que,

$$(4) \quad C = \lambda S_0 - (\lambda S_0 u - C_u)e^{-rT}$$

$$(5) \quad = \left( \frac{C_u - C_m}{S_0 u - S_0 m} \right) S_0 - \left[ \left( \frac{C_u - C_m}{S_0 u - S_0 m} \right) S_0 u - C_u \right] e^{-rT}$$

$$(6) \quad = \frac{C_u - C_m}{u - m} + \left( \frac{u C_m - m C_u}{u - m} \right) e^{-rT}$$

Siendo esta última ecuación el valor de la opción en  $t = 0$ .

Supóngase que  $0 < p + q < 1$ . Se observa que si se define  $\tilde{S}_0 = S_t e^{-rt}$  (con  $t=0$ ), entonces

$$\begin{aligned} E^{\mathbf{P}}[\tilde{S}_T | \tilde{S}_t] &= e^{-r(T-t)}[pu + qd - (1 - p - q)m]\tilde{S}_t \\ &= e^{-r(T-t)}[p(u - m) + q(d - m) + m]\tilde{S}_t, \end{aligned}$$

en donde,  $\mathbf{P}$  es la probabilidad neutral al riesgo. Para que  $\tilde{S}_t = S_t e^{-r(T-t)}$  sea un martingala se requiere que

$$(7) \quad p(u - m) + q(d - m) + m = e^{-r(T-t)} - d.$$

De la misma manera, si  $\tilde{C}_t = C_t e^{-rt}$ , entonces

$$\begin{aligned} E^{\mathbf{P}}[\tilde{C}_T | \tilde{C}_t] &= e^{-r(T-t)}[pC_u + qC_d - (1 - p - q)C_m]\tilde{C}_t \\ &= e^{-r(T-t)} \left[ \frac{p(C_u - C_m) + q(C_d - C_m) + C_m}{C_t} \right] \tilde{C}_t. \end{aligned}$$

Para que  $\tilde{S}_t = S_t e^{-r(T-t)}$  sea un martingala se requiere que

$$(8) \quad p(C_u - C_m) + q(C_d - C_m) = C_t e^{-r(T-t)} - C_m.$$

Si se utilizan (2) y (6) en la ecuación anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \lambda p(u - m) + \lambda q(d - m) &= \left\{ \frac{C_u - C_m}{u - m} + \left( \frac{uC_m - mC_u}{u - m} \right) e^{-rT} \right\} e^{rT} - C_m \\
 &= \left\{ \frac{C_u - C_m}{u - m} + \left[ C_m - \left( \frac{C_u - C_m}{u - m} \right) m \right] e^{-rT} \right\} e^{rT} - C_m \\
 &= \lambda e^{rT} + (C_m - \lambda m) - C_m \\
 &= \lambda e^{rT} - \lambda d \\
 &= \lambda(e^{rT} - m)
 \end{aligned}$$

Si se divide entre  $\lambda$  se obtiene (7). Por lo tanto, a partir de (7) y (8) se observa que no se puede obtener de manera única  $p$  y  $q$ . Así, dado un valor de  $q$  se obtiene un valor de  $p$ , sólo hay que cuidar que la elección de  $q$  produzca  $0 < p + q < 1$ . Esto implica que los mercados son incompletos [8]. El valor de  $p$  está dado por

$$(9) \quad p = \frac{e^{rT} - m}{u - m} - q \left( \frac{d - m}{u - m} \right)$$

En este caso, el precio de la opción satisface

$$\begin{aligned}
 C &= e^{-rt} [pC_u + qC_d + (1 - p - q)C_m] \\
 &= e^{-rt} [p(C_u - C_m) + q(C_d - C_m) + C_m] \\
 &= e^{-rt} \left[ \frac{e^{rT} - m}{u - m} - q \left( \frac{d - m}{u - m} \right) (C_u - C_m) + q(C_d - C_m) + C_m \right] \\
 &= \frac{C_u - C_m}{u - m} - \left[ \left( \frac{C_u - C_m}{u - m} m - C_m \right) \right] e^{-rt} \\
 &+ q \left[ (C_d - C_m) - \left( \frac{d - m}{u - m} \right) (C_u - C_m) \right] e^{-rt} \\
 &= \frac{C_u - C_m}{u - m} - e^{-rt} \left( \frac{mC_u - uC_m}{u - m} \right) \\
 &+ q \left[ \left( \frac{C_d - C_m}{d - m} (d - m) - (d - m) \left( \frac{C_u - C_m}{u - m} \right) \right) \right] \\
 &= \frac{C_u - C_m}{u - m} - e^{-rt} \left( \frac{mC_u - uC_m}{u - m} \right) + q[(d - m)(\lambda - \lambda)] \\
 &= \frac{C_u - C_m}{u - m} - e^{-rt} \left( \frac{mC_u - uC_m}{u - m} \right)
 \end{aligned}$$

Dado que el término  $q$  se anula, se tiene que la selección de  $q$  es arbitraria. Observe también que la anterior expresión coincide con (6), de esta forma se ha obtenido una fórmula explícita para  $C$ . Sin embargo, existen cinco parámetros por determinar:  $u$ ,  $d$ ,  $m$ ,  $p$  y  $q$ , los cuales deben satisfacer las condiciones (2), (7), (8) y (9), cabe mencionar que la selección de estos parámetros no es única. Así, si por ejemplo consideramos la restricción de saltos simétricos (hacia arriba y hacia abajo); es decir

$$(10) \quad ud = 1,$$

$$(11) \quad m = 1$$

obtenemos el árbol trinomial de Cox, Ross y Rubinstein, en el cual los parámetros están dados por

$$(12) \quad u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}},$$

$$(13) \quad d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}},$$

en donde,  $\Delta t$  es la longitud del paso. Las probabilidades resultan ser igual a,

$$(14) \quad p = \left( \frac{e^{\frac{r\Delta t}{2}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}}} \right)^2$$

$$(15) \quad q = \left( \frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}} - e^{\frac{r\Delta t}{2}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}}} \right)^2.$$

Por otro lado, si consideramos un árbol del estilo Jarrow-Rudd (JR), obtenemos que los parámetros están dados por:

$$u = e^{r-\sigma^2/2\Delta t+\sigma\sqrt{2\Delta t}},$$

$$m = e^{r-\sigma^2/2\Delta t},$$

$$d = e^{r-\sigma^2/2\Delta t-\sigma\sqrt{2\Delta t}},$$

En esta caso, las probabilidades de transición son

$$(16) \quad p = q = 1/4$$

De manera similar puede considerarse un árbol con igual probabilidad de tener cualquiera de sus tres posibles movimientos ( $p = q = 1/3$ ), tenemos en esta situación que

$$u = e^{r-\sigma^2/2\Delta t+\sigma\sqrt{3\Delta t/2}},$$

$$m = e^{r-\sigma^2/2\Delta t},$$

$$d = e^{r-\sigma^2/2\Delta t-\sigma\sqrt{3\Delta t/2}},$$

#### 4. VALUACIÓN DE OPCIONES

Hasta ahora se ha descrito la valuación mediante un árbol de un paso. Si se desea realizar la valuación con  $n$  etapas, el primer paso es contruir el árbol para los posibles movimientos del precio del subyacente, esto es, se calculan  $u$ ,  $d$ ,  $p$ ,  $q$  y entonces se obtiene el precio del subyacente en cualquier nodo del árbol,

$$S_i^j = u^{n_u} d^{n_d} m^{n_m} S_0,$$

en donde,  $i$  denota la etapa,  $j$  el nivel del nodo,  $n_u$  es el número de veces que el precio del subyacente sube,  $n_d$  es el número de veces que el precio del bien baja, y  $n_m$  es el número de veces que en el esquema trinomial el precio del activo toma su valor intermedio.

Una vez construido el árbol con los posibles precios que el activo subyacente puede tomar, se procede a calcular el valor de la opción. Sea  $E$  el precio de ejercicio y  $T$  el tiempo de expiración, se sabe que en en la fecha de expiración el valor de la opción esta dado por

$$(17) \quad C = \text{máx}(S(T) - E, 0)$$

$$(18) \quad P = \text{máx}(E - S(T), 0),$$

en donde, (17) es la función de pagos para una opción call europea, mientras que (18) para una opción put europea.

El objetivo es encontrar el valor  $C_1^1$  de una opción call europea en el tiempo  $t = 0$  (el procedimiento es análogo para una opción put), la manera en que se hace es trabajando hacia atrás a través del árbol. Supóngase que los precios del subyacente hasta la  $n$ -ésima etapa  $S_n^j$  ya han sido calculados, de esta forma se procede a calcular los  $C_n^j$ , que están dados por las expresiones (17) (si la opción fuera put, se utilizaría (18)). Una vez que ya se han obtenido la función de pagos en la  $n$ -ésima etapa, se procede con el cálculo de  $C_{n-1}^j$  que estará dado por

$$(19) \quad C_{n-1}^j = e^{r\Delta t} [qC_n^{j-1} + (1 - p - q)C_n^j + pC_n^{j+1}],$$

que es equivalente a la expresión (6)

$$(20) \quad C_{n-1}^j = \frac{C_n^{j+1} - C_n^j}{u - m} - e^{-r\Delta t} \left( \frac{mC_n^{j+1} - uC_n^j}{u - m} \right).$$

La idea del método trinomial es multiplicar los tres posibles valores  $C_{i+1}^{j-1}$ ,  $C_{i+1}^j$ ,  $C_{i+1}^{j+1}$  con sus probabilidades asociadas y obtener el valor descontado a una tasa de interés libre de riesgo  $r$ , para cualquier etapa  $i$ , y de esta forma, se calcula la función de pagos en los nodos interiores del árbol. El procedimiento se repite hasta llegar al nodo inicial y así obtener  $C_1^1$ .

A continuación se presenta un ejemplo numérico en el cual se considera opción europea sobre una acción de Google.

**Ejemplo 4.1.** Supóngase que se desea conocer el valor de una opción call europea sobre una acción de Google que el día 3 de junio de 2012 tiene un valor de 570.98 dólares. En tal opción se estipula que el precio de ejercicio es 570.98 dólares, se considera la tasa de interés interbancaria de equilibrio (TIIE) a 28 días del mes de junio de 2012, además nos interesa que la fecha de maduración sea el 15 de junio de 2012, además, invirtiendo la fórmula de Black-Scholes apartir de un valor de una opción sobre la misma acción pero con diferente fecha de maduración, obtenemos la volatilidad implícita igual a 0,3832

El valor de esta opción en el mercado es de 18.1031 dólares. En la Tabla 1 y en la Figura 4 se observan los valores teóricos de la opción en cuestión al utilizar los modelos trinomiales CRR, JR y el equiprobable con distintos números de pasos:

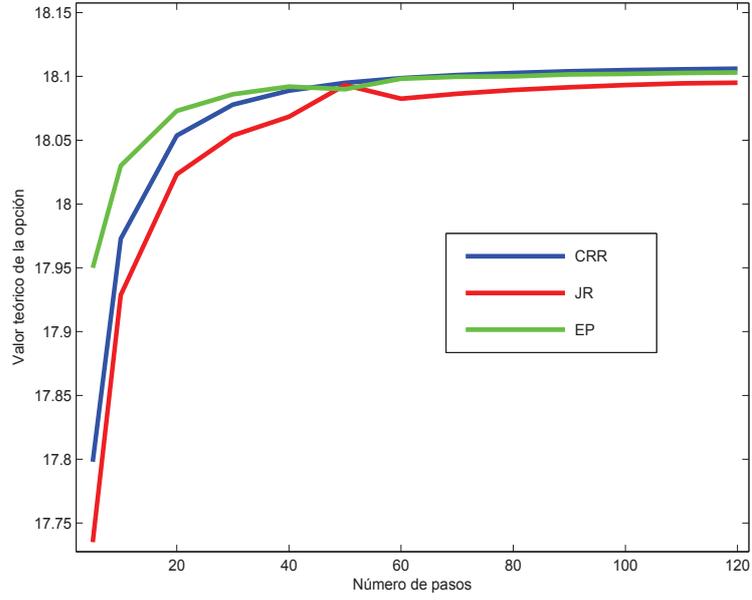


FIGURA 4. Convergencia del modelo binomial y trinomial al modelo de Black, Scholes y Merton

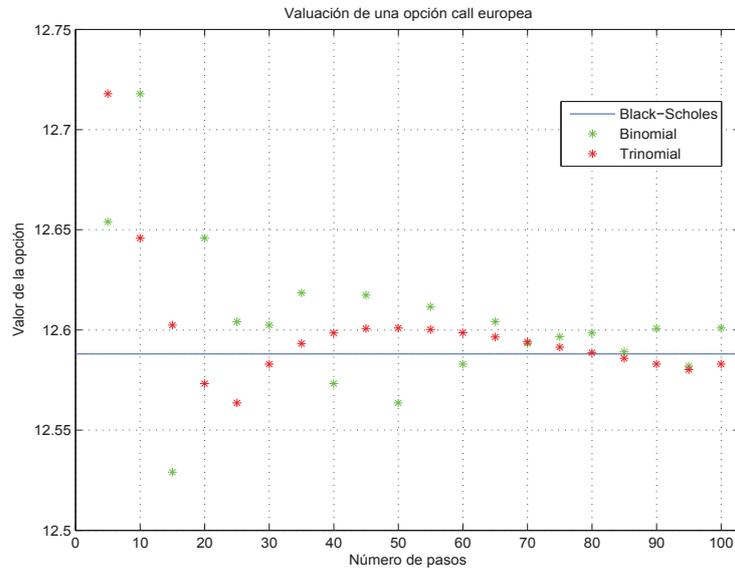


FIGURA 5. Convergencia del modelo binomial y trinomial al modelo de Black, Scholes y Merton

En la figura 5, se puede observar la convergencia de los modelos binomial y trinomial al modelo de Black-Scholes.

Modelo	Número de pasos										
	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
CRR	17.79	17.97	18.05	18.07	18.09	18.09	18.09	18.10	18.107	18.10398	18.1049
JR	17.73	17.92	18.02	18.05	18.06	18.09	18.08	18.09	18.089	18.0915	18.0932
EP	17.95	18.03	18.07	18.08	18.09	18.09	18.09	18.09	18.10	18.10	18.102

FIGURA 6. Prueba de Durbin-Watson para  $p = 2$  y  $\rho = 0$ .

**Ejemplo 4.2.** Se desea valorar una opción call europea sobre un activo subyacente cuyo precio actual es \$100. En el contrato opción se estipula que el precio de ejercicio es \$95, se toma en cuenta que la tasa de interés interbancaria libre de riesgo es 10 % y que el contrato vence medio año después (esto es,  $T = 0,5$ ), además se considera una volatilidad de 0,25.

El valor de la opción dado con la fórmula de Black, Scholes y Merton es 12,588. Con 100 pasos el modelo binomial arroja un valor de 12,6 y el modelo trinomial de 12,583.

En la figura 6 de este ejemplo se observa una mejor convergencia del modelo trinomial comparado con el modelo binomial, el precio arrojado con 100 pasos por el modelo binomial no es tan bueno como el dado por el trinomial.

### 5. CONCLUSIONES

El modelo de árboles trinomiales es un algoritmo eficiente para la valuación de opciones europeas, que no es computacionalmente mucho mas pesado que el modelo binomial. En los ejemplos se observo una mejor convergencia del modelo trinomial al modelo de Black, Scholes y Merton, que el dado por el modelo binomial.

### REFERENCIAS

- [1] J. Hoek, R. J. Elliot, *Binomial Models in Finance*, Springer, 2006.
- [2] J.C Cox, S.A. Ross, M. Rubinstein, *Option Pricing: A Simplified Approach*, Journal of Financial Economics, Vol. 7, Issue 3, paginas 229-263, 1979.
- [3] M. Capiński, T. Zastawniak, *Mathematics for Finance*, Springer, United States of America, 2003.
- [4] E. Derman, I. Kani, *Implied Trinomial Trees of de Volatility Smile*, Quantitative Strategies Research Notes, 1996, paginas 25.
- [5] D. J. Higham, *An Introduction to Financial Option Valuation*, Cambridge, Primera edición, 2004.
- [6] J. C. Hull, *Options, Futures and other Derivatives*, Prentice Hall, Cuarta edición, 1996.
- [7] P. Wilmont, S. Howison, J. Dewynne, *The mathematics of financial Derivatives*, Cambridge University Press, New York, 1995.
- [8] F. Venegas, *Riesgos financieros y económicos*, CENGAGE Learning, Segunda edición, 2008.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel  
Puebla, Pue. C.P. 72570  
204702072@fcfm.buap.mx, vvazquez@fcfm.buap.mx

# CAPÍTULO 14

## UNA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE OPCIONES AL REASEGURO NO PROPORCIONAL

REBECA ANTONIO ZAMBRANO<sup>1</sup>

ABRAHAM CUESTA BORGES<sup>3</sup>

JUANA ELISA ESCALA VEGA <sup>3</sup>

CARLOS PALOMINO JIMÉNEZ<sup>2</sup>

FRANCISCO SALEM SILVA<sup>3</sup>

FRANCISCO SOLANO TAJONAR SANABRIA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>FCFM, BUAP,

<sup>2</sup>FACULTAD DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN, BUAP

<sup>3</sup>UNIVERSIDAD VERACRUZANA

RESUMEN. El proceso asegurador se caracteriza principalmente por la variable aleatoria “siniestralidad” la cual se estudia en Teoría Clásica de Riesgo considerando variables aleatorias básicas: número de siniestros, cuantía del siniestro; y la estabilidad del proceso asegurador. Cuando los efectos de las variaciones de la siniestralidad son muy altas pueden llevar a la aseguradora a la ruina. Es en este momento cuando aparece el Reaseguro como un mecanismo para distribuir el riesgo y eliminar parte de las pérdidas ocasionadas por la ocurrencia de siniestros con alto costo, pues la aseguradora busca disminuir el riesgo de que las primas cobradas se vuelvan insuficientes.

Las opciones son otro medio que se puede utilizar para ampararse frente a un riesgo. Una opción protege ante una variación en los precios ya que la opción se puede ejercer o no según sea el beneficio que se espere. Un seguro protege ante una adversidad, cubre los gastos cuando una situación inesperada ocurre. En ambos casos se paga una cuota por cubrir dicho suceso.

El objetivo de este trabajo es mostrar como el modelo de valuación de opciones europeas se puede adaptar al cálculo de primas para el Reaseguro no proporcional.

### 1. INTRODUCCIÓN

La forma tradicional de calcular las primas de seguros se ha dado a través de métodos actuariales. El proceso asegurador se caracteriza principalmente por la variable aleatoria “siniestralidad” la cual es ampliamente estudiada en la Teoría Clásica de Riesgo [3,6], considerando las variables aleatorias básicas: número de siniestros y cuantía del siniestro; y la estabilidad del proceso asegurador. Cuando los efectos de las variaciones de la siniestralidad son muy altas pueden llevar a la empresa aseguradora a la ruina. Es en este momento cuando aparece el reaseguro como un mecanismo para distribuir el riesgo y eliminar parte de las pérdidas ocasionadas por la ocurrencia de siniestros con alto costo, pues la compañía aseguradora busca disminuir el riesgo de que las primas cobradas se vuelvan insuficientes.

Existen distintos tipos de reaseguros, por la relación legal que son contratados: Reaseguro automático y Reaseguro facultativo; y por la forma en que actúan en determinado siniestro: Reaseguro proporcional y Reaseguro no proporcional. Los

contratos de reaseguro tienen una cantidad límite a partir de la cual paga el asegurado y a partir de la cual paga el reasegurador, las primas, en su mayoría, se suscriben por año, llegada esta fecha de vencimiento se puede renovar el contrato o bien negociar con otra empresa reaseguradora.

Además de los seguros, las opciones son otro medio que se puede utilizar para ampararse frente a un riesgo. Una opción protege ante una variación en los precios ya que la opción se puede ejercer o no según sea el beneficio que se espere. Un seguro protege ante una adversidad, cubre los gastos cuando una situación inesperada ocurre [2]. En ambos casos se paga una cuota por cubrir dicho suceso, la cual se le llama **prima**.

## 2. EL SISTEMA DE LOS SEGUROS

Antes de dar la definición formal de lo que es el reaseguro, así como los tipos y características de los mismos, es importante dar una descripción de lo que es el seguro y por tanto, analizar cuales son los riesgos que enfrenta una compañía aseguradora y por que la necesidad de reasegurarse.

Los sistemas de seguros ofrecen alivio frente a pérdidas de un siniestro en las cuales el número, tamaño o momento de ocurrencia es aleatorio. Si el asegurado tiene el control sobre la ocurrencia de la pérdida o si la reclamación excede la pérdida financiera existirá un incentivo para que la pérdida ocurra. Bajo esta situación el seguro no cumplirá con el objetivo de aumentar las utilidades esperadas tanto del asegurado como del asegurador.

Cuando se organiza un nuevo seguro es importante conocer la información anterior sobre situaciones de riesgos similares para realizar estimaciones preliminares y determinar el pago que realiza el asegurado, así como el monto que la aseguradora cubrirá por el riesgo aceptado, ver [5,6].

Para que un sistema de seguros sea estable es esencial que ciertas características se cumplan:

1. Gran número de asegurados:  
El valor esperado del monto de los siniestros aumenta o es mayor si la población asegurada es grande.
2. Valores a riesgo homogéneo:  
Tener mayor homogeneidad en las sumas aseguradas implica que la varianza sea menos en cuanto al monto total de los siniestros.
3. Cálculos adecuados:  
Lo que paga el asegurado debe estar relacionado con la información del riesgo a cubrir.

Aunque las características antes mencionadas puedan cumplirse, existen otros riesgos que el seguro puede enfrentar, algunos de ellos son:

1. Riesgo por desvío en las bases demográficas:  
Un ejemplo de ello es cuando surgen epidemias incontrolables que afectan a gran parte de la población.
2. Riesgo por la acumulación de siniestros en un evento:  
Es la acumulación de siniestros que se ven afectados por un mismo evento catastrófico, como en el caso de un terremoto, un huracán o accidente aéreo.

## 3. Riesgo por antiselección:

Cuando el asegurado tiene ventajas por cotizaciones no detalladas [2,5].

## 3. CÁLCULO DE PRIMAS

El seguro se sustenta por la cantidad de dinero que cada asegurado acuerda pagar a la compañía aseguradora, a esta cantidad se le conoce como “prima”. La suma de todas las primas recogidas se utilizan para pagar los posibles siniestros ocasionados por el conjunto de asegurados durante el período de tiempo establecido. Así que, el asegurado evita pagar la cuantía de sus siniestros sustituyéndola por el pago de esa cierta cantidad de dinero, la prima.

La prima debe representar el pago adecuado que una compañía de seguros debe cobrar por un contrato a un individuo. Para su obtención la compañía debe conocer la distribución del número de siniestros, de la cuantía del siniestro o bien del costo total.

Lo deseable sería que el conjunto de asegurados que comparten sus gastos pagando una misma prima sea lo más homogéneo posible en cuanto a sus riesgos se refiere, pues si no fuera así, los asegurados que generan más gastos a la compañía deben pagar primas mayores.

La prima debe cumplir con las siguientes propiedades

1. Simplicidad. El cálculo de la prima debe ser fácil de calcular.
2. Consistencia. Si un riesgo se incrementa en una constante, la prima debe reflejar el cambio incrementándose en la misma cantidad.
3. Aditividad. La prima de un portafolio que consiste de riesgos independientes debe ser la suma de las primas individuales.

La **prima pura** es la componente esencial en el precio del seguro, ya que esta destinada a acumular la recaudación suficiente para hacer frente a los siniestros ocurridos, esta prima esta dada por

$$(1) \quad p = E(S),$$

donde  $S$  es la variable aleatoria que representa el monto acumulado de reclamaciones y a la cual también se le llama **riesgo** [3,6]. Esta prima parece ser justa para el asegurado, sin embargo, para el asegurador no lo es. Veamos la siguiente situación:

Consideremos un portafolio con  $n$  pólizas de seguro de un mismo riesgo, válidas por un tiempo determinado. Supóngase que se cobra una misma prima  $p$  por cada póliza y que  $S_j$  representa el monto de las reclamaciones efectuadas por la póliza  $j$ , los cuales son independientes e idénticamente distribuidas. Si se considera que  $u$  es el capital inicial de la aseguradora, entonces el capital que se obtiene al término de la vigencia de las pólizas es

$$(2) \quad X_n = u + np - \sum_{j=1}^n S_j.$$

Ahora, tomando esperanzas en ambos lados de la ecuación anterior y utilizando (1) se obtiene que

$$(3) \quad E(X_n) = u + n(p - E(S)) = u,$$

esto es, la compañía aseguradora permanece con su capital inicial.

Si la cartera fuera infinita, unos riesgos se compensarían con otros y los ingresos obtenidos serían suficientes para asegurar la solvencia de la empresa. En la práctica no es así, debe tomarse en cuenta que la prima debe ser suficiente no sólo para el pago de las reclamaciones esperadas sino también para cubrir los gastos administrativos y comisiones, y proveer un margen por riesgo y utilidad, por ello es necesario agregar un recargo por seguridad con la prima pura para asegurar la solidez de la aseguradora.

Gracias a este recargo se obtiene una reserva que permite hacer frente a las desviaciones imprevistas de la siniestralidad.

Enseguida se presentan algunos principios para calcular las primas de manera general.

**Principio del valor esperado:** Este principio establece que la prima se puede calcular de la siguiente forma

$$(4) \quad p = (1 + d)E(S), \quad d > 0.$$

La constante  $d$  se conoce como factor de recargo.

Este principio atribuye la misma prima a dos riesgos con distinta distribución pero con media común, sin considerar otras características.

**Principio de la varianza:** En este principio el factor de recargo,  $d > 0$ , se aplica sobre la varianza y establece que

$$(5) \quad p = E(S) + dV(S).$$

Además de estimar la siniestralidad media del riesgo, proporciona un recargo de seguridad para las desviaciones aleatorias de la siniestralidad.

**Principio de la desviación estándar:** Este principio establece que

$$(6) \quad p = E(S) + d\sqrt{V(S)}.$$

El factor de recargo  $d > 0$  se aplica sobre la desviación estándar del riesgo.

Una vez que se ha hecho una descripción acerca de lo que es un sistema de seguros procedemos al análisis del reaseguro.

#### 4. REASEGURO

En un inicio el reaseguro se consideró como una medida para cubrir un acto imprudente al aceptar un riesgo. El asegurador sin afectar su obligación con el asegurado, toma medidas para protegerse contra las mismas obligaciones con otro asegurador mejor informado o con mayores posibilidades financieras. El primer documento que contiene todos los puntos básicos de lo que hoy es una póliza de seguros, fue emitido en 1347 en Génova, Italia, y se trata de un seguro marítimo de mercancías, por otro lado, el primer contrato de reaseguro se firmó en Génova en 1370.

La técnica de reaseguro mejoró y acumuló gran experiencia en cuanto al reaseguro de riesgo por riesgo, el procedimiento seguido hasta hoy se basó en este tipo de reaseguro y el nuevo sistema que se estableció fue el **reaseguro por contrato** [2,5].

**Definición 4.1.** El reaseguro es un convenio que una compañía de seguros (cedente) celebra con otra compañía (aceptante) para ampararse de las consecuencias de los seguros que ha otorgado en cuanto éstas excedan de su capacidad transfiriendo el total o parcialmente los riesgos.

Visto de manera simple, el reaseguro es una forma aseguradora de segundo grado.

Las causas por las que una compañía de seguros busca reasegurarse son:

1. Disminuir el riesgo de una posible pérdida, es decir, que el monto de los siniestros no sobrepase una cierta cantidad y de esta forma estabilizar los resultados.
2. Ampliar la aceptación de riesgos sin tener que exponer sus propios recursos, lo que le permite aumentar el volumen de sus negocios.

Una ventaja del reaseguro es que la reaseguradora puede brindar información técnica, experiencia en cuanto a causas de siniestralidad y asesoría en la selección de riesgos.

## 5. CLASIFICACIÓN DEL REASEGURO

Existen varios tipos de reaseguro, como la finalidad no es hablar de todas las modalidades que existen, sólo se mencionan las formas más comunes.

**5.1. Por la Forma de Contratación.** De acuerdo a la relación legal que existe entre la cedente y la aceptante, se divide al reaseguro en: facultativo y automático.

### **Facultativo**

Esta forma permite al aceptante tratar cada riesgo propuesto individualmente el cual puede asumir o rechazar. La cedente como la aceptante tienen completa libertad para ceder o aceptar los riesgos. Este tipo de reaseguro permite a la compañía asumir riesgos que presenten con más frecuencia pérdidas superiores a la normal.

### **Automático**

Consiste de un contrato obligatorio entre la cedente y la aceptante, en el cual se establecen las características de los riesgos a cubrir. Como su nombre lo dice, la duración del contrato es continuada y su renovación es automática.

**5.2. Por la Forma en que Operan.** Se divide al reaseguro en dos grupos: el reaseguro proporcional y el reaseguro no proporcional. También se les conoce como reaseguro de riesgos y reaseguro de siniestros, respectivamente.

### **Reaseguro Proporcional**

Este tipo de reaseguro procede a través de la distribución equitativa de las primas y los siniestros ocurridos. Es decir, la cedente aporta un porcentaje de las primas recaudadas y en este mismo porcentaje la aceptante se responsabiliza de los siniestros.

Esta modalidad de reaseguro está dividida en los siguientes tipos: Cuota parte y Excedente.

#### a) Cuota Parte

En este contrato el aceptante toma un porcentaje fijo para todos los riesgos y se responsabiliza con el mismo porcentaje en todos los siniestros. Bajo esta forma de contrato, la cedente puede sumar riesgos libremente siempre y cuando no se

exceda el límite de contrato, aunque se obliga a ceder los riesgos que podría retener por cuenta propia. El aceptante no aplica ningún criterio de cesión, recibe en igual proporción riesgos buenos y malos.

b) Excedente

Este contrato es semejante al de Cuota Parte, la diferencia radica en que la cedente no transfiere todos los riesgos, sólo los que sobrepasan una determinada cantidad. Los riesgos que la cedente pueda retener en su totalidad no tendrán que ser cedidos. El porcentaje cedido varía riesgo por riesgo.

### Reaseguro No Proporcional

También llamado “**reaseguro de siniestros**”. Una característica esencial de este reaseguro, es que la totalidad de primas es retenida por la cedente, lo que le permite cubrir siniestros hasta un cierto monto llamado prioridad.

La finalidad de este tipo de reaseguros es amparar a la cedente cuando los siniestros excedan a la prioridad. Las formas en que se desarrolla son: Stop-Loss y Excess-Loss

a) Reaseguro Excess-Loss

En esta modalidad el reasegurador se responsabiliza de la parte de cada siniestro que sobrepasa una cantidad, llamada prioridad. La cedente fija su retención en forma de una cantidad deducible por siniestro. Esta cantidad se fija:

Por riesgo

En este tipo de contrato se cubre el monto del siniestro individual que sobrepasa la prioridad hasta una cantidad llamada “**Capacidad**”. Este contrato trabaja los riesgos de manera individual.

De catástrofe

Llamado CatXL o catástrofico. Este contrato se aplica cuando ocurre un número mínimo de riesgos y que el monto acumulado no supere la prioridad.

b) Reaseguro Stop-Loss

En este contrato se protege a la cedente en caso de que el monto acumulado de los siniestros, en un período de tiempo, sobrepase cierta prioridad. Cuando esto ocurre, la aceptante es responsable por el monto excedente de la prioridad hasta un límite. Generalmente la prioridad se expresa en un cierto porcentaje de las primas totales del conjunto de pólizas protegidas por la aseguradora.

Lo anterior se presenta en el caso de un contrato Stop-Loss con capacidad ilimitada; también existen contratos Stop-Loss en los que la aceptante se hace responsable del monto de los siniestros que exceden a la prioridad hasta una determinada cantidad llamada “**Capacidad del contrato de reaseguro**”. En este caso, la cedente puede reasegurar el riesgo restante o bien conservarlo.

Al igual que la prioridad, la capacidad de contrato y la prima stop-loss se expresan en un porcentaje de las primas totales del conjunto de pólizas aseguradas.

## 6. MEDIA Y VARIANZA DEL REASEGURO NO PROPORCIONAL

Tanto en el seguro excess-loss como en el stop-loss, la variable aleatoria que representa el monto total de los siniestros que asumen la cedente y la aceptante esta determinada por:

Sea  $M$  la prioridad y  $S$  el monto total de los siniestros, entonces:

$$\text{Si } 0 < S \leq M; \text{ entonces, } \begin{cases} \text{la cedente paga : } S, \\ \text{la aceptante paga : } 0. \end{cases}$$

$$\text{Si } M < S < \infty; \text{ entonces, } \begin{cases} \text{la cedente paga : } M, \\ \text{la aceptante paga : } S - M. \end{cases}$$

Si el monto total de los siniestros supera a la prioridad hasta la capacidad, entonces la variable aleatoria que representa el monto total de los siniestros que asumen la cedente y la aceptante está determinada por:

$$\text{Si } 0 < S \leq M; \text{ entonces, } \begin{cases} \text{la cedente paga : } S, \\ \text{la aceptante paga : } 0. \end{cases}$$

$$\text{Si } M < S \leq M + C; \text{ entonces, } \begin{cases} \text{la cedente paga : } M, \\ \text{la aceptante paga : } S - M. \end{cases}$$

$$\text{Si } M + C < S < \infty; \text{ entonces, } \begin{cases} \text{la cedente paga : } S - C, \\ \text{la aceptante paga : } C. \end{cases}$$

donde  $C$  es la capacidad del contrato.

Con base en lo anterior se puede determinar que la función de distribución de la siniestralidad antes del reaseguro tiene la forma siguiente

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)V(s),$$

donde  $P(n)$  es el número de siniestros y  $V(s)$  el valor de un siniestro.

Después del reaseguro, la distribución toma la siguiente forma

$$F_r(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)V_r(s),$$

con  $V_r(s)$  el nuevo valor del siniestro después del reaseguro.

Además, es claro que el monto total de los siniestros se puede ver como la suma de los montos asumidos por la cedente y la aceptante. Por tanto, el valor esperado

del monto de los siniestros acumulados es igual a la suma de los valores esperados de los montos asumidos por la cedente y la aceptante. Es decir,

$$(7) \quad S = S_c + S_a,$$

y

$$E(S) = E(S_c) + E(S_a).$$

## 7. OPCIONES

El estudio de la Teoría de opciones inicia en 1900 con la tesis doctoral sobre la teoría de la especulación de Bachelier, alumno de la universidad de la Sorbonne, véase [8].

En 1973, Black y Scholes derivaron una fórmula exacta para el precio de una opción de compra europea suscrita sobre una acción. En 1976, Merton analizó la valuación de derivados suponiendo procesos estocásticos más complejos para el precio del activo subyacente. Gracias al desarrollo de esta teoría Scholes y Merton obtuvieron el premio Nobel de economía en 1997.

En los últimos años, Hull, White y Rubinstein, entre otros, han trabajado en la valuación de las denominadas opciones exóticas, derivados diseñados por una institución financiera para satisfacer las necesidades específicas de un cliente.

Hoy en día la Teoría de Opciones se ha convertido en un importante eje de referencia en la concepción y el desarrollo de los mercados financieros modernos. Dicha teoría, ha impactado en el campo de las finanzas por sus amplias aplicaciones de innovación financiera, la valuación de inversiones, las finanzas corporativas y también en el campo actuarial [4,8].

Las opciones pertenecen a una clase de instrumentos llamados “**derivados**”, la característica más importante es que su valor depende de otro bien o activo subyacente, como: acciones comunes, pagares, metales (oro, plata) y mercancías (ganado, maíz, algodón, azúcar, trigo). Otra característica es que a cambio de un pago, dan el derecho de comprar o vender un activo a un precio y tiempo establecido. De manera más formal se tiene la siguiente definición.

**Definición 7.1.** Una opción, es un contrato que le da al comprador el derecho pero no la obligación, de comprar o vender un activo, a un precio especificado en un tiempo establecido.

Existen dos clases elementales de opciones: opción de compra y opción de venta.

**Definición 7.2. Opción de venta (put)** Es un contrato de opción que da a quién la posee el derecho a vender un bien a un precio determinado en un tiempo establecido.

**Definición 7.3. Opción de compra (call)** Es el contrato que le da a su tenedor el derecho de comprar un bien en una fecha pactada y a un precio especificado.

La fecha en que los contratos tienen validez es otra característica que define a las opciones, ver [1]. Entre ellas se encuentran las opciones europeas, americanas, etc. En este caso sólo se trabaja con las opciones europeas, a continuación damos la siguiente definición.

**Definición 7.4. Opción Europea** es un contrato que sólo puede ejercerse en la fecha de vencimiento.

Como puede notarse participan dos figuras: los que compran opciones y los que las venden. Los compradores pueden adquirir una opción de compra o una de venta. Una opción de compra tiene valor si el precio de la acción es mayor al precio convenido o precio de ejercicio, si el precio de la acción es menor al precio de ejercicio el valor de la opción de compra es cero. Ocurre lo contrario de lo que sucede con el valor de una opción de compra cuando se trata de una opción de venta.

Quien vende una opción debe entregar las acciones al comprador de la opción si este hace uso de sus derechos. Si el precio de la acción en el mercado es mayor que el precio de ejercicio, el comprador ejerce la opción de compra y además tiene una ganancia, en el caso contrario, no ejercerá dicha opción y su pérdida es el valor de la opción.

El que vende una opción de venta tendrá una pérdida cuando el precio de la acción en el mercado sea menor que el precio de ejercicio y el comprador de la opción de venta ejercerá dicha opción.

## 8. MODELO BLACK-SCHOLES

Considere un proceso de Wiener  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  definido en un espacio fijo de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  adaptado a la filtración  $\mathcal{F}_t$ , ver [4, 7, 8]. Se supone que el precio de una acción al tiempo  $t$ ,  $S_t$ , es modelado por el movimiento Browniano geométrico

$$(8) \quad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

En este caso, el parámetro de tendencia,  $\mu \in \mathbb{R}$  es el rendimiento medio esperado del activo subyacente y  $\sigma > 0$ , la volatilidad instantánea por unidad de tiempo. De acuerdo con el Lema de Itô se obtiene

$$(9) \quad d(\ln S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t.$$

Luego, si se toma  $\Delta t = T - t$ , se obtiene

$$\ln(S_T) - \ln(S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t) + \sigma\sqrt{T - t}\mathcal{E},$$

donde  $\mathcal{E} \sim N(0, 1)$ . Por tanto,

$$(10) \quad \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t), \sigma^2(T - t)\right).$$

El rendimiento logarítmico tiene distribución normal con la misma varianza del cambio porcentual de  $S_t$ , pero con parámetro de tendencia,  $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ , menor al rendimiento esperado  $\mu$ , para más detalles ver [8].

**8.1. Valuación Neutral al Riesgo.** Dado que la ecuación (8) considera el rendimiento esperado  $\mu$ , la ecuación no es independiente del riesgo al que se exponen los agentes que participan en el mercado.

Entre mayor sea la exposición al riesgo mayor es el rendimiento esperado,  $\mu$ , a fin de que la ganancia,  $v = \mu - r$ , sea atractiva. Si se supone que no se necesita de una ganancia para entrar al mercado, entonces  $v = 0$  y  $\mu = r$ .

Otra forma de medir consiste, en estandarizar a  $v$  por unidad de desviación estándar, es decir;  $\lambda = \frac{v}{\sigma}$ . Si se supone lo anterior, entonces  $\lambda = 0$  y  $\mu = r$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma S_t \left( \frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t \right) \\ &= rS_t dt + \sigma S_t (\lambda dt + dW_t). \end{aligned}$$

Bajo el supuesto de neutralidad al riesgo se tiene que  $\lambda = 0$  y (8) toma la siguiente forma

$$(11) \quad dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

En tal caso se dice que el movimiento Browniano esta definido sobre una medida de probabilidad neutral al riesgo.

**8.2. Función de Densidad del Precio del Activo Subyacente.** Si se utiliza la expresión (10) se tiene que  $\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)$  tiene una distribución normal con media  $(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)$  y varianza  $\sigma^2(T - t)$ . Sea  $\mathcal{E} \sim N(0, 1)$  con función de densidad

$$\Phi(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Definimos,

$$(12) \quad g(\mathcal{E}) = S_T = S_t \exp \left\{ \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t) + \sigma \sqrt{T - t} \mathcal{E} \right\},$$

entonces,

$$(13) \quad g^{-1}(S_T) = \frac{\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}.$$

Así, la función de densidad de probabilidad de  $S_T$  dado  $S_t$ , esta dada por

$$f_{S_T|S_t}(s | S_t) = \Phi(g^{-1}(s)) \left| \frac{dg^{-1}(s)}{ds} \right|.$$

Observe que,

$$\left| \frac{dg^{-1}(s)}{ds} \right| = \frac{1}{s\sigma\sqrt{T - t}}.$$

Luego,

$$(14) \quad f_{S_T|S_t}(s | S_t) = \frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\}.$$

**8.3. Media y Varianza del Precio del Activo Subyacente.** El valor esperado del precio del subyacente al vencimiento  $T$ , es una cantidad que sirve como referencia para calcular el precio de ejercicio de la opción.

A partir de la expresión (13), se tiene,

$$\epsilon = \frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Entonces,

$$(15) \quad s = S_t \exp \left\{ \epsilon\sigma\sqrt{T-t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \right\}.$$

Por tanto,

$$(16) \quad ds = S_t \exp \left\{ \epsilon\sigma\sqrt{T-t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \right\} \sigma\sqrt{T-t} d\epsilon,$$

ó

$$ds = s\sigma\sqrt{T-t} d\epsilon.$$

Utilizando (15), se calcula el valor esperado de  $S_T$  dado  $S_t$ .

$$(17) \quad \begin{aligned} E(S_T | S_t) &= \int_0^\infty s f_{S_T|S_t}(s | S_t) ds \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \\ &\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} ds \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} \\ &\quad S_t \cdot \exp \left\{ \epsilon\sigma\sqrt{T-t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \right\} \sigma\sqrt{T-t} d\epsilon \\ &= S_t \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ \sigma\sqrt{T-t}\epsilon + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \right\} d\epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= S_t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\
&\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \epsilon^2 - 2\sigma\sqrt{T-t}\epsilon + \sigma^2(T-t) \right] \right\} e^{r(T-t)} d\epsilon \\
&= S_t e^{r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \epsilon - \sigma\sqrt{T-t} \right)^2 \right\} d\epsilon.
\end{aligned}$$

$$\text{Si } u = \epsilon - \sigma\sqrt{T-t},$$

$$\begin{aligned}
&= S_t e^{r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\
&= S_t e^{r(T-t)}.
\end{aligned}$$

El segundo momento de  $S_T$  dado  $S_t$  esta dado por

$$\begin{aligned}
E(S_T^2 | S_t) &= \int_0^{\infty} s^2 f_{S_T|S_t}(s | S_t) ds \\
&= \int_0^{\infty} \frac{s}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} ds \\
&= S_t^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} \\
&\cdot \exp \left\{ 2 \left( \epsilon\sigma\sqrt{T-t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \right) \right\} \sigma\sqrt{T-t} d\epsilon \\
&= S_t^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} e^{2\epsilon\sigma\sqrt{T-t}} e^{2(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} d\epsilon \\
&= S_t^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2}[\epsilon^2 - 4\sigma\sqrt{T-t}\epsilon + 4\sigma^2(T-t)]} \\
&\cdot e^{[2\sigma^2(T-t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]} d\epsilon \\
&= S_t^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon - 2\sigma\sqrt{T-t})^2} e^{\sigma^2(T-t) + 2r(T-t)} d\epsilon.
\end{aligned}$$

$$\text{Sea } w = \epsilon - 2\sigma\sqrt{T-t}$$

$$\begin{aligned}
E(S_T^2 | S_t) &= S_t^2 e^{\sigma^2(T-t) + 2r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw \\
&= S_t^2 e^{(\sigma^2 + 2r)(T-t)}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} V[S_T | S_t] &= E[S_T^2 | S_t] - (E[S_T | S_t])^2 \\ &= S_t^2 e^{(\sigma^2 + 2r)(T-t)} - S_t^2 e^{2r(T-t)} \\ &= S_t^2 e^{2r(T-t)} \left( e^{\sigma^2(T-t)} - 1 \right). \end{aligned}$$

**8.4. Valuación de una Opción Europea de Compra.** El precio de un call europeo en  $t$ , con precio de ejercicio  $K$  y vencimiento en  $T$ ,  $C = c(S_t, t; T, K, r, \sigma)$  esta dado por el valor esperado del valor presente sobre el valor positivo al momento de ejercer la opción, esto es,

$$\begin{aligned} C &= e^{-r(T-t)} E\{\max(S_T - K, 0) | \mathcal{F}\} \\ C &= e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max(s - K, 0) f_{S_T|S_t}(s | S_t) ds \\ &= e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (s - K) f_{S_T|S_t}(s | S_t) ds \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{s>K} s f_{S_T|S_t}(s | S_t) ds - K e^{-r(T-t)} \int_{s>K} f_{S_T|S_t}(s | S_t) ds \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{s>K} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} ds \quad (I_1) \\ &- K e^{-r(T-t)} \int_{s>K} \frac{1}{s \sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} ds \quad (I_2) \end{aligned}$$

Para  $(I_1)$ , utilizando (16), tenemos que,

$$\begin{aligned} I_1 &= S_t e^{-r(T-t)} \int_{\left\{ \epsilon > \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} e^{\sigma \sqrt{T-t} \epsilon + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} d\epsilon \\ (18) &= S_t \int_{\left\{ \epsilon - \sigma \sqrt{T-t} > \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon - \sigma \sqrt{T-t})^2} d\epsilon, \end{aligned}$$

Sean,  $u = \epsilon - \sigma \sqrt{T-t}$ ,  $-\mathcal{E} \sim N(0, 1)$ ;

$$I_1 = S_t \int_{-\infty < u < \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

De manera análoga para  $(I_2)$ , se tiene

$$\begin{aligned} I_2 &= -Ke^{-r(T-t)} \int_{\left\{ \epsilon > \frac{\ln(\frac{K}{S_t}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\ (19) \quad &= -Ke^{-r(T-t)} \int_{-\infty < \epsilon < \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon. \end{aligned}$$

A partir de (18) y (19), obtenemos el siguiente resultado,

$$(20) \quad c = S_t \Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \Phi(d_2),$$

donde  $\Phi(d)$  es la función de distribución acumulada de  $\mathcal{E} \sim N(0, 1)$ , es decir,

$$\begin{aligned} \Phi(d) &= P_{\mathcal{E}}(\mathcal{E} \leq d) \\ &= \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon - \int_d^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\ &= 1 - \Phi(-d). \end{aligned}$$

Además,

$$(21) \quad d_1 = d_1(S_t, t; T, K, r, \sigma) = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

y

$$\begin{aligned} d_2 = d_2(S_t, t; T, K, r, \sigma) &= \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) - \sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ (22) \quad &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

**8.5. Valuación de una Opción de Venta Europea.** El precio de un put europeo en  $t$ , con precio de ejercicio  $K$  y vencimiento en  $T$ ,  $P = p(S_t, t; T, K, r, \sigma)$  está dado por el valor esperado del valor presente sobre el valor positivo al momento de ejercer la opción, esto es,

$$P = e^{-r(T-t)} E\{\max(K - S_T, 0) \mid \mathcal{F}\}.$$

De manera similar a la valuación de un call se puede ver que el precio de un put, está dado por

$$(23) \quad P = Ke^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1).$$

## 9. APLICACIÓN

De lo anterior se tiene que las opciones y los seguros son instrumentos que pueden resultar adecuados para cubrirse frente a un riesgo.

Para cubrirse ante una variación de precios se utilizan las opciones, las cuales se pueden ejercer o no. Un agente que se protege ante una adversidad puede adquirir un seguro, y el beneficio es la cobertura cuando la situación que se busca evitar ocurre. En los dos casos, se paga una prima, el valor que da el derecho a la cobertura del suceso. El suceso para el caso de las opciones es la desviación de precios para el agente; en el caso del seguro, el suceso es el siniestro. Cuando sucede el siniestro el agente pide el cubrimiento al que tiene derecho por haber pagado la prima pactada durante el período de tiempo acordado, para el caso de las opciones el agente realiza la operación de compra-venta a la que tiene derecho por haber pagado la prima pactada durante el período de tiempo acordado. En ambos casos, la no ocurrencia del suceso genera la pérdida del valor de la prima.

La realización de la operación de compra-venta en caso de que ocurra el suceso genera un ingreso para el agente comprador de la opción, de la misma manera que el cubrimiento del seguro genera, cuando ocurre el siniestro, un ingreso para el asegurado.

La estrategia de los agentes, en ambos casos consiste en maximizar su beneficio que está dado por el valor esperado del ingreso a recibir menos la prima. El período de tiempo en el que se establecen, las opciones como los seguros, se realiza en términos que se pueden considerar cortos, aunque un seguro se puede establecer en años, es posible retirarse del contrato en cualquier momento.

De manera similar, los contratos de opciones se suscriben por períodos de tiempo cortos o largos, pero en cualquier caso, el agente puede decidir ejercer o no ejercer la opción y sólo en la fecha de vencimiento cuando se trata de opciones europeas. En todo caso, los períodos para los que actualmente se negocian opciones en los mercados financieros raramente superan el año.

En el mercado de opciones se produce la transferencia de riesgos a través de la transferencia de contratos de un agente a otro, en el mercado de seguros el comprador del seguro está transfiriendo su riesgo de pérdida y la compañía de seguros, a su vez, cede su riesgo reasegurándose. La transferencia de un contrato de seguros puede generar ganancias en la medida en que el que transfiere incurre básicamente en gastos de intermediación.

Esto deja ver cómo las opciones y los seguros son instrumentos adecuados para protegerse frente al riesgo.

Estos puntos de coincidencia entre los contratos de opción y los contratos de seguro muestran, desde una perspectiva de cobertura, que la prima que se paga por la compra de una opción y la prima que se paga por un contrato de seguro debe ser equivalente siempre y cuando coincidan en el riesgo y el valor asegurado, así como los plazos. De esta manera una opción es un seguro y de ello se puede concluir que la prima pagada por una opción debe ser equivalente a la prima pagada por un reaseguro.

## 10. APLICACIÓN AL REASEGURO STOP-LOSS

El reaseguro Stop-Loss ya descrito puede ser tratado utilizando la teoría de opciones.

Considere un contrato Stop-Loss, para obtener un valor adecuado para la prima de la opción es necesario dar una relación entre las variables que se utilizan en el modelo Black-Scholes y las que se utilizan en un contrato de seguros. Para esto suponemos que:

1.  $S$  es la siniestralidad total de la compañía aseguradora, que en este caso se considera como el activo subyacente.
2. El período de tiempo que se considera en ambos casos es de un año.
3.  $M$  es la prioridad y  $C$  la capacidad, que se establecen igual al precio de ejercicio.

Recuerde que si al final del período, la siniestralidad supera la prioridad entonces la aceptante pagará la proporción  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , de los siniestros hasta el límite que es igual a la capacidad del contrato. Por tanto, la siniestralidad a cargo de la aceptante se establece de la siguiente forma:

$$S_a = \begin{cases} 0, & \text{si } S \leq M, \\ \alpha(S - M), & \text{si } M < S < C, \\ \alpha(S - C), & \text{si } S \geq C. \end{cases}$$

De acuerdo a esto, la siniestralidad que asume la aceptante al final del período establecido se escribe como:

$$\alpha (\text{Max}[S - M, 0] - \text{Max}[S - C, 0]).$$

Observe que  $\text{Max}[S - M, 0]$  y  $\text{Max}[S - C, 0]$  son dos opciones de compra de la siniestralidad,  $S$ , con precio de ejercicio  $M$  y  $C$  respectivamente.

Así, la responsabilidad que adquiere la aceptante que iguala el costo del contrato de reaseguro es la diferencia entre estas dos opciones de compra.

## 11. APLICACIÓN AL REASEGURO EXCESS-LOSS

El reaseguro Excess-Loss también puede verse como una opción de compra. Utilizando las mismas suposiciones que en la aplicación del reaseguro Stop-Loss y si además se supone que la cedente transfiere una parte de un siniestro sin límite superior, la aceptante pagará:

$$S_a = \begin{cases} 0, & \text{si } S \leq M, \\ S - M, & \text{si } S \geq M. \end{cases}$$

Lo cual se puede escribir como:

$$\text{Max}[S - M, 0].$$

Por lo que la aceptante compra, una opción de compra sobre el valor del siniestro con precio de ejercicio  $M$ .

Si la póliza tiene límite superior, es decir, supera a la prioridad hasta la capacidad entonces el valor que aporta la aceptante sobre la siniestralidad queda establecida de la siguiente forma:

$$\text{Max}[S - M, 0] - \text{Max}[S - C, 0].$$

Notese que en ambos casos, el funcionamiento del reaseguro es equivalente a la compra de una opción call.

## 12. CONCLUSIONES

Se utilizó la teoría clásica de riesgo para mostrar modelos actuariales del riesgo que enfrentan las compañías aseguradoras.

El modelo Black Scholes para valorar opciones se basa en una serie de supuestos que no necesariamente se cumplen en la realidad y que afectan directamente el precio de las opciones, entre estos supuestos estan: no se presentan movimientos bruscos en el precio del bien subyacente, en la realidad la mayoría de las opciones presenta saltos inesperados en sus precios, otro supuesto es que la volatilidad se supone constante, pero una variación puede cambiar el valor de la opción. A pesar de ello el modelo Black- Scholes es el modelo base de valuación de opciones.

El modelo Black-Scholes, deja ver, bajo la adaptación de las variables necesarias, que puede ser aplicado para valorar primas de reaseguros, de manera particular en el reaseguro no proporcional, y que dicho modelo no dista de las primas establecidas por medio del método actuarial, más bien permite una buena aproximación al precio que debe ser pagado por la compañía reaseguradora para protegerse ante un riesgo.

Bajo los supuestos de dicho modelo se obtuvo la prima de reaseguro, en este caso, para el reaseguro no proporcional la cual se establece como la deferencia de dos opciones de compra europeas.

El modelo se puede adaptar a la problemática de empresas de aseguramiento y de esta manera se considera un modelo alternativo cuya aplicación resulta adecuada para una buena estimación del valor de las primas de reaseguros.

## REFERENCIAS

- [1] Climent Hernández J.A., *Valuación de opciones*, Vinculos Matemáticos, N°. 38, Facultad de Ciencias, UNAM, 2005.
- [2] Del Pozo García Eva M<sup>a</sup>, *Aplicación de la Teoría de Opciones al Reaseguro*, Economía Financiera y Contabilidad I Facultad de C.C. Economicas y Empresariales U.C.M., N°. 25, 2001
- [3] H. Panjer Harry and Willmot Gordon E., *Insurance Risk Models*, Society of actuaries.
- [4] Klebaner F.C., *Introduction to Stochastic Calculus With Applications*, Second Edition, Imperial College Press, 2005.
- [5] Nava Ramirez Ricardo, *Métodos Prácticos para obtener la Prima del Reaseguro Stop-Loss en el seguro de Vida*, Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, 1998.
- [6] Rincón Luis, *Introducción a la Teoría del Riesgo*, Departamento de Matemáticas UNAM, México D.F., 2007.
- [7] Ross S.R., *Stochastic Processes*, Second Edition, John Wiley & Sons Inc., 1996.

- [8] Venegas Martínez Francisco, *Riesgos financieros y Económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Segunda edición. CENGANGE Learning, México D. F., 2008.  
1966.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel  
Puebla, Pue. C.P. 72570

Facultad de Estadística e Informática, Universidad Veracruzana  
AZARE82@hotmail.com, acuesta@u.v.mx, jescalante@u.v.mx  
carlos\_cpj@hotmail.com, ftajonar@fcfm.buap.mx.

# CAPÍTULO 15

## ENFOQUE BAYESIANO DE LOS PROCEDIMIENTOS DE LA ESTADÍSTICA VÍA LA TEORÍA DE LA DECISIÓN

GLADYS LINARES FLEITES<sup>2</sup>

ARTURO ABRAHAM LÓPEZ PÉREZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS, BUAP

<sup>2</sup>DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS AGRÍCOLAS, ICUAP

RESUMEN. Los métodos Bayesianos ofrecen una solución directa a los problemas que normalmente se plantean en la inferencia estadística: estimación y pruebas de hipótesis. Desde el punto de vista Bayesiano, la inferencia puede ser descrita técnicamente como un problema de decisión donde, todo lo que se puede decir sobre una cantidad de interés se encuentra en su correspondiente distribución final.

En este capítulo se exponen brevemente, las contrapartes Bayesianas de los procedimientos inferenciales, esto es, los procedimientos de estimación y pruebas de hipótesis vía la Teoría de la decisión.

### 1. INTRODUCCIÓN

La inferencia Bayesiana puede ser descrita técnicamente como un problema de decisión donde el espacio de acciones es la clase de las distribuciones de probabilidad final correspondientes a una cantidad de interés [7]. En el capítulo- *Fundamentos de la estadística Bayesiana* [10]- se revisan los elementos y procedimientos necesarios para la toma de decisiones cuantitativa, coherente. En particular, los elementos de un problema de decisión en el contexto de la inferencia son:

1.  $a \in \mathcal{A}$ - una clase de “respuestas” válidas para el problema de inferencia.
2.  $\omega \in \Omega$ - Un conjunto de estados desconocidos de la naturaleza.
3.  $u : \mathcal{A} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ - una función que asigne una utilidad a la consecuencia  $(a, \omega)$  de cada decisión, tal que permita resumir la inferencia a la forma de una “respuesta”,  $a \in \mathcal{A}$ , y un estado consecuente  $\omega \in \Omega$ .
4.  $p(\omega)$ - una distribución de probabilidad, que especifique la creencia sobre el posible estado de la naturaleza.

La elección de una respuesta óptima para un problema de inferencia no es más que un elemento  $a \in \mathcal{A}$  que maximiza la utilidad esperada [4]:

$$\int_{\Omega} u(a, \omega)p(\omega)d\omega.$$

Alternativamente, si en lugar de emplear la función de utilidad,  $u(a, \omega)$ , se emplea la llamada función de pérdida:

$$l(a, \omega) = f(\omega) - u(a, \omega),$$

donde  $f$  es una función arbitraria fija, la elección optima será un elemento  $a \in \mathcal{A}$  que minimiza la pérdida esperada:

$$\int_{\Omega} l(a, \omega) p(\omega) d\omega.$$

Debe notarse que la evaluación de la función de la utilidad (pérdida) esperada es necesaria para poder seleccionar la respuesta óptima, además, para que los estados desconocidos de la naturaleza proporcionen una base adecuada para la toma de decisiones, donde  $\mathcal{A}$  y  $u$  (o  $l$ ) pueden no estar especificados, se debe precisar completamente la distribución de creencia  $p(\omega)$ . Si sólo se especifica  $\mathcal{A}$  y  $u$  (o  $l$ ), la respuesta óptima que maximiza (minimiza) la utilidad (pérdida) esperada puede llegar a implicar sólo características limitadas y específicas de la distribución de creencia, por lo que, un “resumen” de la distribución completa es suficiente para la toma de decisiones [6].

En las siguientes secciones se explica y discuten algunas de las formas de “resumen” empleados, teniendo en cuenta que el contexto es sobre la inferencia paramétrica donde, los estados desconocidos de la naturaleza son los parámetros, “ $\omega$ ”, y sus creencias, “ $p(\omega)$ ”, que se reducen a:

- $p(\omega)$ - creencia inicial sobre un vector paramétrico.
- $p(\omega | x)$ - creencia sobre  $\omega$  dado los datos  $x$ .

## 2. NATURALEZA DE LA INFERENCIA BAYESIANA

Generalmente el análisis estadístico para determinados datos observacionales,  $D$ , comienza con alguna evaluación *descriptiva* informal, la cual es empleada para proponer, tentativamente, un *modelo de probabilidad* [5]:

$$\{p(D | \omega), \omega \in \Omega\},$$

asumiendo que, para algún valor (desconocido) de  $\omega$ , representa el mecanismo probabilístico que ha generado los datos  $D$ . Los argumentos presentados en el capítulo *Fundamentos de la estadística Bayesiana* [10], establecen la necesidad lógica para considerar una distribución inicial,  $p(\omega)$ , sobre el espacio paramétrico  $\Omega$  que describa el conocimiento inicial sobre el valor de  $\omega$  antes de que los datos sean observados. A partir de la teoría de la probabilidad, si el modelo es el correcto, se tiene que toda la información disponible sobre el valor  $\omega$ , una vez observados los datos  $D$ , estará contenida en la distribución condicional:

$$(1) \quad p(\omega | D) = \frac{p(D | \omega)p(\omega)}{\int_{\Omega} p(D | \omega)p(\omega)d\omega},$$

la cual, también se puede escribir como:

$$(2) \quad p(\omega | D) = c^{-1}p(D | \omega)p(\omega) \quad \text{con } c^{-1} = \int_{\Omega} p(D | \omega)p(\omega)d\omega.$$

La afirmación (1) (equivalentemente (2)), es citada como el *Teorema de Bayes* [9], donde  $p(\omega)$  es conocida como la distribución *inicial* y  $p(\omega | D)$  como la distribución *final*<sup>1</sup> de  $\omega$ , las cuales expresan el conocimiento que se tiene sobre  $\omega$  antes y después de la observación de los datos. La cantidad  $c^{-1}$  simplemente es una constante de *proporcionalidad*, necesaria para asegurar que  $p(\omega | D)$  sea una distribución

<sup>1</sup>Es común también referirse a estas distribuciones como la distribución *a priori* y *a posteriori*, respectivamente.

de probabilidad; este hecho, permite prescindir de esta constante para facilitar el cálculo de la distribución posterior, así, el teorema de Bayes puede ser, simplemente, expresado como:

$$(3) \quad p(\omega | D) \propto {}^2p(D | \omega)p(\omega).$$

Una técnica para identificar la forma de la distribución posterior, es identificar el *kernel* de la densidad de probabilidad correspondiente, esto es, identificar una función  $k(\omega)$  y alguna función  $c(D)$  que no involucre a  $\omega$ , tal que:

$$p(\omega | D) = c(D)k(\omega).$$

Cuando  $p(D | \omega)$  es considerada como una función no de  $D$  pero sí de  $\omega$ , es conocida como la *función de verosimilitud*,  $l(\omega | D) = p(D | \omega)$ . Por lo tanto, el teorema de Bayes afirma que: *La distribución posterior es proporcional a la verosimilitud por la distribución inicial* [9]:

$$\text{Posterior} \propto \text{Verosimilitud} \times \text{Inicial}.$$

La función de verosimilitud desempeña un papel importante en la fórmula de Bayes, ya que a través de ella, los datos modifican el conocimiento inicial sobre  $\omega$ , siendo, por lo tanto, considerada como la representación de la información sobre  $\omega$  proveniente de los datos. Además, se sigue de la ecuación (3) que, siempre que la misma distribución inicial  $p(\omega)$  es empleada para dos diferentes conjuntos de datos  $D_1$  y  $D_2$  con posiblemente, diferentes modelos de probabilidad  $p_1(D_1 | \omega)$  y  $p_2(D_2 | \omega)$  pero con función de verosimilitud *proporcional*, produzcan idénticas distribuciones posteriores para  $\omega$  [12]. Esta consecuencia inmediata del teorema de Bayes ha sido considerada como el *principio de verosimilitud* y es considerada como un requerimiento obvio para la inferencia estadística, sin embargo, el principio de verosimilitud sólo es aplicable para inferencias sobre el vector paramétrico  $\omega$  una vez que los datos han sido obtenidos.

Naturalmente, los términos distribución inicial y distribución posterior son relativos para un conjunto de datos particular. Así, de la coherencia inducida por la teoría de la probabilidad, uno debería esperar que si los datos  $D = \{x_1, \dots, x_n\}$  son presentados secuencialmente, el resultado final será el mismo si los datos son procesados global o parcialmente, es decir:

$$p(\omega | x_1, \dots, x_{i+1}) \propto p(x_{i+1} | \omega)p(\omega | x_1, \dots, x_i), \quad \text{para } i = \overline{1, n-1},$$

por lo que, la distribución *posterior* en un determinado momento se convierte en la distribución *inicial*. Cabe señalar que en muchas situaciones, la distribución posterior es más “nítida” que la distribución inicial, en otras palabras, en muchos casos la densidad  $p(\omega | x_1, \dots, x_{i+1})$  estará más próxima alrededor del verdadero valor de  $\omega$  que  $p(\omega | x_1, \dots, x_i)$ . Sin embargo, esto no siempre es el caso: ocasionalmente, una observación aberrante incrementará, más que decrementar, la incertidumbre sobre el valor de  $\omega$ .

Para un modelo de probabilidad dado, se puede encontrar alguna función particular de los datos  $t = t(D)$  que es *suficiente* en el sentido estadístico, es decir, para un modelo dado,  $t(D)$  contiene toda la información sobre  $\omega$  la cual está disponible en  $D$ . Formalmente,  $t = t(D)$  es suficiente si y sólo si existen funciones no-negativas  $f$  y  $g$  tal que la función de verosimilitud puede ser factorizada en la

---

<sup>2</sup> $\propto$ - denota *proporcional a*.

forma  $l(D | \omega) = f(\omega, t)g(D)$ . Note que una estadística suficiente siempre existe,  $t(D) = D$  es obviamente suficiente [3].

Es fácil establecer que si  $t$  es suficiente, la distribución posterior de  $\omega$  sólo depende de los datos  $D$  a través de  $t(D)$  y puede ser directamente calculada en términos de  $p(t | \omega)$ , así:

$$p(\omega | D) = p(\omega | t) \propto p(t | \omega)p(\omega).$$

Respecto a la especificación de la distribución de creencia, generalmente, se emplea una *función inicial impropia* que es definida como una función positiva  $\pi(\omega)$  tal que:

$$\int_{\Omega} \pi(\omega) \not\leq \infty.$$

El teorema de Bayes, continúa siendo técnicamente válido si  $p(\omega)$  es reemplazada por una función inicial impropia  $\pi(\omega)$ , siempre que la constante de proporcionalidad exista, lo que lleva a una distribución posterior *propia* bien definida:

$$\pi(\omega | D) \propto p(D | \omega)\pi(\omega).$$

Lo atractivo de emplear las técnicas Bayesianas para realizar un análisis condicional, a pesar de no contar con información inicial sobre el parámetro de interés, es el hecho de aplicar, en tales situaciones, una distribución de creencia “no-informativa”.

El postulado de *Bayes/Laplace* [16] establece que:

“*When nothing is known about  $\theta$  in advance, let the prior  $\pi(\theta)$  be a uniform distribution, that is, let all possible outcomes of  $\theta$  have the same probability.*”

Así, la situación más simple es entonces, cuando se considere a  $\Theta$  un conjunto finito. Si  $\Theta$  consiste de  $n$  elementos entonces, la distribución de creencia no-informativa más obvia es la que asigna a cada elemento de  $\Theta$  la probabilidad de  $\frac{1}{n}$ . Esto puede generalizarse por supuesto; si  $\Theta$  es un conjunto infinito, se puede asignar a cada  $\theta \in \Theta$  la misma densidad, obteniendo así, una distribución no-informativa uniforme  $\pi(\theta) = c$ . El principal problema de emplear la distribución uniforme, es que no es invariante bajo reparametrizaciones, es decir, si no se cuenta con información sobre  $\theta$  entonces, tampoco sobre  $\phi = g(\theta)$ <sup>3</sup> así:

$$\text{Si } \pi(\theta) = c \text{ entonces, } \phi = g(\theta) \Rightarrow \pi(\phi) = \left| \frac{d}{d\phi} g^{-1}(\phi) \right| \cdot \pi(g^{-1}(\phi)).$$

Sin embargo, el teorema de Bayes, sigue siendo válido si se emplea una adecuada función de creencia,  $p(\omega)$ , “no-informativa” (generalmente impropia) [2].

### 3. ESTIMACIÓN

Desde el punto de vista Bayesiano, el resultado final de un problema de inferencia sobre alguna cantidad desconocida no es posible sin la correspondiente distribución posterior. Así, dado un conjunto de datos  $D$ , todo lo que podemos decir sobre alguna función del parámetro  $\omega$ , que rige el modelo, estará contenida en la distribución posterior de creencia  $p(\omega | D)$  [13, 14]. Como se ha mencionado anteriormente, la inferencia Bayesiana puede ser descrita técnicamente como un problema de decisión donde el espacio de acciones es la clase de estas distribuciones de probabilidad posterior de la cantidad de interés. Sin embargo, para hacer más fácil la asimilación, es frecuentemente conveniente *resumir* la información contenida en la distribución

<sup>3</sup> $g(\theta)$  función uno-a-uno.

posterior por: (i) proponiendo valores para la cantidad de interés que, a la luz de los datos, son verosímiles a estar más *cerca* al verdadero valor de ésta y, (ii) midiendo la compatibilidad de los resultados con los valores hipotéticos de la cantidad de interés, la cual pudo haber sido sugerida por el contexto de la investigación.

A continuación se exponen, brevemente, las contrapartes Bayesianas de los procedimientos inferenciales esto es, los procedimientos de *estimación y pruebas de hipótesis*.

#### 4. ESTIMACIÓN PUNTUAL

En los casos cuando  $\omega$  corresponde a una cantidad desconocida, de manera que,  $\Omega = \mathbb{R}^4$  y la respuesta requerida,  $a \in \mathcal{A}$ , sea una estimación del verdadero valor de  $\omega$  ( $\mathcal{A} = \Omega$ ), el correspondiente problema de decisión es generalmente citado como *estimación puntual*. En otras palabras, si  $D$  es un conjunto de datos, asumiendo que han sido generados por un modelo de probabilidad  $\{p(D | \omega), \omega \in \Omega\}$  y,  $\theta = \theta(\omega) \in \Theta$  la cantidad de interés, una *estimación puntual* de  $\theta$  es una función de los datos  $\tilde{\theta} = \theta(D)$ , la cual será considerada como una apropiada aproximación al verdadero pero desconocido valor de  $\theta$ . En particular, si  $\omega = \theta$  se cita como estimación puntual paramétrica.

Debido a que es casi seguro no obtener una respuesta exacta en un problema de decisión, generalmente, se emplea la función de pérdida más que la función de utilidad. Así, un problema de estimación puntual estará completamente definido una vez que se especifiquen las respuestas válidas  $\mathcal{A} = \Omega$  y la función  $l(a, \omega)$  [11].

Desde la perspectiva de la teoría de la decisión, la elección de una estimación puntual  $\tilde{\theta}$ , de alguna cantidad  $\theta$ , es una decisión que actúa como si  $\tilde{\theta}$  fuese  $\theta$ , la cual no afirma algo sobre el valor de  $\theta$ , aunque se desea afirmar algo simple, puede ser bien la razón para obtener una estimación. Así, un problema de estimación puntual estará completamente definido una vez que se especifiquen las respuestas válidas  $\mathcal{A} = \Omega$  y la función  $l(a, \omega)$ . Por lo tanto, para resolver este problema de decisión es necesario especificar la *función de pérdida*  $l(\tilde{\theta}, \theta)$  que mida la consecuencia de actuar como si el valor verdadero de la cantidad de interés fuese  $\tilde{\theta}$  cuando es realmente  $\theta$ . La pérdida posterior esperada, si  $\tilde{\theta}$  fuese empleada es:

$$\bar{l}[\tilde{\theta} | D] = \int_{\Theta} l(\tilde{\theta}, \theta) p(\theta | D) d\theta,$$

y el correspondiente *estimador de Bayes*, es una función de los datos que minimiza esta expresión.

De manera más formal, un estimador Bayesiano puntual está definido por [8]:

**Definición 4.1.** Un *estimador Bayesiano* de  $\theta$  con respecto a la función de pérdida  $l(\cdot, \theta)$  y la distribución  $p(\theta)$  es un elemento  $\hat{\theta} \in \Theta$  que minimiza:

$$\int_{\Omega} l(\hat{\theta}, \theta) p(\theta) d\theta.$$

Es natural que la función de pérdida  $l(\tilde{\theta}, \theta)$ , en problemas de estimación puntual, esté en función de la distancia entre el verdadero valor del parámetro,  $\theta$ , y su valor estimado,  $\tilde{\theta}$ . La función de pérdida más utilizada es la “pérdida de error cuadrático” [8]:

---

<sup>4</sup> $\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^+, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \text{ etc.}$

$$l(\tilde{\theta}, \theta) = (\theta - \tilde{\theta})^2.$$

La pérdida de error cuadrático es una función simétrica, que penaliza la sobreestimación y la subestimación por igual tomando el valor cero cuando la estimación es la correcta. Por supuesto, existen otras alternativas, entre ellas la “pérdida de error absoluto”:

$$l(\tilde{\theta}, \theta) = |\theta - \tilde{\theta}|,$$

la cual puede ser considerada como una alternativa razonable, sin embargo, un análisis basado sobre el valor absoluto con frecuencia es menos factible que un análisis basado sobre el error cuadrático. Ambas funciones de pérdida capturan la idea de penalizar, en forma simétrica, la distancia entre el verdadero valor del parámetro y su valor estimado [1].

Algunas formas de los estimadores Bayesianos, dependiendo la función de pérdida empleada, son:

**Proposición 4.2.** 1. Si  $\Theta = \mathbb{R}^k$  y  $l(\tilde{\theta}, \theta) = (\tilde{\theta} - \theta)^t H(\tilde{\theta} - \theta)$  con  $H$  una matriz simétrica definida positiva entonces, el estimador de Bayes satisface:

$$H\tilde{\theta} = HE(\theta).$$

Si  $H^{-1}$  existe, entonces  $\tilde{\theta} = E(\theta)$ , es decir, el estimador de Bayesiano, con respecto a la pérdida cuadrática, es la media de  $p(\theta)$ , asumiendo que la media existe.

2. Si  $\Theta = \mathbb{R}$  y  $l(\tilde{\theta} - \theta) = c_1(\tilde{\theta} - \theta)I_{\theta < \tilde{\theta}} + c_2(\tilde{\theta} - \theta)I_{\theta > \tilde{\theta}}$  entonces, el estimador Bayesiano, con respecto a la pérdida lineal, es el cuantil tal que:

$$P(\theta \leq \tilde{\theta}) = \frac{c_2}{c_1 + c_2}.$$

Si  $c_1 = c_2$  el estimador Bayesiano, con respecto a la pérdida valor absoluto, es la mediana de  $p(\theta)$ .

3. Si  $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$  y  $l(\tilde{\theta} - \theta) = 1 - I_{(B(\theta))}(\theta)$ , donde  $B(\theta) \subseteq \Theta$  es una bola con centro en  $\theta$  y radio  $\epsilon > 0$  entonces, el estimador Bayesiano es el que maximiza:

$$\int_{B_\epsilon(\theta)} p(\theta) d\theta.$$

Cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , la función que maximiza tiende a  $p(\theta)$  así, el estimador Bayesiano, con respecto a la pérdida cero-uno, es la moda de  $p(\theta)$ , asumiendo que la moda existe.

*Demostración.* 1. Diferenciando:

$$\int (\tilde{\theta} - \theta)^t H(\tilde{\theta} - \theta) p(\theta) d\theta$$

respecto a  $\tilde{\theta}$  e igualando a cero se obtiene:

$$2H \int (\tilde{\theta} - \theta) p(\theta) d\theta = 0.$$

Esto establece (1).

2. Dado que:

$$\int l(\tilde{\theta}, \theta) p(\theta) d\theta = c_1 \int_{\{\theta \leq \tilde{\theta}\}} (\tilde{\theta} - \theta) p(\theta) d\theta + c_2 \int_{\{\theta > \tilde{\theta}\}} (\tilde{\theta} - \theta) p(\theta) d\theta,$$

diferenciando con respecto a  $\tilde{\theta}$  e igualando a cero se sigue:

$$c_1 \int_{\{\theta \leq \tilde{\theta}\}} p(\theta) d\theta = c_2 \int_{\{\theta > \tilde{\theta}\}} p(\theta) d\theta,$$

donde, sumando:

$$\int_{\{\theta \leq \tilde{\theta}\}} p(\theta) d\theta,$$

a ambos lados de la igualdad, se obtiene (2).

3. Dado que:

$$\int l(\tilde{\theta}, \theta) p(\theta) d\theta = 1 - \int 1_{B_\epsilon(\tilde{\theta})}(\theta) p(\theta) d\theta,$$

la cual es mínima cuando:

$$\int 1_{B_\epsilon(\tilde{\theta})} p(\theta) d\theta$$

es máxima, se tiene (3). □

Para el caso unimodal, coinciden si la distribución de creencia- $p(\theta)$  es simétrica ( $\theta$  una cantidad aleatoria singular). En general, para el caso unimodal, la media, mediana y moda guardan las siguientes relaciones si la distribución de creencia tiene un sesgo positivo:

$$media > mediana > moda.$$

También existen algunas funciones de pérdida asimétricas. Las funciones de pérdida en forma de V, con diferentes pendientes a cada lado de su valor mínimo, son apropiadas en ciertos problemas. Una función de pérdida asimétrica frecuentemente empleada es la función de pérdida de Linex (o función de pérdida “lineal-exponencial”):

$$l(\tilde{\theta}, \theta) = \exp\{c(\theta - \tilde{\theta})\} - c(\theta - \tilde{\theta}) - 1,$$

donde  $c$  es una constante fija y conocida. La función de “pérdida de Linex” es igual a cero cuando  $\tilde{\theta} = \theta$  y positiva en cualquier otro caso, por lo que alcanza su valor mínimo en  $\tilde{\theta} = \theta$ .

El estimador unidimensional Bayesiano empleando la función de pérdida de Linex está dado por:

**Proposición 4.3.** Si  $\Theta = \Re$  y  $l(\tilde{\theta}, \theta) = \exp\{c(\theta - \tilde{\theta})\} - c(\theta - \tilde{\theta}) - 1$  entonces, el estimador de Bayes satisface:

$$\tilde{\theta} = -\frac{1}{c} \ln E(e^{-c\theta}).$$

Asumiendo que  $E(e^{-c\theta})$  existe.

## 5. ESTIMACIÓN POR INTERVALO

Se ha enfatizado, desde una perspectiva teórica, que la incertidumbre sobre una cantidad desconocida de interés,  $\omega$ , debe especificarse a través de su densidad,  $p(\omega)$ , siempre que la evaluación de la utilidad (pérdida) esperada sea posible para cualquier problema de decisión. En la práctica, sin embargo,  $p(\omega)$  puede ser difícil de especificar por lo que puede ser más conveniente y suficiente, para describir la incertidumbre de  $\omega$ , simplemente describir regiones  $R \subseteq \Omega$  de probabilidad dadas en virtud de  $p(\omega)$  [8]. Por ejemplo, en el caso cuando  $\Omega = \mathbb{R}$ , la identificación de regiones (intervalos) que contengan el 50 %, 90 %, 95 % ó 99 % de la probabilidad bajo  $p(\omega)$ , pueden resultar ser suficientes para dar una idea cuantitativa general implícita en  $p(\omega)$ .

**Definición 5.1.** Una región  $R \subseteq \Theta$  tal que:

$$\int_R p(\omega) d\omega = 1 - \alpha,$$

se dira que es una  $100(1 - \alpha)$  % región de credibilidad para  $\omega$ , con respecto a  $p(\omega)$ .

Debe notarse que una región de credibilidad es invariante bajo reparametrizaciones, es decir, para alguna región  $(1 - \alpha)$ -creíble  $R$  de  $\omega$ ,  $\phi(R)$  es una región  $(1 - \alpha)$ -creíble de  $\phi = \phi(\omega)$ .

Ahora, si  $D$  es un conjunto de datos, asumiendo que han sido generados por un modelo de probabilidad  $\{p(D | \omega), \omega \in \Omega\}$ , y  $\theta = \theta(\omega) \in \Omega$  es una cantidad de interés, entonces una región  $R \subset \Theta$  tal que:

$$\int_R p(\theta | D) = q$$

(de modo que, dados los datos  $D$ , el valor verdadero de  $\theta$  pertenezca a  $R$  con probabilidad  $q$ ), es una *región  $q$ -creíble* posterior para  $\theta$ . Note que esta proporciona inmediatamente una afirmación directa intuitiva sobre la cantidad desconocida de interés,  $\theta$ , en términos de probabilidad, en marcado contraste con las afirmaciones circunlocutorias previstas por los intervalos de confianza frecuentistas.

Claramente, para todo  $\alpha$  no existe una única región de credibilidad. Para  $\Theta$ ,  $p(\theta)$  y  $\alpha$  (fijo) dados, el problema de elegir entre subconjuntos  $R \subseteq \Theta$  tal que:

$$\int_R p(\theta) d\theta = 1 - \alpha,$$

puede ser visto como un problema de decisión siempre que se especifique una función de pérdida,  $l(R, \theta)$ , que refleje las posibles consecuencias de elegir la  $100(1 - \alpha)$  % región  $R$ .

La siguiente proposición especifica la forma de una región  $R$  de credibilidad, cuando una función de pérdida es empleada con un  $\alpha$  dado, la cual encapsula la idea intuitiva de seleccionar una región cuyo tamaño  $\|R\|$  sea mínimo.

**Proposición 5.2.** Sea  $p(\theta)$  una densidad de probabilidad para  $\theta \in \Theta$  continua salvo en un conjunto finito. Para un  $0 < \alpha < 1$  dado, si:

1.  $\mathcal{A} = \{R : p(\theta \in R) = 1 - \alpha\} \neq \emptyset$  y
2.  $l(R, \theta) = k\|R\| - 1_R(\theta)$ ,  $R \in \mathcal{A}$ ,  $\theta \in \Theta$ ,  $k > 0$

entonces,  $R$  es óptima si y sólo si  $p(\theta_1) \geq p(\theta_2)$  para todo  $\theta_1 \in R$ ,  $\theta_2 \notin R$  (excepto posiblemente en un subconjunto de  $\Theta$  de probabilidad cero).

*Demostración.* Se sigue directamente que para cualquier  $R \in \mathcal{A}$ :

$$\int_{\Theta} l(R, \theta)p(\theta)d\theta = k\|R\| + 1 - \alpha,$$

así, una región óptima debe tener un tamaño mínimo.

Si  $R$  tiene la propiedad  $(p(\theta_1) \geq p(\theta_2)$  para todo  $\theta_1 \in R$ ,  $\theta_2 \notin R)$  y  $R_1 \in \mathcal{A}$  entonces, dado que:

- $R = (R \cap R_1) \cup (R \cap R_1^c)$ .
- $R_1 = (R \cap R_1) \cup (R^c \cap R_1)$  y
- $p(\theta \in R) = p(\theta \in R_1)$

se tiene:

$$\inf_{(\theta \in R \cap R_1^c)} p(\theta) \|R \cap R_1^c\| \leq \int_{(R \cap R_1^c)} p(\theta)d\theta = \int_{(R^c \cap R_1)} p(\theta)d\theta \leq \sup_{(\theta \in R^c \cap R_1)} p(\theta) \|R^c \cap R_1\|$$

con:

$$\sup_{(\theta \in R^c \cap R_1)} p(\theta) \leq \inf_{(\theta \in R \cap R_1^c)} p(\theta),$$

entonces  $\|R \cap R_1^c\| \leq \|R^c \cap R_1\|$ , por lo tanto  $\|R\| \leq \|R_1\|$ .

Si  $R$  no tiene la propiedad, existe  $R_1 \subseteq R$  tal que para toda  $\theta \in R_1$  existe  $\theta_1 \notin R$  tal que,  $p(\theta) > p(\theta_1)$ . Sea  $R_2 \subseteq R^c$  tal que  $p(\theta \in R_1) = p(\theta \in R_2)$  y  $p(\theta_1) > p(\theta)$  para todo  $\theta_1 \in R_2$  y  $\theta \in R$ . Definiendo:

$$R_3 = (R \cap R_1^c) \cup R_2,$$

se tiene que  $R_3 \in \mathcal{A}$  y, por un argumento similar al dado anteriormente, se sigue que  $\|R_3\| < \|R\|$ . □

Algunas veces, las regiones de credibilidad de tamaño mínimo dan por resultado un región con densidad de probabilidad alta (HPD, por sus siglas en inglés), donde todos los puntos en la región tienen una densidad de probabilidad mayor que todos los puntos fuera [8].

**Definición 5.3.** Una región  $R \subseteq \Theta$  será llamada una  $100(1 - \alpha)\%$  región con densidad de probabilidad alta para  $\theta$  con respecto a  $p(\theta)$  si:

1.  $P(\theta \in R) = 1 - \alpha$ .
2.  $\forall \theta_1 \in R, \theta_2 \notin R : p(\theta_1) \geq p(\theta_2)$  excepto posiblemente para un conjunto de  $\Theta$  con probabilidad cero.

Las regiones HPD, son no invariantes bajo reparametrizaciones: la imagen  $\phi(R)$  de una región HPD,  $R$ , será una región de credibilidad para  $\phi$ , pero no generalmente será HPD; más aún, no hay una razón convincente para restringir nuestra atención a las regiones de credibilidad HPD. Los cuantiles a posteriori son frecuentemente usados para derivar regiones de credibilidad. Así, si  $\theta_q = \theta_q(D)$  es el cuantil posterior  $100q\%$  de  $\theta$  entonces,  $R = \{\theta; \theta \leq \theta_q\}$  es una región  $q$ -creíble unilateral, generalmente única. Más aún, la regiones  $q$ -creíbles de *probabilidad centrada* de la forma  $R = \{\theta; \theta_{\frac{1-q}{2}} \leq \theta \leq \theta_{\frac{1+q}{2}}\}$  son fácilmente calculables y son frecuentemente más empleadas que las regiones HPD.

## 6. PRUEBAS DE HIPÓTESIS

Sea  $\{p(D | \theta) | \theta \in \Theta\}$  una familia de modelos paramétricos, con  $\Theta$  particionado en dos conjuntos disjuntos  $\Theta_0$  y  $\Theta_1$ . Suponga que se debe decidir si una cantidad desconocida  $\theta$  pertenece a  $\Theta_0$  o bien a  $\Theta_1$ . Si  $H_0$  denota la hipótesis que  $\theta \in \Theta_0$  y  $H_1$  la hipótesis que  $\theta \in \Theta_1$  entonces, se tiene un problema de decisión con sólo dos posibles acciones:  $a_0$ -aceptar  $H_0$  o  $a_1$ -aceptar  $H_1$ , donde la elección se efectuara en base a los datos observados  $D$ . Esto último, es llamado una prueba de hipótesis. En muchos problemas, las dos hipótesis,  $H_0$  y  $H_1$ , son consideradas no-simétricas;  $H_0$  es generalmente referida como la *hipótesis nula* mientras que  $H_1$  como la *hipótesis alternativa* [15]. Aunque la teoría puede ser extendida a un número finito de hipótesis alternativas, sólo se presentará lo referente a una hipótesis alternativa singular.

La distribución posterior  $p(\theta | D)$ , de una cantidad de interés  $\theta$ , transmite de inmediato información intuitiva sobre los valores de  $\theta$  que, dadas las suposiciones del modelo, pueden ser tomadas para ser *compatibles* con los datos observacionales  $D$ , es decir, aquellos con una densidad de probabilidad alta (relativamente).

Algunas veces, una restricción  $\theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ , de los posibles valores de la cantidad de interés (donde  $\Theta_0$  puede posiblemente consistir de un valor singular  $\theta_0$ ) es sugerida como una consideración especial, ya sea porque restringiendo  $\Theta$  a  $\Theta_0$  simplificaría en gran medida el modelo, o porque existen además otros argumentos específicos en el contexto que sugieren que  $\theta \in \Theta_0$  [7]. Intuitivamente, la *hipótesis*  $H_0 \equiv \{\theta \in \Theta_0\}$  debe ser considerada *compatible* con los datos  $D$  si existen elementos en  $\Theta_0$  con una densidad posterior alta. Sin embargo, una conclusión más precisa es frecuentemente requerida y, una vez más, esto es posible hacerlo adoptando un enfoque orientado hacia la teoría de la decisión.

Formalmente, una prueba de hipótesis  $H_0 \equiv \{\theta \in \Theta_0\}$  es un *problema de decisión* donde el espacio de acciones sólo tiene dos elementos, a saber, aceptar ( $a_0$ ) o rechazar ( $a_1$ ) la restricción propuesta. Para resolver este problema de decisión, es necesario especificar una apropiada función de pérdida  $l(a_i, \theta)$ , la cual mida las consecuencias de aceptar o rechazar  $H_0$  como una función del verdadero valor de  $\theta$ . Note que esto requiere la especificación de una *alternativa*  $a_1$  a aceptar  $H_0$ ; ésto sólo será esperado, para una acción tomada no porque sea buena, sino, porque es mejor a todo lo demás.

Dados los datos  $D$ , la acción óptima será rechazar  $H_0$  si y sólo si la pérdida posterior esperada de aceptación:

$$\int_{\Theta} l(a_0, \theta) p(\theta | D) d\theta,$$

es más grande que la pérdida posterior esperada de rechazar:

$$\int_{\Theta} l(a_1, \theta) p(\theta | D) d\theta,$$

esto es, si (y sólo si):

$$\int_{\Theta} [l(a_0, \theta) - l(a_1, \theta)] p(\theta | D) d\theta = \int_{\Theta} \Delta l(\theta) p(\theta | D) d\theta > 0.$$

Por tanto, la diferencia  $\Delta l(\theta) = l(a_0, \theta) - l(a_1, \theta)$ , sólo mide la “ventaja” de rechazar  $H_0$  como una función de  $\theta$ , por lo que debe ser especificada. Así, la hipótesis  $H_0$  debería ser rechazada si la ventaja esperada de rechazar  $H_0$  es positiva.

Un elemento crucial en la especificación de la función de pérdida es la descripción de lo que realmente se entenderá por rechazar  $H_0$ . Por supuesto que  $a_0$  significa actuar como si  $H_0$  fuese cierta, es decir, como si  $\theta \in \Theta_0$ , pero hay al menos dos significados para la acción alternativa  $a_1$ . Esto puede significar:

- La *negación* de  $H_0$ , esto es, como si  $\theta \notin \Theta_0$ .

o, alternativamente:

- Rechazar la simplificación implicada por  $H_0$  y mantener el modelo sin restricciones,  $\theta \in \Theta$ , lo cual es cierto por suposición.

Ambas alternativas han sido analizadas en la literatura, aunque se puede argumentar que los problemas de análisis de datos, donde los procedimientos de pruebas de hipótesis son generalmente usados, son mejor descritos por la segunda alternativa. Más aún, si un modelo establecido es identificado por  $H_0 \equiv \{\theta \in \Theta_0\}$  entonces, es frecuentemente incrustado dentro de un modelo más general,  $\{\theta \in \Theta, \Theta_0 \subset \Theta\}$ , construido así para incluir posiblemente salidas prometedoras de  $H_0$ , lo que es requerido para verificar si realmente los datos  $D$  siguen siendo compatibles con  $\theta \in \Theta_0$  o si la extensión de  $\theta \in \Theta$  es realmente requerida.

## 7. CONCLUSIONES

La idea central de este capítulo ha sido mostrar el enfoque Bayesiano de los procedimientos de la estadística que comunmente se encuentran en la investigación científica- *estimación y pruebas de hipótesis*.

El análisis Bayesiano de estos procedimientos, que no son más que una descripción de lo que puede afirmarse sobre una cantidad de interés dada la información disponible, requiere de la comprensión de algunos conceptos básicos de la teoría de la decisión y del concepto de probabilidad como medida racional de la incertidumbre; lo que permite implementarlos como problemas de decisión específicos y obtener, así, un resumen útil de las distribuciones posteriores de las cantidades de interés.

## REFERENCIAS

- [1] Aitchison, J. *Bayesian tolerance regions*, J. Roy. Statist. Soc. B 26,161-175, 1964.
- [2] Akaike, H. *The interpretation of improper prior distributions as limits of data dependent proper prior distributions*, J. Roy. Statist. Soc. B 45,46-52, 1980a.
- [3] Barnard, G. A. *Statisticw inference*, J. Roy. Statist. Soc. B 11, 115-149 (with discussion), 1949.
- [4] Berger, J. O. *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, Springer, 2nd Edition, 1980.
- [5] Bernardo, J. M. *Bioestadística: Una perspectiva Bayesiana*, Vicens-Vives, 1981.
- [6] Bernardo, J. M. *Análisis de datos y métodos Bayesianos*, Historia de la Ciencia Estadística (S. Ríos, ed.), Madrid: Real Académia de Ciencias, 87-105, 1989.
- [7] Bernardo, J. M. *Bayesian Statistics.*, Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS), Probability and Statistics (R. Viertl, ed). Oxford, UK: UNESCO (www.eolss.net), 2003.
- [8] Bernardo, J. M., and Smit, M. A. *Bayesian Theory*, Wiley Series in Probability and Statistics, 2002.
- [9] Box, G. E. P. and Tiao, G. C. *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Wiley, 1992.
- [10] Linares Fleites, G. , López Pérez, A. A. *Matemáticas y sus Aplicaciones II*. Textos Científicos BUAP, 2012.
- [11] Lindley, D. V. *Bayesian Statistics: A Review.*, Society for Industrial and Mathematics, 1987.

- [12] Press, S. J. *Subjective and Objective Bayesian Statistics: Principles, Models, and Applications*, Wiley, 2nd Edition, 2003.
- [13] De Finetti, B. *La prevision. Ses lois logiques. Ses sources Subjectives*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Vol. 7, 1937.
- [14] De Finetti, B. *Probabilita subordinate e teoria delle decisioni*, Rendiconti Matematica 23, 128-131. Reprinted as "Condition probabilities and decision theory" in 1972, *Probability, induction and Statistics* New York: Wiley, 13-18, 1964.
- [15] Raiffa, H. *Applied Statistical Decision Theory*, Harvard University Press, 1961.
- [16] Savage, L. *The Foundations of statistics*, Wiley and Sons, 1954.

aalopezip@gmail.com, gladys.linares@icbuap.buap.mx.

# CAPÍTULO 16

## FUNDAMENTOS DE LA ESTADÍSTICA BAYESIANA

GLADYS LINARES FLEITES<sup>1</sup>

ARTURO ABRAHAM LÓPEZ PÉREZ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS AGRÍCOLAS, ICUAP

<sup>2</sup>FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS, BUAP

RESUMEN. El enfoque Bayesiano de la estadística proporciona una teoría unificada y consistente, supliendo una gran cantidad de procedimientos convencionales en una metodología sistemática que se deduce a partir de un conjunto de axiomas destinados a describir un comportamiento racional.

Este capítulo es una exposición elemental de los fundamentos de la teoría de la decisión a un nivel de generalidad que cubre la mayor parte de las aplicaciones de la metodología Bayesiana.

### 1. INTRODUCCIÓN

La estadística desempeña un importante papel en temas donde interviene la variabilidad como parte imprescindible y su metodología, en su sentido más amplio, una herramienta cada vez más esencial en diversos campos profesionales. Si bien, los problemas específicos pueden ser muy distintos, una correcta asimilación de la metodología estadística permite analizar adecuadamente una serie de datos y tomar de forma oportuna decisiones, sin embargo, mucha de la literatura en estadística da la impresión de que no existe controversia alguna sobre la validez de los métodos estadísticos en uso, y ésto no es así. El campo de la estadística está basado en dos grandes paradigmas: convencional y *Bayesiano* [2, 3].

El enfoque convencional de la estadística ha permanecido fuera de la tendencia a la axiomatización<sup>1</sup>; lo que ha dado coexistencia a numerosos procedimientos que, pese a su utilidad (y a veces incompatibilidad entre si), no es posible garantizar su correcto funcionamiento *a priori*. Por el contrario, los métodos Bayesianos proporcionan un paradigma completo para la inferencia estadística y la toma de decisiones bajo incertidumbre y, al derivarse de un sistema axiomático, proveen una metodología coherente que permite incorporar información inicial relevante, lo que resuelve muchas dificultades que afrontan los métodos frecuentistas [4].

El objetivo de este capítulo es dar una visión general sobre las ideas fundamentales y los resultados de la toma racional de decisiones bajo incertidumbre, lo que proporcionará una sólida fundamentación a la teoría de la decisión y a la inferencia estadística. Así mismo, se da relieve a las implicaciones que tienen sobre la filosofía y la práctica de la estadística en general, concebida como un instrumento para analizar adecuadamente la información que se dispone y decidir, de manera razonable, sobre la mejor forma de actuar.

---

<sup>1</sup>La construcción de un sistema axiomático permite identificar con claridad los conceptos y relaciones que se consideran básicos, y garantiza que las conclusiones que pueden lógicamente derivarse de tal sistema forman una teoría coherente, exenta de contradicciones [3].

Se comenzará por describir de manera intuitiva (Sec. 2), la estructura de un problema de decisión y, así mismo, se analizará el procedimiento lógico a seguir para su solución. En la sección 3, se formalizan los conceptos introducidos, definiendo un problema de decisión bajo incertidumbre. Posteriormente, se precisa la descripción de racionalidad a través de los principios de coherencia (Sec. 4) y cuantificación (Sec. 5). En la sección 6 y 7, se prueba que para ser consistente con estos principios, la información sobre la ocurrencia de algún evento relevante debe describirse por medio de una medida de probabilidad, que la preferencia entre todas las posibles consecuencias debe ser evaluada con una función de utilidad y, la decisión óptima es aquella que proporciona la máxima utilidad esperada respecto a la medida de probabilidad. Finalmente (Sec. 8), se muestra que la inferencia estadística es un problema de decisión particular.

En suma, el planteamiento, análisis y el proceso lógico a seguir para la solución de un problema de decisión, proporcionarán el fundamento sobre el que descansa el concepto de probabilidad, los métodos de inferencia y los criterios de decisión globalmente conocidos como métodos Bayesianos.

## 2. ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE LA DECISIÓN

Cada vez que se afronta el hecho de seleccionar entre dos o más alternativas, y las consecuencias de efectuar esto dependen de la ocurrencia de algunos eventos inciertos, se está frente a un *problema de decisión bajo incertidumbre* [5].

Para comenzar a estudiar un problema de decisión bajo incertidumbre, necesariamente, debe iniciarse por considerar todas las posibles formas de actuar, por lo que, es imprescindible la elaboración de un conjunto que incluya todas las posibles alternativas -*espacio de decisiones*. La construcción de dicho espacio, requiere especial atención, ya que el modelo a estudiar se limitará a elegir uno y sólo uno de sus elementos, por lo tanto, debe elaborarse un espacio de decisiones *exhaustivo*, que agote todas las posibilidades que puedan parecer razonables. También, sin pérdida de generalidad, es conveniente exigir que el espacio de decisiones sea de tal forma que la elección de uno de sus elementos *excluya* la elección de cualquier otro. Determinado el espacio de decisiones, para cada uno de sus posibles elementos, debe especificarse una clase de *sucesos inciertos* que determinen las eventuales *consecuencias*, es decir, se deben precisar los sucesos inciertos (mutuamente excluyentes) que condicionarán las consecuencias de cada decisión.

El determinar la mejor de un conjunto de alternativas sería, en principio, inmediato si se dispone de información completa sobre la consecuencia a que da lugar cada alternativa. Por supuesto, que existen situaciones con información completa y, a pesar de ello, es difícil determinar la decisión más adecuada, pero tal dificultad es técnica. En cambio, cuando *no* se dispone de toda la información que se considera relevante, la dificultad es *conceptual*. Por lo tanto, se analizará el *proceso lógico de decisión* a seguir en un ambiente de incertidumbre, es decir, del método a seguir para la toma de decisiones cuando no se dispone de información completa.

Aunque frecuentemente los problemas de decisión no se presentan aislados, sino, formando una cadena (seleccionada una decisión se afronta un nuevo problema de decisión) es demostrable, sin embargo, que el estudio de las decisiones sucesivas no plantea problemas nuevos; bastara resolver consecutivamente todos los problemas de decisión que integran la cadena, debido a que en la mayoría de las aplicaciones, el espacio de decisiones es finito [7].

Si se denota con  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ , a un espacio de decisiones finito y con  $\Theta_i^2 = \{\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{im_i}\}$  para  $i = \overline{1, k}$ , a un conjunto finito de  $m_i$  sucesos inciertos entonces, un problema de decisión puede ser representado mediante un árbol de decisión (Fig. 1) donde, si se opta por la decisión  $d_i$  y ocurre el suceso  $\theta_{ij}$  se obtiene entonces, la consecuencia  $c_{ij}$ .

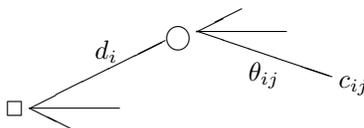


FIGURA 1. Árbol de Decisión

Es importante destacar que los sucesos que componen cada  $\Theta_i$  son inciertos, en el sentido que no se sabe cual de ellos tendrá lugar y no resultan, en general, igualmente verosímiles. Aunque no se disponga de información suficiente para determinar cual de ellos tendrá lugar, generalmente, la información disponible hace a unos eventos más verosímiles que otros, por lo que, será necesario precisar de alguna forma cuantitativa el contenido de la información incompleta que se posee y, una forma, es asignando a cada suceso un número que mida la verosimilitud que se le atribuye.

La incertidumbre existente sobre la ocurrencia de algunas clases de sucesos se ha venido midiendo, como es conocido, por un número al que se le llama *probabilidad*. Para hacerlo, la *unidad* de probabilidad correspondiente a un suceso *cierto* se *distribuye* entre una clase de sucesos mutuamente excluyentes. Si se consideran *igualmente verosímiles* a  $n$  sucesos mutuamente excluyentes, se asigna a cada uno de ellos la probabilidad  $\frac{1}{n}$ . También, otra clase de sucesos a los que resulta fácil asignar una probabilidad, aunque *no* presenten las propiedades de simetría, es de aquellos sucesos que es posible observar repetidamente en *idénticas* condiciones. Considere una situación  $\varepsilon$  que puede o no dar lugar a un suceso  $A$  y, supóngase que tal situación puede repetirse indefinidamente. Es un hecho empírico que, frecuentemente, el cociente  $\frac{m}{n}$  (el número de veces,  $m$ , que tiene lugar el suceso  $A$  entre el número total,  $n$ , de observaciones) se estabiliza y parece tender a un límite, por lo que, parece razonable pensar, que en *ausencia de otra información relevante* tal límite medirá la verosimilitud del suceso  $A$  en las condiciones descritas por  $\varepsilon$ .

Pero a pesar de la existencia de simetrías o de datos empíricos sobre frecuencias relativas, que es ciertamente *útil* para precisar cuantitativamente la incertidumbre sobre un determinado suceso, no es de modo alguno *necesaria*. La mayoría de los sucesos relevantes en un problema de decisión no presentan simetrías ni son repetibles, de forma que un concepto de probabilidad restringido a tales clases de sucesos será, inevitablemente, insuficiente [2].

El concepto de *probabilidad* de un suceso  $A$  en una situación  $H$ , que se utilizará a lo largo de éste capítulo, será la medida de la verosimilitud que se asigna al suceso  $A$  bajo la condición descrita por  $H$ , esto es, la medida del *grado de creencia* en  $A$

<sup>2</sup>Frecuentemente el conjunto de sucesos inciertos es el mismo cualesquiera sea la decisión por la que se opte, es decir,  $\Theta_i = \{\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{im_i}\} = \{\theta_1, \dots, \theta_m\} = \Theta$  para toda  $i = \overline{1, k}$ . [5]

que sugiere la información contenida en  $H^3$ . Así, la información que se posee sobre la verosimilitud de los distintos sucesos inciertos en cada  $\Theta_i$ , puede cuantificarse *distribuyendo* la unidad de probabilidad sobre los sucesos  $\{\theta_{i1}, \dots, \theta_{im_i}\}$ . Dado que que estos sucesos son mutuamente excluyentes- como se ha establecido- entonces, puede describirse la información disponible sobre su verosimilitud (bajo la condición  $H$ ) mediante un conjunto de números  $\{p(\theta_{ij} | d_i, H) : j = 1, 2, \dots, m_i\}$  de tal forma que:

$$(i) \forall i \in I : 0 \leq p(\theta_{ij} | d_i, H) \leq 1,$$

$$(ii) \sum_{j=1}^{m_i} p(\theta_{ij} | d_i, H) = 1.$$

Considerese, ahora, que se toma la decisión  $d_i$  (bajo la condición  $H$ ) y acontese  $\theta_{ij}$ , entonces se obtiene una consecuencia  $c_{ij}$ .

Obviamente, se puede tener alguna preferencia entre las distintas consecuencias. En principio, tal preferencia puede ser cuantificada asignando a cada una de las consecuencias un número,  $u(c_{ij})$ , que mida su *utilidad*<sup>4</sup>. Así, para toda  $d_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , se obtiene una utilidad  $u(c_{ij})$  con probabilidad  $p(\theta_{ij} | d_i, H)$ .

Una vez especificadas las probabilidades que describen la verosimilitud de los sucesos inciertos y las utilidades que describen las preferencias entre las posibles consecuencias, un problema de decisión tiene ya una solución:

Si la utilidad *media* de la decisión  $d_i$  -*utilidad esperada* de  $d_i$ - se define como:

$$(1) \quad u^*(d_i) := \sum_{j=1}^{m_i} u(c_{ij})p(\theta_{ij} | d_i, H),$$

entonces resultará natural elegir como decisión más razonable, aquella que *maximice la utilidad esperada* entre las  $k$  alternativas (*Criterio Bayes* para la toma de decisiones [2]).

En suma, existe una única forma razonable de tomar decisiones. En primer lugar, es necesario determinar el conjunto de las decisiones posibles y el de aquellos sucesos cuya ocurrencia pueda modificar las consecuencias de la decisión seleccionada. En segundo lugar debe cuantificarse, mediante probabilidades, la verosimilitud asociada a la ocurrencia de tales sucesos. En tercer lugar, se tiene que describir detalladamente las posibles consecuencias a que dan lugar cada una de las decisiones y, la preferencia entre consecuencias debe ser evaluada y cuantificada en términos de una magnitud común que recibirá el nombre de *utilidad*. Finalmente, considerar aquella decisión que, con base a las probabilidades calculadas, proporcione la máxima utilidad esperada [4].

### 3. REPRESENTACIÓN FORMAL

El desarrollo de la Teoría clásica de la Decisión se debe, en gran parte, a Wald [16]. Mientras que la fundamentación lógica y filosófica de la probabilidad subjetiva parte de Ramsey [12] y de Finetti [9], la concepción actual de la utilidad se debe a Von Neumann [15]. Savage [13], construyó una metodología integrada de la

<sup>3</sup>Debe advertirse que la probabilidad que se le asigna a un suceso es siempre *condicional* a la información que se posee sobre él. Por lo tanto, no existen probabilidades *absolutas* [13].

<sup>4</sup>Si existe una función  $u : \mathcal{C}_{d_i} \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $\mathcal{C}_{d_i}$  es el conjunto de consecuencias asociadas a la decisión  $d_i$ , tal que  $E[u(c_{ij})] = p(\theta_{ij} | d_i, H)$  entonces, se le llamará función de utilidad [1].

decisión, basada en el enfoque Bayesiano. Raiffa [10, 11] y Schlaifer [14], posteriormente, realizaron contribuciones importantes que se han extendido al ámbito de la aplicación.

A continuación se formaliza y expone la notación de la teoría de la decisión siendo ésta la misma que la empleada en [5] donde, además, se pueden consultar las pruebas de los resultados que se presentan. Cabe señalar que no se intenta describir la forma en que comúnmente se toman las decisiones, no es de interés presentar una teoría descriptiva, sino, una *teoría normativa*.

La estructura de una situación en la cual las decisiones son elegidas entre cursos alternativos de acciones con consecuencias inciertas, está determinada por tres elementos básicos:

**Definición 3.1.** Una clase de posibles acciones,  $\mathcal{A} = \{a_i : i \in I\}$ .

**Definición 3.2.** Un conjunto de eventos inciertos, por cada acción  $a \in \mathcal{A}$ , con estructura de álgebra,  $\Theta_a = \{\theta_{aj} : j \in J\}$  (Partición exhaustiva de un conjunto total de posibilidades).

**Definición 3.3.** Un conjunto de consecuencias,  $\mathcal{C}_a = \{c(a, \theta) : \theta \in \Theta_a\}$ .

Es decir, el modelo de un problema de decisión a considerar exige, pues, la especificación de un espacio  $\mathcal{A}$  de acciones y la determinación de un conjunto de sucesos inciertos,  $\Theta_a$ , los cuales condicionarán las consecuencias de cada decisión, formalmente:

**Definición 3.4.** Un problema de decisión está definido por  $\{(\Theta_a, \mathcal{C}_a) : a \in \mathcal{A}\}$ .<sup>5</sup>

Debe notarse que la percepción del estado de incertidumbre, resultante de la elección de una acción particular, depende del estado de información disponible en el momento de la elección ( $M_0$  denotará el estado que guarda la información en un momento inicial), por lo que, el conjunto  $\Theta_a$ -partición del conjunto total de posibilidades- puede restringirse con nueva información, es decir, algunos  $\theta_{aj}$ 's pueden ser más inverosímiles (o más aun, ilógicamente posibles), mientras que otros más verosímiles. Por lo tanto, la preferencia por un escenario de incertidumbre<sup>6</sup>, depende del valoramiento de las consecuencias involucradas y de la actitud adoptada sobre la incertidumbre correspondiente a cada  $\Theta_a$  [5]. Claramente, esto último es subjetivo, varía conforme nueva información es adquirida, modificando las preferencias globales entre varios cursos de acción.

Así, para representar la estructura de un problema de decisión, también se debe definir la idea de preferencia entre acciones; entendiéndose ésta relación, en el sentido de que si sólo existiesen dos posibles acciones se elegirá aquella que, condicionada a la información disponible en ese momento, resulte más admisible.

**Definición 3.5.** Sea  $\{(\Theta_a, \mathcal{C}_a) : a \in \mathcal{A}\}$  un problema de decisión. Para  $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ , la relación de preferencia entre acciones se define como:

$$a_1 \preceq a_2 \text{ (} a_1 \text{ es no preferible a } a_2 \text{)}.$$

<sup>5</sup>Sin pérdida de generalidad, puede asumirse que las posibles acciones son mutuamente excluyentes, en caso contrario se debe trabajar sobre el producto cartesiano apropiado.

<sup>6</sup>Se le llama escenario de incertidumbre, a la elección de una acción  $a \in \mathcal{A}$  que da lugar a uno y sólo uno de los eventos inciertos  $\theta \in \Theta_a$ , aconteciendo la correspondiente consecuencia  $c(a, \theta) \in \mathcal{C}_a$ .

La introducción de una relación binaria de preferencia ( $\preceq$ ), no asume que cada par de opciones,  $(a_1, a_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ , pueda necesariamente ser relacionada. En caso contrario, es decir, si  $a_1 \preceq a_2$ ,  $a_2 \preceq a_1$  o ambas, pueden derivarse otras relaciones binarias.

**Definición 3.6.** *Para cada  $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$  tal que  $a_1 \preceq a_2$  o  $a_2 \preceq a_1$  se tiene:*

1.  $a_1 \sim a_2$  si y sólo si  $a_1 \preceq a_2$  y  $a_2 \preceq a_1$ .
2.  $a_1 \prec a_2$  si y sólo si  $a_1 \preceq a_2$  y  $a_2 \not\preceq a_1$ .
3.  $a_1 \succ a_2$  si y sólo si  $a_2 \preceq a_1$ .
4.  $a_1 \succ a_2$  si y sólo si  $a_2 \prec a_1$ .

Dado que las consecuencias de adoptar una determinada acción suelen depender, en general, de la ocurrencia de determinados sucesos inciertos, se define una opción (o lotería) como:

**Definición 3.7.** *Sea  $\{(\Theta_a, \mathcal{C}_a) : a \in \mathcal{A}\}$  un problema de decisión. Una opción es el conjunto:*

$$\mathcal{L} = \{c(a, \theta_{aj}) \mid \theta_{aj} : j \in J\}.$$

Es decir, una *opción* es una situación en la que para cada  $j \in J$  se obtiene la consecuencia  $c(a, \theta_{aj})$  si acontece,  $\theta_{aj}$ . Así, cada elemento  $a \in \mathcal{A}$  es una opción y será denotado por:

$$(2) \quad a = \{c_{aj} \mid \theta_{aj} : j \in J\}.$$

La relación de preferencia entre opciones  $\preceq$ , condicionada sobre un estado inicial de información  $M_0$ , puede ser también empleada para definir una relación binaria sobre  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ . Bastará notar que cada consecuencia es, obviamente, un caso particular de una opción:

Si  $\Omega$  es el *suceso cierto* entonces, una consecuencia  $c \equiv \{c \mid \Omega\}$  [5].

**Definición 3.8.** *Sea  $\{(\Theta_a, \mathcal{C}_a) : a \in \mathcal{A}\}$  un problema de decisión. Para cada consecuencia  $c_1, c_2 \in \mathcal{C}_a$  se define:*

$$c_1 \preceq c_2 \text{ (} c_1 \text{ es no preferible a } c_2 \text{) si y sólo si } \{c_1 \mid \Omega\} \preceq \{c_2 \mid \Omega\}.$$

La relación de preferencia entre opciones puede ser empleada, también, para definir una relación sobre  $\Theta_a \times \Theta_a$ . Esta nueva relación captura la noción intuitiva de que un evento puede ser “más verosímil” que otro.

**Definición 3.9.** *Sea  $\{(\Theta_a, \mathcal{C}_a) : a \in \mathcal{A}\}$  un problema de decisión. Para cada  $\theta_{ai}, \theta_{aj} \in \Theta_a$  con  $i \neq j$ , se define:*

$$\theta_{ai} \preceq \theta_{aj} \text{ (} \theta_{aj} \text{ es más verosímil que } \theta_{ai} \text{) si y sólo si para cada } c_1, c_2 \in \mathcal{C}_a : \\ c_1 \preceq c_2 \text{ entonces, } \{c_2 \mid \theta_{ai}, c_1 \mid \theta_{ai}^c\} \preceq \{c_2 \mid \theta_{aj}, c_1 \mid \theta_{aj}^c\}.$$

Intuitivamente, el contenido de la definición (3.9), especifica que al comparar dos opciones dicotómicas que involucran el mismo par de consecuencias y que difieren sólo en los eventos inciertos que involucran, se debe elegir la opción que sea más verosímil que la consecuencia preferida a obtener, es decir:

$$\{c_2 \mid \theta_{ai}, c_1 \mid \theta_{ai}^c\} \preceq \{c_2 \mid \theta_{aj}, c_1 \mid \theta_{aj}^c\} \text{ si y sólo si } \theta_{aj} \text{ es más verosímil que } \theta_{ai}.$$

La preferencia para opciones, así como para consecuencias y eventos, se ha definido condicionada sobre un estado de información inicial  $M_0$ . Si, subsecuentemente, es necesario tomar en cuenta más información por la consideración del acontecimiento

de un posible evento  $\vartheta$  entonces, la preferencia entre opciones debe ser descrita por una nueva relación ( $\preceq_{\vartheta}$ ), la cual debe tomar en cuenta la información inicial y la proporcionada por  $\vartheta$ . La asociación entre las relaciones  $\preceq$  y  $\preceq_{\vartheta}$ , está dada por:

**Definición 3.10.** *Sea  $\{(\Theta_a, \mathcal{C}_a) : a \in \mathcal{A}\}$  un problema de decisión y  $\emptyset \preceq \vartheta$ .*

1.  $a_1 \preceq_{\vartheta} a_2 \iff \forall a \in \mathcal{A} : \{a_1 \mid \vartheta, a \mid \vartheta^c\} \preceq \{a_2 \mid \vartheta, a \mid \vartheta^c\}$ .
2.  $\theta_i \preceq_{\vartheta} \theta_j \iff c_1 \preceq_{\vartheta} c_2 : \{c_2 \mid \theta_i, c_1 \mid \theta_i^c\} \preceq_{\vartheta} \{c_2 \mid \theta_j, c_1 \mid \theta_j^c\}$ .

En suma, la representación formal de un problema de decisión incluye un álgebra de eventos,  $\Theta$ , un conjunto de consecuencias,  $\mathcal{C}$ , un conjunto de opciones,  $\mathcal{A}$ , y una relación binaria,  $\preceq_{\vartheta}$  (dada la ocurrencia del evento  $\emptyset \preceq \vartheta$ ), sobre  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ , es decir:

**Definición 3.11.** *Un problema de decisión está definido por  $(\Theta, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \preceq)$ .*

#### 4. PRINCIPIOS DE COHERENCIA

La preferencia entre opciones, formalizada por la relación  $\preceq$ , provee una base *cualitativa* para comparar opciones y, por extensión, eventos y consecuencias. Los axiomas de *coherencia* (4.1, 4.2 y 4.3), proporcionarán un conjunto minimal de reglas para asegurar que tal comparación es consistente. El procedimiento a seguir será *perceptivo*, más no *descriptivo*, es decir, los principios de *comportamiento coherente* sólo permitirán reconocer la parte imprescindible al elegir entre alternativas, evitando cometer inconsistencias.

Se asumirá en adelante, que los problemas de decisión son no triviales y que es siempre posible comparar algún par de opciones dicotómicas.

**Axioma 4.1.** *Sea  $(\Theta, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \preceq)$  un problema de decisión.*

1.  $\exists c_1, c_2 \in \mathcal{C}$  tal que  $c_1 \prec c_2$ .
2. Si  $\theta_i \in \Theta$  y  $c_i \in \mathcal{C}$ , entonces es verdadera una y sólo una de las siguientes preferencias:
  - $\{c_2 \mid \theta_1, c_1 \mid \theta_1^c\} \preceq \{c_2 \mid \theta_2, c_1 \mid \theta_2^c\}$ .
  - $\{c_2 \mid \theta_2, c_1 \mid \theta_2^c\} \preceq \{c_2 \mid \theta_1, c_2 \mid \theta_1^c\}$ .

La primera condición de este axioma, es natural, afirma que no tiene sentido hablar de un problema de decisión, si todas las consecuencias son equivalentes, ya que cualquier elección resultaría siempre en la misma consecuencia. La segunda condición, simplemente establece que al menos se puede expresar una preferencia entre opciones dicotómicas, es decir, equivale a suponer que un problema de decisión en ambiente de incertidumbre tiene una solución.

**Axioma 4.2.** *Sea  $(\Theta, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \preceq)$  un problema de decisión.*

1. Para toda  $a \in \mathcal{A} : a \preceq a$ .
2. Si  $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}$  tal que  $a_1 \preceq a_2$  y  $a_2 \preceq a_3$  entonces,  $a_1 \preceq a_3$ .

Este axioma establece la coherencia entre preferencias bajo la relación de orden definida sobre  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ .

Las siguientes proposiciones son una consecuencia directa del axioma 4.2.

**Proposición 4.1.** *Sea  $(\Theta, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \preceq)$  un problema de decisión.*

1. Para toda  $\theta \in \Theta : \theta \sim \theta$ .
2. Sean  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \Theta$ . Si  $\theta_1 \preceq \theta_2$  y  $\theta_2 \preceq \theta_3$  entonces,  $\theta_1 \preceq \theta_3$ .

*Demostración.* Se sigue de la definición 3.9 y el axioma 4.2. □

**Proposición 4.2.** *Sea  $(\Theta, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \preceq)$  un problema de decisión.*

1. *Si  $a_1 \sim a_2$  y  $a_2 \sim a_3$  entonces,  $a_1 \sim a_3$ .  
( $\theta_1 \sim \theta_2$  y  $\theta_2 \sim \theta_3$  entonces,  $\theta_1 \sim \theta_3$ )*
2. *Si  $a_1 \prec a_2$  y  $a_2 \sim a_3$  entonces,  $a_1 \prec a_3$ .  
( $\theta_1 \prec \theta_2$  y  $\theta_2 \sim \theta_3$  entonces,  $\theta_1 \prec \theta_3$ )*

*Demostración.* (1) Sean  $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}$  tal que  $a_1 \sim a_2$  y  $a_2 \sim a_3$ , de la definición 3.8 se tiene,  $a_1 \preceq a_2$ ,  $a_2 \preceq a_1$  y  $a_2 \preceq a_3$ ,  $a_3 \preceq a_2$ . Entonces, por el axioma 4.2,  $a_1 \preceq a_3$  y  $a_3 \preceq a_1$ . Por lo tanto,  $a_1 \sim a_3$ <sup>7</sup>.  $\square$

El siguiente axioma, formaliza la idea de que la preferencia entre consecuencias es no afectada por la obtención de nueva información.

**Axioma 4.3.** *Sea  $(\Theta, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \preceq)$  y  $\emptyset \prec \vartheta$  un evento cualesquiera.*

1. *Si  $c_1 \preceq c_2$  entonces,  $c_1 \preceq_{\vartheta} c_2$ .*
2. *Si  $c_1 \prec c_2$  tal que  $\{c_2 \mid \theta_1, c_1 \mid \theta_1^c\} \preceq \{c_2 \mid \theta_2, c_1 \mid \theta_2^c\}$  entonces,  $\theta_1 \preceq \theta_2$ .*
3. *Si para algún  $c$  y  $\emptyset \prec \vartheta$  tal que  $\{a_1 \mid \vartheta, c \mid \vartheta^c\} \preceq \{a_2 \mid \vartheta, c \mid \vartheta^c\}$  entonces,  $a_1 \preceq_{\vartheta} a_2$ .*

La condición (2) y (3), aseguran la operacionalidad de la definición 3.9 y 3.10. En particular (2), afirma que si  $\{c_2 \mid \theta_1, c_1 \mid \theta_1^c\} \preceq \{c_2 \mid \theta_2, c_1 \mid \theta_2^c\}$  para algún  $c_1 \prec c_2$  entonces, se debe tener ésta preferencia para toda  $c_1 \prec c_2$ . Esto formaliza la idea intuitiva de que la preferencia sólo debe depender de la “verosimilitud relativa” de  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , más no de las consecuencias empleadas al construir las opciones. Similarmente, la condición (3), afirma que si se tiene la preferencia  $\{a_1 \mid \vartheta, c \mid \vartheta^c\} \preceq \{a_2 \mid \vartheta, c \mid \vartheta^c\}$  para algún  $c$  entonces, dado  $\vartheta$ ,  $a_1$  no debe preferirse a  $a_2$ , así, para cualesquiera  $a \in \mathcal{A}$ ,  $\{a_1 \mid \vartheta, a \mid \vartheta^c\} \preceq \{a_2 \mid \vartheta, a \mid \vartheta^c\}$ . Este último argumento, es una versión de lo que es llamado:

*Sure Thing Principle:* Si  $(a_1 \preceq a_2 \mid \vartheta) \wedge (a_1 \preceq a_2 \mid \vartheta^c)$  entonces,  $a_1 \preceq a_2$  [8].

Una consecuencia importante del axioma 4.3, es el hecho de que la preferencia entre consecuencias es invariante bajo cambios en la información respecto a los eventos en  $\Theta$ .

**Proposición 4.3.** *Sea  $(\Theta, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \preceq)$  un problema de decisión.*

*Si  $c_1 \preceq c_2$  si y sólo si existe  $\emptyset \prec \vartheta$  tal que  $c_1 \preceq_{\vartheta} c_2$ .*

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Si  $c_1 \preceq c_2$  entonces, por el axioma 4.3-(1),  $c_1 \preceq_{\vartheta} c_2$  para algún  $\vartheta$ .

( $\Leftarrow$ ) Por la definición 3.10-(1), para algún  $\emptyset \preceq \vartheta$ ,  $c_1 \preceq_{\vartheta} c_2$  implica que para alguna opción  $a$  se tiene  $\{c_1 \mid \vartheta, a \mid \vartheta^c\} \preceq \{c_2 \mid \vartheta, a \mid \vartheta^c\}$ . Tomando  $a = \{c_1 \mid \vartheta, c_2 \mid \vartheta^c\}$  se sigue que  $\{c_1 \mid \vartheta, c_2 \mid \vartheta^c\} \preceq \{c_1 \mid \emptyset, c_2 \mid \Omega\}$ . Si  $c_1 \succ c_2$ , por el axioma 4.3-(2), se tiene que  $\vartheta \prec \emptyset$  lo cual es una contradicción ya que  $\emptyset \prec \vartheta$ . Así, por el axioma 4.1-(2) se sigue que  $c_1 \preceq c_2$ .  $\square$

Otra consecuencia importante, del axioma 4.3, es sobre el orden de incertidumbre entre eventos respecto a una implicación lógica. Si  $\theta_1$  implica a  $\theta_2$ , es decir, si  $\theta_1 \subseteq \theta_2$  entonces,  $\theta_2$  no puede considerarse menos verosímil que  $\theta_1$ .

**Proposición 4.4.** *Sea  $(\Theta, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \preceq)$  un problema de decisión.*

*Si  $\theta_1 \subseteq \theta_2$  entonces  $\theta_1 \preceq \theta_2$ .*

<sup>7</sup>La proposición 4.1 y un argumento similar, es empleado para demostrar el caso para eventos.

*Demostración.* Para algún  $c_1$  y  $c_2 \in \mathcal{C}$  tal que  $c_1 \prec c_2$ , defínase:

$$\begin{aligned} a_1 &= \{c_2 \mid \theta_1, c_1 \mid \theta_1^c\} = \{c_1 \mid \theta_2 \setminus \theta_1, \{c_2 \mid \theta_1, c_1 \mid \theta_1^c\} \mid (\theta_2 \setminus \theta_1)^c\}, \\ a_2 &= \{c_2 \mid \theta_2, c_1 \mid \theta_2^c\} = \{c_2 \mid \theta_2 \setminus \theta_1, \{c_2 \mid \theta_1, c_1 \mid \theta_1^c\} \mid (\theta_2 \setminus \theta_1)^c\}. \end{aligned}$$

Por el axioma 4.3-(3) con  $\vartheta = \theta_2 \setminus \theta_1$ , se sigue que  $a_1 \preceq a_2$ . Así, por la definición 3.8,  $\theta_1 \preceq \theta_2$ .  $\square$

Los eventos para los cuales el orden es estricto, son llamados eventos “significativos”.

**Definición 4.1.** *Sea  $(\Theta, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \preceq)$  un problema de decisión.*

*Un evento  $\theta$  es significativo dado  $\emptyset \prec \vartheta$  si:*

$$c_1 \prec c_2 \text{ implica que, } c_1 \prec_{\vartheta} \{c_2 \mid \theta, c_1 \mid \theta^c\} \prec_{\vartheta} c_2.$$

Intuitivamente, un evento significativo dado  $\vartheta$ , es interpretado como *prácticamente posible más no como cierto* [5], dada la información proporcionada por  $\vartheta$ .

**Proposición 4.5.** *Sea  $(\Theta, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \preceq)$  un problema de decisión. Un evento  $\theta$  es significativo dado  $\emptyset \prec \vartheta$  si y sólo si  $\emptyset \prec \theta \cap \vartheta \prec \vartheta$ .*

La esencia operacional del hecho de “aprender de la experiencia” es, que las preferencias pueden cambiar al pasar de un estado de información a otro respecto a la ocurrencia de un evento en  $\Theta$ , y como caso especial, es cuando estas preferencias no cambian. Esto puede ser descrito en términos de los conceptos hasta ahora definidos.

**Definición 4.2.** *Sea  $(\Theta, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \preceq)$  un problema de decisión.*

*$\theta_1 \perp \theta_2$  ( $\theta_1$  es independiente de  $\theta_2$ ) si y sólo si para toda  $c, c_1, c_2$  se tiene:*

1.  $c \bullet \{c_2 \mid \theta_1, c_1 \mid \theta_1^c\}$  implica que,  $c \bullet_{\theta_2} \{c_2 \mid \theta_1, c_1 \mid \theta_1^c\}$ ,
2.  $c \bullet \{c_2 \mid \theta_2, c_1 \mid \theta_2^c\}$  implica que,  $c \bullet_{\theta_1} \{c_2 \mid \theta_2, c_1 \mid \theta_2^c\}$ <sup>8</sup>.

La preferencia entre opciones, formalizada hasta ahora, provee sólo una base *cualitativa* para comparar opciones pero es inadecuada para ciertos contextos, por lo que es necesario introducir una cuantificación, *una unidad numérica*, que permita “medir”, de alguna manera, determinados entes por comparación (implícita o explícitamente) con determinada escala numérica.

## 5. PRINCIPIOS DE CUANTIFICACIÓN

Los principios de cuantificación permitirán deducir la necesidad de asignar, a la información inicial, una *medida de probabilidad* que la especifique y, proporcionarán una manera para describir las preferencias entre decisiones a través de una función de utilidad, conllevando así, a elegir la decisión que maximice la utilidad esperada.

*La precisión, a través de los axiomas de cuantificación, se consigue introduciendo una escala numérica apropiada dentro de un contexto dotado con una relación (cualitativa) de orden coherente* [5].

**Axioma 5.1.** *Existe una subálgebra  $\mathfrak{S} \subseteq \Theta$  y una función  $\mu : \mathfrak{S} \rightarrow [0, 1]$  tal que: si  $\theta, \theta' \in \mathfrak{S}$  entonces:*

1. Si  $\theta \preceq \theta'$  si y sólo si  $\mu(\theta) \leq \mu(\theta')$ .
2. Si  $\theta \cap \theta' = \emptyset$  entonces,  $\mu(\theta \cup \theta') = \mu(\theta) + \mu(\theta')$ .

<sup>8</sup>Donde  $\bullet$  es una de las relaciones  $\prec, \succ$  o  $\sim$ .

3. Si  $\theta \perp \theta'$  entonces,  $\mu(\theta \cap \theta') = \mu(\theta)\mu(\theta')$ .
4. Si  $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$  y  $\alpha \in [0, 1]$  entonces, existe  $\theta \in \mathfrak{S}$  tal que:
  - a)  $\theta_1 \perp \theta$ ,
  - b)  $\theta_2 \perp \theta$ ,
  - c)  $\mu(\theta) = \alpha$ .
5. Sean  $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$  tal que  $\theta_1 \perp \theta$ ,  $\theta_2 \perp \theta$  y  $\theta_1 \perp \theta_2$ :  
Si  $\theta_1 \sim \theta$  entonces,  $\theta_1 \sim_{\theta_2} \theta$ .

**Definición 5.1.** Sea  $\theta \in \Theta$ . Si  $\theta \in \mathfrak{S}$ , diremos que  $\theta$  es un evento estándar.

**Proposición 5.1.** Si  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subseteq \mathbb{R}^+$  es una colección finita de números reales tal que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1$  entonces,  $\exists \{\theta_i \in \mathfrak{S} : \theta_i \cap \theta_j = \emptyset, i \neq j\} \subseteq \mathfrak{S} : \mu(\theta_i) = \alpha_i$ , para toda  $i = \overline{1, n}$ .

*Demostración.* Por el axioma 5.1-(4) existe  $\theta_1 \in \mathfrak{S}$  tal que  $\mu(\theta_1) = \alpha_1$ . Para algún  $1 < j \leq n$ , suponga inductivamente que  $\theta_1, \dots, \theta_{j-1} \in \mathfrak{S}$  tal que  $\theta_k \cap \theta_s = \emptyset$  para  $k \neq s$ . Sea  $B_j = \bigcup_{k=1}^{j-1} \theta_k$  y definamos  $\beta_j = \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k = \mu(B_j)$ . Nuevamente, por el axioma 5.1-(3) y (4), existe un  $T_j \in \mathfrak{S}$  tal que  $\mu(B_j \cap T_j) = \mu(B_j) \frac{\alpha_j}{1-\beta_j}$ . Sea  $\theta_j = T_j \cap B_j^c$  luego,  $\theta_j \cap \theta_i = \emptyset$  para toda  $i = \overline{1, j-1}$ . Sea  $T_j = \theta_j \cup (T_j \cap B_j)$ , por el axioma 5.1-(2) se sigue que,  $\mu(T_j) = \mu(\theta_j) + \mu(T_j \cap B_j)$ . Por lo que,  $\mu(\theta_j) = \frac{\alpha_j}{(1-\beta_j)} - \frac{\alpha_j \beta_j}{(1-\beta_j)} = \alpha_j$ .  $\square$

**Axioma 5.2.** Sea  $(\Theta, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \preceq)$  un problema de decisión.

1. Si  $c_1 \preceq c \preceq c_2$  entonces, existe  $\theta \in \mathfrak{S}$  tal que  $c \sim \{c_2 \mid \theta, c_1 \mid \theta^c\}$ .
2. Para cada  $\theta \in \Theta$ , existe  $\theta' \in \mathfrak{S}$  tal que  $\theta \sim \theta'$ .

La proposición 5.1 y el axioma 5.2, permiten reducir a lo más esencial la idea introducida al final de la sección anterior, la precisión a través de la cuantificación.

## 6. CREENCIA Y PROBABILIDAD

La preferencia entre opciones debe depender, al menos, “del grado de creencia” sobre los eventos inciertos. Los principios de *coherencia* y *cuantificación* permiten dar una definición formal al concepto de *grado de creencia* y proveen de una medida numérica para la incertidumbre asociada a cada evento.

A continuación, se presentan algunos resultados respecto a la relación de incertidumbre entre eventos.

**Proposición 6.1.** Sea  $(\Theta, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \preceq)$  un problema de decisión. Si  $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$  entonces, es cierta una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

$$(\theta_1 \preceq \theta_2) \vee (\theta_1 \sim \theta_2) \vee (\theta_2 \preceq \theta_1).$$

Aunque la relación de orden para opciones,  $\preceq$ , se asume que es no completa (es decir, no todo par de opciones es comparable), se sigue, como una consecuencia del axioma 5.2, que la relación de incertidumbre inducida para eventos es completa (Proposición 6.1).

**Proposición 6.2.** Si  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \in \Theta$  tal que  $\theta_1 \preceq \theta_2$ ,  $\theta_3 \preceq \theta_4$  y  $\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset = \theta_3 \cap \theta_4$  entonces,  $\theta_1 \cup \theta_3 \preceq \theta_2 \cup \theta_4$ .

**Definición 6.1.** Dada una relación de incertidumbre  $\preceq$ , se define la probabilidad de  $\theta \in \Theta$  como:

$$P(\theta) = \mu(\theta') \text{ con } \theta' \in \mathfrak{S} \text{ tal que } \theta \sim \theta'.$$

Es decir,  $P(\theta)$  es el número real asociado al evento estándar  $\theta'$ .

**Proposición 6.3.** Dada una relación de incertidumbre  $\preceq$ , existe una única probabilidad asociada a cada evento en  $\Theta$ .

*Demostración.* La existencia se sigue del axioma 5.2-(2). Para la unicidad, si  $\theta \sim \theta'$  y  $\theta \sim \theta'_1$  entonces, por la proposición 4.2-(2),  $\theta' \sim \theta'_1$ . Por lo tanto, el resultado se sigue del axioma 5.1-(1).  $\square$

**Definición 6.2.** Una función  $f : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  será compatible con una relación de orden  $\preceq$  sobre  $\Theta \times \Theta$  si:

$$\forall \theta, \theta_1 \in \Theta : \theta \preceq \theta_1 \text{ si y sólo si } f(\theta) \leq f(\theta_1).$$

**Proposición 6.4.** La función de probabilidad  $P(\cdot)$  es compatible con la relación de incertidumbre  $\preceq$ .

*Demostración.* Por el axioma 5.2-(2) existen eventos estándar  $\theta'_1, \theta'_2 \in \mathfrak{S}$  tal que  $\theta_1 \sim \theta'_1$  y  $\theta_2 \sim \theta'_2$ . Por la proposición 4.2-(2), si  $\theta_1 \preceq \theta_2$  si y sólo si  $\theta'_1 \preceq \theta'_2$ , así por el axioma 5.1-(1) si y sólo si  $\mu(\theta'_1) \leq \mu(\theta'_2)$ . El resultado se sigue de la definición 6.1.  $\square$

La siguiente proposición, de importancia fundamental, establece que el “grado de creencia” tiene la estructura de una medida de probabilidad aditiva finita sobre  $\Theta$ .

**Proposición 6.5.** Sea  $\preceq$  una relación de incertidumbre entonces:

1.  $P(\emptyset) = 0$  y  $P(\Omega) = 1$ .
2. Si  $\theta \cap \theta_1 = \emptyset$  entonces,  $P(\theta \cup \theta_1) = P(\theta) + P(\theta_1)$ .
3. Si  $\theta$  es significativo si y sólo si  $0 < P(\theta) < 1$ .

*Demostración.* (1) De la definición 6.1 se sigue que  $0 \leq P(\theta) \leq 1$ . Más aún, por el axioma 5.1-(4) existen  $\theta_*$  y  $\theta^*$  tal que  $\mu(\theta_*) = 0$  y  $\mu(\theta^*) = 1$ . Por la proposición 4.4 se tiene que  $\emptyset \preceq \theta_*$  y, por la proposición 6.4,  $P(\emptyset) = 0$ ; de manera similar,  $\theta^* \preceq \Omega$  implica que  $P(\Omega) = 1$ .

(2) Si  $\theta = \emptyset = \theta_1$ , trivialmente se sigue el resultado. Supongamos que  $\theta \succ \emptyset \prec \theta_1$  entonces, por la proposición 6.2,  $\theta \cup \theta_1 \succ \theta$ ; así, si  $\alpha = P(\theta)$  y  $\beta = P(\theta \cup \theta_1)$  se sigue que  $\alpha < \beta$  y, por la proposición 5.1, existen eventos  $\theta'$  y  $\theta'_1$  tal que  $\theta' \cap \theta'_1 = \emptyset$ ,  $P(\theta') = \alpha$  y  $P(\theta'_1) = \beta - \alpha$ . Por la proposición 6.1,  $\theta_1 \succ \theta'_1$  o  $\theta_1 \sim \theta'_1$  o  $\theta_1 \prec \theta'_1$ . Si  $\theta_1 \succ \theta'_1$  entonces, por la proposición 6.2,  $\theta \cup \theta_1 \succ \theta^* \cup \theta'_1$  y por lo tanto,  $P(\theta \cup \theta_1) > \beta$  lo cual es imposible ya que  $P(\theta \cup \theta_1) = \beta$ . Análogamente, si  $\theta_1 \prec \theta'_1$  entonces,  $\theta \cup \theta_1 \prec \theta' \cup \theta'_1$  y  $P(\theta \cup \theta_1) < \beta$ , lo cual es contradictorio. Luego,  $\theta_1 \sim \theta'_1$  y, por lo tanto,  $P(\theta_1) = \beta - \alpha$ , de donde se sigue el resultado.

(3) Por la proposición 4.5, si  $\theta$  es significativo si y sólo si  $\emptyset \prec \theta \prec \Omega$ . Luego el resultado se sigue de la proposición 6.4.  $\square$

La proposición 6.5, en otras palabras, establece que *el grado de creencia es una medida de probabilidad coherente*, es decir, permite que el concepto de grado de creencia realice comparaciones coherentes, cuando no sólo se considera una incertidumbre. [5].

**Corolario 6.1.** (*Estructura de aditividad finita del grado de creencia*)

1. Si  $\{\theta_j\}_{j \in J} \subseteq \Theta$  es una colección de eventos tal que  $\theta_i \cap \theta_k = \emptyset$  para toda  $i \neq k$  entonces,  $P(\bigcup_{j \in J} \theta_j) = \sum_{j \in J} P(\theta_j)$ .
2. Para algún evento  $\theta \in \Theta$  se tiene  $P(\theta^c) = 1 - P(\theta)$ .

**Definición 6.3.** Si  $\{\theta_j\}_{j \in J}$  forma una partición finita de  $\Omega$  con  $P(\theta_j) = p_j$  con  $j \in J$  entonces,  $\{p_j\}_{j \in J}$  se le llamará una distribución de probabilidad sobre la partición.

- Proposición 6.6.**
1.  $P(\cdot)$  es la única medida de probabilidad compatible con la relación de incertidumbre  $\preceq$ .
  2.  $\theta \perp \theta_1$  si y sólo si  $P(\theta \cap \theta_1) = P(\theta)P(\theta_1)$ .
  3. Sea  $\emptyset \prec \vartheta$  y la relación de incertidumbre  $\preceq_\vartheta$ :
    - a)  $\theta_1 \preceq_\vartheta \theta_2$  si y sólo si  $\theta_1 \cap \vartheta \preceq \theta_2 \cap \vartheta$ .
    - b) Si existen  $c_1 \prec c_2$  tal que  $\{c_2 \mid \theta_1, c_1 \mid \theta_1^c\} \preceq_\vartheta \{c_2 \mid \theta_2, c_1 \mid \theta_2^c\}$  entonces,  $\theta_1 \preceq_\vartheta \theta_2$ .

*Demostración.* (1) Si  $P'$  es otra medida compatible entonces, por la proposición 6.2, se tiene que  $P'(\theta_1) \leq P'(\theta_2)$  si y sólo si  $P(\theta_1) \leq P(\theta_2)$ ; de aquí, existe una función monótona  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tal que  $P'(\theta_1) = f(P(\theta_1))$ . Por la proposición 5.1, para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\alpha + \beta \leq 1$ , existen  $\theta'_1, \theta'_2 \in \mathfrak{E}$  eventos estándar-disjuntos tal que  $P(\theta'_1) = \alpha$  y  $P(\theta'_2) = \beta$ . Por lo tanto, por el axioma 5.1-(2),  $f(\alpha + \beta) = P'(\theta'_1 \cup \theta'_2) = P'(\theta'_1) + P'(\theta'_2) = f(\alpha) + f(\beta)$  y así,  $f(\alpha) = k\alpha$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ , ver [6]-Teorema 2.63. Pero por la proposición 6.3,  $P'(\Omega) = 1$  de donde se sigue que  $k = 1$ , por lo tanto,  $P'(\theta) = P(\theta)$  para todo  $\theta$ .

(2) [ $\Rightarrow$ ] Por el axioma 5.1-(4), existe  $\theta' \in \mathfrak{E}$  tal que  $P(\theta') = P(\theta)$  con  $\theta \perp \theta'$  y  $\theta_1 \perp \theta'$ . Luego, por el axioma 5.1-(5),  $\theta \sim_{\theta_1} \theta'$  así, para cualquier  $c_1 \prec c_2$  y  $a \in \mathcal{A}$ ,

$$\{c_2 \mid \theta \cap \theta_1, c_1 \mid \theta^c \cap \theta_1, a \mid \theta_1^c\} \sim \{c_2 \mid \theta' \cap \theta_1, c_1 \mid \theta'^c \cap \theta_1, a \mid \theta_1\}.$$

Tomando  $a = c_1$ , se tiene:

$$\{c_2 \mid \theta \cap \theta_1, c_1 \mid (\theta \cap \theta_1)^c\} \sim \{c_2 \mid \theta' \cap \theta_1, c_1 \mid (\theta' \cap \theta_1)^c\},$$

por lo que  $\theta \cap \theta_1 \sim \theta' \cap \theta_1$ . Ahora, para  $\theta_1, \theta'$  dados, por el axioma 5.1-(4), existe  $\theta'_1$  tal que  $P(\theta'_1) = P(\theta_1)$  con  $\theta_1 \perp \theta'_1$  y  $\theta' \sim \theta'_1$ . Luego, por un argumento similar al anterior y la definición 4.2, se tiene:

$$\theta' \cap \theta_1 \sim \theta' \cap \theta'_1.$$

Por la proposición 4.1, 6.4 y el axioma 5.1-(3) se sigue:

$$P(\theta \cap \theta_1) = P(\theta' \cap \theta'_1) = P(\theta')P(\theta'_1),$$

luego,  $P(\theta \cap \theta_1) = P(\theta)P(\theta_1)$ .

[ $\Leftarrow$ ] Por el axioma 5.1-(4), existe  $\theta' \in \mathfrak{E}$  tal que  $P(\theta') = P(\theta_1)$  con  $\theta_1 \perp \theta'$ ,  $\theta \perp \theta'$ . Luego, por la condición necesaria de la prueba se tiene:

$$P(\theta \cap \theta') = P(\theta)P(\theta') = P(\theta)P(\theta_1) = P(\theta \cap \theta_1),$$

por lo tanto,  $\theta \cap \theta_1 \sim \theta \cap \theta'$ . Ahora suponga, sin pérdida de generalidad, que  $c \preceq \{c_2 \mid \theta, c_1 \mid \theta^c\}$ . Entonces, por la definición 4.2:

$$\{c \mid \theta', c_1 \mid \theta'^c\} \preceq \{c_2 \mid \theta \cap \theta', c_1 \mid (\theta \cap \theta')^c\}.$$

Pero  $\{c \mid \theta', c_1 \mid \theta'^c\} \sim \{c \mid \theta_1, c_1 \mid \theta_1^c\}$  y:

$$\{c_2 \mid \theta \cap \theta', c_1 \mid (\theta \cap \theta')^c\} \sim \{c_2 \mid \theta \cap \theta_1, c_1 \mid (\theta \cap \theta_1)^c\};$$

luego, por la proposición 4.2:

$$\{c \mid \theta_1, c_1 \mid \theta_1^c\} \preceq \{c_2 \mid \theta \cap \theta_1, c_1 \mid (\theta \cap \theta_1)^c\},$$

por lo tanto,  $c \preceq_{\theta_1} \{c_2 \mid \theta, c_1 \mid \theta^c\}$ . Finalmente, como un argumento similar puede ser establecido intercambiando  $\theta$  por  $\theta_1$  y viceversa, se establece que  $\theta \perp \theta_1$ .

(3)-a) Por la definición 3.10 y la proposición 4.3, si  $\theta_1 \preceq_{\vartheta} \theta_2$  si y sólo si, para toda  $c_2 \succeq c_1$ :

$$\{c_2 \mid \theta_1, c_1 \mid \theta_1^c\} \preceq_{\vartheta} \{c_2 \mid \theta_2, c_1 \mid \theta_2^c\},$$

es decir, si y sólo si, para toda  $a \in \mathcal{A}$ :

$$\{c_2 \mid \theta_1 \cap \vartheta, c_1 \mid \theta_1^c \cap \vartheta, a \mid \vartheta^c\} \preceq \{c_2 \mid \theta_2 \cap \vartheta, c_1 \mid \theta_2^c \cap \vartheta, a \mid \vartheta^c\}.$$

Tomando  $a = c_1$  se tiene:

$$\theta_1 \preceq_{\vartheta} \theta_2 \Leftrightarrow \{c_2 \mid \theta_1 \cap \vartheta, c_1 \mid (\theta_1 \cap \vartheta)^c\} \preceq \{c_2 \mid \theta_2 \cap \vartheta, c_1 \mid (\theta_2 \cap \vartheta)^c\},$$

lo cual es cierto, si y sólo si,  $\theta_1 \cap \vartheta \preceq \theta_2 \cap \vartheta$ .

b) Si existe  $c_2 \succ c_1$  tal que  $\{c_2 \mid \theta_1, c_1 \mid \theta_1^c\} \preceq_{\vartheta} \{c_2 \mid \theta_2, c_1 \mid \theta_2^c\}$  entonces, por la definición 3.10, con  $a = c_1$  se tiene:

$$\{c_2 \mid \theta_1 \cap \vartheta, c_1 \mid \theta_1^c \cap \vartheta, c_1 \mid \vartheta^c\} \preceq \{c_2 \mid \theta_2 \cap \vartheta, c_1 \mid \theta_2^c \cap \vartheta, c_1 \mid \vartheta^c\},$$

por lo tanto:

$$\{c_2 \mid \theta_1 \cap \vartheta, c_1 \mid (\theta_1 \cap \vartheta)^c\} \preceq \{c_2 \mid \theta_2 \cap \vartheta, c_1 \mid (\theta_2 \cap \vartheta)^c\},$$

y el resultado se sigue del axioma 4.3-(2) y la parte (3)-a).  $\square$

**Definición 6.4.** Dada una relación de incertidumbre  $\preceq_{\vartheta}$  con  $\emptyset \prec \vartheta$ . La probabilidad condicional de un evento  $\theta_1$ , dada la ocurrencia de  $\vartheta$ , es un número real tal que  $\theta_1 \sim_{\vartheta} \theta$  con  $\theta$  un evento estándar e independiente de  $\vartheta$ , es decir:

$$P(\theta_1 \mid \vartheta) = \mu(\theta) \text{ tal que } \theta_1 \sim_{\vartheta} \theta \text{ con } \theta \in \mathfrak{S} \text{ independiente de } \vartheta.$$

**Proposición 6.7.** Para algún  $\emptyset \prec \vartheta$ :

1.  $P(\theta \mid \vartheta) = \frac{P(\theta \cap \vartheta)}{P(\vartheta)}$ .
2.  $\theta_1 \preceq_{\vartheta} \theta_2$  si y sólo si  $P(\theta_1 \mid \vartheta) \leq P(\theta_2 \mid \vartheta)$ .
3. Para cualquier evento  $\emptyset \prec \vartheta$ ,
  - a)  $0 = P(\emptyset \mid \vartheta) \leq P(\theta \mid \vartheta) \leq P(\Omega \mid \vartheta) = 1$ .
  - b) Si  $\theta_1 \cap \theta_2 \cap \vartheta = \emptyset$  entonces,  $P(\theta_1 \cup \theta_2 \mid \vartheta) = P(\theta_1 \mid \vartheta) + P(\theta_2 \mid \vartheta)$ .
  - c)  $\theta$  es significativo dado  $\vartheta$  si y sólo si  $0 < P(\theta \mid \vartheta) < 1$ .

*Demostración.* (1) Del axioma 5.1-(4) y la proposición 6.6-(2), existe  $\vartheta' \perp \vartheta$  tal que  $\mu(\vartheta') = \frac{P(\theta \cap \vartheta)}{P(\vartheta)}$ . Y, por la proposición 6.6-(2) se tiene:

$$P(\vartheta' \cap \vartheta) = P(\vartheta')P(\vartheta) = \mu(\vartheta')P(\vartheta) = P(\theta \cap \vartheta).$$

Luego, por la proposición 6.4, se sigue que  $\vartheta' \cap \vartheta \sim \theta \cap \vartheta$  y, por la proposición 6.6-(3),  $\vartheta' \sim_{\vartheta} \theta$ . Entonces, por la definición 6.4,  $P(\theta | \vartheta) = \mu(\vartheta') = \frac{P(\theta \cap \vartheta)}{P(\vartheta)}$ .

(2) De la proposición 6.6-(3)-a se tiene que si  $\theta_1 \preceq_{\vartheta} \theta_2$  si y sólo si,  $\theta_1 \cap \vartheta \preceq \theta_2 \cap \vartheta$  y, por la proposición 6.4, si y sólo si  $P(\theta_1 \cap \vartheta) \leq P(\theta_2 \cap \vartheta)$ ; por lo tanto, el resultado se sigue de la proposición 6.7-(1).

(3)-a) De la proposición 6.7-(1) se sigue que  $P(\theta | \vartheta) \geq 0$  y  $P(\emptyset | \vartheta) = 0$ , además, como  $\theta \cap \vartheta \subseteq \vartheta$  entonces, por la proposición 6.4,  $P(\theta \cap \vartheta) \leq P(\vartheta)$  luego, por la proposición 6.7-(1),  $P(\theta | \vartheta) \leq 1$ . Finalmente, como  $\Omega \cap \vartheta = \vartheta$  por la proposición 6.7-(1), se sigue que  $P(\Omega | \vartheta) = 1$ .

b) De la prosocisión 6.7-(1) se tiene:

$$P(\theta_1 \cup \theta_2 | \vartheta) = \frac{P[(\theta_1 \cap \vartheta) \cup (\theta_2 \cap \vartheta)]}{P(\vartheta)} = \frac{P(\theta_1 \cap \vartheta)}{P(\vartheta)} + \frac{P(\theta_2 \cap \vartheta)}{P(\vartheta)} = P(\theta_1 | \vartheta) + P(\theta_2 | \vartheta).$$

c) De la proposición 4.5 se tiene que si  $\theta$  es significativo dado  $\vartheta$  si y sólo si,  $\emptyset \preceq \theta \cap \vartheta \preceq \vartheta$  y, por la proposición 6.4, si y sólo si  $0 < P(\theta \cap \vartheta) < P(\vartheta)$  así, el resultado se sigue de la proposición 6.7-(1).  $\square$

**Corolario 6.2.** Para todo  $\emptyset \prec \vartheta$ :

1. Si  $\{\theta_j \cap \vartheta\}_{j \in J} \subseteq \Theta$  es una colección de eventos tal que  $\theta_i \cap \theta_k \cap \vartheta = \emptyset$  para toda  $i \neq k$  entonces,  $P(\bigcup_{j \in J} \theta_j | \vartheta) = \sum_{j \in J} P(\theta_j | \vartheta)$ .
2. Para algún evento  $\theta \in \Theta$  se tiene  $P(\theta^c | \vartheta) = 1 - P(\theta | \vartheta)$ .

**Proposición 6.8.** Para cualquier  $\emptyset \prec \vartheta$ :

1.  $P(\cdot | \vartheta)$  es la única medida de probabilidad compatible con la relación de incertidumbre condicional  $\preceq_{\vartheta}$ .
2. (Teorema de Bayes)  
Para alguna partición  $\{\theta_j\}_{j \in J}$  de  $\Omega$ :

$$P(\theta_i | \vartheta) = \frac{P(\vartheta | \theta_i) P(\theta_i)}{\sum_{j \in J} P(\vartheta | \theta_j) P(\theta_j)}.$$

*Demostración.* 1. La demostración es análoga a la prueba de la proposición 6.6-(1).

2. Por la proposición 6.7-(1) se tiene:

$$P(\theta_i | \vartheta) = \frac{P(\theta_i \cap \vartheta)}{P(\vartheta)} = \frac{P(\vartheta | \theta_i) P(\theta_i)}{P(\vartheta)}.$$

Así, el resultado se sigue a partir del corolario 6.1 para  $\vartheta = \bigcup_j (\vartheta \cap \theta_j)$ .  $\square$

Este último resultado 6.8-(2), es una consecuencia matemática simple, ya que la coherencia cuantitativa implica que el grado de creencia sigue las reglas de la probabilidad.

Dado que  $\{\theta_j\}_{j \in J}$  forma una partición y  $\sum_j P(\theta_j | \vartheta) = 1^9$  entonces, el teorema de Bayes puede ser escrito, para toda  $j \in J$ , como:

$$P(\theta_j | \vartheta) \propto^{10} P(\vartheta | \theta_j) P(\theta_j),$$

<sup>9</sup>Esta igualdad se sigue del corolario 6.2.

<sup>10</sup> $\propto$ - denotará *proporcional a*.

dado que siempre es posible normalizar el producto al dividirlo por la constante de proporcionalidad:

$$P(\vartheta) = \sum_j P(\vartheta | \theta_j)P(\theta_j).$$

El teorema de Bayes caracteriza la forma en la cual la creencia inicial sobre los  $\theta_j$ s ( $P(\theta_j)$ ) es modificada por nueva información ( $\vartheta$ ), reexaminando y modificando tal creencia por  $P(\theta_j | \vartheta)$ . Este proceso depende esencialmente de la especificación de  $P(\vartheta | \theta_j)$ , la cual refleja como la creencia sobre la nueva información obtenida, varía respecto a los diferentes  $\theta_j$ s<sup>11</sup>[5].

Hasta aquí, los principios de coherencia y cuantificación han permitido introducir una medida numérica para comparar cuantitativamente eventos y consecuencias, estos principios, también, permiten definir una medida numérica para comparar opciones.

## 7. UTILIDAD

La preferencia entre opciones depende, en parte, del “grado de creencia” asociado a los eventos inciertos involucrados en las opciones pero, también, debe depender del valor asociado a las consecuencias obtenidas. El axioma 5.2-(1) provee, de manera intuitiva, una forma de introducir una *medida numérica para las consecuencias* la cual es, al menos, una base operacional coherente [5].

**Definición 7.1.** La consecuencia  $c_*$  será la peor y  $c^*$  será la mejor consecuencia en un problema de decisión si, para algún otra consecuencia  $c \in \mathcal{C}$  se tiene:

$$c_* \preceq c \preceq c^*.$$

No necesariamente las consecuencias  $c_*$  y  $c^*$  deben existir y pertenecer a  $\mathcal{C}$ . En adelante, se asumirá que existen, por lo que  $(\Theta, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \preceq)$  se le llamará, *problema de decisión acotado*.

**Definición 7.2.** Dada una relación de preferencia  $\preceq$ , a la función  $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  se le llama *Función de Utilidad* y, la utilidad de una consecuencia  $c$  relativa a  $c_* \prec c^*$  se define como:

$$u(c) = u(c | c_*, c^*) = \mu(\theta), \text{ con } \theta \in \mathfrak{S} \text{ tal que } c \sim \{c^* | \theta, c_* | \theta^c\}.$$

**Proposición 7.1.** Si  $(\Theta, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \preceq)$  es un problema de decisión acotado con consecuencias extremas  $c_* \prec c^*$  entonces:

1.  $\forall c \in \mathcal{C}, \exists! u(c | c_*, c^*)$ .
2. Si  $\theta \in \Theta \setminus \{\emptyset\}$  entonces,  $u(c | c_*, c^*, \theta) = u(c | c_*, c^*)$ .
3.  $0 = u(c_* | c_*, c^*) \leq u(c | c_*, c^*) \leq u(c^* | c_*, c^*) = 1$ .

---

11

- $P(\theta_j)$  será citada como la *probabilidad a priori* de  $\theta_j$ ,  $j \in J$ .
- $P(\vartheta | \theta_j)$ - la *verosimilitud* de  $\vartheta$  dado  $\theta_j$ ,  $j \in J$ .
- $P(\theta_j | \vartheta)$ - la *probabilidad a posteriori* de  $\theta_j$ ,  $j \in J$ .
- $P(\vartheta) = \sum_{j \in J} P(\vartheta | \theta_j)P(\theta_j)$ - la *probabilidad predictiva* de  $\vartheta$ .

**Definición 7.3.** Sea  $(\Theta, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \preceq)$  un problema de decisión acotado con consecuencias extremas  $c_* \prec c^*$ ,  $\emptyset \prec \vartheta$  y  $a = \{c_j \mid \theta_j : j \in J\}$ . La utilidad esperada para la opción  $a$  dado  $\vartheta$  respecto a  $c_* \prec c^*$  se define como:

$$\bar{u} = (a \mid c_*, c^*, \vartheta) = \sum_{j \in J} u(c_j \mid c_*, c^*) P(\theta_j \mid \vartheta).$$

**Proposición 7.2.** (Criterio de decisión para un problema de decisión acotado) Para algún problema de decisión acotado con consecuencias extremas  $c_* \prec c^*$  y  $\emptyset \prec \vartheta$ :

$$a_1 \preceq_{\vartheta} a_2 \text{ si y sólo si } \bar{u}(a_1 \mid c_*, c^*, \vartheta) \leq \bar{u}(a_2 \mid c_*, c^*, \vartheta).$$

El resultado anterior, depende de la existencia de las consecuencias  $c_*$  y  $c^*$  y la omisión, de tal suposición, hace necesario seleccionar un par de consecuencias-  $c_1$  y  $c_2$ - como referencia, donde no necesariamente  $c_1 \preceq c \preceq c_2$  para toda  $c \in \mathcal{C}$ . Esto último generaliza la definición 7.3 y por tanto, la proposición 7.2.

**Definición 7.4.** Dada una relación de preferencia  $\preceq$  y  $\theta \in \mathfrak{S}$ . Definimos la utilidad  $u(c \mid c_1, c_2)$  de una consecuencia  $c$ , relativa a las consecuencias  $c_1 \prec c_2$ , como:

1. Si  $c \prec c_1$  y  $c \sim \{c_2 \mid \theta, c \mid \theta^c\}$  entonces,  $u(c \mid c_1, c_2) = \frac{-\mu(\theta)}{1-\mu(\theta)}$ .
2. Si  $c_1 \preceq c \preceq c_2$  y  $c \sim \{c_2 \mid \theta, c_1 \mid \theta^c\}$  entonces,  $u(c \mid c_1, c_2) = \mu(\theta)$ .
3. Si  $c \succ c_2$  y  $c_2 \sim \{c \mid \theta, c_1 \mid \theta^c\}$  entonces,  $u(c \mid c_1, c_2) = \frac{1}{\mu(\theta)}$ .

**Proposición 7.3.** Para todo problema de decisión. Sean  $c_1, c_2$  consecuencias tal que  $c_1 \prec c_2$  y, sea  $\emptyset \prec \vartheta$  un evento cualesquiera, entonces:

$$a_1 \preceq_{\vartheta} a_2 \text{ si y sólo si } \bar{u}(a_1 \mid c_1, c_2, \vartheta) \leq \bar{u}(a_2 \mid c_1, c_2, \vartheta).$$

Hasta aquí, se han presentado diferentes principios que capturan una colección mínima de reglas lógicas necesarias para la toma “racional” de una decisión llevando, básicamente, a las siguientes conclusiones [4]:

1. La preferencia entre consecuencias debe ser medida con una función de *utilidad*,  $u(c) = u(a, \theta)$ , que especifique, sobre alguna escala numérica, la deseabilidad sobre estas.
2. La incertidumbre de los eventos relevantes debe ser evaluada a través de un conjunto de distribuciones de probabilidad:

$$\{(p(\theta \mid H, a), \theta \in \Theta_a) : a \in \mathcal{A}\},$$

que describa su plausibilidad dada la condición  $H$ , bajo la cual la decisión debe ser seleccionada.

3. La deseabilidad de las acciones es establecida por su correspondiente *utilidad esperada*:

$$\bar{U}(a \mid H) = \int_{\Theta_a} U(a, \theta) p(\theta \mid H, a) d\theta, \quad a \in \mathcal{A}^{12}.$$

<sup>12</sup>Frecuentemente, es más conveniente trabajar en términos de la *función de pérdida* definida por  $L(a, \theta) = [\text{Sup}_{a \in \mathcal{A}} \{U(a, \theta)\}] - U(a, \theta)$ , la cual directamente evalúa, como una función de  $\theta$ , el “efecto” de seleccionar una opción errónea. La no deseabilidad relativa de una acción  $a \in \mathcal{A}$  es entonces, evaluada por su *pérdida esperada* [7]:

$$\bar{L}(a \mid H) = \int_{\Theta_a} L(a, \theta) p(\theta \mid H, a) d\theta, \quad a \in \mathcal{A}.$$

## 8. INFERENCIA ESTADÍSTICA

A pesar de que se ha discutido que el desarrollo descrito anteriormente (que no es cuestionable cuando una decisión debe ser elegida) es no aplicable a los problemas de la inferencia estadística, ya que aparentemente no se considera ninguna toma de decisión específica es, sin embargo, demostrable [2] que la inferencia estadística sobre  $\theta$  tiene realmente la estructura matemática de un problema de decisión, donde la clase de alternativas es el espacio:

$$\mathcal{A} = \{p(\theta | D) : p(\theta | D) > 0, \int_{\Theta} p(\theta | D) d\theta = 1\},$$

es decir, es el espacio de distribuciones de probabilidad finales para  $\theta$  dado los datos  $D$ , y cuya función de utilidad esperada está dada por:

$$\int U\{p_{\theta}(\cdot), \theta\} p(\theta | D) d\theta,$$

la cual determina la cantidad de información que, cabe esperar, proporcionen los datos sobre  $\theta$ .

Por lo tanto, la teoría de la decisión no sólo provee una metodología para ocuparse de problemas de decisión bajo incertidumbre, su desarrollo, en combinación con un enfoque operacional de los conceptos básicos, permite visualizar el problema de la modelación estadística como la identificación o selección de una forma particular de representar la creencia sobre las observaciones, por lo que, la base axiomática de la teoría de la decisión, proporciona consolidación a la lógica del enfoque *Bayesiano*.

Así, la teoría Bayesiana *no* sólo proporciona un conjunto de métodos para la resolución de problemas de decisión concretos, sino, que proporciona además, una base teórica sobre la que puede construirse una teoría general unificada que contiene, como casos particulares, aquellas fórmulas estadísticas clásicas cuya utilidad ha sido demostrada por el tiempo [4].

## REFERENCIAS

- [1] Berger, J. O., *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, Springer, 2nd Edition, 1980.
- [2] Bernardo, J. M., *Bioestadística: Una perspectiva Bayesiana*, Vicens-Vives, 1981.
- [3] Bernardo, J. M., *Análisis de datos y métodos Bayesianos*, Historia de la Ciencia Estadística (S. Ríos, ed.), Madrid: Real Academia de Ciencias, 87-105, 1989.
- [4] Bernardo, J. M., *Bayesian Statistics*, Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS), Probability and Statistics (R. Viertl, ed). Oxford, UK: UNESCO (www.eolss.net), 2003.
- [5] Bernardo, J. M. and M. A. Smit, *Bayesian Theory*, Wiley Series in Probability and Statistics, 2002.
- [6] Eichhorn, W., *Functional Equations in Economics*, Reading, MA, Addison-Wesley, 1978.
- [7] Lindley, D. V., *Bayesian Statistics: A Review*, Society for Industrial and Mathematics, 1987.
- [8] Press, S. J., *Subjective and Objective Bayesian Statistics: Principles, Models, and Applications*, Wiley, 2nd Edition, 2003.
- [9] De Finetti, B., *La prevision. Ses lois logiques. Ses sources Subjectives*, Annales del 'Institut Henri Poincaré, Vol. 7, 1937.
- [10] Raiffa, H., *Applied Statistical Decision Theory*, Harvard University Press, 1961.
- [11] Raiffa, H., *Decision Analysis*, Addison-Wesley, 1970.
- [12] Ramsey, F., *The foundations of mathematics and other logical essays*, New York: Hamanities Press, 1950.
- [13] Savage, L., *The Foundations of statistics*, Wiley and Sons, 1954.
- [14] Schlaifer, R., *Analysis of Decision under uncertainty*, McGraw-Hill, 1969.
- [15] Von Neumann, J., *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1953.
- [16] Wald, A., *Statistical Decision Functions*, Wiley and Sons, New York, 1950.

gladys.linares@icbuap.buap.mx,aalopezip@gmail.com.

# CAPÍTULO 17

## VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN CALL DIGITAL EN EL MODELO DE VOLATILIDAD ESTOCÁSTICO DE HESTON

CARLOS PALOMINO JIMÉNEZ<sup>1</sup>  
FRANCISCO SOLANO TAJONAR SANABRIA<sup>2</sup>  
HÉCTOR DAVID RAMÍREZ HERNÁNDEZ<sup>1</sup>  
<sup>1</sup>FACULTAD DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN, BUAP  
<sup>2</sup>FCFM, BUAP

RESUMEN. El objetivo de este trabajo es analizar el problema de valuación de una opción digital bajo el modelo de volatilidad estocástica de Heston (1993). En este modelo la volatilidad  $v$  sigue el proceso raíz cuadrada, usado por Cox, Ingersoll y Ross (1985). Se presentan soluciones analíticas para esta clase de opciones basados en el trabajo de S. Heston (1993).

### 1. INTRODUCCIÓN

Las opciones financieras llevan mucho tiempo ejecutándose, en el pasado existía un mercado libre (OTC) en el cual se firmaban contratos sin ninguna o poca regulación. Las opciones en acciones fueron comercializadas en una manera organizada en el Chicago Board Option Exchange en 1973, pero la teoría de valuación de opciones tuvo su origen en 1900 en “Théorie de la Spéculation” de L. Bachelier. En los inicios de 1970’s, después de la introducción del movimiento browniano geométrico, Fischer Black y Myron Scholes originaron un parteaguas al derivar la fórmula de Black-Scholes la cual es uno de los resultados más significativos en la valuación de instrumentos financieros [3].

El modelo de Black-Scholes-Merton proporciona unos valores teóricos para las opciones put y call europeas sobre acciones que no pagan dividendos. El argumento clave es que los inversionistas podían, sin correr ningún riesgo, compensar posiciones largas con posiciones cortas de la acción y continuamente ajustar el ratio de cobertura (el valor delta) si era necesario. Asumiendo que el precio del subyacente sigue una caminata aleatoria y usando métodos de cálculo estocástico, el precio de la opción puede ser calculado donde no hay posibilidades de arbitraje. Este precio depende sólo de cinco factores: el precio actual del subyacente, el precio de ejercicio, la tasa de interés libre de riesgo, el tiempo hasta la fecha de ejercicio y la volatilidad del subyacente. Finalmente, el modelo también fue adaptado para ser capaz de valorar opciones sobre acciones que pagan dividendos.

El modelo de Black-Scholes supone que la volatilidad es constante (Durante la vigencia del contrato), naturalmente la suposición de volatilidad constante de Black-Scholes es incorrecta, en realidad la volatilidad no es constante y además es no predecible. En este trabajo se estudiarán opciones binarias bajo el modelo de Heston ( En este modelo se considera una volatilidad estocástica, es decir, el modelo supone que la volatilidad es un proceso estocástico.)

Comenzaremos presentando algunos conceptos fundamentales acerca de derivados y métodos de valuación.

Un derivado financiero es un instrumento financiero cuyo pago se basa en otro instrumento financiero más elemental, tal como bonos o acciones. Los derivados más populares son: contratos forward, futuros, swaps y opciones.

Las opciones están caracterizadas por su pago no negativo. Existen dos tipos básicos de opciones: call y put.

Una **opción call** da al tenedor el derecho de comprar un bien preescrito, conocido como el bien fundamental, con un precio específico, llamado el precio de ejercicio o precio strike, en un tiempo futuro especificado, llamado fecha de expiración.

Una **opción put** da al tenedor el derecho de vender el bien fundamental, con un monto acordado, en un tiempo futuro especificado.

Las opciones pueden clasificarse en base al tiempo en el cual pueden ser ejercidas:

- Una opción Europea se puede ejercer solo al expirar el contrato;
- Una opción Americana se puede ejercer desde que inicia el contrato hasta la fecha de expiración.

En particular en este trabajo nos enfocaremos a las opciones Binarias. Las **Opciones Binarias** que son relativamente un nuevo método de inversión que ofrecen un enorme potencial de beneficios.

En la inversión en opciones binarias no se compra la acción o un activo subyacente determinado, se adquiere un contrato para comprar el producto en una fecha futura.

Las opciones binarias pueden ofrecer altas ganancias de más del 75 % de su inversión en una hora, con solo predecir la dirección en la que se moverá el mercado en el periodo de tiempo determinado [4].

Se conoce como opción binaria al solo haber dos posibilidades de inversión “call” o “put” (sube o baja el mercado), la opción en la que usted invierte se encuentra por encima o por debajo del valor financiero que se estipuló a la hora y fecha citada, caso en el que usted recibiría o no sus beneficios.

**1.1. ¿Por qué Opciones Binarias?** En 2007 la cámara de Opciones (Options Clearing Corporation) presentó una propuesta para el cambio de reglas para permitir el negocio de las opciones binarias en los principales mercados.

A principios de 2008 la Securities and Exchange Commission (SEC) aprobó cambio de reglas, con lo que aprobaba la legalidad de listar en los mercados los contratos de opciones binarias.

En mayo de 2008, la American Stock Exchange se convirtió en la primera institución en ofrecer públicamente opciones binarias y el CBOE hizo lo mismo en junio de ese año.

La SEC aprobó cambio de reglas, por lo que es legal para los mercados la lista de opciones binarias como contratos negociables. En mayo de 2008, la North American Derivatives Exchange (NADEX) se convirtió en la primera institución en ofrecer públicamente las opciones binarias y el Chicago Board Options Exchange (CBOE) hizo lo mismo en junio.

Una vez que aparecieron las opciones binarias en estos importantes mercados financieros, se convirtieron en una parte importante del mercado cambiario y trajeron como consecuencia las regulaciones gubernamentales y los impuestos.

Además, invertir en Opciones binarias puede ofrecer algunas ventajas respecto a otros tipos de inversión:

- El mercado de las opciones binarias ofrece múltiples posibilidades de inversión: acciones, metales, divisas, índices bursátiles, etc., con lo que podemos diseñar una estrategia a nuestro gusto y preferencia.

- Funcionamiento las 24 horas del día, algunos de los productos que ofrecen las opciones binarias cotizan 24 horas al día o se encuentran en diferentes franjas horarias con lo que podemos invertir en multitud de productos financieros en cualquier momento.

- El mercado de las opciones binarias ofrece altos beneficios ya que en una operación de poco tiempo como la de una hora se puede obtener hasta un 200%.

- Es un mercado sencillo y no se necesita estar altamente calificado para invertir en él.

- Se sabe de antemano los beneficios y pérdidas que se pueden obtener, con lo que el inversionista puede calcular mas precisamente su estrategia.

- Es un mercado dinámico en el que operaciones cortas, normalmente de una hora, puede dar mucha emoción y beneficios.

- Se puede empezar en el mercado de las opciones binarias con poco dinero, muchos *brokers* ofrecen cuentas desde solo \$ 100 e incluso algunos menores.

**1.2. Función de pago.** Sea  $S$  el precio actual del bien fundamental y  $K$  el precio strike. Entonces, al expirar una opción call europea vale:

$$(1) \quad C(S, T) = \text{máx}(S_T - K, 0)$$

Esto significa que el tenedor ejercerá su derecho solo si  $S_T > K$  y su ganancia es  $S_T - K$ . En otro caso, si  $S_T \leq K$ , el tenedor comprará el bien fundamental en el mercado y entonces el valor de la opción es cero.

La función (1) del bien fundamental es llamada la **función de pago**.

La función de pago de una opción put europea es:

$$(2) \quad P(S, T) = \text{máx}(K - S_T, 0)$$

Cualquier opción con un pago mas complicado que el usual al put y call es llamada una opción exótica. En teoría existe un número ilimitado de opciones exóticas posibles pero en la práctica solo hay unas cuantas que son utilizadas: digitales u opciones binarias, opciones lookback, opciones barreras, opciones compuestas, opciones Asiáticas.

Una opción digital o binaria es un contrato cuya liquidación (función de pago) depende de forma discontinua del precio final del bien fundamental. Para un opción call Cash-or-Nothing con precio strike  $K$  en el tiempo  $T$ , el pago es una función Heaviside [20]:

$$(3) \quad BCC(S, T) = X\mathcal{H}(S_T - K) = \begin{cases} X, & \text{si } S_T \geq K, \\ 0, & \text{si } S_T < K, \end{cases}$$

y para una opción put Cash-or-Nothing

$$(4) \quad BCP(S, T) = X\mathcal{H}(K - S_T) = \begin{cases} X, & \text{si } S_T < K, \\ 0, & \text{si } S_T \geq K, \end{cases}$$

donde  $X$  es una cantidad fija.

## 2. FÓRMULA DE BLACK-SCHOLES.

En 1973 Fischer Black y Myron Scholes obtuvieron una ecuación diferencial parcial que provee el precio de un bien en el cual una opción está basada, entonces se resuelve la ecuación para así obtener el precio justo de la opción [3].

En lo que sigue se utiliza la siguiente notación

$S$  - el precio del bien fundamental;

$K$  - el precio de ejercicio;

$t$  - fecha actual;

$T$  - fecha de madurez;

$\tau$  - tiempo para madurar,  $\tau = T - t$ ;

$r$  - tasa de interés libre de riesgo;

$v$  - desviación estándar del bien fundamental, es decir, la volatilidad;

$\mu$  - tasa de cambio.

Las suposiciones utilizadas para derivar la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes son:

- el valor del bien fundamental sigue una distribución lognormal:

$$(5) \quad dS = \mu S dt + v S dW,$$

donde el término  $W(t)$  es un proceso estocástico con media cero y varianza  $t$  conocido como un proceso de Wiener;

- el cambio  $\mu$ , y la volatilidad  $v$ , son constantes durante la vida de la opción;
- no hay costos de transacción o impuestos;
- no hay dividendos durante la vida de la opción;
- no hay oportunidades de arbitraje;
- el comercio de derivados de seguridad es continuo;
- la tasa de interés libre de riesgo es constante durante el tiempo de vida de la opción.

A continuación se proporciona el resultado más importante del cálculo estocástico: el lema de Itô. Este lema es una regla para encontrar la diferencial de una función de una o más variables que siguen una ecuación diferencial estocástica.

**Lema 2.1** (Fórmula de Itô unidimensional). *Sea  $x(t)$  una variable que sigue la ecuación diferencial estocástica*

$$dx(t) = a(x, t)dt + b(x, t)dW.$$

Además, sea  $F(x(t), t) \in C^{2,1}$  una función al menos dos veces diferenciable. Entonces la diferencial de  $F(x, t)$  esta dada por

$$(6) \quad dF = \left[ \frac{\partial F}{\partial x} a(x, t) + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} b^2(x, t) \right] dt + \frac{\partial F}{\partial x} b(x, t) dW.$$

*Demostración.* La demostración de este lema y el caso multidimensional se encuentran en [11].  $\square$

Usando el lema de Itô y las suposiciones anteriores, Black y Scholes obtuvieron la siguiente ecuación diferencial parcial para el precio de la opción  $V(S, t)$

$$(7) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

Para obtener una única solución para la ecuación de Black-Scholes debemos considerar condiciones finales y de frontera. Restringiremos nuestra atención a la opción call europea,  $C(S, t)$ .

En la madurez,  $t = T$ , el valor de una opción call es

$$(8) \quad C(S, T) = \text{máx}(S_T - K, 0),$$

así, ésta es la condición final.

Las condiciones de frontera en el precio del bien son aplicadas en  $S = 0$  y cuando  $S \rightarrow \infty$ .

Si  $S = 0$  entonces  $dS$  es también cero y por lo tanto,  $S$  nunca cambia. Esto implica que en  $S = 0$  se tiene

$$(9) \quad C(0, t) = 0.$$

Obviamente, si el precio del bien crece sin cota  $S \rightarrow \infty$ , entonces la opción será ejercida independientemente de cuan grande sea el precio de ejercicio. Así, cuando  $S \rightarrow \infty$  el valor de la opción se convierte en el valor del bien:

$$(10) \quad C(S, t) \approx S, \quad S \rightarrow \infty.$$

Ahora tenemos el siguiente problema con valor en la frontera:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0, \\ C(0, t) = 0; \quad C(S, t) \approx S \text{ cuando } S \rightarrow \infty, \\ C(S, T) = \text{máx}(S_T - K, 0). \end{cases}$$

La solución analítica de este problema tiene la siguiente forma

$$(11) \quad C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

donde

$$(12) \quad d_1 = \frac{\log(S/K) + (r + \frac{1}{2}v^2)(T-t)}{v\sqrt{T-t}},$$

y

$$(13) \quad d_2 = \frac{\log(S/K) + (r - \frac{1}{2}v^2)(T-t)}{v\sqrt{T-t}},$$

en donde  $N(x)$  es la función de distribución acumulativa de la distribución normal estándar.

Similarmente el precio para una opción put europea es:

$$(14) \quad P(S, t) = -SN(-d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(-d_2).$$

En el caso de una opción call Cash-or-Nothing, donde se tiene la siguiente condición final  $BCC(S, T) = XH(S_T - K)$ , la solución para el precio de la opción es [4]

$$(15) \quad DC(S, t) = Xe^{-r(T-t)}N(d_2).$$

Y para el caso de una opción put Cash-or-Nothing, con la siguiente condición final  $BCP(S, T) = XH(K - S_T)$ , la solución para el precio de la opción es [4]

$$(16) \quad DC(S, t) = Xe^{-r(T-t)} (1 - N(d_2)).$$

### 3. MODELO DE VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA DE HESTON.

En el modelo de Black-Scholes se supone que la volatilidad es constante. Naturalmente la suposición de Black-Scholes es incorrecta y en realidad la volatilidad no es constante y además es no predecible. Este hecho conlleva al desarrollo de modelos de volatilidad estocástica, en los cuales se supone que la volatilidad es un proceso estocástico.

Supongamos que  $S$  satisface

$$(17) \quad dS = \mu S dt + v S dW_1,$$

y además que la volatilidad sigue el proceso estocástico:

$$(18) \quad dv = p(S, v, t) dt + q(S, v, t) dW_2,$$

donde los dos incrementos  $dW_1$  y  $dW_2$  tienen correlación  $\rho$ .

En este caso el valor  $V$  no es solo una función de  $S$  y  $t$ , también es función de la varianza  $v$ ,  $V(S, v, t)$ . La ecuación diferencial parcial que rige el precio de la opción es una generalización de la ecuación de Black-Scholes

$$(19) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho v S q \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + r S \frac{\partial V}{\partial S} + (p - \lambda q) \frac{\partial V}{\partial v} + r V = 0,$$

donde  $\lambda$  es el precio de mercado del riesgo por volatilidad.

Ejemplos de estos modelos en tiempo continuo incluyen Hull y White [9], Johnson y Shanno [10], Wiggins [18], Stein y Stein [16], Heston [7], Bates [2] y ejemplos en tiempo discreto incluyen a Taylor [17], Amin y Ng [1] y, Heston y Nandi [8].

Entre éstos modelos, el modelo de Heston es muy popular por tres principales razones:

- no se permiten volatilidades negativas;
- se permite la correlación entre las ganancias del bien y la volatilidad;
- tiene una fórmula de valuación cerrada.

La fórmula de valuación de la opción en el modelo de Heston es calculada bajo la suposición de que el precio de la acción y su volatilidad siguen los procesos estocásticos

$$(20) \quad dS(t) = S(t)[\mu dt + \sqrt{v(t)} dW_1(t)],$$

y

$$(21) \quad dv(t) = k(\theta - v(t)) dt + \sqrt{v(t)} dW_2(t),$$

donde

$$(22) \quad \mathbf{Cov}[dW_1(t), dW_2(t)] = \rho dt.$$

Finalmente, el precio de mercado del riesgo por volatilidad está dado por:

$$(23) \quad \lambda(S, v, t) = \lambda v.$$

De acuerdo a la ecuación (19) tenemos la siguiente ecuación diferencial parcial para el modelo de Heston

$$(24) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma vS\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2v\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + [k(\theta - v) - \lambda v]\frac{\partial V}{\partial v} + rV = 0.$$

Los detalles de la ecuación anterior y su solución en forma cerrada, para una opción call europea, se encuentran en Heston [7].

#### 4. SOLUCIÓN DE FORMA CERRADA PARA UNA OPCIÓN CALL DIGITAL EN EL MODELO DE HESTON

En lo que sigue, resolveremos la ecuación diferencial parcial (24) sujeta a la condición final

$$(25) \quad BCC(S, v, T) = X\mathcal{H}(S_T - K) = \begin{cases} X, & \text{if } S_T \geq K, \\ 0, & \text{if } S_T < K. \end{cases}$$

Para simplificar el trabajo se hace la siguiente sustitución  $x = \ln[S]$ ,  $U(x, v, t) = V(S, v, t)$ . Entonces la ecuación (24) se transforma en

$$(26) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2v\frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + \rho\sigma v\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial v} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (r - \frac{1}{2}2)\frac{\partial U}{\partial x} + [k(\theta - v) - \lambda v]\frac{\partial U}{\partial v} + rU = 0.$$

De forma análoga a la fórmula de Black-Scholes (15), se espera una solución de la forma

$$(27) \quad BCC(S, v, t) = Xe^{-r\tau}P,$$

donde  $P$  es la probabilidad correspondiente a  $N(d_2)$  en el caso de volatilidad constante.  $P$  es la probabilidad condicional de que la opción expire “en el dinero” (in the money) dado que

$$(28) \quad P(x, v, T; \ln[K]) = Pr[x(T) \geq \ln[K]/x(t) = x, v(t) = v].$$

Ahora se sustituye el valor propuesto para  $BCC(S, v, t)$  en la ecuación (26). Se obtiene:

$$(29) \quad e^{-r\tau}\frac{\partial P}{\partial t} + rPe^{-r\tau} + \frac{1}{2}\sigma^2ve^{-r\tau}\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} + \rho\sigma ve^{-r\tau}\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial v} + \frac{1}{2}ve^{-r\tau}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + (r - \frac{1}{2}v)e^{-r\tau}\frac{\partial P}{\partial x} + [k(\theta - v) - \lambda v]e^{-r\tau}\frac{\partial P}{\partial v} + rPe^{-r\tau} = 0.$$

Esto implica que  $P$  debe satisfacer la ecuación

$$(30) \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2v\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} + \rho\sigma v\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial v} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + (r - \frac{1}{2}v)\frac{\partial P}{\partial x} + [k(\theta - v) - \lambda v]\frac{\partial P}{\partial v} = 0,$$

sujeta a la condición final

$$(31) \quad P(x, v, T; \ln[K]) = 1_{\{x \geq \ln[K]\}}.$$

Las probabilidades no están inmediatamente disponibles en forma cerrada, pero la siguiente sección muestra que su función característica satisface la misma ecuación diferencial parcial (30).

**4.1. La función característica.** Supongamos que tenemos dos procesos

$$(32) \quad dx(t) = \left(r - \frac{1}{2}v(t)\right)dt + \sqrt{v(t)}dW_1(t),$$

$$(33) \quad dv(t) = [k(\theta - v(t)) - \lambda v(t)]dt + \sigma\sqrt{v(t)}dW_2(t),$$

con

$$(34) \quad \text{cov}[dW_1(t), dW_2(t)] = dt,$$

y una función dos veces diferenciable

$$(35) \quad f(x(t), v(t), t) = E[g(x(T), v(T)) | x(t) = x, v(t) = v].$$

Aplicando el lema de Itô, se obtiene

$$\begin{aligned} [df] &= \left(\frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial v} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}v\right) \frac{\partial f}{\partial x}\right. \\ &\quad \left.+ [k(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)dt \\ &\quad + \left(r - \frac{1}{2}v\right) \frac{\partial f}{\partial x} dW_1 + [k(\theta - v) - \lambda v] dW_2. \end{aligned}$$

Además, mediante esperanzas iteradas, sabemos que  $f(x(t), v(t), t)$  es una martingala, por lo tanto, el coeficiente  $[df]$  desaparece, i.e.,

$$(36) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial v} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}v\right) \frac{\partial f}{\partial x} \\ &+ [k(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

La ecuación (35) impone la condición final

$$(37) \quad f(x, v, T) = g(x, v).$$

Dependiendo de la forma de la ecuación de  $g$ , la función  $f$  representa diferentes objetos. Eligiendo  $g(x, v) = e^{i\varphi x}$  la solución es la función característica, la cual está disponible en forma cerrada. Para resolver la ecuación diferencial parcial (36) con las condiciones anteriores invertimos la dirección del tiempo  $\tau = T - t$ . Esto significa que debemos resolver la siguiente ecuación

$$(38) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial v} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ &+ \left(r - \frac{1}{2}v\right) \frac{\partial f}{\partial x} + [k(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \end{aligned}$$

sujeta a las condición inicial

$$(39) \quad f(x, v, 0) = e^{i\varphi x}.$$

Suponemos una solución de esta ecuación, es de la forma

$$(40) \quad f(x, v, \tau) = e^{C(\tau) + D(\tau)v + i\varphi x},$$

con condiciones iniciales  $C(0) = D(0) = 0$ .

Esta “suposición”és debido a la linealidad de los coeficientes.

Sustituyendo (40) en la ecuación (38) se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma^2 v D^2 f + \rho\sigma v i\varphi D f - \frac{1}{2}\varphi^2 f + \\ & + \left(r - \frac{1}{2}v\right) i\varphi f + [k(\theta - v) - \lambda v] D f - (C' + D'v) f = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & v \left( \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 + \rho\sigma i\varphi D - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}i\varphi - (k + \lambda)D - D' \right) + \\ & + (ri\varphi + k\theta D - C') = 0. \end{aligned}$$

Esto puede ser reducido a dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(41) \quad a) \quad D' = \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 + \rho\sigma i\varphi D - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}i\varphi - (k + \lambda)D,$$

y

$$(42) \quad b) \quad C' = ri\varphi + k\theta D.$$

a) Resolveremos la ecuacion diferencial de Riccati

$$D' = \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 + (\rho\sigma i\varphi - k - \lambda) D - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}i\varphi,$$

usando la sustitución

$$D = -\frac{E'}{\frac{\sigma^2}{2}E}.$$

Se sigue que

$$(43) \quad E'' - (\rho\sigma i\varphi - k - \lambda) E' + \frac{\sigma^2}{2} \left( -\frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}i\varphi \right) = 0.$$

Entonces la ecuación característica es

$$x^2 - (\rho\sigma i\varphi - k - \lambda) x + \frac{\sigma^2}{4} (-\varphi^2 - i\varphi) = 0.$$

Consecuentemente, si introducimos la siguiente notación

$$d = \sqrt{(\rho\sigma i\varphi - k - \lambda)^2 - \sigma^2 (-\varphi^2 - i\varphi)},$$

entonces la ecuación (43) tiene la solución general

$$E(\tau) = Ae^{x_1\tau} + Be^{x_2\tau},$$

donde

$$x_{1,2} = \frac{(\rho\sigma i\varphi - k - \lambda) \pm d}{2}.$$

Las condiciones de frontera

$$\begin{cases} E(0) = A + B, \\ Ax_1 + Bx_2 = 0, \end{cases}$$

conducen a

$$A = \frac{gE(0)}{g-1},$$

$$B = -\frac{E(0)}{g-1},$$

donde  $g = \frac{x_1}{x_2}$ . De esto obtenemos

$$E(\tau) = \frac{E(0)}{g-1} (ge^{x_1\tau} - e^{x_2\tau}),$$

$$E'(\tau) = \frac{E(0)}{g-1} (gx_1e^{x_1\tau} - x_2e^{x_2\tau}),$$

y por lo tanto,

$$D(\tau) = -\frac{2}{\sigma^2} \frac{E'}{E} = -\frac{2}{\sigma^2} x_2 \frac{(e^{x_2\tau} - e^{x_1\tau})}{(e^{x_2\tau} - ge^{x_1\tau})}.$$

Por consiguiente, nuestra ecuación tiene la siguiente solución

$$(44) \quad D(\tau) = \frac{k + \lambda + d - \rho\sigma\varphi i}{\sigma^2} \left[ \frac{1 - e^{d\tau}}{1 - ge^{d\tau}} \right],$$

donde

$$d = \sqrt{(\rho\sigma i\varphi - k - \lambda)^2 - \sigma^2(-\varphi^2 - i\varphi)},$$

$$(45) \quad g = \frac{\rho\sigma i\varphi - k - \lambda - d}{\rho\sigma i\varphi - k - \lambda + d}.$$

b) La segunda ecuación puede ser resuelta mediante integración

$$\begin{aligned} C(\tau) &= ri\varphi\tau + k\theta \int_{\tau}^0 \left(-\frac{E'}{\frac{\sigma^2}{2}E}\right) ds \\ &= ri\varphi\tau - \frac{2k\theta}{\sigma^2} \int_{\tau}^0 \frac{E'}{E} ds \\ &= ri\varphi\tau - \frac{2k\theta}{\sigma^2} \ln \frac{E(\tau)}{E(0)}. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$(46) \quad C(\tau) = ri\varphi\tau - \frac{k\theta}{\sigma^2} \left[ (k + \lambda + d - \rho\sigma\varphi i) \tau - 2 \ln \frac{(1 - ge^{d\tau})}{(1 - e^{d\tau})} \right].$$

**4.2. Solución de la opción call digital.** Se puede invertir la función característica para obtener las probabilidades deseadas, utilizando un resultado estándar en probabilidad, esto es, si  $F(x)$  es una función de distribución uni-dimensional y  $f$  su correspondiente función característica, entonces la función de distribución acumulativa  $F(x)$  y su correspondiente función de densidad  $\phi(x) = F'(x)$  puede ser recuperada via

$$(47) \quad \phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} f(t) dt,$$

$$(48) \quad F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{itx} f(-t) - e^{-itx} f(t)}{it} dt,$$

o

$$(49) \quad F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{itx} f(t)}{it} \right] dt.$$

Este resultado es demostrado por J.Gil-Pelaez en [2].

Así, obtenemos las probabilidad deseada

$$(50) \quad P(x, v, t; \ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\varphi \ln K} f(x, v, t, \varphi)}{i\varphi} \right] d\varphi.$$

Se puede resumir las relaciones anteriores en el siguiente Teorema

**Teorema 4.1.** *Consideremos una opción call digital en el modelo de Heston, con precio strike  $K$  y fecha de madurez  $\tau$ . Entonces el precio actual esta dado por la siguiente fórmula*

$$DC(S, v, t) = e^{-r} P,$$

donde la función de probabilidad,  $P$  esta dada por

$$P(x, v, t; \ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\varphi \ln K} f(x, v, t, \varphi)}{i\varphi} \right] d\varphi,$$

y la función característica es

$$f(x, v, \tau) = e^{C(\tau) + D(\tau)v + i\varphi x},$$

donde  $C(\tau)$  y  $D(\tau)$  estan dados por (46) y (44) respectivamente.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se analizó el problema de valuación de una opción digital bajo el modelo de volatilidad estocástica de Heston (1993). Se considero que la volatilidad  $v$  sigue el proceso raíz cuadrada usado por Cox, Ingersoll y Ross (1985).

Se presentan soluciones analíticas para el caso en el que la opción binaria es una opción Cash-or-Nothing, basados esencialmente en el trabajo de S. Heston (1993).

## REFERENCIAS

- [1] K. I. Amin y V. K. NG, *Option Valuation with Systematic Stochastic Volatility*, Journal of Finance, 48 (1993), 881- 910.
- [2] D.S. Bates, *Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options*, Review of Financial Studies, 9 (1996), 69–107.
- [3] F. Black and M. Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 81: 637-654; (1973).
- [4] Garcia-Fuentes R., Grudsky S. M., *Opciones Digitales*, Tesis de maestría, CINVESTAV México. Agosto 2004.
- [5] Cox John C., Ingersoll Jonathan E., Ross Stephen A., *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica, Vol. 53, No. 2: 385-407; (1985).
- [6] L. Gil-Pelaez, *Note on the Inversion Theorem*, Biometrika 38 (1951), 481-482.
- [7] S. Heston, *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*, The Review of Financial Studies, 6 (1993), 327- 343.
- [8] S. Heston y S. Nandi, *A Closed-Form GARCH Option Valuation Model*, Review of Financial Studies, 13 (2000), 585-625.
- [9] J. C. Hull, and A. White, *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*, Journal of Finance, 42 (1987), 281–300.
- [10] H. Johnson and D. Shanno, *Option Pricing When the Variance Is Changing*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22 (1987), 143–151.
- [11] R. Korn & E. Korn, E, *Option Pricing and Portfolio Optimization-Modern Methods of Financial Mathematics*, American Math.Soc., (1999).
- [12] H. Nagel, *Zur Optionsbewertung bei stochastischer Volatilität am Beispiel der DTB: Eine theoretische und empirische Analyse*, Inauguraldissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Eberhard-Karls-Universität Tübingen, (1999).
- [13] R. Precup, *Ecuatii cu derivate partiale*, Transilvania Press, (1997).
- [14] Rus, I.A. *Ecuatii diferentiale, ecuatii integrale si sisteme dinamice*, Transilvania Press, 1996.
- [15] S. E. Shreve, *Stochastic Calculus and Finance*, Lecture notes, Carnegie Mellon University, 1996.
- [16] E. M. Stein and J. C. Stein, *Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach*, Review of Financial Studies, 4 (1991), 727–752.
- [17] S. J. Taylor, *Modelling Financial Time Series*, Jhn Wiley, Chichester, U. K.
- [18] J. B. Wiggins, *Option Values under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates*, Journal of Financial Economics, 19 (1987), 351–372.
- [19] P. Wilmott, *Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering*, John Wiley & Sons Ltd, 1999.
- [20] P. Wilmott, J. Dewynne, S. Howison, *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*, Oxford Financial Press, 1993.
- [21] U. Wystup, et al., MathFinance, URL: <http://www.mathfinance.de>

Facultad de Ciencias de la Computación, BUAP  
 Avenida San Claudio y 14 Sur, Colonia San Manuel  
 Puebla, Pue. C.P. 72570

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
 Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel  
 Puebla, Pue. C.P. 72570

carlos\_cpj@hotmail.com, ftajonar@fcfm.buap.mx, etonel@hotmail.com

# Topología



# CAPÍTULO 18

## $\kappa$ -REDES. ESPACIOS $\kappa$ -RED Y $\kappa$ -FRÉCHET

JOSÉ RAMÓN ENRIQUE ARRAZOLA RAMÍREZ<sup>1</sup>

JAVIER CASAS DE LA ROSA<sup>1</sup>

IVÁN MARTÍNEZ RUIZ<sup>1</sup>

ALEJANDRO RAMÍREZ PÁRAMO<sup>2</sup>

<sup>1</sup>FCFM, BUAP,

<sup>2</sup>FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRONICA, BUAP

RESUMEN. En este trabajo se presenta una breve introducción a una teoría de convergencia y puntos clausura basada en  $\kappa$ -redes, así como también, se dan algunos resultados básicos acerca de dicha teoría. Para finalizar se da una caracterización alternativa a la que ofrece *Meyer* en [4], para los espacios  $\kappa$ -Red y  $\kappa$ -Fréchet.

### 1. INTRODUCCIÓN

Las Redes y filtros son dos enfoques principales para una teoría general de puntos de convergencia y clausura en la topología. Cada teoría tiene sus propios defensores. El término de Red es más intuitivo debido a su estrecha relación con las sucesiones y, generalmente, es más preferido por los analistas. Los Filtros, por otro lado, son tal vez más elegantes y flexibles y suelen ser la opción preferida de topólogos. El objetivo de este trabajo es realizar un estudio introductorio de puntos de convergencia y puntos clausura usando un tipo especial de red llamada  $\kappa$ -red, con el fin de dar una definición alternativa al concepto de espacio  $\kappa$ -Red y espacio  $\kappa$ -Fréchet en términos de  $\kappa$ -Redes. Cabe resaltar que el presente trabajo está basado en el artículo de *Hodel*[1].

### 2. UNA INTRODUCCIÓN A LAS $\kappa$ -REDES. $\rho$ -CONVERGENCIA Y PUNTOS $\rho$ -CLAUSURA.

Para dar inicio a nuestro trabajo, daremos algunas definiciones y notaciones; aquellos aspectos no presentados, referentes a los espacios topológicos y de la teoría de conjuntos, se pueden consultar en [3] y el capítulo 1 de [4], respectivamente. A lo largo de este trabajo, usaremos  $\kappa$ ,  $\lambda$  y  $\theta$  para denotar cardinales infinitos y  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  para denotar ordinales.

Recordemos unas definiciones:

**Definición 2.1.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $A$  un subconjunto de  $X$ . Diremos que:

- $X$  es Fréchet si dado  $A \subseteq X$  y para cualquier  $q \in \overline{A}$ , existe una sucesión  $\langle x_n \rangle$  en  $A$  que converge a  $q$ .
- $A$  es secuencialmente cerrado si tiene la propiedad de que para cualquier  $\langle x_n \rangle$  sucesión en  $A$  que converge a  $q$ , entonces  $q \in A$ .

- $X$  es secuencial si todo subconjunto secuencialmente cerrado de  $X$  es un conjunto cerrado.

**Definición 2.2.** Sea  $X$  un espacio topológico. Definimos el caracter de  $X$  en el punto  $x \in X$  como:

$$\chi(X, x) = \min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es base local para } x\}$$

**Definición 2.3.** Sea  $X$  un conjunto. Una  $\kappa$ -sucesión en  $X$  es una función  $\varphi : \kappa \rightarrow X$ , donde  $\kappa$  es un cardinal infinito. Para cada  $\alpha \in \kappa$ , denotamos  $\varphi(\alpha) = x_\alpha$ . Así, una  $\kappa$ -sucesión en un conjunto  $X$ , se denota por  $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ .

**Observación 2.1.** Todo espacio primero numerable es un espacio Fréchet y todo espacio Fréchet es un espacio secuencial.

**Definición 2.4.** Sea  $X$  un conjunto y  $\kappa$  un cardinal infinito. Una  $\kappa$ -red en  $X$  es una función  $\xi : [\kappa]^{<\omega} \rightarrow X$ ; donde  $[\kappa]^{<\omega} = \{F \subset \kappa : F \text{ es finito}\}$  y es dirigido por la relación de contención  $\subseteq$ . La  $\kappa$ -red  $\xi$  es denotada por  $\langle x_F : F \in [\kappa]^{<\omega} \rangle$ , o sólo  $\langle x_F \rangle$ , donde, para cada  $F \in [\kappa]^{<\omega}$ ,  $x_F = \xi(F)$ .

Es sencillo ir y venir entre  $\kappa$ -redes y filtros.

1. Sea  $\langle x_F \rangle$  una  $\kappa$ -red, y para cada  $F \in [\kappa]^{<\omega}$ , sea  $A_F = \{x_G : G \in [\kappa]^{<\omega} \text{ y } F \subseteq G\}$ . El filtro asociado a  $\langle x_F \rangle$  tiene como base de filtro a  $\{A_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\}$ .
2. Sea  $\mathcal{L}$  un filtro de cardinalidad  $\kappa$ , digamos  $\mathcal{L} = \{L_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ . Una  $\kappa$ -red asociada con  $\mathcal{L}$  es  $\langle x_F \rangle$ , donde  $x_F \in \bigcap \{L_\alpha : \alpha \in F\}$  un punto cualquiera fijo, para  $F \in [\kappa]^{<\omega}$ .

Es posible verificar que con estas contrucciones las propiedades usuales se preservan; por ejemplo,  $\langle x_F \rangle$  converge a  $q$  si y sólo si el filtro asociado converge a  $q$  (Vea [2]).

De aquí en adelante, trabajaremos con un operador,  $\rho$ , que asocia a cada subconjunto abierto  $V$  de un espacio topológico  $X$ , un subconjunto (no necesariamente abierto)  $\rho(V)$  de  $X$  y que satisface las propiedades siguientes.

Para cualesquiera abiertos  $U$  y  $V$  en  $X$ :

1.  $V \subseteq \rho(V)$
2. Si  $U \subseteq V$ , entonces  $\rho(U) \subseteq \rho(V)$ .

Dado un operador  $\rho$ , la  $\rho$ -clausura de  $A \subseteq X$ , denotada  $A^\rho$ , es definida por:

$A^\rho = \{x \in X : \forall V \in \mathcal{V}_x \rho(V) \cap A \neq \emptyset\}$ ; donde  $\mathcal{V}_x$  denota al conjunto de vecindades abiertas de  $x$ . Si  $A^\rho = A$ , diremos que  $A$  es  $\rho$ -cerrado.

En el presente trabajo, centraremos nuestra atención en tres elecciones para  $\rho$ :  $\rho(V) = V$ ,  $\rho(V) = \overline{V}$  o  $\rho(V) = \text{int}(\overline{V})$ . Para estas elecciones de  $\rho$ , tenemos la siguiente notación y terminología:

1.  $\rho(V) = V$ :  $A^\rho$  es denotado por  $\overline{A}$  y es llamado la *clausura* de  $A$ .
2.  $\rho(V) = \overline{V}$ :  $A^\rho$  es denotado por  $A^\theta$  y es llamado la  $\theta$ -clausura de  $A$ .
3.  $\rho(V) = \text{int}(\overline{V})$ :  $A^\rho$  es denotado por  $A^\delta$  y es llamado la  $\delta$ -clausura de  $A$ .

**Proposición 2.1.** Para cualquier  $A \subseteq X$ ,  $A^\rho$  es cerrado.

*Demostración.* Sea  $x \in \overline{A^\rho}$ , entonces para todo  $U$  abierto en  $X$  tal que  $x \in U$ ,  $U \cap A^\rho \neq \emptyset$ . Sea  $V \in \mathcal{V}_x$ , veremos que  $\rho(V) \cap A \neq \emptyset$ . Como  $x \in V$  y  $V$  es abierto, entonces  $V \cap A^\rho \neq \emptyset$ , entonces existe  $y \in V \cap A^\rho$  lo cual implica que  $y \in V$  y para todo  $W \in \mathcal{V}_y$   $\rho(W) \cap A \neq \emptyset$ , entonces  $\rho(V) \cap A \neq \emptyset$ ; luego,  $x \in A^\rho$  y por tanto  $A^\rho$  es cerrado.  $\square$

De la proposición anterior, tenemos el siguiente resultado para las distintas elecciones de nuestro operador  $\rho$ :

**Proposición 2.2.** *Para todo  $A \subseteq X$ ,  $\bar{A} \subseteq A^\delta \subseteq A^\theta$ , y cada uno es un conjunto cerrado.*

*Demostración.* Sea  $A \subseteq X$ , el hecho de que cada uno de ellos es cerrado se sigue de la observación anterior. Veamos las contenciones:

-  $\bar{A} \subseteq A^\delta$  se da por hecho que para todo  $V$  abierto, se tiene que  $V \subseteq \text{int}(\bar{V})$ .

-  $A^\delta \subseteq A^\theta$  se da por hecho que para todo  $V$  abierto, se tiene que  $\text{int}(\bar{V}) \subseteq \bar{V}$ .

Así,  $\bar{A} \subseteq A^\delta \subseteq A^\theta$  y cada uno de ellos es cerrado.  $\square$

Una condición que nos asegura la igualdad entre los conjuntos resultantes de la elección de nuestro operador  $\rho$ , se da en el siguiente resultado:

**Proposición 2.3.** *Sea  $X$  un espacio regular y  $A \subseteq X$ . Entonces  $\bar{A} = A^\delta = A^\theta$ .*

*Demostración.* Por la proposición anterior ya se tiene que  $\bar{A} \subseteq A^\delta \subseteq A^\theta$ . Veamos las contenciones opuestas.

Primero demostremos que  $A^\theta \subseteq A^\delta$ . Sea  $x \in A^\theta$ , entonces para todo  $V \in \mathcal{V}_x$   $\bar{V} \cap A \neq \emptyset$ . Sea  $V \in \mathcal{V}_x$ , probemos que  $\text{int}(\bar{V}) \cap A \neq \emptyset$ .

Supongamos que  $\text{int}(\bar{V}) \cap A = \emptyset$ , entonces  $A \subseteq X \setminus \text{int}(\bar{V})$  donde  $X \setminus \text{int}(\bar{V})$  es cerrado en  $X$ . Notamos que  $x \in \text{int}(\bar{V})$  ya que  $x \in V$ ,  $V$  es abierto y  $V \subseteq \bar{V}$ . Ahora, como  $X$  es regular, existen  $U_1, U_2$  abiertos con  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  tales que  $x \in U_1$  y  $X \setminus \text{int}(\bar{V}) \subseteq U_2$ . Por lo tanto existe  $U_1 \in \mathcal{V}_x$  tal que  $\bar{U}_1 \cap A = \emptyset$ , pues de lo contrario, si  $\bar{U}_1 \cap A \neq \emptyset$ , entonces existe  $y \in \bar{U}_1 \cap A$ , entonces  $y \in A \subseteq X \setminus \text{int}(\bar{V}) \subseteq U_2$  y para todo  $W$  abierto tal que  $y \in W$ ,  $W \cap U_1 \neq \emptyset$ . Como  $U_2$  es abierto y  $y \in U_2$  entonces  $U_2 \cap U_1 \neq \emptyset$  lo cual es una contradicción. Por tanto  $U_1 \in \mathcal{V}_x$  y  $\bar{U}_1 \cap A = \emptyset$  lo que también es una contradicción, pues  $x \in A^\theta$ . De donde,  $\text{int}(\bar{V}) \cap A \neq \emptyset$  y por tanto  $x \in A^\delta$ . Así,  $A^\theta \subseteq A^\delta$ .

Ahora veamos que  $A^\delta \subseteq \bar{A}$ . Sea  $x \in A^\delta$ , entonces para todo  $V \in \mathcal{V}_x$   $\text{int}(\bar{V}) \cap A \neq \emptyset$ . Sea  $V \in \mathcal{V}_x$ , demostremos que  $V \cap A \neq \emptyset$ .

Supongamos que  $V \cap A = \emptyset$ , entonces  $A \subseteq X \setminus V$ , donde  $X \setminus V$  es cerrado en  $X$ . Como  $x \in V$  y  $X$  es regular, existen  $U_1, U_2$  abiertos con  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  tales que  $x \in U_1$  y  $X \setminus V \subseteq U_2$ . Por lo tanto existe  $U_1 \in \mathcal{V}_x$  tal que  $\text{int}(\bar{U}_1) \cap A = \emptyset$ , pues de lo contrario, si  $\text{int}(\bar{U}_1) \cap A \neq \emptyset$  entonces existe  $y \in \text{int}(\bar{U}_1) \cap A$ , entonces  $y \in A \subseteq X \setminus V \subseteq U_2$  y para todo  $W$  abierto tal que  $y \in W$ ,  $W \cap U_1 \neq \emptyset$ . Como  $U_2$  es abierto y  $y \in U_2$  entonces  $U_2 \cap U_1 \neq \emptyset$  lo cual es una contradicción. Por tanto  $U_1 \in \mathcal{V}_x$  y  $\text{int}(\bar{U}_1) \cap A = \emptyset$  lo que también es una contradicción pues  $x \in A^\delta$ . Así,  $V \cap A \neq \emptyset$  y por tanto  $x \in A^\delta$ . De donde,  $A^\delta \subseteq \bar{A}$

Con todo, se dan las igualdades deseadas.  $\square$

**Definición 2.5.** Sean  $\rho$  un operador,  $X$  un espacio topológico,  $q \in X$  y  $\langle x_F \rangle$  una  $\kappa$ -red en  $X$ .

1. El punto  $q$  es un *punto  $\rho$ -clausura* de  $\langle x_F \rangle$ , si para cualquier  $V \in \mathcal{V}_q$  y cualquier  $F \in [\kappa]^{<\omega}$ , existe  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que  $F \subseteq G$  y  $x_G \in \rho(V)$ .
2. La  $\kappa$ -red  $\langle x_F \rangle$   $\rho$ -converge a  $q$ , lo que denotamos

$$x_F \rightarrow_\rho q$$

si para toda  $V \in \mathcal{V}_q$ , existe  $F \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que para toda  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  con  $F \subseteq G$ , tenemos que  $x_G \in \rho(V)$ .

*NOTA:* Sea  $\langle x_F \rangle$  una  $\kappa$ -red en  $X$ . Usaremos la terminología siguiente para los casos particulares listados a continuación:

1. Si  $\rho(V) = V$ :  $q$  es un *punto clausura* de  $\langle x_F \rangle$  y  $\langle x_F \rangle$  converge a  $q$ ;
2. Si  $\rho(V) = \bar{V}$ :  $q$  es un *punto  $\theta$ -clausura* de  $\langle x_F \rangle$  y  $\langle x_F \rangle$   $\theta$ -converge a  $q$ ,
3. Si  $\rho(V) = \text{int}(\bar{V})$ :  $q$  es un *punto  $\delta$ -clausura* de  $\langle x_F \rangle$  y  $\langle x_F \rangle$   $\delta$ -converge a  $q$ .

**Construcción útil:** Sea  $q \in X$ ,  $\{V_\alpha : \alpha \in \kappa\}$  una base local de  $q$ , y sea  $\langle x_F \rangle$  una  $\kappa$ -red en  $X$  tal que, para cada  $F \in \kappa^{<\omega}$ ,  $x_F \in \rho(\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha)$ . Entonces  $x_F \rightarrow_\rho q$ .

*Demostración.* Sea  $V \in \mathcal{V}_q$  y veamos que existe  $F \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que para cada  $G \in [\kappa]^{<\omega}$   $F \subseteq G$   $x_G \in \rho(V)$ .

Como  $V \in \mathcal{V}_q$  entonces existe  $\alpha_0 < \kappa$  tal que  $V_{\alpha_0} \subseteq V$ . Definimos a  $F = \{\alpha_0\}$ , así  $F \subseteq \kappa$  y  $|F| = 1$ , es decir,  $F \in [\kappa]^{<\omega}$ . Sea  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que  $F \subseteq G$ , entonces  $x_G \in \rho(\bigcap_{\alpha \in G} V_\alpha) \subseteq \rho(V_{\alpha_0}) \subseteq \rho(V)$ . Por lo tanto  $x_F \rightarrow_\rho q$ .  $\square$

**Lema 2.1.** *Sean  $\rho$  un operador,  $X$  un espacio y sea  $q \in X$ .*

1. *Si  $\langle x_F \rangle$  es una  $\kappa$ -red en  $X$  y  $x_F \rightarrow_\rho q$ , entonces  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_F \rangle$ .*
2. *Si  $\chi(X, q) \leq \kappa$  y  $q \in A^\rho$ , entonces existe una  $\kappa$ -red,  $\langle x_F \rangle$ , en  $A$  tal que  $x_F \rightarrow_\rho q$ .*

*Demostración.* Veamos 1: Sea  $\langle x_F \rangle$  una  $\kappa$ -red en  $X$  tal que  $x_F \rightarrow_\rho q$ . Sea  $V \in \mathcal{V}_q$  y sea  $F \in [\kappa]^{<\omega}$ . Como  $x_F \rightarrow_\rho q$ , entonces para  $V$ , existe  $F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que para todo  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  con  $F_0 \subseteq G$  se tiene que  $x_G \in \rho(V)$ . Definimos a  $G = F \cup F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$  y tenemos que para  $F$ , existe  $G \in [\kappa]^{<\omega}$ , con  $F \subseteq G$ , tal que  $x_G \in \rho(V)$ . Por lo tanto para cada  $V \in \mathcal{V}_q$  y para cada  $F \in [\kappa]^{<\omega}$ , existe  $G \in [\kappa]^{<\omega}$   $F \subseteq G$  tal que  $x_G \in \rho(V)$  y por tanto  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_F \rangle$ .

Veamos 2: Supongamos que  $\chi(X, q) \leq \kappa$  y  $q \in A^\rho$  donde  $A \subseteq X$ . Notamos que como  $q \in A^\rho$ , entonces para todo  $V \in \mathcal{V}_q$   $\rho(V) \cap A \neq \emptyset$ . Sea  $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$  base local para  $q$  tal que  $|\mathcal{V}| = \chi(X, q)$ . Ahora, para cada  $F \in [\kappa]^{<\omega}$  tomamos a  $x_F \in \rho(\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha) \cap A$  un punto cualquiera fijo. Notemos que, en efecto, podemos tomar tal punto ya que para cada  $F \in [\kappa]^{<\omega}$  se tiene que  $\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha \neq \emptyset$ , pues para todo  $\alpha < \kappa$   $q \in V_\alpha$ , más aun, para cada  $F \in [\kappa]^{<\omega}$   $\rho(\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha) \cap A \neq \emptyset$ , pues  $\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha \in \mathcal{V}_q$ . Dado lo anterior, definimos a  $\xi : ([\kappa]^{<\omega}, \subseteq) \rightarrow (X, \tau)$  como la función tal que para cada  $F \in [\kappa]^{<\omega}$  :  $\xi(F) = x_F$  y así tenemos que  $\xi[[\kappa]^{<\omega}] \subseteq A$ , es decir,  $\xi$  está en  $A$ , más aun, como para cada  $F \in [\kappa]^{<\omega}$ ,  $x_F \in \rho(\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha)$ , por la construcción útil, implicamos que  $x_F \rightarrow_\rho q$ . Por lo tanto existe  $\langle x_F \rangle$   $\kappa$ -red en  $A$  tal que  $x_F \rightarrow_\rho q$ .  $\square$

**Definición 2.6.** Sea  $\xi$  una  $\kappa$ -red en  $X$ . Una  $\lambda$ -subred de  $\xi$  es obtenida como sigue: Sea  $H$  una función de  $[\lambda]^{<\omega}$  hacia  $[\kappa]^{<\omega}$  tal que para todo  $F \in [\lambda]^{<\omega}$ ,  $F \cap \kappa \subseteq H(F)$ . Entonces  $\xi \circ H$  es una  $\lambda$ -subred de  $\xi$  y es denotada como  $\langle x_{H(F)} : F \in [\lambda]^{<\omega} \rangle$  o sólo  $\langle x_{H(F)} \rangle$ , donde  $x_{H(F)} = (\xi \circ H)(F)$ . Note que en el caso en que  $\lambda \leq \kappa$ , la condición sobre  $H$ , se reduce a  $F \subseteq H(F)$ .

**Lema 2.2.** *Sea  $\langle x_F \rangle$  una  $\kappa$ -red en  $X$  y sea  $q$  un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_F \rangle$ . Entonces existe una  $\lambda$ -subred de  $\langle x_F \rangle$  que  $\rho$ -converge a  $q$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha < \lambda\}$ , una base local para  $q$ .

*Afirmación:* Para cada  $F \in [\lambda]^{<\omega}$ , existe  $H(F) \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que  $F \cap \kappa \subseteq H(F)$  y  $x_{H(F)} \in \rho(\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha)$ . Sea  $F \in [\lambda]^{<\omega}$ , por un lado sabemos que  $\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha \in \mathcal{V}$  y que  $F \cap \kappa \in [\kappa]^{<\omega}$ , como  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_F \rangle$ , entonces existe

$G \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que  $F \cap \kappa \subseteq G$  y  $x_G \in \rho(\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha)$ . Basta definir a  $H(F) = G$  y usando la construcción útil se tiene que  $x_{H(F)} \rightarrow_\rho q$ .  $\square$

Considere la propiedad fundamental siguiente de redes y subredes: Si una red converge a  $q$ , entonces toda subred de ésta también converge a  $q$ . Esto se logra como sigue: Una subred de una red  $\langle x_d : d \in D \rangle$ , tiene la forma  $\langle x_f(e) : e \in E \rangle$ ; donde  $E$  es un conjunto dirigido y  $f : E \rightarrow D$ , es una función tal que para todo  $d_0 \in D$ , existe  $e_0 \in E$  tal que si  $e \geq e_0$ , entonces  $f(e) \geq d_0$  (Para mas detalles acerca de redes, vea [5]). En la teoría de  $\kappa$  redes, ésta idea es capturada por  $F \cap \kappa \subseteq H(F)$  y  $\kappa \leq \lambda$  como sigue: sea  $F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$ ; entonces  $F_0 \in [\lambda]^{<\omega}$ , y si  $F_0 \subseteq G \in [\lambda]^{<\omega}$ , entonces  $F_0 \subseteq H(G)$  (prueba:  $F_0 = F_0 \cap \kappa \subseteq G \cap \kappa \subseteq H(G)$ ). Con esta observación tenemos:

**Lema 2.3.** *Sea  $\langle x_F \rangle$  una  $\kappa$ -red en  $X$  y sea  $\langle x_{H(F)} \rangle$  una  $\lambda$ -subred de  $\langle x_F \rangle$  con  $\kappa \leq \lambda$ .*

1. *Si  $x_F \rightarrow_\rho q$ , entonces  $x_{H(F)} \rightarrow_\rho q$ .*
2. *Si  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_{H(F)} \rangle$ , entonces  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_F \rangle$ .*

*Demostración.* Veamos 1: Supongamos que  $x_F \rightarrow_\rho q$  y sea  $V \in \mathcal{V}_q$ . Por demostrar que existe  $H(F) \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que para cada  $G \in [\lambda]^{<\omega}$  con  $H(F) \subseteq H(G)$ ,  $x_{H(G)} \in \rho(V)$ . Como  $x_F \rightarrow_\rho q$ , entonces existe  $F \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que para cada  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  con  $F \subseteq G$ ,  $x_G \in \rho(V)$ , entonces existe  $F \in [\lambda]^{<\omega}$  tal que para cada  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  con  $F \subseteq G$ ,  $x_G \in \rho(V)$ , entonces existe  $H(F) \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que para cada  $G \in [\lambda]^{<\omega}$  con  $H(F) \subseteq H(G)$ ,  $x_G \in \rho(V)$ . Sea  $G \in [\lambda]^{<\omega}$  tal que  $H(F) \subseteq H(G)$ . Notemos que  $x_{H(G)} \in \rho(V)$ , pues  $F = F \cap \kappa \subseteq H(F) \subseteq H(G)$ .

Veamos 2: Sea  $q$  un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_{H(F)} \rangle$  y sean  $V \in \mathcal{V}_q$  y  $F \in [\kappa]^{<\omega}$ . Veamos que existe  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que  $F \subseteq G$  y  $x_G \in \rho(V)$ . Como  $F \in [\kappa]^{<\omega}$ , entonces  $F \in [\lambda]^{<\omega}$ , entonces existe  $G' \in [\lambda]^{<\omega}$  con  $H(F) \subseteq H(G')$  tal que  $x_{H(G')} \in \rho(V)$ . Definimos a  $G = H(G')$  y así tenemos que existe  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que  $F \subseteq G$  y  $x_G \in \rho(V)$  (El hecho de que  $F \subseteq G$  se da por:  $F = F \cap \kappa \subseteq H(F) \subseteq H(G') = G$ ).  $\square$

**Definición 2.7.** Una  $\kappa$ -red,  $\langle x_F \rangle$  en  $X$  es *universal* si dado cualquier  $A \subseteq X$ , exactamente una de las siguientes se verifica:

1. Existe  $F \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que si  $F \subseteq G$ , entonces  $x_G \in A$ ;
2. Existe  $F \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que si  $F \subseteq G$ , entonces  $x_G \in X \setminus A$ .

**Lema 2.4.** *Sea  $\langle x_F \rangle$  una  $\kappa$ -red universal en  $X$  y sea  $q$  un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_F \rangle$ . Entonces  $x_F \rightarrow_\rho q$ .*

*Demostración.* Sea  $V \in \mathcal{V}_q$ , entonces  $\rho(V) \subseteq X$ .

*Afirmación:* Existe  $F \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que si  $F \subseteq G$ , entonces  $x_G \in \rho(V)$ . En efecto, pues de lo contrario, como  $\langle x_F \rangle$  es universal, entonces existe  $F \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que si  $F \subseteq G$ , entonces  $x_G \in X \setminus \rho(V)$ , por otro lado como  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_F \rangle$ , entonces para cada  $V \in \mathcal{V}_q$  y para cada  $F \in [\kappa]^{<\omega}$ , existe  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  con  $F \subseteq G$  tal que  $x_G \in \rho(V)$ , en particular para  $V$  y  $F$  que tomamos, existe  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  con  $F \subseteq G$  tal que  $x_G \in \rho(V)$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe  $F \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que si  $F \subseteq G$ , entonces  $x_G \in \rho(V)$  y así implicamos que existe  $F \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que para cada  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  con  $F \subseteq G$   $x_G \in \rho(V)$  y por tanto  $x_F \rightarrow_\rho q$ .  $\square$

**Lema 2.5.** *Sea  $\langle x_F \rangle$  una  $\kappa$ -red en  $X$ . Entonces existe una  $\lambda$ -subred de  $\langle x_F \rangle$  con  $\lambda \geq \kappa$  que es universal.*

*Demostración.* Para cada  $F \in [\kappa]^{<\omega}$ , sea  $A_F = \{x_G : G \in [\kappa]^{<\omega} \text{ y } F \subseteq G\}$ . Notamos que para todo  $F_1, F_2 \in [\kappa]^{<\omega}$  se cumple lo siguiente:

1.  $A_{F_1} \neq \emptyset$
2.  $A_{F_1 \cup F_2} \subseteq A_{F_1} \cap A_{F_2}$

La propiedad 1, se cumple ya que para cada  $F \in [\kappa]^{<\omega}$ ,  $x_F \in A_F$ . La propiedad 2, se cumple por lo siguiente: Sea  $y \in A_{F_1 \cup F_2}$ , entonces  $y = x_G$  para algún  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  con  $F_1 \cup F_2 \subseteq G$ , y ya que  $F_1, F_2 \subseteq F_1 \cup F_2 \subseteq G$ , entonces  $y \in A_{F_1}$  y  $y \in A_{F_2}$ , es decir,  $y \in A_{F_1} \cap A_{F_2}$ . Por lo tanto  $A_{F_1 \cup F_2} \subseteq A_{F_1} \cap A_{F_2}$ . Luego, de 1 y 2 se tiene que la colección  $\{A_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\}$  satisface la propiedad de la intesección finita (PIF). Sea  $\{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$  un ultrafiltro sobre  $X$  tal que  $\{A_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\} \subseteq \{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$  (podemos suponer que  $\lambda \geq \kappa$ ). (Notamos que, en efecto, podemos tomar tal ultrafiltro, pues la colección  $\{A_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\}$  es base de algún filtro, digamos  $\mathcal{F}$ , entonces existe un ultrafiltro  $\mathcal{U}$  que contiene a  $\mathcal{F}$ , así tenemos las siguientes contenciones:  $\{A_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ ). Ahora bien, definimos a una función  $H : [\lambda]^{<\omega} \rightarrow [\kappa]^{<\omega}$ , como sigue:

Sea  $F \in [\lambda]^{<\omega}$ , entonces  $F \cap \kappa \in [\kappa]^{<\omega}$ , por la PIF,  $A_{F \cap \kappa} \cap (\bigcap_{\alpha \in F} U_\alpha) \neq \emptyset$ . Luego, para cada  $F \in [\lambda]^{<\omega}$ , fijemos:

$$z_F \in A_{F \cap \kappa} \cap (\bigcap_{\alpha \in F} U_\alpha).$$

Puesto que  $z_F \in A_{F \cap \kappa}$ , existe  $G_F \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que  $z_F = x_{G_F}$  y  $F \cap \kappa \subseteq G_F$ . Definimos a  $H(F) = G_F$  para cada  $F \in [\lambda]^{<\omega}$  (notamos que efectivamente  $H$  es función, pues para cada  $F \in [\lambda]^{<\omega}$  que tomemos, existe  $G_F \in [\kappa]^{<\omega}$  (fijo) tal que  $H(F) = G_F$  y de esta manera,  $H$  es una asociación que a cada elemento de  $[\lambda]^{<\omega}$  le asigna un único elemento de  $[\kappa]^{<\omega}$ ). Así tenemos que:  $F \cap \kappa \subseteq H(F)$  y  $x_{H(F)} = x_{G_F} = z \in \bigcap_{\alpha \in F} U_\alpha$ . Por tanto  $\langle x_{H(F)} \rangle$  es una  $\lambda$ -subred de  $\langle x_F \rangle$ .

Restaría ver la universalidad. Sea  $E \subseteq X$  y supongamos que  $E \in \{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ , entonces existe  $\beta < \lambda$  tal que  $E = U_\beta$ . Tomamos al conjunto  $\{\beta\} \in [\lambda]^{<\omega}$  y sea  $G \in [\lambda]^{<\omega}$  tal que  $\{\beta\} \subseteq G$ , entonces  $x_{H(G)} \in (\bigcap_{\alpha \in G} U_\alpha) \subseteq U_\beta = E$ . Ahora, si  $E \notin \{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ , como  $\{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$  es ultrafiltro entonces  $X \setminus E \in \{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$  y por tanto existe  $\gamma < \lambda$  tal que  $X \setminus E = U_\gamma$ . Tomamos al conjunto  $\{\gamma\} \in [\lambda]^{<\omega}$  y sea  $G \in [\lambda]^{<\omega}$  tal que  $\{\gamma\} \subseteq G$ , entonces  $x_{H(G)} \in (\bigcap_{\alpha \in G} U_\alpha) \subseteq U_\gamma = X \setminus E$ . Por lo tanto  $\langle x_{H(F)} \rangle$  es universal.  $\square$

**Teorema 2.1.** *Sea  $X$  un espacio,  $A \subseteq X$ , y sea  $\rho$  un operador. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Si  $\xi$  es una  $\kappa$ -red en  $A$ , entonces existe  $q \in A$  tal que  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\xi$  en  $X$ ;*
2. *Si  $\xi$  es una  $\kappa$ -red en  $A$  que es universal en  $X$ , entonces existe  $q \in A$  tal que  $\xi \rightarrow_\rho q$  en  $X$ .*

*Demostración.* [1  $\Rightarrow$  2] Sea  $\xi$  una  $\kappa$ -red en  $A$  que es universal en  $X$ . Por hipótesis, existe  $q \in A$  tal que  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\xi$  en  $X$ ; luego, por Lema 2.4,  $\xi \rightarrow_\rho q$  en  $X$ .

[2  $\Rightarrow$  1] Sea  $\xi$  una  $\kappa$ -red en  $A$ , por Lema 2.5, existe  $\xi \circ H$  una  $\lambda$ -subred de  $\xi$  con  $\lambda \geq \kappa$  que es universal; luego, por hipótesis, existe  $q \in A$  tal que  $\xi \circ H \rightarrow_\rho q$  en  $X$ . Ahora, por Lema 2.1,  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\xi \circ H$  y, por Lema 2.3,  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\xi$  en  $X$ .  $\square$

**Corolario 2.1.** *Sea  $X$  un espacio y  $\rho$  un operador. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Toda  $\kappa$ -red tiene un punto  $\rho$ -clausura;*
2. *Toda  $\kappa$ -red universal en  $X$  es  $\rho$ -convergente.*

*Demostración.* Basta tomar a  $A = X$  en el teorema anterior. □

3.  $\kappa$ -REDES Y REDES CON CONJUNTOS DIRIGIDOS DE CARDINALIDAD A LO MÁS  $\kappa$ . ESPACIOS  $\kappa$ -FRÉCHET Y  $\kappa$ -RED

En esta sección consideramos la relación que existe entre las propiedades de convergencia y puntos clausura de sucesiones, redes y  $\kappa$ -redes. Estos resultados justifican el hecho de usar  $\kappa$ -redes para extender a los espacios de Fréchet y secuenciales a cardinales más grandes. Daremos inicio con la relación entre  $\kappa$ -sucesiones y  $\kappa$ -redes.

**Definición 3.1.** Sean  $X$  un espacio,  $q \in X$ ,  $\rho$  un operador, y sea  $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$  una  $\kappa$ -sucesión en  $X$ .

- (i) La  $\kappa$ -sucesión  $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$   $\rho$ -converge a  $q$ , lo que denotamos  $x_\alpha \rightarrow_\rho q$ , si para cualquier  $V \in \mathcal{V}_q$  existe  $\alpha \in \kappa$  tal que para todo  $\beta \geq \alpha$ ,  $x_\beta \in \rho(V)$ .
- (ii) El punto  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$  si dada cualquier  $V \in \mathcal{V}_q$  y cualquier  $\alpha \in \kappa$ , existe  $\beta \geq \alpha$  tal que  $x_\beta \in \rho(V)$ .

**Teorema 3.1.** *Sean  $X$  un espacio,  $q \in X$  y  $\rho$  un operador. Dada cualquier  $\omega$ -red  $\langle x_F : F \in [\omega]^{<\omega} \rangle$  en  $X$ , existe una sucesión  $\langle y_n : n \in \omega \rangle$  en  $X$  tal que las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1.  $\{y_n\} \subseteq \{x_F\}$ ;
2. Si  $x_F \rightarrow_\rho q$ , entonces  $y_n \rightarrow_\rho q$ ;
3. Si  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle y_n \rangle$ , entonces  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_F \rangle$ .

*Demostración.* Sea  $\langle x_F : F \in [\omega]^{<\omega} \rangle$  una  $\omega$ -red en  $X$ . Para cada  $n \in \omega$ , definimos a

$$y_n = x_{\{0,1,\dots,n\}}$$

Claramente se cumple 1 por definición.

Veamos 2: Supongamos que  $x_F \rightarrow_\rho q$  y sea  $V \in \mathcal{V}_q$ , entonces existe  $F \in [\omega]^{<\omega}$  tal que para cada  $G \in [\omega]^{<\omega}$  con  $F \subseteq G$ , se tiene que  $x_G \in \rho(V)$ , tomamos a  $\alpha = \max F \in \omega$ .

*Afirmación:* Para todo  $\beta \geq \alpha$ ,  $y_\beta \in \rho(V)$ . Sea  $\beta \geq \alpha$ , entonces  $F \subseteq \{0, 1, \dots, \beta\} \in [\omega]^{<\omega}$ , entonces  $y_\beta = x_{\{0,1,\dots,\beta\}} \in \rho(V)$ , y por tanto se tiene que  $y_n \rightarrow_\rho q$ .

Veamos 3: Supongamos que  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle y_n \rangle$ . Sea  $V \in \mathcal{V}_q$  y  $F \in [\omega]^{<\omega}$ . Tomamos a  $\alpha = \max F \in \omega$ , entonces existe  $\beta \geq \alpha$  tal que  $y_\beta = x_{\{0,1,\dots,\beta\}} \in \rho(V)$ . Definimos a  $G = \{0, 1, \dots, \beta\}$  y así tenemos que existe  $G \in [\omega]^{<\omega}$  tal que  $F \subseteq G$  y  $x_G \in \rho(V)$ . Por lo tanto  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_F \rangle$ . □

Ahora veamos un ejemplo en el que las sucesiones de la prueba del Teorema 3.1 no cumplen los recíprocos de los incisos 2 y 3 del Teorema 3.1.

**Ejemplo 3.1.** Sea  $\sum a_n$  una serie infinita en  $\mathbb{R}$  que converge y tiene suma  $S$ , pero que dicha serie no es absolutamente convergente.

Para cada  $F \in [\omega]^{<\omega}$ , sea  $x_F = \sum_{k \in F} a_k$ . Así  $y_n = x_{\{0,1,\dots,n\}} = a_0 + a_1 + \dots +$

$$a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Entonces, se tiene lo siguiente:

1.  $\langle y_n \rangle$  converge a  $S$ , pero  $\langle x_F \rangle$  no converge.

En efecto, se cumple por la forma en que elegimos a la serie  $\sum a_n$ , es decir, para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \omega$  tal que para todo  $n \geq N$ ,  $|S - y_n| < \epsilon$ ; sin embargo, como  $\sum a_n$  no es absolutamente convergente, podemos permutar los sumandos de tal forma que  $\langle x_F \rangle$  no converja. Así, el recíproco del inciso 2, del teorema anterior, no se cumple.

2. Todo  $z \in \mathbb{R}$  es un punto clausura de  $\langle x_F : F \in [\omega]^{<\omega} \rangle$ .

Sea  $z \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$  y sea  $F \in [\omega]^{<\omega}$ , digamos  $F = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ , tomamos a  $\sigma : \omega \rightarrow \omega$  una permutación de  $\omega$  tal que  $\sum a_{\sigma(n)} = z$ . Ahora sean  $\sigma(j_1) = i_1, \dots, \sigma(j_k) = i_k$ , y entonces elegimos a  $n$  tal que  $n > j_1, \dots, j_k$  y  $|z - (a_{\sigma(0)} + \dots + a_{\sigma(n)})| < \epsilon$ . Definimos a  $G = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$  y con esto obtenemos que  $F \subseteq G$  y  $|z - x_G = \sum_{i=1}^n a_{\sigma(i)}| < \epsilon$ . Por lo tanto  $z$  es un punto clausura de  $\langle x_F : F \in [\omega]^{<\omega} \rangle$ ; sin embargo,  $\langle y_n \rangle$ , sólo tiene a  $S$  como punto clausura.

La construcción en el teorema anterior, la cual comienza con una  $\omega$ -red y da una sucesión, funciona solamente para el caso  $\kappa = \omega$ ; por otro lado, la construcción en la dirección opuesta, la cual comienza con una  $\kappa$ -sucesión y da una  $\kappa$ -red, trabaja para todo  $\kappa$ .

**Teorema 3.2.** *Sea  $X$  un espacio,  $q \in X$  y  $\rho$  un operador. Dada cualquier  $\kappa$ -sucesión  $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$  en  $X$ , existe una  $\kappa$ -red  $\langle y_F \rangle$  en  $X$  tal que las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1.  $\{y_F\} \subseteq \{x_\alpha\}$
2.  $x_\alpha \rightarrow_\rho q \Leftrightarrow y_F \rightarrow_\rho q$
3.  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_\alpha \rangle \Leftrightarrow q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle y_F \rangle$

*Demostración.* Sea  $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$  una  $\kappa$ -sucesión en  $X$ . Para cada  $F \in [\kappa]^{<\omega}$  definimos a  $y_F = x_\alpha$  donde  $\alpha = \max F$ . Claramente, así como definimos la  $\kappa$ -red  $\langle y_F \rangle$  se cumple 1.

Veamos 2:[ $\Rightarrow$ ] Supongamos que  $x_\alpha \rightarrow_\rho q$  y sea  $V \in \mathcal{V}_q$ , entonces existe  $\alpha \in \kappa$  tal que para todo  $\beta \geq \alpha$ ,  $x_\beta \in \rho(V)$ . Tomamos a  $\{\alpha\} \in [\kappa]^{<\omega}$  y sea  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que  $\{\alpha\} \subseteq G$ , entonces  $y_G = x_{\max G} \in \rho(V)$  pues  $\max G \geq \alpha$ . Definimos a  $F_0 = \{\alpha\}$  y así tenemos que existe  $F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que para cada  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  con  $F_0 \subseteq G$ ,  $y_G \in \rho(V)$  y por tanto  $y_F \rightarrow_\rho q$ .

[ $\Leftarrow$ ] Supongamos que  $y_F \rightarrow_\rho q$  y sea  $V \in \mathcal{V}_q$ , entonces existe  $F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que para cada  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  con  $F_0 \subseteq G$ ,  $y_G \in \rho(V)$ . Tomamos a  $\alpha = \max F_0$  y sea  $\beta < \kappa$  tal que  $\beta \geq \alpha$ , entonces  $x_\beta = y_{\{\beta\} \cup F_0} \in \rho(V)$  pues  $F_0 \subseteq F_0 \cup \{\beta\}$ . Así, tenemos que existe  $\alpha \in \kappa$  tal que para todo  $\beta \geq \alpha$ ,  $x_\beta \in \rho(V)$  y, por tanto  $x_\alpha \rightarrow_\rho q$ .

Veamos 3:[ $\Rightarrow$ ] Supongamos que  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_\alpha \rangle$ . Sea  $V \in \mathcal{V}_q$  y  $F \in [\kappa]^{<\omega}$ . Entonces para  $\alpha = \max F$ , existe  $\beta \geq \alpha$  tal que  $x_\beta \in \rho(V)$ . Tomamos a  $G = \{\beta\} \cup F \in [\kappa]^{<\omega}$  y tenemos que  $y_G = x_{\max(\{\beta\} \cup F)} = x_\beta \in \rho(V)$ . Así, tenemos que existe  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  con  $F \subseteq G$  tal que  $y_G \in \rho(V)$  y por tanto  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle y_F \rangle$ .

[ $\Leftarrow$ ] Supongamos que  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle y_F \rangle$ . Sea  $V \in \mathcal{V}_q$  y  $\alpha \in \kappa$ . Entonces para  $F = \{\alpha\} \in [\kappa]^{<\omega}$ , existe  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  con  $\{\alpha\} \subseteq G$  tal que  $y_G \in \rho(V)$ . Tomamos a  $\beta = \max G$  y tenemos que  $x_\beta = y_G \in \rho(V)$ . Así, tenemos que existe  $\beta \geq \alpha$  tal que  $x_\beta \in \rho(V)$  y por tanto  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_\alpha \rangle$ .  $\square$

**Corolario 3.1.** *Para cualquier espacio  $X$  y cualquier operador  $\rho$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Toda  $\omega$ -red en  $X$  tiene un punto  $\rho$ -clausura.*
2. *Toda sucesión  $\langle x_n : n \in \omega \rangle$  en  $X$  tiene un punto  $\rho$ -clausura.*

*Demostración.* [1  $\Rightarrow$  2] Sea  $\langle x_n : n \in \omega \rangle$  una sucesión en  $X$ , por Teorema 3.2, existe una  $\omega$ -red,  $\langle y_F \rangle$ , en  $X$ ; luego, por hipótesis,  $\langle y_F \rangle$ , tiene un punto  $\rho$ -clausura y por tanto,  $\langle x_n \rangle$ , tiene un punto  $\rho$ -clausura.

[2  $\Rightarrow$  1] Sea  $\langle y_F \rangle$  una  $\omega$ -red en  $X$ , por Teorema 3.1, existe  $\langle x_n : n \in \omega \rangle$  sucesión en  $X$ , luego por hipótesis,  $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ , tiene un punto  $\rho$ -clausura y por tanto,  $\langle y_F \rangle$ , tiene un punto  $\rho$ -clausura.  $\square$

**Corolario 3.2.** *Para cualquier espacio  $X$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  *$X$  es un espacio Fréchet.*
2. *Si  $q \in \bar{A}$ , entonces existe una  $\omega$ -red  $\langle x_F \rangle$  en  $A$  tal que  $x_F \rightarrow q$ .*

*Demostración.* [1  $\Rightarrow$  2] Sea  $q \in \bar{A}$ , como  $X$  es Fréchet, existe  $\langle y_n \rangle$  sucesión en  $A$  que converge a  $q$ , por Teorema 3.2, existe  $\langle x_F \rangle$   $\omega$ -red en  $A$  que también converge a  $q$ .

[2  $\Rightarrow$  1] Sea  $q \in \bar{A}$ , por hipótesis, existe  $\omega$ -red  $\langle x_F \rangle$  en  $A$  tal que  $x_F \rightarrow q$ , por Teorema 3.1, existe  $\langle y_n \rangle$  sucesión en  $A$  tal que  $y_n \rightarrow q$  y por lo tanto  $X$  es un espacio Fréchet.  $\square$

**Corolario 3.3.** *Para cualquier espacio  $X$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  *$X$  es un espacio secuencial.*
2. *Todo  $A \subseteq X$  que satisface la siguiente condición es un conjunto cerrado: Si  $\langle x_F \rangle$  es una  $\omega$ -red en  $A$  y  $x_F \rightarrow q$ , entonces  $q \in A$ .*

*Demostración.* [1  $\Rightarrow$  2] Sea  $A \subseteq X$  tal que  $A$  satisface: Si  $\langle x_F \rangle$  es una  $\omega$ -red en  $A$  y  $x_F \rightarrow q$ , entonces  $q \in A$ . Veamos que  $A$  es cerrado. Para esto, demostremos que  $A$  es un conjunto secuencialmente cerrado. Sea  $\langle x_n \rangle$  una sucesión en  $A$  tal que  $x_n \rightarrow q$ , por el Teorema 3.2, existe  $\langle y_F \rangle$   $\omega$ -red en  $A$  tal que  $y_F \rightarrow q$ , luego, por la propiedad que cumple el conjunto  $A$ , implicamos que  $q \in A$ . Por lo tanto  $A$ , es secuencialmente cerrado y ya que  $X$  es un espacio secuencial, entonces  $A$  es cerrado. [2  $\Rightarrow$  1] Sea  $A \subseteq X$  secuencialmente cerrado y veamos que  $A$  es un conjunto cerrado. Para esto, demostremos que  $A$  cumple la propiedad que tenemos como hipótesis. Sea  $\langle x_F \rangle$ , una  $\omega$ -red en  $A$  tal que  $x_F \rightarrow q$ , por el Teorema 3.1, existe  $\langle y_n \rangle$  sucesión en  $A$  tal que  $y_n \rightarrow q$ , como  $A$  es un conjunto secuencialmente cerrado, entonces  $q \in A$ . Por lo tanto  $A$ , cumple la propiedad requerida en nuestra hipótesis, entonces  $A$  es cerrado y por lo tanto  $X$  es un espacio secuencial.  $\square$

Ahora investigaremos en qué medida, cuáles redes pueden ser restringidas a  $\kappa$ -redes para una teoría general de convergencia y puntos clausura.

Sea  $(D, \leq)$  un conjunto dirigido. Recordemos que  $\leq$  es reflexiva, transitiva y dirigida (dados  $d_1, d_2, \dots, d_k \in D$ , existe  $e \in D$  tal que  $d_j \leq e$  para todo  $1 \leq j \leq k$ ). Sin embargo, la relación  $\leq$  no necesita ser antisimétrica. En tal caso, podemos definir una relación de equivalencia  $\sim$  sobre  $D \times D$  por:

$$d \sim e \Leftrightarrow d \leq e \text{ y } e \leq d,$$

entonces  $(D/\sim, \le^*)$  (donde  $\le^*$  esta definido por  $[d] \le^* [e] \Leftrightarrow d \le e$ ) es un conjunto dirigido en el cual  $\le^*$  es antisimétrica (En efecto: Si  $[d] \le^* [e]$  y  $[e] \le^* [d]$ , entonces  $d \le e$  y  $e \le d$ , entonces  $d \sim e$ , entonces  $[d] = [e]$ ). Veamos que las clases están bien definidas, es decir, que no dependen del representante: Sean  $[d], [e] \in D/\sim$  tales que  $[d] \le^* [e]$ . Sean  $x \in [d]$  y  $y \in [e]$ . Veamos que  $x \le y$ . Como  $x \in [d]$ , entonces  $x \sim d$ , entonces  $x \le d$  y  $d \le x$ . Por otro lado, como  $y \in [e]$ , entonces  $y \sim e$ , entonces  $y \le e$  y  $e \le y$ , y ya que  $[d] \le^* [e]$ , entonces  $d \le e$ . Así, tenemos que  $x \le d$ ,  $d \le e$  y  $e \le y$ , de lo cual implicamos que  $x \le y$ . Por lo tanto, las clases no dependen del representante.

Más aun, tenemos el siguiente lema:

**Lema 3.1.** *Sea  $\langle x_d : d \in D \rangle$  una red en  $X$  y sea  $\langle x_{[d]} : [d] \in D/\sim \rangle$  es una red en  $X$ , obtenida como sigue:*

$$x_{[d]} = x_e, \text{ donde } e \in [d].$$

Entonces

1.  $\{x_{[d]}\} \subseteq \{x_d\}$ .
2. Si  $x_d \rightarrow_\rho q$ , entonces  $x_{[d]} \rightarrow_\rho q$ .
3. Si  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_{[d]} : [d] \in D/\sim \rangle$ , entonces  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_d : d \in D \rangle$ .

*Demostración.* Veamos 1: Se cumple por definición de  $\langle x_{[d]} : [d] \in D/\sim \rangle$ .

Veamos 2: Supongamos que  $x_d \rightarrow_\rho q$  y sea  $V \in \mathcal{V}_q$ , entonces existe  $d \in D$  tal que para todo  $e \in D$  con  $e \geq d$ ,  $x_e \in \rho(V)$ . Tomamos a  $[d] \in D/\sim$  y sea  $[e] \in D/\sim$  tal que  $[d] \le^* [e]$ , entonces  $x_{[e]} = x_{e'}$  donde  $e' \in [e]$ , entonces  $e' \sim e$ , entonces  $e' \le e$  y  $e \le e'$ , y ya que  $[d] \le^* [e]$ , entonces  $d \le e$ , de lo cual implicamos que  $d \le e'$ , entonces  $x_{e'} \in \rho(V)$ , es decir,  $x_{[e]} \in \rho(V)$ . Por lo tanto  $x_{[d]} \rightarrow_\rho q$ .

Veamos 3: Supongamos que  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_{[d]} : [d] \in D/\sim \rangle$ . Sea  $V \in \mathcal{V}_q$  y  $d \in D$ , entonces para  $[d] \in D/\sim$ , existe  $[e] \in D/\sim$  con  $[d] \le^* [e]$  tal que  $x_{[e]} \in \rho(V)$ . Si  $e' \in [e]$  y es tal que  $x_{[e]} = x_{e'}$ , entonces  $e' \in D$  con  $d \le e'$  tal que  $x_{e'} \in \rho(V)$ . Por lo tanto  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_d : d \in D \rangle$ .  $\square$

**Lema 3.2.** *Sea  $\langle x_d : d \in D \rangle$  una red en  $X$  tal que  $|D| = \kappa$  y la relación de orden  $\le$  para  $D$  es antisimétrica. Entonces existe una  $\kappa$ -red  $\langle y_F \rangle$  en  $X$  tal que las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1.  $\{y_F\} \subseteq \{x_d\}$ .
2.  $x_d \rightarrow_\rho q \Leftrightarrow y_F \rightarrow_\rho q$ .
3.  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_d \rangle \Leftrightarrow q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle y_F \rangle$ .

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $D = \kappa$  (pues como  $|D| = \kappa$  podemos definir una biyección entre ambos conjuntos y trabajar en cualquiera de ellos, es decir, podemos trabajar en  $D$  o en  $\kappa$  gracias a la biyección). La  $\kappa$ -red requerida es obtenida como sigue:

Para cada  $F \in [\kappa]^{<\omega}$ , digamos  $F = \{d_1, \dots, d_m\}$ , sea  $y_F = x_d$  donde  $d \in D$  y es tal que para todo  $i = \overline{1}, m$ ,  $d_i \leq d$  y además, en caso de que sea posible, tomar a  $d \in F$  (si no es posible que  $d \in F$  tan solo tomamos a  $d \in D$  tal que  $i = \overline{1}, m$ ,  $d_i \leq d$  y lo fijamos, para cada  $F \in [\kappa]^{<\omega}$ ). Notar que si  $G = \{d_1, \dots, d_m, e\}$  donde para todo  $i = \overline{1}, m$ ,  $d_i \leq e$ , entonces  $y_G = x_e$  (Aquí se usa la antisimetría de  $\le$ ).

Veamos 1: Es claro que se cumple por definición de  $\langle y_F \rangle$ .

Veamos 2:  $[\Rightarrow]$  Supongamos que  $x_d \rightarrow_\rho q$  y sea  $V \in \mathcal{V}_q$ , entonces existe  $d \in D$  tal

que para cada  $e \in D$  con  $d \leq e$ ,  $x_e \in \rho(V)$ , tomamos a  $\{d\} \in [\kappa]^{<\omega}$  y sea  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que  $\{d\} \subseteq G$ , entonces  $y_G = x_e$  donde para cada  $g \in G$ ,  $e \geq g$ ; ya que  $\{d\} \subseteq G$ , entonces  $e \geq d$ , entonces  $y_G = x_e \in \rho(V)$ . Por lo tanto  $y_F \rightarrow_\rho q$ .

[ $\Leftarrow$ ] Supongamos que  $y_F \rightarrow_\rho q$  y sea  $V \in \mathcal{V}_q$ , entonces existe  $F \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que para cada  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  con  $F \subseteq G$ ,  $y_G \in \rho(V)$ , tomamos a  $d \in D$  tal que para todo  $f \in F$ ,  $d \geq f$  y, sea  $e \in D$  tal que  $e \geq d$ , entonces  $x_e = y_G \in \rho(V)$  donde  $G = F \cup \{e\}$ . Por lo tanto  $x_d \rightarrow_\rho q$ .

Veamos 3: [ $\Rightarrow$ ] Supongamos que  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_d \rangle$ . Sea  $V \in \mathcal{V}_q$  y  $F \in [\kappa]^{<\omega}$ , digamos  $F = \{d_1, \dots, d_m\}$ . Sea  $d \in D$  tal que para todo  $i = \overline{1, m}$ ,  $d \geq d_i$ , entonces para tal  $d$ , existe  $e \in D$  con  $d \leq e$  tal que  $x_e \in \rho(V)$ , tomamos a  $G = F \cup \{e\} \in [\kappa]^{<\omega}$  y tenemos que  $y_G = x_e \in \rho(V)$ . Por lo tanto  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle y_F \rangle$ .

[ $\Leftarrow$ ] Supongamos que  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle y_F \rangle$ . Sea  $V \in \mathcal{V}_q$  y  $d \in D$ , entonces para  $\{d\} \in [\kappa]^{<\omega}$ , existe  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  con  $\{d\} \subseteq G$  tal que  $y_G \in \rho(V)$ , pero  $y_G = x_e$  donde  $e \in D$  es tal que para cada  $g \in G$ ,  $e \geq g$ , entonces existe  $e \in D$  con  $e \geq d$  tal que  $x_e \in \rho(V)$ . Por lo tanto  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de  $\langle x_d \rangle$ .  $\square$

**Lema 3.3 (Propiedad de Expansión).** *Sea  $\langle x_F : F \in [\lambda]^{<\omega} \rangle$  una  $\lambda$ -red en  $X$ . Para cada  $\kappa \geq \lambda$ , existe una  $\kappa$ -red  $\langle y_F : F \in [\kappa]^{<\omega} \rangle$  en  $X$  tal que:*

1.  $\{y_F\} \subseteq \{x_F\}$ .
2.  $x_F \rightarrow_\rho q \Leftrightarrow y_F \rightarrow_\rho q$ .
3.  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de la  $\lambda$ -red  $\langle x_F \rangle \Leftrightarrow q$  es un punto  $\rho$ -clausura de la  $\kappa$ -red  $\langle y_F \rangle$ .

*Demostración.* Para cada  $F \in [\kappa]^{<\omega}$ , sea

$$y_F = x_{F \cap \lambda}.$$

Veamos 1: Se cumple por la definición de  $\langle y_F \rangle$ .

Veamos 2: [ $\Rightarrow$ ] Supongamos que  $x_F \rightarrow_\rho q$  y sea  $V \in \mathcal{V}_q$ , entonces existe  $F \in [\lambda]^{<\omega}$  tal que para cada  $G \in [\lambda]^{<\omega}$  con  $F \subseteq G$ ,  $x_G \in \rho(V)$ . Como  $\lambda \leq \kappa$ , entonces  $F \in [\kappa]^{<\omega}$  y es tal que para cada  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  con  $F \subseteq G$ ,  $y_G = x_{G \cap \lambda} \in \rho(V)$  (pues  $F \subseteq G \cap \lambda$ ). Por lo tanto  $y_F \rightarrow_\rho q$ .

[ $\Leftarrow$ ] Supongamos que  $y_F \rightarrow_\rho q$  y sea  $V \in \mathcal{V}_q$ , entonces existe  $F \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que para cada  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  con  $F \subseteq G$ ,  $y_G \in \rho(V)$ . Tomamos a  $F_0 = F \cap \lambda \in [\lambda]^{<\omega}$  y sea  $G \in [\lambda]^{<\omega}$  tal que  $F_0 \subseteq G$ . Si denotamos por  $L = F \cup G$ , entonces  $L \in [\kappa]^{<\omega}$  y  $F \subseteq L$ , entonces  $y_L \in \rho(V)$ , pero notamos que  $y_L = x_{L \cap \lambda} = x_G$  (pues  $L \cap \lambda = (F \cup G) \cap \lambda = (F \cap \lambda) \cup (G \cap \lambda) = F_0 \cup G = G$ ). Así,  $x_G \in \rho(V)$  y por lo tanto  $x_F \rightarrow_\rho q$ .

Veamos 3: [ $\Rightarrow$ ] Supongamos que  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de la  $\lambda$ -red  $\langle x_F \rangle$ . Sea  $V \in \mathcal{V}_q$  y  $F \in [\kappa]^{<\omega}$ , entonces para  $F_0 = F \cap \lambda \in [\lambda]^{<\omega}$ , existe  $G \in [\lambda]^{<\omega}$  con  $F_0 \subseteq G$  tal que  $x_G \in \rho(V)$ . Si denotamos por  $L = F \cup G$ , entonces  $L \in [\kappa]^{<\omega}$  y  $F \subseteq L$ , además de que  $y_L = x_{L \cap \lambda} \in \rho(V)$  (pues  $L \cap \lambda = (F \cup G) \cap \lambda = (F \cap \lambda) \cup (G \cap \lambda) = F_0 \cup G = G$ ). Así,  $y_L = x_G \in \rho(V)$  y por lo tanto  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de la  $\kappa$ -red  $\langle y_F \rangle$ .

[ $\Leftarrow$ ] Supongamos que  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de la  $\kappa$ -red  $\langle y_F \rangle$ . Sea  $V \in \mathcal{V}_q$  y  $F \in [\lambda]^{<\omega}$ , entonces  $F \in [\kappa]^{<\omega}$ , entonces existe  $G \in [\kappa]^{<\omega}$  con  $F \subseteq G$  tal que  $y_G \in \rho(V)$ , entonces existe  $G_0 = G \cap \lambda \in [\lambda]^{<\omega}$  con  $F \subseteq G_0$  tal que  $y_G = x_{G \cap \lambda} = x_{G_0} \in \rho(V)$  (ya que  $F \subseteq G$ , entonces  $F \cap \lambda \subseteq G \cap \lambda$ , entonces  $F \subseteq G_0$ ). Así,  $y_G = x_{G_0} \in \rho(V)$  y por lo tanto  $q$  es un punto  $\rho$ -clausura de la  $\lambda$ -red  $\langle x_F \rangle$ .  $\square$

Como una consecuencia de los tres lemas anteriores, tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 3.3.** *Sea  $X$  un espacio,  $\rho$  un operador, y sea  $\kappa$  un cardinal infinito. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Toda  $\kappa$ -red en  $X$  tiene un punto  $\rho$ -clausura.*
2. *Toda  $\lambda$ -red en  $X$  con  $\omega \leq \lambda \leq \kappa$ , tiene un punto  $\rho$ -clausura.*
3. *Toda red  $\langle x_d : d \in D \rangle$  en  $X$  con  $|D| \leq \kappa$ , tiene un punto  $\rho$ -clausura.*
4. *Toda red  $\langle x_d : d \in D \rangle$  en  $X$  con  $|D| = \kappa$ , tiene un punto  $\rho$ -clausura.*

*Demostración.* [1  $\Rightarrow$  2] Inmediato del Lema 3.3.

[2  $\Rightarrow$  3] Sea  $\langle x_d : d \in D \rangle$ , una red en  $X$ , con  $|D| \leq \kappa$ , digamos  $|D| = \lambda \leq \kappa$ , entonces por Lema 3.1, existe  $\langle x_{[d]} : [d] \in D / \sim \rangle$  red en  $X$ , donde su relación es antisimétrica, luego por Lema 3.2, existe  $\langle y_F \rangle$ ,  $\lambda$ -red en  $X$ , ahora por hipótesis,  $\langle y_F \rangle$ , tiene un punto  $\rho$ -clausura, entonces,  $\langle x_{[d]} \rangle$ , tiene un punto  $\rho$ -clausura, entonces  $\langle x_d : d \in D \rangle$  tiene un punto  $\rho$ -clausura.

[3  $\Rightarrow$  4] Inmediato.

[4  $\Rightarrow$  1] Sea  $\langle x_F \rangle$  una  $\kappa$ -red en  $X$ , como  $|[\kappa]^{<\omega}| = \kappa$ , entonces por hipótesis  $\langle x_F \rangle$  tiene un punto  $\rho$ -clausura.  $\square$

Para el resto de ésta sección trabajaremos con la elección  $\rho(V) = V$ , esto con el fin de extender los conceptos espacios *Fréchet* y espacios *secuenciales* a *cardinales más grandes*. Al final, se hará notar mediante unos resultados que, tanto la definición expuesta por *Meyer* ([4]), con redes cuyos conjuntos dirigidos tienen cardinalidad a lo más  $\kappa$  y las que se darán a continuación, por los lemas anteriores, resultan ser las mismas.

**Definición 3.2.** Sean  $X$  un espacio y  $A \subseteq X$ . Diremos que:

1.  $X$  es  $\kappa$ -Fréchet si se cumple lo siguiente: Si  $q \in \overline{A}$ , entonces existe una  $\kappa$ -red  $\langle x_F \rangle$  en  $A$  tal que  $x_F \rightarrow q$ .
2.  $A$  es  $\kappa$ -red cerrado si satisface la siguiente propiedad: Si  $\langle x_F \rangle$  es una  $\kappa$ -red en  $A$  y  $x_F \rightarrow q$ , entonces  $q \in A$ .
3.  $X$  es un espacio  $\kappa$ -red si todo subconjunto  $\kappa$ -red cerrado de  $X$  es un conjunto cerrado.

**Proposición 3.1.** *Sea  $X$  un espacio y  $A \subseteq X$ . Si  $A$  es  $\kappa$ -red cerrado y  $\lambda \leq \kappa$ , entonces  $A$  es  $\lambda$ -red cerrado.*

*Demostración.* Supongamos que  $A$  es  $\kappa$ -red cerrado y que  $A$  no es  $\lambda$ -red cerrado, entonces existe  $\langle y_F \rangle$ ,  $\lambda$ -red en  $A$  tal que  $y_F \rightarrow q$  y  $q \notin A$ . Por el Lema 3.3, existe  $\langle x_F \rangle$ ,  $\kappa$ -red en  $A$  tal que  $x_F \rightarrow q$  y  $q \notin A$ , lo cual es una contradicción, pues  $A$  es un conjunto  $\kappa$ -red cerrado. Por lo tanto  $A$  es  $\lambda$ -red cerrado.  $\square$

**Proposición 3.2.** *Sea  $X$  un espacio. Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1. *Si  $X$  es  $\lambda$ -Fréchet y  $\lambda \leq \kappa$ , entonces  $X$  es  $\kappa$ -Fréchet.*
2. *Si  $X$  es un espacio  $\lambda$ -red y  $\lambda \leq \kappa$ , entonces  $X$  es un espacio  $\kappa$ -red.*

*Demostración.* Veamos 1: Inmediato del Lema 3.3.

Veamos 2: Supongamos que  $X$  es un espacio  $\lambda$ -red y que  $\lambda \leq \kappa$ . Sea  $A \subseteq X$   $\kappa$ -red cerrado, por la Proposición 3.1, tenemos que  $A$  es  $\lambda$ -red cerrado, como  $X$  es un espacio  $\lambda$ -red, entonces  $A$  es cerrado. Por lo tanto  $X$  es un espacio  $\kappa$ -red.  $\square$

**Proposición 3.3.** *Para todo  $\kappa$  se cumple que si  $X$  es  $\kappa$ -Fréchet, entonces  $X$  es un espacio  $\kappa$ -red.*

*Demostración.* Sea  $\kappa$  un cardinal infinito y supongamos que  $X$  es  $\kappa$ -Fréchet. Sea  $A \subseteq X$   $\kappa$ -red cerrado y  $q \in \overline{A}$ , como  $X$  es  $\kappa$ -Fréchet, entonces existe  $\langle x_F \rangle$ ,  $\kappa$ -red en  $A$  tal que  $x_F \rightarrow q$ , y ya que  $A$  es  $\kappa$ -red cerrado, entonces  $q \in A$ . Así,  $A$  es cerrado y por lo tanto  $X$  es un espacio  $\kappa$ -red.  $\square$

**Proposición 3.4.** *Sea  $X$  un espacio. Entonces*

1.  $X$  es un espacio Fréchet  $\Leftrightarrow X$  es un espacio  $\omega$ -Fréchet.
2.  $X$  es un espacio Secuencial  $\Leftrightarrow X$  es un espacio  $\omega$ -red.

*Demostración.* Veamos 1: Inmediato del Corolario 3.2.

Veamos 2: Inmediato del Corolario 3.3.  $\square$

**Teorema 3.4.** *Sea  $X$  un espacio y sea  $\kappa$  un cardinal infinito. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $X$  es  $\kappa$ -Fréchet.
2. Si  $q \in \overline{A}$ , entonces existe una red  $\langle x_d : d \in D \rangle$  en  $A$  con  $|D| \leq \kappa$  tal que  $x_d \rightarrow q$ .

*Demostración.* [1  $\Rightarrow$  2] Es claro, ya que  $|\llbracket \kappa \rrbracket^{<\omega}| \leq \kappa$ .

[2  $\Rightarrow$  1] Sea  $A \subseteq X$  y  $q \in \overline{A}$ , por hipótesis, existe  $\langle x_d : d \in D \rangle$ , red en  $A$  con  $|D| = \lambda \leq \kappa$  tal que  $x_d \rightarrow q$ , por el Lema 3.1, existe  $\langle x_{[d]} : [d] \in D / \sim \rangle$ , red en  $A$  donde su relación es antisimétrica y es tal que  $x_{[d]} \rightarrow q$ ; luego, por el Lema 3.2, existe  $\langle y_F \rangle$   $\lambda$ -red en  $A$  tal que  $y_F \rightarrow q$ , finalmente, por Lema 3.3, existe  $\langle x_F \rangle$   $\kappa$ -red en  $A$  tal que  $x_F \rightarrow q$ . Por lo tanto,  $X$  es  $\kappa$ -Fréchet.  $\square$

**Teorema 3.5.** *Sea  $X$  un espacio y  $\kappa$  un cardinal infinito. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $X$  es un espacio  $\kappa$ -red.
2. Todo  $A \subseteq X$  con la siguiente propiedad, es un conjunto cerrado: Si  $\langle x_d : d \in D \rangle$ , es una red en  $A$  con  $|D| \leq \kappa$  y  $x_d \rightarrow q$ , entonces  $q \in A$ .

*Demostración.* [1  $\Rightarrow$  2] Sea  $A \subseteq X$  con tal propiedad. Veamos que  $A$  es un conjunto cerrado, para esto, demostremos que  $A$  es un conjunto  $\kappa$ -red cerrado. Supongamos lo contrario, es decir, que  $A$  no es  $\kappa$ -red cerrado, entonces existe  $\langle x_F \rangle$ ,  $\kappa$ -red en  $A$  tal que  $x_F \rightarrow q$  y  $q \notin A$ , lo cual es una contradicción, pues  $A$  cumple la propiedad antes dicha con  $D = \llbracket \kappa \rrbracket^{<\omega}$ . Por lo tanto  $A$  es  $\kappa$ -red cerrado, y ya que  $X$  es un espacio  $\kappa$ -red, implicamos que  $A$  es cerrado.

[2  $\Rightarrow$  1] Sea  $A \subseteq X$   $\kappa$ -red cerrado. Veamos que  $A$  es un conjunto cerrado, para esto, demostremos que dicho conjunto cumple la propiedad de nuestra hipótesis. Supongamos que  $A$  no cumple tal propiedad, entonces existe  $\langle x_d : d \in D \rangle$  red en  $A$  con  $|D| \leq \kappa$  tal que  $x_d \rightarrow q$  y  $q \notin A$ . Luego, usando los lemas 3.1, 3.2 y 3.3, podemos obtener una  $\kappa$ -red  $\langle x_F \rangle$  en  $A$  tal que  $x_F \rightarrow q$  y  $q \notin A$ , lo cual es una contradicción, pues  $A$  es un conjunto  $\kappa$ -red cerrado. Por lo tanto  $A$  cumple la propiedad de nuestra hipótesis, de lo cual  $A$  es cerrado y por tanto  $X$  es un espacio  $\kappa$ -red.  $\square$

## REFERENCIAS

- [1] R. E. Hodel, *A Theory of convergence and cluster points based on  $\kappa$ -nets*, Topology Proceedings 35 (2010), 291-330.

- [2] Casas de la Rosa J., *Una teoría de convergencia y puntos clausura basada en  $\kappa$ -redes.*, Tesis de Licenciatura, FCFM-BUAP, Por presentar.
- [3] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann, Berlin, 1989.
- [4] K. Kunen and J. Vaughan, *Handbook of Set-Theoretic Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [5] P. R. Meyer, *Sequential properties of ordered topological spaces*, *Compositio Mathematicae* 21 (1969), 102-106.
- [6] G. Salicrup, *Introducción a la Topología*, Sociedad Matemática Mexicana, 1993.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel  
Puebla, Pue. C.P. 72570

Facultad de Ciencias de la Electronica, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel  
Puebla, Pue. C.P. 72570

arrazola@fcfm.buap.mx, olimpico.25@hotmail.com, imartinez@fcfm.buap.mx  
aparamo@ece.buap.mx

# CAPÍTULO 19

## ENCAJES

LUIS ALBERTO GUERRERO MÉNDEZ  
DAVID HERRERA CARRASCO  
FERNANDO MACÍAS ROMERO  
FCFM, BUAP

RESUMEN. Abordamos el concepto de encaje, revisamos que todo continuo se puede encajar en un continuo que se conoce como Cubo de Hilbert, que existe una dendrita universal en  $\mathbb{R}^2$  y que por lo tanto toda dendrita es aplanable. También explicamos lo que es una  $n$ -sombrija y por qué para cada  $n \in \mathbb{N}$ , ninguna  $n$ -sombrija es encajable en  $\mathbb{R}^n$ .

### 1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo está dividido en cuatro secciones, en la segunda presentamos conceptos y resultados que se usan a lo largo del trabajo, como las nociones de encaje,  $n$ -celda y  $n$ -variedad.

Luego en la tercera sección comenzamos con la definición de continuo, damos algunos ejemplos y probamos que existe un continuo universal que es conocido como **Cubo de Hilbert**. En esta misma sección revisamos qué es una dendrita y por qué **toda dendrita es aplanable**.

En la sección cuatro revisamos qué es una  $n$ -sombrija y por qué **para cada**  $n \in \mathbb{N}$ , **ninguna  $n$ -sombrija es encajable en  $\mathbb{R}^n$** .

Para mayor información y redondeo de este trabajo vea [4].

### 2. NOCIONES BÁSICAS

En esta sección vamos a tratar algunos conceptos y resultados de Topología General a los que nos referimos con mucha frecuencia en secciones posteriores.

El símbolo  $\mathbb{N}$  representará al conjunto de los números naturales y  $\mathbb{R}$  al de los números reales. Dado  $n \in \mathbb{N}$  y  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , suponemos que la norma de  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es  $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$  y que  $\mathbb{R}^n$  posee la topología usual, inducida por la norma. Cuando escribamos sobre un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , lo consideramos como un espacio topológico y suponemos que su topología es la usual. La cardinalidad de un conjunto  $Z$  la representamos por  $|Z|$ . Denotamos por  $X^\infty$  al producto infinito numerable del mismo espacio topológico  $X$ .

Sean  $X$  un espacio topológico y  $A \subset X$ , denotamos al interior, la cerradura, la frontera y el derivado, de  $A$  en  $X$ , como  $\text{int}_X(A)$ ,  $\text{cl}_X(A)$ ,  $\text{fr}_X(A)$  y  $A'_X$ , respectivamente.

**Definición 2.1.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Un **homeomorfismo** de  $X$  a  $Y$  es una función  $h : X \rightarrow Y$  tal que es biyectiva, continua y  $h^{-1} : Y \rightarrow X$  es continua. El espacio  $X$  es **homeomorfo** a  $Y$  si existe un homeomorfismo de  $X$  a  $Y$ . Decimos que  $X$  es **encajable** en  $Y$  si  $X$  es homeomorfo a un subespacio de  $Y$ .

**Ejemplo 2.2.** La superficie de un cubo  $C$  es homeomorfo a la esfera unitaria  $S^2$  en  $\mathbb{R}^3$ . Supongamos que  $C$  está centrado en  $\mathbb{R}^3$ . La función  $h : C \rightarrow S^2$ , definida para cada  $p \in C$ , por  $f(p) = \frac{p}{\|p\|}$  es un homeomorfismo.

En nuestro trabajo se usan varias veces las nociones de arco y  $n$ -celda, por lo que conviene escribir sus definiciones.

**Definición 2.3.** Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo  $[0, 1]$ . Si  $h : [0, 1] \rightarrow A$  es un homeomorfismo,  $h(0) = p$  y  $h(1) = q$ , entonces los puntos  $p$  y  $q$  se conocen como los **puntos extremos** del arco  $A$ .

**Definición 2.4.** Consideramos  $[0, 1]^n$  con la topología producto. Una  **$n$ -celda** es un espacio topológico homeomorfo a  $[0, 1]^n$ .

A continuación veamos qué es una  $n$ -variedad.

**Definición 2.5.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Una  **$n$ -variedad** es un espacio métrico separable  $M$  tal que todo  $p \in M$  tiene una vecindad  $V$  que es una  $n$ -celda. El **interior como variedad** de una  $n$ -variedad  $M$ , que denotamos por  $\text{intv}_{(n)}(M)$ , es

$$\text{intv}_{(n)}(M) = \{p \in M : p \text{ tiene una vecindad homeomorfa a } \mathbb{R}^n\}.$$

La **frontera como variedad** de  $M$ , que denotamos por  $\partial_n M$ , es

$$\partial_n M = \{p \in M : p \notin \text{intv}_{(n)}(M)\}.$$

**Ejemplo 2.6.** Sea

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ y } |z| \leq 1\}.$$

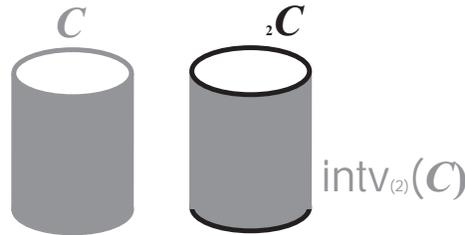
Tenemos que  $C$  es una 2-variedad tal que

$$\text{intv}_{(2)}(C) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ y } |z| < 1\}$$

y

$$\partial_2 C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ y } |z| = 1\}.$$

Notemos que si consideramos a  $C$  como subespacio de  $\mathbb{R}^3$ , tenemos que  $\text{int}_{\mathbb{R}^3}(C) = \emptyset$  y  $\text{fr}_{\mathbb{R}^3}(C) = C$ . Luego,  $\text{int}_{\mathbb{R}^3}(C)$  y  $\text{fr}_{\mathbb{R}^3}(C)$  no coinciden con  $\text{intv}_{(2)}(C)$  y  $\partial_2 C$ , respectivamente.



Recordemos qué son las  $i$ -ésimas funciones proyección y un hecho importante sobre la continuidad de estas funciones.

**Definición 2.7.** Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $X_1, X_2, \dots$  espacios topológicos. Para cada  $i \in \{1, 2, \dots\}$ , sea  $\pi_i : \prod_{j=1}^{\infty} X_j \rightarrow X_i$ , definida para cada  $(x_1, x_2, \dots) \in \prod_{j=1}^{\infty} X_j$  por  $\pi_i((x_1, x_2, \dots)) = x_i$ . La función  $\pi_i$  se llama la  **$i$ -ésima función proyección**.

**Lema 2.8.** Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $X_1, X_2, \dots$  espacios topológicos. Si  $\prod_{j=1}^{\infty} X_j$  tiene la topología producto, entonces para cada  $i \in \{1, 2, \dots\}$ , tenemos que la  $i$ -ésima función proyección  $\pi_i$  es continua.

*Demostración.* Supongamos que  $\prod_{j=1}^{\infty} X_j$  tiene la topología producto. Sean  $i \in \{1, 2, \dots\}$  y  $U_i$  un abierto en  $X_i$ . Notemos que  $\pi_i^{-1}(U_i) = X_1 \times X_2 \times \dots \times U_i \times X_{i+1} \times \dots$ . Como  $\pi_i^{-1}(U_i)$  es abierto en  $\prod_{j=1}^{\infty} X_j$ , concluimos que  $\pi_i$  es continua.  $\square$

Concluimos esta sección con lo siguiente.

**Definición 2.9.** Una propiedad  $\mathcal{P}$  de un espacio topológico  $X$  es un **invariante topológico** (o **propiedad topológica**) si todo espacio topológico homeomorfo a  $X$  también tiene la propiedad  $\mathcal{P}$ .

**Teorema 2.10.** [2, (1.G.7), (2.A.15), (2.G.10)] *Las propiedades de metrizabilidad, conexidad y compacidad son invariantes topológicos.*

### 3. ENCAJES IMPORTANTES

En esta sección vemos qué es un continuo y que existe un continuo universal. También vemos qué es una dendrita y que existe una dendrita universal en  $\mathbb{R}^2$ .

Comenzamos con la noción de continuo.

**Definición 3.1.** Un **continuo** es un espacio métrico, no vacío, compacto y conexo.

De acuerdo al Teorema 2.10, la propiedad de ser un continuo es una propiedad topológica.

**Ejemplo 3.2.** Sean  $n \in \mathbb{N}$  y

$$B^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \leq 1\}.$$

A  $B^n$  se le conoce como la **bola cerrada** en  $\mathbb{R}^n$  de dimensión  $n$  y es un ejemplo de un continuo. De hecho una  $n$ -celda es homeomorfa a  $B^n$ , por lo que una  $n$ -celda es un continuo.

Ahora, recordemos la definición de continuo universal en una clase de continuos.

**Definición 3.3.** Sean  $\mathfrak{C}$  una clase de continuos y  $C \in \mathfrak{C}$ . Decimos que  $C$  es **universal en la clase  $\mathfrak{C}$** , si todo elemento de la clase  $\mathfrak{C}$  es encajable en  $C$ .

Con la intención de probar que existe un continuo universal veamos como se define el espacio conocido como Cubo de Hilbert, veamos que efectivamente es un continuo y que además todo continuo se puede encajar en él.

**Definición 3.4.** Para todo  $i \in \mathbb{N}$ , sea  $I_i = [0, 1]$ . Sea  $[0, 1]^\infty = \prod_{i=1}^{\infty} I_i$ . Consideramos  $[0, 1]^\infty$  con la topología producto. El **Cubo de Hilbert** es un espacio topológico homeomorfo a  $[0, 1]^\infty$ .

Como el producto arbitrario de espacios conexos es conexo con la topología producto (vea [2, (6.A.12)]) y el producto arbitrario de espacios compactos también es compacto con la topología producto (vea [2, (6.A.11)]), tenemos que  $[0, 1]^\infty$ , con la topología producto, es conexo y compacto.

Además,  $D : \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ , definida para cada  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ , por

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup \left\{ \frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i} : i \in \mathbb{N} \right\},$$

donde  $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^\infty$ ,  $\mathbf{y} = \{y_i\}_{i=1}^\infty$  y  $\bar{d}(x_i, y_i) = \min\{|x_i - y_i|, 1\}$ , es una métrica de  $\mathbb{R}^\infty$  que induce la topología producto (vea [5, Teorema 20.5]). En consecuencia,  $[0, 1]^\infty$  es metrizable.

Así,  $[0, 1]^\infty$  es un continuo y de aquí, por el Teorema 2.10, el cubo de Hilbert es un continuo.

Ahora veamos que  $[0, 1]^\infty$  es un continuo universal, es decir, cualquier otro continuo es encajable en  $[0, 1]^\infty$ . Para esto necesitamos lo siguiente.

**Teorema 3.5.** [3, 5.6, pág. 187] *Si  $X$  es un espacio métrico, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1)  $X$  es segundo numerable.
- (2)  $X$  es separable.
- (3)  $X$  es de Lindelöf.

A continuación enunciamos un resultado muy importante en Topología General y que habitualmente se llama el Lema de Urysohn. Nos asegura la existencia de ciertas funciones continuas con valores reales en un espacio normal  $X$ . En nuestro trabajo, es la herramienta básica usada para probar el Lema 3.7, que nos será de ayuda para demostrar el Teorema 3.8, y éste último nos sirve para probar el Teorema 3.9, el cual es un resultado importante en Teoría de Continuos.

**Teorema 3.6.** [5, Teorema 33.1] **Lema de Urysohn.** *Sea  $X$  un espacio topológico normal. Si  $A$  y  $B$  son subconjuntos cerrados y ajenos en  $X$  y  $[a, b]$  es un intervalo cerrado en la recta real, entonces existe una función continua  $f : X \rightarrow [a, b]$  tal que para todo  $x \in A : f(x) = a$  y para todo  $x \in B : f(x) = b$ .*

**Lema 3.7.** *Si  $X$  es un espacio topológico regular con base numerable, entonces existe una familia numerable  $\mathcal{F}$  cuyos elementos son funciones continuas de  $X$  en  $[0, 1]$  tal que para todo  $p \in X$  y para todo  $U$  abierto en  $X$  con  $p \in U$ , existe  $f \in \mathcal{F}$  tal que  $f(p) > 0$  y para todo  $x \in X - U : f(x) = 0$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es un espacio topológico regular con una base numerable  $\mathcal{B}$ . Sea  $\mathcal{A} = \{(U, V) : U, V \in \mathcal{B} \text{ y } \text{cl}_X(U) \subset V\}$ . La colección  $\mathcal{A}$  es numerable. Para cada  $(U, V) \in \mathcal{A}$ , claramente  $\text{cl}_X(U)$  y  $X - V$  son cerrados en  $X$  y ajenos, aplicamos el Lema de Urysohn para elegir una función continua  $f_{U,V} : X \rightarrow [0, 1]$  tal que para todo  $x \in \text{cl}_X(U) : f_{U,V}(x) = 1$  y para todo  $x \in X - V : f_{U,V}(x) = 0$ . Luego, la familia  $\mathcal{F} = \{f_{U,V} : (U, V) \in \mathcal{A}\}$  es numerable.

Revisemos que la familia  $\mathcal{F}$  satisface la condición deseada. Sean  $p \in X$  y  $W$  un abierto en  $X$  tales que  $p \in W$ . Existe  $B_m \in \mathcal{B}$  tal que  $p \in B_m \subset W$ . Como  $X$  es regular y  $B_m$  es abierto en  $X$ , existe  $A$  abierto en  $X$  tal que  $p \in A \subset \text{cl}_X(A) \subset B_m$ . Ahora, como  $A$  es abierto en  $X$ , existe  $B_k \in \mathcal{B}$  tal que  $p \in B_k \subset A$ . Luego,

$\text{cl}_X(B_k) \subset \text{cl}_X(A) \subset B_m$ . Así,  $(B_k, B_m) \in \mathcal{A}$ . Luego, existe  $f_{B_k, B_m} \in \mathcal{F}$  tal que para todo  $x \in \text{cl}_X(B_k) : f_{B_k, B_m}(x) = 1$  y para todo  $x \in X - B_m : f_{B_k, B_m}(x) = 0$ . Como  $p \in B_k \subset \text{cl}_X(B_k)$ , tenemos que  $f_{B_k, B_m}(p) = 1$ . Como  $X - W \subset X - B_m$ , tenemos que para todo  $x \in X - W : f_{B_k, B_m}(x) = 0$ .  $\square$

**Teorema 3.8.** *Todo espacio topológico regular con base numerable es homeomorfo a un subespacio de  $[0, 1]^\infty$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es un espacio topológico regular con base numerable. Por el Lema 3.7, existe una familia  $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  que satisface las hipótesis de dicho lema; consideramos  $\mathbb{R}^\infty$  con la topología producto y definimos  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ , de la siguiente manera

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots).$$

Luego,  $F$  es continua porque  $\mathbb{R}^\infty$  tiene la topología producto y cada  $f_n$  es continua.

También,  $F$  es inyectiva porque si  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ , tenemos que como  $X$  es de Hausdorff, existen  $U$  y  $V$  ajenos y abiertos en  $X$  tales que  $x \in U$  y  $y \in V$ . Como  $\mathcal{F}$  satisface lo que establece el Lema 3.7, para  $x \in U$  existe  $f_n \in \mathcal{F}$  tal que  $f_n(x) > 0$  y para todo  $t \in X - U : f_n(t) = 0$ . Como  $y \in X - U$ , tenemos que  $f_n(y) = 0$ . Así, existe un índice  $n$  tal que  $f_n(x) > 0$  y  $f_n(y) = 0$ . Luego,  $F(x) \neq F(y)$ .

Sea  $Z = F(X)$ . Notemos que para todo  $x \in X$  y para todo  $i \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $0 \leq f_i(x) \leq 1$ . Luego,  $Z \subset [0, 1]^\infty$ .

Resta probar que  $X$  es homeomorfo a  $Z$ . Para esto, sea  $G : X \rightarrow Z$  definida, para cada  $x \in X$ , por  $G(x) = F(x)$ . Por su definición  $G$  es una función biyectiva y continua de  $X$  en  $Z$ .

Veamos que  $G$  es una función abierta. Para esto, sea  $U$  abierto en  $X$ . Sea  $z_0 \in G(U)$ . Busquemos un conjunto  $W$  abierto en  $Z$  tal que  $z_0 \in W \subset G(U)$ .

Como  $z_0 \in G(U)$ , existe  $x_0 \in U$  tal que  $G(x_0) = z_0$ . Por el Lema 3.7, existe  $f_N \in \mathcal{F}$  tal que  $f_N(x_0) > 0$  y para todo  $t \in X - U : f_N(t) = 0$ .

Tomemos el rayo abierto  $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$  y sean  $\pi_N : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  la proyección  $N$ -ésima y

$$V = \pi_N^{-1}((0, \infty)).$$

Como  $\pi_N$  es continua, tenemos que  $V$  es abierto en  $\mathbb{R}^\infty$ .

Sea  $W = V \cap Z$ . Claramente  $W$  es abierto en  $Z$ . Veamos que  $z_0 \in W \subset G(U)$ .

Como  $\pi_N(z_0) = \pi_N(G(x_0)) = f_N(x_0) > 0$ , tenemos que  $z_0 \in V$ . Además, como  $z_0 \in Z$ , tenemos que  $z_0 \in W$ .

Además,  $W \subset G(U)$ . Porque si  $z \in W$ , entonces  $z \in V \cap Z$ . Luego, existe  $x \in X$  tal que  $G(x) = z$ . Como  $z \in V$ , tenemos que  $\pi_N(z) \in (0, \infty)$  y de aquí,  $\pi_N(z) > 0$ .

Como  $\pi_N(z) = \pi_N(G(x)) = f_N(x)$  y  $f_N$  es nula fuera de  $U$ , concluimos que  $x \in U$ , de otro modo tendríamos que  $\pi_N(z) = 0$ .

Luego,  $G(x) \in G(U)$ , es decir,  $z \in G(U)$  y de aquí  $G(U)$  es abierto en  $Z$ .

Con todo esto,  $G : X \rightarrow Z$  es un homeomorfismo. Así,  $X$  es homeomorfo a un subespacio de  $[0, 1]^\infty$ .  $\square$

**Teorema 3.9.** *Todo continuo es homeomorfo a un subespacio de  $[0, 1]^\infty$  (Cubo de Hilbert).*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es un continuo. En particular,  $X$  es un espacio métrico compacto. Luego,  $X$  es de Lindelöf. Por el Teorema 3.5, tenemos que  $X$  es segundo numerable, es decir, tiene una base numerable. Además, todo espacio métrico satisface el axioma de regularidad. Por el Teorema 3.8, concluimos que  $X$  es homeomorfo a un subespacio de  $[0, 1]^\infty$ .  $\square$

A continuación veamos qué es una dendrita.

**Definición 3.10.** Una **dendrita** es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.

**Ejemplo 3.11.** Cada arco es localmente conexo y no contiene curvas cerradas simples. Así, cada arco es una dendrita.

**Ejemplo 3.12.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $[(0, 0), (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})]$  el segmento de recta en  $\mathbb{R}^2$  que va de  $(0, 0)$  a  $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ .

Sea

$$F_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[ (0, 0), \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \right) \right].$$

Este continuo es una dendrita y se conoce precisamente como  $F_\omega$ .

Veamos que existe un dendrita universal en la clase de las dendritas. Para esto, primero veamos la noción de límite inverso y algunos resultados que nos serán de utilidad.

**Definición 3.13.** Sea  $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$  una colección de espacios métricos. Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , sea  $f_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$  una función continua. La sucesión  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  de espacios y funciones es llamada una **sucesión inversa**, a los espacios  $X_i$  se les conoce como **espacios coordinados** y a las funciones  $f_i$  se les conoce como **funciones de ligadura**.

Si  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  es una sucesión inversa, entonces el **límite inverso** de  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ , denotado por  $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ , es el subespacio del producto cartesiano  $\prod_{i=1}^\infty X_i$  definido por

$$\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty = \{(x_i)_{i=1}^\infty \in \prod_{i=1}^\infty X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i\}.$$

**Lema 3.14.** [6, Teorema 2.10] *Sean  $X$  un espacio métrico con métrica  $d$  y  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  una sucesión inversa tal que para cada  $i \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $X_i$  es un subconjunto compacto, no vacío de  $X$  y  $f_i$  es una función suprayectiva. Para todo  $j > i + 1$ , sea*

$$f_{ij} = f_i \circ \dots \circ f_{j-1} : X_j \rightarrow X_i \quad \text{y} \quad f_{ii+1} = f_i.$$

*Supongamos que se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que para cualquier  $p \in X_k$  :*

$$\text{diám} \left( \bigcup_{j>k} f_{kj}^{-1}(p) \right) < \varepsilon.$$

(b) *Para todo  $i \in \mathbb{N}$  y para todo  $\delta > 0$  existe  $\delta'$  tal que si  $j > i$  y  $p, q \in X_j$  son tales que  $d(f_{ij}(p), f_{ij}(q)) > \delta$ , entonces  $d(p, q) > \delta'$ .*

Entonces  $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  es homeomorfo a  $\bigcap_{i=1}^\infty (\text{cl}_X(\bigcup_{m \geq i} X_m))$ . En particular, si para cada  $i \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $X_i \subset X_{i+1}$ , entonces  $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  es homeomorfo a  $\text{cl}_X(\bigcup_{i=1}^\infty X_i)$ .

**Definición 3.15.** Sean  $X_1$  y  $X_2$  espacios topológicos. Una función  $f : X_1 \rightarrow X_2$  es **monótona** si  $f$  es continua y para cada  $y \in X_2$ , tenemos que  $f^{-1}(y)$  es conexo.

**Lema 3.16.** [6, Teorema 10.36] *Todo límite inverso de dendritas con funciones de ligadura monótonas es una dendrita.*

Veamos la siguiente noción que nos será de utilidad para construir una dendrita, que llamamos  $D_\infty$  y que más adelante veamos que es universal en la clase de las dendritas.

**Definición 3.17.** Sea  $c \in \mathbb{R}^2$ . Una **estrella con centro en  $c$  y rayos  $B_j$**  es  $\bigcup_{j=1}^\infty B_j$ , donde para cada  $j \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $B_j$  es un arco convexo en  $\mathbb{R}^2$  tal que  $c$  es uno de sus puntos extremos,  $\text{diám}(B_j) \rightarrow 0$  cuando  $j \rightarrow \infty$  y  $B_j \cap B_k = \{c\}$ , si  $j \neq k$ .

A continuación presentamos en cuatro pasos la construcción de la dendrita  $D_\infty$  y por qué  $D_\infty$  es una dendrita universal en la clase de las dendritas. Como esta dendrita  $D_\infty$  es encajable en  $\mathbb{R}^2$  tenemos como consecuencia inmediata que toda dendrita es aplanable.

**Lema 3.18.** *Toda dendrita se puede encajar en  $\mathbb{R}^2$ .*

*Demostración.* Hacemos la prueba en cuatro pasos.

**Paso 1.** Construcción de  $D_\infty$ . Sean  $c_1 \in \mathbb{R}^2$  y  $D_1$  una estrella con centro en  $c_1$ .

Para cada  $j \in \mathbb{N}$ , sea  $m_j$  el punto medio de cada rayo  $B_j$  de  $D_1$  y  $S_j$  una estrella con centro en  $m_j$  y tal que  $S_j \cap B_j = \{m_j\}$ ,  $\text{diám}(S_j) \rightarrow 0$  cuando  $j \rightarrow \infty$  y  $S_j \cap S_k = \emptyset$ , si  $j \neq k$ .

Ahora sea  $D_2 = D_1 \cup (\bigcup_{j=1}^\infty S_j)$ .

De manera similar, para cada  $j \in \mathbb{N}$  ponemos una estrella con centro en cada punto medio del subarco de  $B_j$  que va de  $c$  a  $m_j$  y otra estrella con centro en cada punto medio del subarco de  $B_j$  que va de  $m_j$  al punto extremo de  $B_j$  que no es  $c$ . También para cada  $j \in \mathbb{N}$ , ponemos una estrella en el punto medio de cada rayo de cada estrella  $S_j$ , cuidando que las nuevas estrellas construidas sean disjuntas dos a dos, que intersecten a  $D_2$  sólo en sus respectivos centros y que sus diámetros tiendan a cero cuando  $j \rightarrow \infty$ . Así, de manera similar, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , continuamos construyendo  $D_i$ .

Notemos que para cada  $i \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $D_i$  es una dendrita y  $D_i \subset D_{i+1}$ .

Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , sea  $f_i : D_{i+1} \rightarrow D_i$  una función definida para cada  $x \in D_{i+1}$  por

$$f_i(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in D_i \\ m_j, & \text{si } x \in S_j, \end{cases} \text{ donde para cada } j \in \mathbb{N} \text{ tenemos que } S_j^i \text{ es una estrella agregada a } D_i.$$

Notemos que para cada  $i \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $f_i$  es una función monótona.

Sea  $D_\infty = \varprojlim\{D_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ .

**Paso 2.**  $D_\infty$  es una dendrita. El hecho de que  $D_\infty$  es una dendrita se desprende inmediatamente del Lema 3.16.

**Paso 3.**  $D_\infty$  es encajable en  $\mathbb{R}^2$ . Por la construcción de  $D_\infty$ , tenemos que se cumplen (a) y (b) del Lema 3.14. Luego,  $\varprojlim\{D_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  es homeomorfo a  $\text{cl}_X(\bigcup_{i=1}^\infty X_i)$ . Notemos que

$$\text{cl}_X\left(\bigcup_{i=1}^\infty X_i\right) \subset \mathbb{R}^2.$$

Así,  $D_\infty$  es encajable en  $\mathbb{R}^2$ .

**Paso 4.**  $D_\infty$  es universal para la familia de las dendritas. La prueba de este hecho es un tanto más elaborada, por razones de espacio remitimos al lector a consultarla en [6, 10.37, Paso 4].

Así, toda dendrita se puede encajar en  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

Así, en esta sección hemos visto dos encajes importantes dentro de la Teoría de los Continuos. Todo continuo se puede encajar en el cubo de Hilbert y toda dendrita se puede encajar en  $D_\infty$ .

#### 4. NINGUNA $n$ -SOMBRILLA ES ENCAJABLE EN $\mathbb{R}^n$

En esta sección vemos qué es una  $n$ -sombriilla y revisamos el material necesario para probar que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , ninguna  $n$ -sombriilla es encajable en  $\mathbb{R}^n$  (vea el Teorema 4.16).

Comenzamos esta sección recordando que un espacio topológico es perfecto si es cerrado y es igual al conjunto de sus puntos de acumulación.

**Lema 4.1.** *Si  $X$  es un espacio topológico,  $Y$  es un subespacio de  $X$  tal que  $Y$  es perfecto y  $p \in Y$ , entonces  $\text{cl}_X(Y - \{p\}) = Y$ .*

*Demostración.* Sean  $X$  un espacio topológico y  $Y$  un subespacio de  $X$  tal que  $Y$  es cerrado en  $X$  y  $Y = Y'_X$ . Sea  $p \in Y$ . Veamos que  $\text{cl}_X(Y - \{p\}) = Y$ . Sea  $y \in Y$ . Supongamos que  $y \neq p$ . Luego,  $y \in Y - \{p\}$ . Como  $Y - \{p\} \subset \text{cl}_X(Y - \{p\})$ , tenemos que  $y \in \text{cl}_X(Y - \{p\})$ . Ahora, supongamos que  $y = p$ . Como  $Y = Y'_X$ , tenemos que  $p \in Y'_X$ . Luego, para todo abierto  $U$  en  $X$  con  $p \in U$ , tenemos que  $U \cap (Y - \{p\}) \neq \emptyset$ . Por lo tanto,  $y \in \text{cl}_X(Y - \{p\})$ . Así,  $Y \subset \text{cl}_X(Y - \{p\})$ .

Por otro lado, como  $Y - \{p\} \subset Y$ , tenemos que  $\text{cl}_X(Y - \{p\}) \subset \text{cl}_X(Y)$ . Como  $Y$  es cerrado en  $X$ , tenemos que  $\text{cl}_X(Y) = Y$ . Luego,  $\text{cl}_X(Y - \{p\}) \subset Y$ . Así,  $\text{cl}_X(Y - \{p\}) = Y$ .  $\square$

**Lema 4.2.** *Si  $X$  y  $Y$  son espacios topológicos y  $p \in Y$ , entonces  $X \times \{p\}$  es homeomorfo a  $X$ .*

*Demostración.* Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos,  $p \in Y$  y  $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$  la función primera proyección sobre  $X$ . Sea  $g = \pi_1|_{X \times \{p\}} : X \times \{p\} \rightarrow X$ . Por el Lema 2.8, tenemos que  $\pi_1$  es continua, y de aquí  $g$  es continua. Claramente  $g$  es biyectiva y  $g^{-1} : X \rightarrow X \times \{p\}$ , definida por  $g^{-1}(x) = (x, p)$ , es continua. Así,  $g : X \times \{p\} \rightarrow X$  es un homeomorfismo.  $\square$

**Lema 4.3.** *En  $\mathbb{R}^n$  tenemos que  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .*

*Demostración.* Tenemos que  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]) = (0, 1)$ . Luego,  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n) = (0, 1)^n$ . Por otro lado,  $(0, 1)$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}$ . Así,  $(0, 1)^n$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Por lo tanto,  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

A continuación un lema en el cual verificamos que un homeomorfismo entre  $n$ -variedades preserva el interior como variedad y la frontera como variedad.

**Lema 4.4.** *Si  $M_1$  y  $M_2$  son  $n$ -variedades y  $h : M_1 \rightarrow M_2$  es un homeomorfismo, entonces*

- (1)  $h(\text{intv}_{(n)}(M_1)) = \text{intv}_{(n)}(M_2)$ .
- (2)  $h(\partial_n M_1) = \partial_n M_2$ .

*Demostración.* Veamos que se cumple (1). Sea  $z \in h(\text{intv}_{(n)}(M_1))$ . Tenemos que  $z = h(p)$  para algún  $p \in \text{intv}_{(n)}(M_1)$ . Existe una vecindad  $V$  de  $p$  en  $M_1$  tal que  $V$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Como  $V$  es homeomorfo a  $h(V)$ , tenemos que  $h(V)$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Además,  $h(V)$  es una vecindad de  $z$  en  $M_2$ . Luego,  $z \in \text{intv}_{(n)}(M_2)$ . Así,  $h(\text{intv}_{(n)}(M_1)) \subset \text{intv}_{(n)}(M_2)$ .

Ahora, veamos que  $\text{intv}_{(n)}(M_2) \subset h(\text{intv}_{(n)}(M_1))$ . Como  $h^{-1} : M_2 \rightarrow M_1$  es un homeomorfismo, de manera similar de como se demostró que  $h(\text{intv}_{(n)}(M_1)) \subset \text{intv}_{(n)}(M_2)$ , se obtiene que

$$h^{-1}(\text{intv}_{(n)}(M_2)) \subset \text{intv}_{(n)}(M_1).$$

Luego,  $\text{intv}_{(n)}(M_2) = h(h^{-1}(\text{intv}_{(n)}(M_2))) \subset h(\text{intv}_{(n)}(M_1))$ .

Veamos que se cumple (2). Como  $h$  es biyectiva, tenemos que  $h(\partial M_1) = h(M_1 - \text{intv}_{(n)}(M_1)) = h(M_1) - h(\text{intv}_{(n)}(M_1)) = M_2 - h(\text{intv}_{(n)}(M_1))$ . Luego, por (1), tenemos que  $h(\partial_n M_1) = M_2 - \text{intv}_{(n)}(M_2)$ . Así,  $h(\partial_n M_1) = \partial_n M_2$ .  $\square$

**Lema 4.5.** *Si  $(a_1, \dots, a_n) \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$ , entonces*

$$(a_1, \dots, a_n, 0) \in \text{intv}_{(n)}([0, 1]^n \times \{0\}).$$

*Demostración.* Sea  $(a_1, \dots, a_n) \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$ . Notemos que

$$(a_1, \dots, a_n, 0) \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n) \times \{0\}.$$

Por el Lema 4.2, tenemos que  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n) \times \{0\}$  es homeomorfo a  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$ . Además, por el Teorema 4.3, tenemos que  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Luego,  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n) \times \{0\}$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Así,  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n) \times \{0\}$  es una vecindad de  $(a_1, \dots, a_n, 0)$  homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ . Por lo tanto,  $(a_1, \dots, a_n, 0) \in \text{intv}_{(n)}([0, 1]^n \times \{0\})$ .  $\square$

**Definición 4.6.** Un espacio topológico  $X$  es **localmente compacto** si para todo  $p \in X$  y para todo abierto  $U$  en  $X$  con  $p \in U$  existe un abierto  $V$  en  $X$  tal que  $p \in V \subset \text{cl}_X(V) \subset U$  y  $\text{cl}_X(V)$  es compacto.

**Lema 4.7.** Sean  $X \subset \mathbb{R}^n$  y  $p \in X$ . Entonces  $p \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$  si y sólo si existe  $Z_p \subset X$  tal que  $Z_p$  es compacto y  $p \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(Z_p)$ .

*Demostración.* Supongamos que  $p \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$ . Como  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^n$  es localmente compacto, existe un abierto  $V$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $p \in V \subset \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(V) \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$  y  $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(V)$  es compacto. Notemos que  $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(V) \subset X$  y  $p \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(V) \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}(\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(V))$ .

Sea  $Z_p = \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(V)$ . Tenemos que  $Z_p \subset X$  y  $Z_p$  es compacto. Además,  $p \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(Z_p)$ . Así,  $Z_p$  satisface las propiedades deseadas.

Recíprocamente, supongamos que existe  $Z_p \subset X$  tal que  $Z_p$  es compacto y  $p \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(Z_p)$ . Como  $Z_p \subset X$ , tenemos que  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(Z_p) \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$ . Luego,  $p \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$ .  $\square$

**Lema 4.8.** Sean  $X$  y  $Y$  subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  y  $p \in X$ . Si  $h : X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo y para todo  $\delta > 0$  existe  $U_\delta$  abierto en  $X$  con  $p \in U_\delta \subset B(p, \delta) \cap X$  tal que toda función  $f : X - U_\delta \rightarrow S^{n-1}$  se puede extender a una función de  $X$  a  $S^{n-1}$ , entonces para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $W_\varepsilon$  abierto en  $Y$  con  $h(p) \in W_\varepsilon \subset B(h(p), \varepsilon) \cap Y$  tal que toda función  $\alpha : Y - W_\varepsilon \rightarrow S^{n-1}$  se puede extender a una función de  $Y$  a  $S^{n-1}$ .

*Demostración.* Sean  $\varepsilon > 0$  y  $V_\varepsilon = B(h(p), \varepsilon) \cap Y$ . Como  $B(h(p), \varepsilon)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ , tenemos que  $V_\varepsilon$  es abierto en  $Y$ . Luego,  $h^{-1}(V_\varepsilon)$  es abierto en  $X$ . Existe  $\delta > 0$  tal que  $B(p, \delta) \cap X \subset h^{-1}(V_\varepsilon)$ . Por hipótesis, existe un abierto  $U_\delta$  en  $X$  tal que  $p \in U_\delta \subset B(p, \delta) \cap X$  y toda función  $f : X - U_\delta \rightarrow S^{n-1}$  se puede extender a una función de  $X$  a  $S^{n-1}$ . Luego,

$$h(p) \in h(U_\delta) \subset h(B(p, \delta) \cap X) \subset V_\varepsilon = B(h(p), \varepsilon) \cap Y.$$

Sea  $W_\varepsilon = h(U_\delta)$ . Tenemos que  $W_\varepsilon$  es abierto en  $Y$  y  $h(p) \in W_\varepsilon \subset B(h(p), \varepsilon) \cap Y$ . Veamos que toda función  $\alpha : Y - h(U_\delta) \rightarrow S^{n-1}$  se puede extender a una función de  $Y$  a  $S^{n-1}$ . Sean  $\alpha : Y - h(U_\delta) \rightarrow S^{n-1}$  y  $g = \alpha \circ h|_{X - U_\delta}$ . Notemos que  $g$  es una función de  $X - U_\delta$  a  $S^{n-1}$ . Luego, existe  $G : X \rightarrow S^{n-1}$  tal que para todo  $x \in X - U_\delta$ , tenemos que  $G(x) = g(x)$ .

Sea  $y \in Y - h(U_\delta)$ . Notemos que para todo  $y \in Y - h(U_\delta)$ , tenemos que  $h^{-1}|_{Y - h(U_\delta)}(y) = h^{-1}(y)$ . Luego,

$$G \circ h^{-1}(y) = G(h^{-1}(y)) = G(h^{-1}|_{Y - h(U_\delta)}(y)).$$

Como  $h^{-1}|_{Y - h(U_\delta)}(y) \in X - U_\delta$ , tenemos que

$$G(h^{-1}|_{Y - h(U_\delta)}(y)) = g(h^{-1}|_{Y - h(U_\delta)}(y)).$$

Así,

$$G \circ h^{-1}(y) = g(h^{-1}|_{Y - h(U_\delta)}(y)) = g(h^{-1}(y)) = \alpha \circ h|_{X - U_\delta}(h^{-1}(y))$$

Notemos que para todo  $x \in X - U_\delta$ , tenemos que  $h|_{X - U_\delta}(x) = h(x)$ . Luego,

$$\alpha \circ h|_{X - U_\delta}(h^{-1}(y)) = \alpha(h(h^{-1}(y))) = \alpha(y).$$

Así, para todo  $y \in Y - h(U_\delta)$ , tenemos que  $G \circ h^{-1}(y) = \alpha(y)$ . Por lo tanto,  $G \circ h^{-1}$  es una extensión de  $\alpha$ .  $\square$

**Teorema 4.9.** [7, 19.1] Sean  $X \subset \mathbb{R}^n$  y  $p \in X$ . Si  $X$  es compacto, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

- (1)  $p \in \text{fr}_{\mathbb{R}^n}(X)$ .
- (2) Para todo  $\delta > 0$  existe  $U_\delta$  abierto en  $X$  con  $p \in U_\delta \subset B(p, \delta) \cap X$  tal que toda función  $f : X - U_\delta \rightarrow S^{n-1}$  se puede extender a una función de  $X$  a  $S^{n-1}$ .

El Teorema de la Invariancia del Dominio de Brower nos es de utilidad en este trabajo, por lo que a continuación presentamos una versión de este teorema para conjuntos compactos, el cual nos ayuda a probar el mismo teorema para conjuntos en general.

**Teorema 4.10.** Sean  $X$  y  $Y$  subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  y  $h : X \rightarrow Y$  un homeomorfismo. Si  $X$  es compacto, entonces  $h(\text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) = \text{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)$ .

*Demostración.* Supongamos que  $X \subset \mathbb{R}^n$  es compacto. Veamos que

$$(*) \quad h(\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(X)) = \text{fr}_{\mathbb{R}^n}(Y).$$

Sea  $z \in h(\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(X))$ . Existe  $p \in \text{fr}_{\mathbb{R}^n}(X)$  tal que  $h(p) = z$ . Por el Teorema 4.9, para todo  $\delta > 0$  existe  $U_\delta$  abierto en  $X$  con  $p \in U_\delta \subset B(p, \delta) \cap X$  tal que toda función  $f : X - U_\delta \rightarrow S^{n-1}$  se puede extender a una función de  $X$  a  $S^{n-1}$ . Por el Lema 4.8, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $W_\varepsilon$  abierto en  $Y$  con  $h(p) \in W_\varepsilon \subset B(h(p), \varepsilon) \cap Y$  tal que toda función  $\alpha : Y - W_\varepsilon \rightarrow S^{n-1}$  se puede extender a una función de  $Y$  a  $S^{n-1}$ . Por el Teorema 4.9, tenemos que  $h(p) \in \text{fr}_{\mathbb{R}^n}(Y)$ . Así,  $h(\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(X)) \subset \text{fr}_{\mathbb{R}^n}(Y)$ .

Ahora, como  $h^{-1} : Y \rightarrow X$  es un homeomorfismo, de manera similar de como se demostró que  $h(\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(X)) \subset \text{fr}_{\mathbb{R}^n}(Y)$ , se obtiene que  $h^{-1}(\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(Y)) \subset \text{fr}_{\mathbb{R}^n}(X)$ . Luego,

$$\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(Y) = h(h^{-1}(\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(Y))) \subset h(\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(X)).$$

Así,  $h(\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(X)) = \text{fr}_{\mathbb{R}^n}(Y)$ .

Ahora, como  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(X) = X - \text{fr}_{\mathbb{R}^n}(X)$  y  $h$  es biyectiva, tenemos que  $h(\text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) = h(X) - h(\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(X)) = Y - h(\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(X))$ . Por (\*),  $h(\text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) = Y - \text{fr}_{\mathbb{R}^n}(Y)$ . Como  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(Y) = Y - \text{fr}_{\mathbb{R}^n}(Y)$ , tenemos que  $h(\text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) = \text{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)$ .  $\square$

Veamos como se prueba el Teorema de la Invariancia del Dominio de Brower.

**Teorema 4.11. De la invariancia del dominio de Brouwer.** Si  $X$  y  $Y$  son subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  y  $h : X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo, entonces  $h(\text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) = \text{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)$ . En particular, si  $X$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $Y$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Sean  $X$  y  $Y$  subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  y  $h : X \rightarrow Y$  un homeomorfismo. Veamos que  $h(\text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)$ . Sea  $y \in h(\text{int}_{\mathbb{R}^n}(X))$ . Existe  $x \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$  tal que  $y = h(x)$ . Por el Lema 4.7, existe  $Z \subset X$  tal que  $Z$  es compacto y  $x \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(Z)$ . Así,  $y = h(x) \in h(\text{int}_{\mathbb{R}^n}(Z))$ . Notemos que  $h|_Z : Z \rightarrow h(Z)$  es un homeomorfismo. Por el Teorema 4.10, tenemos que  $y \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(h(Z))$ . Notemos que  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(h(Z)) \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)$ . Luego,  $y \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)$ . Así,

$$h(\text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}(Y).$$

Como  $h^{-1} : Y \rightarrow X$  es un homeomorfismo, de manera similar de como se demostró que  $h(\text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)$ , se obtiene que  $h^{-1}(\text{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)) \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$ . Luego,

$$\text{int}_{\mathbb{R}^n}(Y) = h(h^{-1}(\text{int}_{\mathbb{R}^n}(Y))) \subset h(\text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)).$$

Por lo tanto,  $h(\text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) = \text{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)$ .

Ahora, veamos que si  $X$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $Y$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Como  $X$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ , tenemos que  $X = \text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$ . Luego,  $Y = h(X) = h(\text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) = \text{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)$ . Así,  $Y$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Teorema 4.12.** Sean  $X$  un espacio métrico,  $V$  una  $n$ -celda en  $X$  y  $U$  un abierto en  $X$ . Si  $p \in U \cap \text{int}_X(V)$ , entonces existe una  $n$ -celda  $J$  en  $X$  tal que  $p \in \text{int}_X(J) \subset J \subset U \cap \text{int}_X(V)$ .

*Demostración.* Sean  $p \in U \cap \text{int}_X(V)$  y  $h : V \rightarrow [0, 1]^n$  un homeomorfismo. Notemos que  $U \cap \text{int}_X(V) \subset U \cap V \subset V$ . Luego,  $U \cap \text{int}_X(V) = (U \cap \text{int}_X(V)) \cap V$ . Como  $U \cap \text{int}_X(V)$  es abierto en  $X$ , tenemos que  $U \cap \text{int}_X(V)$  es abierto en  $V$ . Luego,  $h(U \cap \text{int}_X(V))$  es un abierto en  $[0, 1]^n$ . Supongamos que  $h(p) = (y_1, \dots, y_n)$ . Por lo tanto, existe un básico  $B = \prod_{i=1}^n U_i$  tal que  $h(p) \in B \subset h(U \cap \text{int}_X(V))$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , tenemos que  $U_i$  es abierto en  $[0, 1]$ . Luego, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  existe un intervalo  $[\alpha_i, \beta_i] \subset U_i$  tal que  $y_i \in (\alpha_i, \beta_i)$ . Así,

$$(y_1, \dots, y_n) \in \prod_{i=1}^n (\alpha_i, \beta_i) \subset \prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i] \subset \prod_{i=1}^n U_i = B \subset h(U \cap \text{int}_X(V)).$$

Luego,

$$p = h^{-1}(h(p)) \in h^{-1}\left(\prod_{i=1}^n (\alpha_i, \beta_i)\right) \subset h^{-1}\left(\prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i]\right) \subset h^{-1}(B) \subset h^{-1}(h(U \cap \text{int}_X(V))) = U \cap \text{int}_X(V).$$

Sea  $J = h^{-1}\left(\prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i]\right)$ . Notemos que  $J$  es una  $n$ -celda en  $X$  y  $\text{int}_X(J) = h^{-1}\left(\prod_{i=1}^n (\alpha_i, \beta_i)\right)$ . Así, hemos probado que existe una  $n$ -celda  $J$  en  $X$  tal que  $p \in \text{int}_X(J) \subset J \subset U \cap \text{int}_X(V)$ .  $\square$

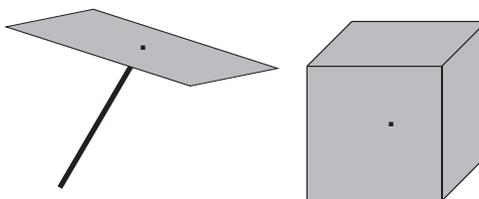
A partir del Teorema de la Invariancia del Dominio de Brower se prueba que el interior de una  $n$ -celda en  $\mathbb{R}^n$  y el interior como variedad de dicha  $n$ -celda son iguales. A continuación presentamos este hecho.

**Teorema 4.13.** En  $\mathbb{R}^n$  tenemos que  $\text{int}_{v(n)}([0, 1]^n) = \text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$ .

*Demostración.* Sea  $p \in \text{int}_{v(n)}([0, 1]^n)$ . Luego, existe una vecindad  $V$  de  $p$  contenida en  $[0, 1]^n$  tal que  $V$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow V$  un homeomorfismo. Como  $V \subset [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ , por el Teorema 4.11, tenemos que  $V$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Así,  $V \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$ . Por lo tanto,  $p \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$ . Luego,  $\text{int}_{v(n)}([0, 1]^n) \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$ .

Ahora, sea  $p \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$ . Como  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n) = \text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n) \cap [0, 1]^n$ , por el Teorema 4.12, existe una  $n$ -celda  $J$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $p \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(J) \subset J \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$ . Notemos que  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(J)$  es una vecindad de  $p$  contenida en  $[0, 1]^n$ . Por el Lema 4.3, tenemos que  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(J)$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Así,  $p \in \text{int}_{v(n)}([0, 1]^n)$ . Por lo tanto,  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n) \subset \text{int}_{v(n)}([0, 1]^n)$ .  $\square$

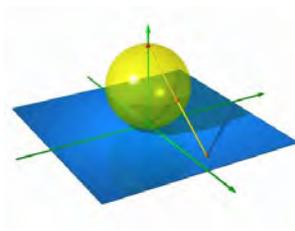
**Definición 4.14.** Una  $n$ -sombrija es un espacio topológico homeomorfo a la unión de  $[0, 1]^n \times \{0\}$  y un arco  $J$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  tales que  $([0, 1]^n \times \{0\}) \cap J = \{(a_1, \dots, a_n, 0)\}$ , donde  $(a_1, \dots, a_n) \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$  y  $(a_1, \dots, a_n, 0)$  es un punto extremo de  $J$ .



Representación de una 2-sombra y de la parte, que cabe en  $\mathbb{R}^3$ , de una 3-sombra

Como toda  $n$ -sombra  $S$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , uno podría estar tentado a pensar que el hecho de que  $S$  no es encajable en  $\mathbb{R}^n$  se da de manera inmediata. Sin embargo existen subespacios de  $\mathbb{R}^{n+1}$  tales que si son encajables en  $\mathbb{R}^n$ . A continuación vemos un ejemplo y más adelante revisamos la prueba de que ninguna  $n$ -sombra es encajable en  $\mathbb{R}^n$ .

**Ejemplo 4.15.** Consideremos la esfera unitaria  $S^2$  en  $\mathbb{R}^3$ . Sean  $N = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$  y  $X = S^2 - \{N\}$ . La función  $h : X \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida para cada  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  por  $h((x, y, z)) = (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z})$  es un homeomorfismo y se conoce como la **proyección estereográfica**.



Proyección estereográfica

**Teorema 4.16.** *Ninguna  $n$ -sombra es encajable en  $\mathbb{R}^n$ .*

*Demostración.* Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $X$  una  $n$ -sombra. Tenemos que  $X$  es un espacio topológico homeomorfo a la unión de  $[0, 1]^n \times \{0\}$  y un arco  $J$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  tales que  $([0, 1]^n \times \{0\}) \cap J = \{(a_1, \dots, a_n, 0)\}$ , donde  $(a_1, \dots, a_n) \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$  y  $(a_1, \dots, a_n, 0)$  es un punto extremo de  $J$ .

Veamos que  $([0, 1]^n \times \{0\}) \cup J$  no es encajable en  $\mathbb{R}^n$ . Para esto supongamos lo contrario, es decir, supongamos que existe un encaje  $h : ([0, 1]^n \times \{0\}) \cup J \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Luego,  $h|_J : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un encaje. Por el Lema 4.1, tenemos que

$$\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(h(J) - \{h((a_1, \dots, a_n, 0))\}) = h(J).$$

Luego, existe una sucesión  $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$  en

$$h(J) - \{h((a_1, \dots, a_n, 0))\}$$

tal que  $r_n \rightarrow h((a_1, \dots, a_n, 0))$ .

Por el Lema 4.5, tenemos que  $(a_1, \dots, a_n, 0) \in \text{intv}_{(n)}([0, 1]^n \times \{0\})$ . Luego,  $h((a_1, \dots, a_n, 0)) \in h(\text{intv}_{(n)}([0, 1]^n \times \{0\}))$ . Por el Lema 4.4, tenemos que

$$h(\text{intv}_{(n)}([0, 1]^n \times \{0\})) = \text{intv}_{(n)}(h([0, 1]^n \times \{0\})).$$

Notemos que  $[0, 1]^n \times \{0\}$  es homeomorfo a  $[0, 1]^n$ . Luego,  $h([0, 1]^n \times \{0\})$  es una  $n$ -celda en  $\mathbb{R}^n$ . Por el Lema 4.13, tenemos que

$$\text{intv}_{(n)}(h([0, 1]^n \times \{0\})) = \text{int}_{\mathbb{R}^n}(h([0, 1]^n \times \{0\})).$$

Como  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(h([0, 1]^n \times \{0\}))$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $r_n \rightarrow h((a_1, \dots, a_n, 0))$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq N$ , entonces  $r_n \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(h([0, 1]^n \times \{0\}))$ . Así, en particular  $r_N \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(h([0, 1]^n \times \{0\}))$ . Luego,

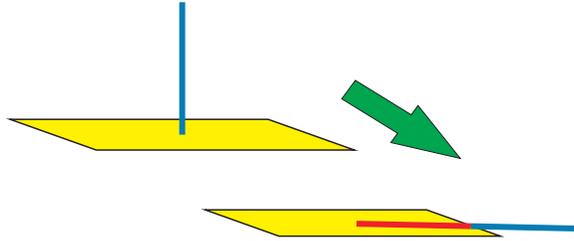
$$r_N \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(h([0, 1]^n \times \{0\})) \cap (h(J) - \{h((a_1, \dots, a_n, 0))\}).$$

Como

$$\begin{aligned} & \text{int}_{\mathbb{R}^n}(h([0, 1]^n \times \{0\})) \cap (h(J) - \{h((a_1, \dots, a_n, 0))\}) \\ & \subset h([0, 1]^n \times \{0\}) \cap h(J), \end{aligned}$$

tenemos que  $r_N \in h([0, 1]^n \times \{0\}) \cap h(J)$ . Notemos que  $r_N \neq h((a_1, \dots, a_n, 0))$ . Luego,  $h^{-1}(r_N) \in ([0, 1]^n \times \{0\}) \cap J$  y  $h^{-1}(r_N) \neq (a_1, \dots, a_n, 0)$ . Esto es una contradicción porque  $([0, 1]^n \times \{0\}) \cap J = \{(a_1, \dots, a_n, 0)\}$ .

Por lo tanto,  $([0, 1]^n \times \{0\}) \cup J$  no es encajable en  $\mathbb{R}^n$ . Como  $X$  es homeomorfo a  $([0, 1]^n \times \{0\}) \cup J$ , tenemos que  $X$  no es encajable en  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$



Representación gráfica de que una 2-sombrilla no se puede encajar en  $\mathbb{R}^2$ .

## REFERENCIAS

- [1] E. Castañeda Alvarado, *Productos Simétricos*, Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias, UNAM, 2003.
- [2] C. O. Christenson y W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.
- [3] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, London, Sydney, Toronto, 1966.
- [4] L. A. Guerrero Méndez, *Dendritas y Productos Simétricos*, Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 2012.
- [5] J. R. Munkres, *Topología, Segunda Edición*, Prentice Hall, Madrid, España, 2002.
- [6] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.
- [7] S. B. Nadler, Jr., *Dimension Theory: An Introduction with exercises*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, no. 18, Sociedad Matemática Mexicana, 2002.
- [8] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, 1998.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel  
Puebla, Pue. C.P. 72570

`luisalberto_gm4@hotmail.com, dherrera@fcfm.buap.mx, fmacias@fcfm.buap.mx`



# CAPÍTULO 20

## CONTINUOS CASI ENREJADOS Y LOCALMENTE CONEXOS CON $n$ -ÉSIMO PRODUCTO SIMÉTRICO ÚNICO

DAVID HERRERA CARRASCO, FERNANDO MACÍAS ROMERO  
FRANCISCO VÁZQUEZ JUÁREZ  
FCFM, BUAP

RESUMEN. Para un continuo  $X$  y  $n$  un número natural, el  $n$ -ésimo producto simétrico de  $X$  se denota por  $F_n(X)$  y es el hiperespacio de todos los subconjuntos, no vacíos, de  $X$  con a lo más  $n$  puntos, con la métrica de Hausdorff. Se dice que  $X$  tiene  $n$ -ésimo producto simétrico único si  $Y$  es un continuo y  $F_n(X)$  es homeomorfo a  $F_n(Y)$ , entonces  $X$  es homeomorfo a  $Y$ . En este capítulo, probamos que los continuos casi enrejados y localmente conexos tienen  $n$ -ésimo producto simétrico único, para cada  $n \geq 4$ .

### 1. INTRODUCCIÓN

Un *continuo* es un espacio métrico con más de un punto, compacto y conexo. Dado un continuo  $X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos los siguientes hiperespacios de  $X$

$$F_n(X) = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y tiene a lo más } n \text{ puntos}\},$$

y

$$C_n(X) = \{A \subset X : A \text{ es cerrado no vacío y tiene a lo más } n \text{ componentes}\}.$$

Tanto  $F_n(X)$  como  $C_n(X)$  son metrizable por la *métrica de Hausdorff* (vea [22, Definición 0.1]) y son conocidos como el  *$n$ -ésimo producto simétrico* de  $X$  y el  *$n$ -ésimo hiperespacio*  $X$ , respectivamente. Cuando  $n = 1$  escribimos  $C(X)$  en lugar de  $C_1(X)$ , y nos referimos a  $C(X)$  como el *hiperespacio de los subcontinuos* de  $X$ .

Dado un continuo  $X$ , sea  $\mathcal{H}(X)$  alguno de los hiperespacios definidos arriba y sea  $\mathcal{K}$  una clase de continuos. Decimos que  $X \in \mathcal{K}$  tiene *hiperespacio único*  $\mathcal{H}(X)$  en  $\mathcal{K}$  si cuando  $Y \in \mathcal{K}$  es tal que  $\mathcal{H}(X)$  es homeomorfo a  $\mathcal{H}(Y)$ , se sigue que  $X$  es homeomorfo a  $Y$ . Si  $\mathcal{K}$  es la clase de todos los continuos, simplemente decimos que  $X$  tiene hiperespacio único  $\mathcal{H}(X)$ .

Este trabajo está relacionado con el siguiente problema general.

**Problema 1.1.** Hallar condiciones sobre el continuo  $X$  de tal manera que  $X$  tenga hiperespacio único  $\mathcal{H}(X)$ .

Sea

$$\mathfrak{G} = \{X : X \text{ es una gráfica finita}\}.$$

Hasta ahora se han probado los siguientes resultados (a)-(m).

- (a) Si  $X \in \mathfrak{G}$  y  $X$  es distinto de un arco y de una curva cerrada simple, entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $C(X)$  (vea [7, 9.1] y [1, Teorema 1]).
- (b) Si  $X \in \mathfrak{G}$ , entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $C_2(X)$  (vea [15, Teorema 4.1]).
- (c) Si  $X \in \mathfrak{G}$ , entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $C_n(X)$  para cada  $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$  (vea [16, Teorema 3.8]).
- (d) Si  $X \in \mathfrak{G}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $Y$  es un continuo y  $C_n(X)$  es homeomorfo a  $C_m(Y)$ , entonces  $X$  es homeomorfo a  $Y$  (vea [16, Corolario 3.9]).
- (e) Si  $X \in \mathfrak{G}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $F_n(X)$  (vea [6, Corolario 5.9]).

Sea

$\mathfrak{D} = \{X: X \text{ es una dendrita cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado en } X\}$ .

- (f) Si  $X \in \mathfrak{D}$  y  $X$  es distinto de un arco, entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $C(X)$  (vea [9, Teorema 10]). Además, si  $X$  es una dendrita y  $X \notin \mathfrak{D}$ , entonces  $X$  no tiene hiperespacio único  $C(X)$  (vea [3, Teorema 5.2]).
- (g) Si  $X \in \mathfrak{D}$ , entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $C_2(X)$  (vea [18, Teorema 3.1]).
- (h) Si  $X \in \mathfrak{D}$ , entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $C_n(X)$  para cada  $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$  (vea [11, Teorema 5.7]).
- (i) Si  $X \in \mathfrak{D}$  y  $n \in \mathbb{N} - \{2\}$ , entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $F_n(X)$  (vea [2, Teorema 5.2] y [10, Teorema 3.7]).

Sea

$\mathfrak{O} = \{X: X \text{ es una dendrita cuyo conjunto de puntos ordinarios es abierto en } X\}$ .

Notemos que  $\mathfrak{D} \not\subseteq \mathfrak{O}$  (vea [10, Corolario 2.4]).

- (j) Si  $X \in \mathfrak{O}$ , entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $F_2(X)$  (vea [14, Teorema 8]).

Sea

$$\mathfrak{L} = \{X : X \text{ es una dendrita local}\}$$

y sea

$\mathfrak{LD} = \{X \in \mathfrak{L} : \text{cada punto de } X \text{ tiene una vecindad que está en } \mathfrak{D}\}$ .

- (k) Si  $X \in \mathfrak{LD}$  y  $X$  es distinto de un arco y de una curva cerrada simple, entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $C(X)$  (vea [4, Corolario 5.2]).
- (l) Si  $X \in \mathfrak{LD}$ ,  $Y$  es un continuo y  $C_n(X)$  es homeomorfo a  $C_m(Y)$  con  $n, m \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ , entonces  $X$  es homeomorfo a  $Y$  (vea [12, Teorema 5.6]).

Dado un continuo  $X$ , sean

$\mathcal{G}(X) = \{p \in X : p \text{ tiene una vecindad } T \text{ en } X \text{ tal que } T \text{ es una gráfica finita}\},$

$$\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X),$$

$\mathcal{AM} = \{X : X \text{ es un continuo y } \mathcal{G}(X) \text{ es denso en } X\},$

$\mathcal{M} = \{X \in \mathcal{AM} : X \text{ tiene una base de vecindades } \beta \text{ tal que para cada elemento } \mathcal{U} \in \beta, \mathcal{U} \cap \mathcal{G}(X) \text{ es conexo}\}, \text{ y}$

$\mathcal{PC} = \{X : X \text{ es un continuo localmente conexo}\}.$

Notemos que  $\mathcal{M} \subset \mathcal{PC}$  y  $\mathfrak{G}, \mathfrak{D}, \mathfrak{LD} \subset \mathcal{M}$  (vea [8, Lema 2] y [8, Teorema 6], respectivamente).

(*m*) Si  $X \in \mathcal{M}$  y  $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ , entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $C_n(X)$ . Si  $X \in \mathcal{M}$  y  $X$  es distinto de un arco y de una curva cerrada simple, entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $C(X)$  (vea [8, Teorema 37]).

Dado un continuo  $X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , sea

$$\mathcal{E}_n(X) = \{A \in F_n(X) : A \text{ tiene una vecindad en } F_n(X) \text{ que es una } n\text{-celda}\}.$$

El propósito principal de este capítulo es demostrar el siguiente resultado (vea [13, Teorema 4.3]).

(*n*) Si  $X \in \mathcal{PC} \cap \mathcal{AM}$  (es decir, por el Teorema 3.1,  $\mathcal{E}_n(X)$  es denso en  $F_n(X)$ , y  $n \in \mathbb{N} - \{2, 3\}$ ), entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $F_n(X)$  (vea el Teorema 4.3 de este capítulo).

El resultado (*n*) es una generalización de (*e*) y (*i*), en el caso  $n \in \mathbb{N} - \{2, 3\}$  (vea el Corolario 4.1).

## 2. NOCIONES Y HECHOS GENERALES

Todos los espacios considerados en este capítulo son métricos. Para un espacio  $X$ , un punto  $x \in X$  y un número positivo  $\epsilon$ , denotamos por  $B_X(x, \epsilon)$  la bola abierta en  $X$  centrada en  $x$  de radio  $\epsilon$ . Si  $A$  es un subconjunto de un espacio  $X$ , usamos los símbolos  $cl_X(A)$ ,  $int_X(A)$  y  $fr_X(A)$  para denotar la cerradura, el interior y la frontera de  $A$  en  $X$ , respectivamente. La cardinalidad de  $A$  es denotada por  $|A|$ ,  $\mathbb{N}$  representa el conjunto de los números naturales y  $\mathbb{R}$  representa el conjunto de los números reales.

De hecho todos los conceptos no definidos aquí serán tomados como en [22].

Si  $X$  es un continuo,  $U_1, U_2, \dots, U_m \subset X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , definimos:

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle_n = \{A \in F_n(X) : A \subset \bigcup_{i=1}^m U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, m\}\}.$$

Es conocido que los conjuntos de la forma  $\langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle_n$ , donde  $U_1, U_2, \dots, U_m$  son abiertos en  $X$ , forman una base de la topología de  $F_n(X)$ , es decir, una base para la topología inducida por la métrica de Hausdorff (vea [19, Teoremas 1.2 y 1.3]).

**Definición 2.1.** Dado  $n \in \mathbb{N}$ . Una  $n$ -**celda** es un espacio homeomorfo al producto cartesiano  $[0, 1]^n$ .

En nuestro trabajo necesitamos construir  $n$ -celdas en  $F_n(X)$ , el siguiente resultado, que se encuentra en [2, Teorema 2.1], nos da una alternativa.

**Teorema 2.2.** Sean  $X$  un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ . Dado  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , sea  $J_i$  un arco en  $X$  con puntos extremos  $a_i$  y  $b_i$ . Si los conjuntos  $J_1, J_2, \dots, J_n$  son ajenos dos a dos, entonces el conjunto  $\langle J_1, J_2, \dots, J_n \rangle_n$  es una  $n$ -celda en  $F_n(X)$  cuyo interior como variedad es el conjunto  $\langle J_1 - \{a_1, b_1\}, J_2 - \{a_2, b_2\}, \dots, J_n - \{a_n, b_n\} \rangle_n$ .

En la siguiente definición ocupamos los símbolos  $\aleph_0$ ,  $\omega$ , y  $\mathfrak{c}$  que denotan la cardinalidad de los números naturales, el primer ordinal no numerable y la cardinalidad de los números reales, respectivamente.

**Definición 2.3.** Sean  $X$  un continuo y  $p \in X$ . Sea  $\mathfrak{n} \in \mathbb{N} \cup \{\omega, \aleph_0, \mathfrak{c}\}$ . Se dice que  $p$  es de orden menor o igual que  $\mathfrak{n}$  en  $X$ , se denota por  $ord(p, X) \leq \mathfrak{n}$ , si para cada abierto  $V$  en  $X$  tal que  $p \in V$ , existe  $U$  abierto en  $X$  tal que  $p \in U \subset V$  y  $|fr_X(U)| \leq \mathfrak{n}$  ( $|fr_X(U)| \leq \omega$  indica que el conjunto  $fr_X(U)$  es finito). Se dice que  $p$  es de **orden  $\mathfrak{n}$**  en  $X$ , denotado por  $ord(p, X) = \mathfrak{n}$ , si  $ord(p, X) \leq \mathfrak{n}$  y  $ord(p, X) \not\leq \alpha$  para cualquier  $\alpha < \mathfrak{n}$  (por conveniencia, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , suponemos que  $n < \omega < \aleph_0$ ).

Consideremos la escoba  $X$  y la dendrita  $F_\omega$  definidos como en [17, págs. 7 y 8], respectivamente. Sean  $p$  el vértice de  $X$  y  $q$  el vértice de  $F_\omega$ . Notemos que  $ord(p, X) = \aleph_0$  y  $ord(q, F_\omega) = \omega$ .

**Definición 2.4.** Sean  $X$  un continuo y  $p \in X$ .

- (1) Si  $ord(p, X) = 1$ , se dice que  $p$  es un **punto extremo** de  $X$ .
- (2) Si  $ord(p, X) = 2$ , se dice que  $p$  es un **punto ordinario** de  $X$ .
- (3) Si  $ord(p, X) \geq 3$ , se dice que  $p$  es un **punto de ramificación** de  $X$ .

Dado un continuo  $X$ , el conjunto de los puntos extremos de  $X$ , el conjunto de los puntos ordinarios de  $X$  y el conjunto de los puntos de ramificación de  $X$  son denotados por  $E(X)$ ,  $O(X)$  y  $R(X)$ , respectivamente.

Notemos que  $X = E(X) \cup O(X) \cup R(X)$ .

**Definición 2.5.** Sea  $X$  un continuo, un **arco libre** en  $X$  es un arco  $J \subset X$  con puntos extremos  $p$  y  $q$  tales que  $J - \{p, q\}$  es abierto en  $X$ . Un **arco libre maximal** en  $X$  es un arco libre en  $X$  que es maximal respecto a la inclusión. Una **circunferencia libre**  $S$  en  $X$  es una curva cerrada simple  $S$  en  $X$  tal que existe  $p \in S$  tal que  $S - \{p\}$  es abierto en  $X$ .

Dado un continuo  $X$ , sean

$$\mathcal{U}_S(X) = \{J \subset X : J \text{ es un arco libre maximal en } X \text{ o } J \text{ es una circunferencia libre en } X\}, \text{ y}$$

$$\mathcal{FA}(X) = \bigcup \{int_X(J) : J \in \mathcal{U}_S(X)\}.$$

Para los siguientes conceptos debe considerar que los conjuntos  $\mathcal{G}(X)$  y  $\mathcal{P}(X)$  se han definido en la sección anterior.

**Definición 2.6.** Un continuo  $X$  es **casi enrejado** si el conjunto  $\mathcal{G}(X)$  es denso en  $X$ . Un continuo casi enrejado  $X$  es **enrejado** si  $X$  tiene una base de vecindades  $\beta$  tal que para cada  $\mathcal{U} \in \beta$ ,  $\mathcal{U} - \mathcal{P}(X)$  es conexo.

Los siguientes resultados aparecen en [8, Lema 1] y [8, Lema 2], respectivamente.

**Lema 2.7.** *Sea  $X$  un continuo. Entonces  $cl_X(\mathcal{G}(X)) = cl_X(\mathcal{FA}(X))$ . Por tanto,  $X$  es casi enrejado si y sólo si  $\mathcal{FA}(X)$  es denso en  $X$ .*

**Lema 2.8.** *Si  $X$  es un continuo enrejado, entonces  $X$  es localmente conexo.*

El siguiente resultado aparece en [8, Teorema 6].

**Teorema 2.9.** *La clase de continuos enrejados contiene las siguientes clases:*

- (1) gráficas finitas;
- (2)  $\mathcal{D}$ ;
- (3) dendritas locales cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado.

Del Lema 2.2 y Teorema 2.2, obtenemos el siguiente resultado:

**Corolario 2.10.** *La clase de los continuos localmente conexos y casi enrejados contiene las siguientes clases:*

- (1) gráficas finitas;
- (2)  $\mathcal{D}$ ;
- (3) dendritas locales cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado.
- (4) continuos enrejados

El siguiente resultado está en [8, Lema 10].

**Lema 2.11.** *Sean  $X$  un continuo localmente conexo y  $J$  un arco libre en  $X$ . Entonces existe  $K \in \mathcal{U}_S(X)$  tal que  $J \subset K$ .*

**Teorema 2.12.** *Si  $X$  es un continuo localmente conexo, entonces  $\mathcal{FA}(X) = X - (\mathcal{P}(X) \cup R(X))$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $x \in \mathcal{FA}(X)$ . Entonces existe  $J \in \mathcal{U}_S(X)$  tal que  $x \in \text{int}_X(J)$ . Por tanto,  $x \in X - (\mathcal{P}(X) \cup R(X))$ .

Supongamos que  $x \in X - (\mathcal{P}(X) \cup R(X))$ . Entonces existe una gráfica finita  $T$  en  $X$  tal que  $x \in \text{int}_X(T)$ . Más aún, dado que  $x \notin R(X)$ , existe un arco libre  $I$  de  $X$  tal que  $x \in \text{int}_X(I)$ . Por el Lema 2.3, existe  $K \in \mathcal{U}_S(X)$  tal que  $I \subset K$ . Por tanto,  $x \in \text{int}_X(K)$  y así  $x \in \mathcal{FA}(X)$ . Esto concluye la prueba del teorema.  $\square$

Para terminar esta sección probamos el siguiente resultado.

**Teorema 2.13.** *Sean  $X$  un continuo localmente conexo y  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $A \in F_n(X)$  y  $\mathcal{U}$  es una vecindad de  $A$  en  $F_n(X)$ , entonces existen  $V_1, V_2, \dots, V_{|A|}$  subconjuntos abiertos en  $X$ , conexos y ajenos dos a dos tales que  $A \in \langle V_1, V_2, \dots, V_{|A|} \rangle_n \subset \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{U})$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $|A| = m$  y sea  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ . Dado que  $X$  es Hausdorff, existen  $C_1, C_2, \dots, C_m$  subconjuntos abiertos en  $X$  ajenos por pares tales que  $x_i \in C_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Más aún, dado que  $A \in \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{U})$ , existen  $U_1, U_2, \dots, U_l$  subconjuntos abiertos en  $X$  ajenos por pares tales que  $A \in \langle U_1, U_2, \dots, U_l \rangle_n \subset \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{U})$ .

Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , sea  $V_i = C_i \cap [\cap \{U_j : j \in \{1, 2, \dots, l\} \text{ y } x_i \in U_j\}]$ . Observemos que  $V_1, V_2, \dots, V_m$  son subconjuntos abiertos en  $X$  ajenos por pares y  $A \in \langle V_1, V_2, \dots, V_m \rangle_n \subset \langle U_1, U_2, \dots, U_l \rangle_n$ . Dado  $X$  es un continuo localmente conexo, podemos suponer que  $V_i$  es un subconjunto conexo de  $X$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Esto completa la prueba del teorema.  $\square$

### 3. CONTINUOS LOCALMENTE CONEXOS Y CASI ENREJADOS, Y EL CONJUNTO $\mathcal{E}_n(X)$

En esta sección probamos algunas propiedades de los continuos localmente conexos casi enrejados y el conjunto  $\mathcal{E}_n(X)$ .

**Teorema 3.1.** *Para un continuo localmente conexo  $X$  las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (a)  $X$  es casi enrejado,
- (b) para cada  $n \in \mathbb{N}$ , el conjunto  $\mathcal{E}_n(X)$  es denso en  $F_n(X)$ ,
- (c) todo abierto en  $X$  no vacío contiene un arco libre en  $X$ .

*Demostración.* (a)  $\Rightarrow$  (b). Supongamos que  $X$  es casi enrejado. Sean  $A \in F_n(X)$  y  $\mathcal{U}$  abierto en  $F_n(X)$  tal que  $A \in \mathcal{U}$ . Sean  $|A| = m$  y  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ . Por el Teorema 2.4, existen  $U_1, U_2, \dots, U_m$  subconjuntos abiertos de  $X$ , conexos y ajenos dos a dos tales que  $x_i \in U_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  y  $A \in \langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle_n \subset \mathcal{U}$ . Por el Lema 2.1, tenemos que  $\mathcal{FA}(X)$  es denso en  $X$  y así  $U_i \cap \mathcal{FA}(X) \neq \emptyset$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Sean  $y_i \in U_i \cap \mathcal{FA}(X)$ , para cada  $i \in \{2, 3, \dots, m\}$ . Tomamos  $n+1-m$  puntos  $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{n+1}$  en  $U_1 \cap \mathcal{FA}(X)$  distintos dos a dos. Sean  $V_{m+1}, V_{m+2}, \dots, V_{n+1}$  abiertos en  $X$  ajenos dos a dos tales que  $y_{m+1} \in V_{m+1}, y_{m+2} \in V_{m+2}, \dots, y_{n+1} \in V_{n+1}$  y  $V_{m+1}, V_{m+2}, \dots, V_{n+1} \subset U_1 \cap \mathcal{FA}(X)$ . Para cada  $j \in \{2, 3, \dots, m\}$ , sea  $W_j = U_j$ ; y para cada  $j \in \{m+1, m+2, \dots, n+1\}$ , sea  $W_j = V_j$ . Para cada  $j \in \{2, 3, \dots, n+1\}$ , sea  $I_j$  un arco libre en  $X$  tal que  $y_j \in \text{int}_X(I_j)$ . Además, para cada  $j \in \{2, 3, \dots, n+1\}$  tenemos que  $I_j \cap W_j \neq \emptyset$ , así para cada  $j \in \{2, 3, \dots, n+1\}$  existe un arco  $L_j$  tal que  $y_j \in \text{int}_X(L_j) \subset L_j \subset I_j \cap W_j$ . Sea  $B = \{y_2, y_3, \dots, y_{n+1}\}$ . Notemos que  $|B| = n$  y  $B \in \langle \text{int}_X(L_2), \text{int}_X(L_3), \dots, \text{int}_X(L_{n+1}) \rangle_n$ . Por el Teorema 2.1, el conjunto  $\langle L_2, L_3, \dots, L_{n+1} \rangle_n$  es una  $n$ -celda. Por tanto,  $B \in \mathcal{E}_n(X) \cap \mathcal{U}$ . Concluimos que  $\mathcal{E}_n(X)$  es denso en  $F_n(X)$ .

(b)  $\Rightarrow$  (c). Esta implicación es el Teorema 4.9 de [2].

(c)  $\Rightarrow$  (a). Supongamos que todo abierto en  $X$  no vacío contiene un arco libre en  $X$ . Veamos que  $cl_X(\mathcal{G}(X)) = X$ . Sean  $x \in X$  y  $U$  abierto en  $X$  tal que  $x \in U$ . Luego, existe un arco libre  $I$  en  $X$  tal que  $I \subset U$ . Sea  $y \in I - E(I)$ . Dado que  $I - E(I)$  es abierto en  $X$ , inferimos que  $y \in \text{int}_X(I)$ . Por tanto,  $y \in \mathcal{G}(X)$  y así  $U \cap \mathcal{G}(X) \neq \emptyset$ . Por lo que  $cl_X(\mathcal{G}(X)) = X$ , es decir,  $X$  es casi enrejado.  $\square$

**Teorema 3.2.** *La clase de las dendritas locales cuyo conjunto de puntos ordinarios es abierto está contenida en la clase de los continuos localmente conexos casi enrejados.*

*Demostración.* Sea  $X$  una dendrita local tal que el conjunto de puntos ordinarios,  $O(X)$ , es abierto. Por [20, Teorema 4, pág. 303], deducimos que  $X$  es un continuo localmente conexo. Para probar que  $X$  es casi enrejado vamos a utilizar la implicación (b)  $\Rightarrow$  (a) del Teorema 3.1. Sean  $A \in F_n(X)$  y  $\mathcal{U}$  un subconjunto abierto en  $F_n(X)$  tal que  $A \in \mathcal{U}$ . Probemos que  $\mathcal{E}_n(X)$  es un subconjunto denso de  $F_n(X)$ , esto es, veamos que  $\mathcal{E}_n(X) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ . Supongamos que  $|A| = m$  y  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ . De acuerdo con el Teorema 2.4, existen  $U_1, U_2, \dots, U_m$  subconjuntos abiertos en  $X$  ajenos por pares tales que  $x_i \in U_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , y  $A \in \langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle_{F_n(X)} \subset \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{U})$ . Dado que  $O(X)$  es denso en  $X$ , deducimos que

$U_i \cap O(X) \neq \emptyset$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Como  $m \leq n$ , consideremos los siguientes dos casos:

**Caso (1)**  $m < n$ . Para cada  $i \in \{2, 3, \dots, m\}$ , sea  $y_i \in U_i \cap O(X)$ . Tomamos  $n + 1 - m$  puntos distintos por pares  $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{n+1}$  en  $U_1 \cap O(X)$ . Como  $O(X)$  es abierto en  $X$ , podemos elegir  $V_{m+1}, V_{m+2}, \dots, V_{n+1}$  subconjuntos abiertos en  $X$  y ajenos por pares tales que  $y_{m+1} \in V_{m+1}, y_{m+2} \in V_{m+2}, \dots, y_{n+1} \in V_{n+1}$  y  $V_{m+1}, V_{m+2}, \dots, V_{n+1} \subset U_1 \cap O(X)$ . Para cada  $j \in \{2, 3, \dots, m\}$ , sea  $W_j = U_j$ ; y para cada  $j \in \{m + 1, m + 2, \dots, n + 1\}$ , pongamos  $W_j = V_j$ . Como  $X$  es un continuo localmente conexo, para cada  $j \in \{2, 3, \dots, n + 1\}$ , existe  $T_j$  un subconjunto abierto en  $X$  y conexo tal que  $y_j \in T_j \subset W_j \cap O(X)$ . Notemos que, para cada  $j \in \{2, 3, \dots, n + 1\}$ , el conjunto  $T_j$  es arco conexo. Para cada  $j \in \{2, 3, \dots, n + 1\}$ , elegimos  $z_j \in T_j$  tal que  $z_j \neq y_j$ . Ahora bien, para cada  $j \in \{2, 3, \dots, n + 1\}$ , sea  $I_j$  un arco contenido en  $T_j$  con puntos extremos  $z_j$  y  $y_j$ . Dado que  $I_j \subset O(X)$ , tenemos que  $I_j$  es un arco libre en  $X$  y así  $I_j - \{z_j, y_j\}$  es un conjunto abierto en  $X$ . Para cada  $j \in \{2, 3, \dots, n + 1\}$ , tomamos  $p_j \in I_j - \{z_j, y_j\}$  y pongamos  $B = \{p_2, p_3, \dots, p_{n+1}\}$ . Notemos que los arcos  $I_2, I_3, \dots, I_{n+1}$  son ajenos por pares y así, por el Teorema 2.1, el conjunto  $\langle I_2, I_3, \dots, I_{n+1} \rangle_{F_n(X)}$  es una  $n$ -celda en  $F_n(X)$ . Además,  $B \in \langle I_2 - \{z_2, y_2\}, I_3 - \{z_3, y_3\}, \dots, I_{n+1} - \{z_{n+1}, y_{n+1}\} \rangle_{F_n(X)}$ . Por tanto,  $B \in \mathcal{E}_n(X)$ . Notemos que  $B \in \mathcal{U}$ . Por lo que  $\mathcal{E}_n(X) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ . Concluimos que el conjunto  $\mathcal{E}_n(X)$  es denso en  $F_n(X)$ .

**Caso (2)**  $m = n$ . Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , sea  $y_i \in U_i \cap O(X)$ . Para probar que el conjunto  $\mathcal{E}_n(X)$  es denso en  $F_n(X)$ , utilizamos los mismos argumentos de la prueba del **Caso (1)** a partir de donde aplicamos que  $X$  es un continuo localmente conexo. □

Dado un continuo  $X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , sean

$$P_n(X) = \{A \in F_n(X) : A \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset\},$$

$$R_n(X) = \{A \in F_n(X) : A \cap R(X) \neq \emptyset\},$$

$$\mathcal{E}_n(X) = \{A \in F_n(X) : A \text{ tiene una vecindad en } F_n(X) \text{ que es una } n\text{-celda}\}, \text{ y}$$

$$\Lambda_n(X) = F_n(X) - (P_n(X) \cup R_n(X)).$$

Notemos que  $A \in \Lambda_n(X)$  si y sólo si  $|A| \leq n$  y  $A \subset [E(X) \cup O(X)] - \mathcal{P}(X)$ . Además, si  $A \notin P_n(X)$ , entonces existe una gráfica finita  $T$  en  $X$  tal que  $A \subset \text{int}_X(T)$ .

**Teorema 3.3.** *Sean  $X$  un continuo localmente conexo casi enrejado y  $n \geq 4$ . Si  $A \in F_n(X)$  y  $\mathcal{U}$  es una vecindad de  $A$  en  $F_n(X)$ , entonces para  $k \in \mathbb{N}$  con  $|A| \leq k \leq n$ , existe  $C \subset O(X) - \mathcal{P}(X)$  tal que  $|C| = k$  y  $C \in \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{U})$ . Es decir,  $\text{cl}_{F_n(X)}(\{A \subset O(X) - \mathcal{P}(X) : |A| \leq n\}) = F_n(X)$ .*

*Demostración.* Sea  $m = |A|$ . Como  $\mathcal{U}$  es una vecindad de  $A$  en  $F_n(X)$ , por el Teorema 2.4, existen  $V_1, V_2, \dots, V_m$  subconjuntos abiertos en  $X$  y ajenos dos a dos tales que  $A \in \langle V_1, V_2, \dots, V_m \rangle_n \subset \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{U})$ . Por el Teorema 3.1, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , existe  $I_i$  un arco libre en  $X$  tal que  $I_i \subset V_i$ . Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , tomamos  $o_i \in (I_i - E(I_i)) \cap O(X)$ . Sea  $C_1 = \{o_1, o_2, \dots, o_m\}$ . Como los  $U_i$  son ajenos dos a dos, los puntos  $o_i$  son distintos dos a dos. Así,  $|C_1| = m$ . Si  $m < k$ , elegimos  $k - m$  puntos distintos en  $(I_1 - E(I_1)) \cap O(X)$ . Sea  $C =$

$C_1 \cup \{o_{m+1}, o_{m+2}, \dots, o_k\}$ . Así,  $|C| = k$ . Notemos que  $C \in \langle V_1, V_2, \dots, V_{|A|} \rangle_n$  y por tanto,  $C \in \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{U})$ . Además,  $C \subset O(X)$ , más aún, como cada  $o_i \in I_i - E(I_i)$ , concluimos que  $o_i \in \text{int}_X(I_i)$  y así,  $C \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$ .  $\square$

**Corolario 3.4.** Sean  $X$  un continuo localmente conexo casi enrejado y  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$F_1(X) = \text{cl}_{F_n(X)}(F_1(X) \cap \Lambda_n(X)).$$

*Demostración.* Supongamos que  $\{p\} \in F_1(X)$ . Por el Teorema 3.3, existe una sucesión  $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subset O(X) - \mathcal{P}(X)$  tal que  $\{A_k\}_{k=1}^\infty$  converge a  $\{p\}$  con la métrica de Hausdorff y  $|A_k| \leq 1$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Notemos que  $A_k \in F_1(X) \cap \Lambda_n(X)$  y así,  $\{p\} \in \text{cl}_{F_n(X)}(F_1(X) \cap \Lambda_n(X))$ . Por tanto,  $F_1(X) \subset \text{cl}_{F_n(X)}(F_1(X) \cap \Lambda_n(X))$ . La otra contención siempre se cumple. Esto concluye la prueba del corolario.  $\square$

El siguiente resultado generaliza [6, Lema 4.3] para continuos localmente conexos tales que  $\mathcal{E}_n(X)$  es denso en  $F_n(X)$ .

**Teorema 3.5.** Sean  $X$  un continuo localmente conexo casi enrejado y  $n \geq 4$ . Si  $A \in F_{n-1}(X)$ , entonces no existe una vecindad de  $A$  en  $F_n(X)$  encajable en  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Primero mostremos que

(\*) Si  $C \in F_{n-1}(X) - P_n(X)$ , entonces no existe una vecindad de  $C$  en  $F_n(X)$  encajable en  $\mathbb{R}^n$ .

Para probar (\*), sea  $C \in F_{n-1}(X) - P_n(X)$  y supongamos que existe una vecindad  $\mathcal{V}$  de  $C$  en  $F_n(X)$  encajable en  $\mathbb{R}^n$ . Luego, existe un gráfica finita  $T$  en  $X$  tal que  $C \subset \text{int}_X(T)$ . Entonces  $\mathcal{V} \cap F_n(T)$  es una vecindad de  $C$  en  $F_n(T)$  encajable en  $\mathbb{R}^n$ , esto contradice a [6, Lema 4.3]. Por tanto se satisface (\*).

Ahora bien, sea  $A \in F_{n-1}(X)$  y supongamos que existe una vecindad  $\mathcal{U}$  de  $A$  en  $F_n(X)$  encajable en  $\mathbb{R}^n$ . Por el Teorema 3.3, existe  $C \subset O(X) - \mathcal{P}(X)$  tal que  $|C| = |A|$  y  $C \in \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{U})$ . De aquí,  $C \in F_{n-1}(X) - P_n(X)$ . Luego, por (\*), no existe una vecindad de  $C$  en  $F_n(X)$  encajable en  $\mathbb{R}^n$ . Sin embargo, como  $C \in \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{U})$ , el conjunto  $\mathcal{U}$  es una vecindad de  $C$  en  $F_n(X)$  encajable en  $\mathbb{R}^n$ . Esta contradicción completa la prueba del teorema.  $\square$

**Definición 3.6.** Un *triodo simple* es un continuo  $T$  que se expresa como la unión de tres arcos  $I_1, I_2$  y  $I_3$  tales que  $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \{p\}$ ,  $p$  es un punto extremo de cada arco  $I_i$  y  $(I_i - \{p\}) \cap (I_j - \{p\}) = \emptyset$ , si  $i \neq j$ . El punto  $p$  es el *vértice* de  $T$ .

Dado un continuo  $X$  sea

$$T(X) = \{p \in X : p \text{ es el vértice de un triodo simple en } X\}.$$

**Teorema 3.7.** Sean  $X$  un continuo localmente conexo y  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $A \in \mathcal{E}_n(X)$ , entonces  $A \cap \text{cl}_X(T(X)) = \emptyset$ .

*Demostración.* Sean  $|A| = m$  y  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ . Veamos que  $A \cap \text{cl}_X(T(X)) = \emptyset$ . Supongamos lo contrario y supongamos que  $x_1 \in A \cap \text{cl}_X(T(X))$ . Entonces existe una sucesión  $\{r_k\}_{k=1}^\infty \subset T(X)$  que converge a  $x_1$ . Por [6, Lema 3.1], notemos que  $r_k \notin A$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Dado que  $A \in \mathcal{E}_n(X)$ , existe una vecindad  $\mathcal{V}$  de  $A$  en  $F_n(X)$  tal que  $\mathcal{V}$  es una  $n$ -celda. Por el Teorema 2.4, existen  $U_1, U_2, \dots, U_m$  subconjuntos abiertos en  $X$  tales que  $x_i \in U_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  y  $A \in \langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle_n \subset \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{V})$ . Como  $x_1 \in U_1$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $k \geq N$ ,

entonces  $r_k \in U_1$ . Sea  $B = A \cup \{q_N\}$ . Notemos que  $B \in \mathcal{E}_n(X)$  y  $B \cap T(X) \neq \emptyset$ , lo cual contradice a [6, Lema 3.1]. Por tanto,  $A \cap cl_X(T(X)) = \emptyset$ .  $\square$

**Teorema 3.8.** *Si  $X$  es un continuo localmente conexo y  $p \in \mathcal{P}(X) \cap [E(X) \cup O(X)]$ , entonces existe una sucesión en  $R(X) - \{p\}$  de puntos distintos dos a dos que converge a  $p$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $p \in \mathcal{P}(X) \cap [E(X) \cup O(X)]$  y  $d$  es la métrica de  $X$ . Por [23, Teorema 9.10], para  $\epsilon_1 = 1$ , existe  $r_1 \in R(X)$  tal que  $r_1 \in B_X(p, \epsilon_1)$ . Notemos que  $r_1 \neq p$ . Sea  $\epsilon_2 = \min\{d(p, r_1), \frac{1}{2}\}$ , de nuevo por [23, Teorema 9.10], existe  $r_2 \in R(X)$  tal que  $r_2 \in B_X(p, \epsilon_2)$ . Notemos que  $r_2 \neq r_1$ . Sea  $\epsilon_3 = \min\{d(p, r_1), d(p, r_2), \frac{1}{3}\}$ , de nuevo por [23, Teorema 9.10], existe  $r_3 \in R(X)$  tal que  $r_3 \in B_X(p, \epsilon_3)$ . Notemos que  $r_3 \neq r_2$  y  $r_3 \neq r_1$ . Realizando este proceso, obtenemos una sucesión  $\{r_k\}_{k=1}^\infty$  en  $R(X) - \{p\}$  de puntos distintos dos a dos. Además, notemos que  $\{r_k\}_{k=1}^\infty$  converge a  $p$ .  $\square$

El siguiente resultado generaliza [2, Teorema 4.5] para continuos localmente conexos tales que  $\mathcal{E}_n(X)$  es denso en  $F_n(X)$ .

**Teorema 3.9.** *Sean  $X$  un continuo localmente conexo casi enrejado y  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces*

- (a)  $\mathcal{E}_n(X) \subset \Lambda_n(X)$ ;
- (b) Si  $n \geq 4$ , entonces  $\mathcal{E}_n(X) = \Lambda_n(X) - F_{n-1}(X)$ .

*Demostración.* (a). Sea  $A \in \mathcal{E}_n(X)$ . Por el Teorema 3.5,  $A \cap cl_X(T(X)) = \emptyset$ . Dado que  $R(X) \subset cl_X(T(X))$ , tenemos que  $A \cap R(X) = \emptyset$ . Veamos que  $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$ . Supongamos lo contrario, sea  $p \in A \cap \mathcal{P}(X)$ . Notemos que  $p \notin R(X)$ . Por el Teorema 3.6, existe una sucesión  $\{r_k\}_{k=1}^\infty$  en  $R(X) - \{p\}$  de puntos distintos dos a dos que converge a  $p$ . Esto implica que  $\{r_k\}_{k=1}^\infty$  está en  $cl_X(T(X))$  y por tanto  $p \in cl_X(T(X))$ , lo cual es una contradicción. Por lo que  $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$ . Concluimos que  $A \in \Lambda_n(X)$ . Esto concluye (a).

(b). Primero veamos que  $\mathcal{E}_n(X) \subset \Lambda_n(X) - F_{n-1}(X)$ . Sea  $A \in \mathcal{E}_n(X)$ . Por (a), inferimos que  $A \in \Lambda_n(X)$ . Sea  $\mathcal{U}$  una vecindad de  $A$  en  $F_n(X)$  tal que  $\mathcal{U}$  es una  $n$ -celda. Luego,  $\mathcal{U}$  es encajable en  $\mathbb{R}^n$ , y así por el Teorema 3.4, deducimos que  $A \notin F_{n-1}(X)$ . Por tanto,  $\mathcal{E}_n(X) \subset \Lambda_n(X) - F_{n-1}(X)$ .

Ahora veamos que  $\Lambda_n(X) - F_{n-1}(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$ . Sea  $A \in \Lambda_n(X) - F_{n-1}(X)$ . Luego,  $|A| = n$  y así podemos escribir  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Dado que  $A \in \Lambda_n(X)$ , deducimos que  $A \subset (O(X) \cup E(X)) - \mathcal{P}(X)$ . Sea  $x_i \in A$ . Como  $x_i \notin \mathcal{P}(X)$ , tenemos que  $x_i \in G(X)$ . Luego, existe una gráfica finita  $G_i \subset X$  tal que  $x_i \in int_X(G_i)$ . Más aún, como  $A \subset O(X) \cup E(X)$ , existe un arco  $J_i$  en  $G_i$  tal que  $x_i \in int_X(I_i)$ . Sin perder generalidad, supongamos que los arcos  $J_i$  son ajenos dos a dos. Por el Teorema 2.1, inferimos que  $\langle J_1, J_2, \dots, J_n \rangle_n$  es una vecindad de  $A$  en  $F_n(X)$  la cual es una  $n$ -celda. Por tanto,  $A \in \mathcal{E}_n(X)$ . Esto concluye la prueba.  $\square$

**Teorema 3.10.** *Sean  $X$  un continuo localmente conexo tal que  $X$  no es un arco y no es una curva cerrada simple y  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces las componentes de  $\Lambda_n(X)$  son los conjuntos no vacíos  $\langle int_X(I_1), int_X(I_2), \dots, int_X(I_m) \rangle_n$ , donde  $m \leq n$ , los conjuntos  $int_X(I_1), int_X(I_2), \dots, int_X(I_m)$  son ajenos por pares y  $I_j \in \mathcal{U}_S(X)$  para cada  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ .*

*Demostración.* Consideremos  $I_1, I_2, \dots, I_m \in \mathcal{U}_S(X)$  tales que  $\text{int}_X(I_1), \text{int}_X(I_2), \dots, \text{int}_X(I_m)$  son ajenos por pares. Notemos que  $\text{int}_X(I_1), \text{int}_X(I_2), \dots, \text{int}_X(I_m)$  son subconjuntos abiertos y conexos de  $X$ . Por [21, Lema 1],  $\langle \text{int}_X(I_1), \text{int}_X(I_2), \dots, \text{int}_X(I_m) \rangle_n$ , es un subconjunto abierto y conexo de  $F_n(X)$ . Notemos que si  $\{I_1, I_2, \dots, I_m\} \neq \{J_1, J_2, \dots, J_r\}$ , entonces  $\langle \text{int}_X(I_1), \text{int}_X(I_2), \dots, \text{int}_X(I_m) \rangle_n \cap \langle \text{int}_X(J_1), \text{int}_X(J_2), \dots, \text{int}_X(J_r) \rangle_n = \emptyset$ . Por el Teorema 2.3, tenemos que  $X - (\mathcal{P}(X) \cup R(X)) = \bigcup \{\text{int}_X(I) : I \in \mathcal{U}_S(X)\}$ , y así la unión de todos los conjuntos de la forma  $\langle \text{int}_X(I_1), \text{int}_X(I_2), \dots, \text{int}_X(I_m) \rangle_n$  es igual a  $\Lambda_n(X)$ . Esto concluye la prueba del teorema.  $\square$

El siguiente resultado generaliza [10, Teorema 2.9] para continuos localmente conexos tales que  $\mathcal{E}_n(X)$  es denso en  $F_n(X)$ .

**Teorema 3.11.** *Sean  $X$  un continuo localmente conexo casi enrejado y  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $A \in P_n(X)$ , entonces para cada base,  $\beta$ , de abiertos de  $A$  en  $F_n(X)$  y para cada  $\mathcal{V} \in \beta$ , el conjunto  $\mathcal{V} \cap \mathcal{E}_n(X)$  es no vacío y tiene una infinidad de componentes.*

*Demostración.* Sean  $A \in P_n(X)$  y  $\beta$  una base de abiertos de  $A$  en  $F_n(X)$ . Supongamos que  $|A| = m$  y  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ , donde  $x_1 \in \mathcal{P}(X)$ . Sean  $U_1, U_2, \dots, U_m$  ajenos dos a dos, conexos y abiertos en  $X$  tales que  $x_i \in U_i$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Tomamos  $\mathcal{V} \in \beta$  tal que  $\mathcal{V} \subset \langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle_n$  y  $V_1, V_2, \dots, V_m$  ajenos dos a dos, conexos y abiertos en  $X$  tales que  $x_i \in V_i \subset U_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , y  $\langle V_1, V_2, \dots, V_m \rangle_n \subset \mathcal{V}$ .

Consideramos los siguientes casos:

- (1) Sea  $x_1 \in \mathcal{P}(X) \cap [E(X) \cup O(X)]$ . Por el Teorema 3.6, existe una sucesión  $\{r_k\}_{k=1}^\infty$  en  $R(X) - \{x_1\}$  de puntos distintos que converge a  $x_1$ . Sean  $L_1, L_2, \dots$  subconjuntos abiertos y conexos de  $X$  ajenos por pares tales que  $r_k \in L_k$ ,  $\text{diám}(L_k) < \frac{1}{k}$  para cada  $k \in \mathbb{N}$  y  $L_k \cap L_j = \emptyset$ , si  $k \neq j$ . Podemos suponer que  $L_k \subset V_1$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Por el Lema 2.1, existe  $J_k \in \mathcal{U}_S(X)$  tal que  $\text{int}_X(J_k) \cap L_k \neq \emptyset$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , sea  $T_k = \text{int}_X(J_k) \cap U_1$ . De nuevo, por el Lema 2.1, para cada  $i \in \{2, 3, \dots, m\}$ , existe  $I_i \in \mathcal{U}_S(X)$  tal que  $\text{int}_X(I_i) \cap V_i \neq \emptyset$ . Para cada  $i \in \{2, 3, \dots, m\}$ , sea  $H_i = \text{int}_{U_i}(I_i \cap U_i)$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , sea

$$\mathcal{W}_k = \langle H_2, H_3, \dots, H_m, T_k, T_{k+1}, \dots, T_{k+n-m} \rangle_n.$$

Notemos que  $\mathcal{W}_k$  es conexo. Por el Teorema 2.1, obtenemos que  $\mathcal{W}_k \subset \langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle_n \cap \mathcal{E}_n(X)$ . Sea  $\mathcal{C}$  la componente de  $\Lambda_n(X)$  tal que  $\mathcal{W}_k \subset \mathcal{C}$ . Por el Teorema 3.8, tenemos que  $\mathcal{C} \cap (\langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle_n \cap \mathcal{E}_n(X)) = \mathcal{W}_k$ . Por tanto,  $\mathcal{W}_k$  es una componente de  $\langle U_1, \dots, U_m \rangle_n \cap \mathcal{E}_n(X)$ . Notemos que  $\mathcal{W}_k \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Dado que  $\mathcal{W}_k \cap \mathcal{W}_l = \emptyset$  si  $k \neq l$ , el conjunto  $\mathcal{V} \cap \mathcal{E}_n(X)$  tiene una infinidad de componentes. Esto completa el caso (1).

- (2) Sea  $x_1 \in \mathcal{P}(X) \cap R(X)$ . Consideramos los siguientes subcasos:

(2a) Existe una sucesión  $\{r_k\}_{k=1}^\infty \subset R(X) - \{x_1\}$  que converge a  $x_1$ .

Este caso es similar al caso (1).

(2b) No existe una sucesión  $\{r_k\}_{k=1}^\infty \subset R(X) - \{x_1\}$  que converge a  $x_1$ .

Consideramos los siguientes subcasos:

(i) Existe una sucesión  $\{e_k\}_{k=1}^\infty \subset E(X) - \{x_1\}$  que converge a  $x_1$ .

(ii) No existe una sucesión  $\{e_k\}_{k=1}^\infty \subset E(X) - \{x_1\}$  que converge a  $x_1$ .

En ambos casos, (i) y (ii), de la prueba de [23, Lema 9.11], existe un espacio  $L$  homeomorfo a  $F_\omega$  (donde  $F_\omega$  es la dendrita con un único punto de ramificación cuyo orden es  $\omega$ ) tal que  $x_1$  es el vértice de  $L$ . Sea  $L = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [x_1, e_i]$ . Dado que no existe una sucesión  $\{r_k\}_{k=1}^\infty \subset R(X) - \{x_1\}$  que converge a  $x_1$ , podemos suponer que  $[x_1, e_i]$  es un arco libre en  $X$  contenido en  $V_1$ , para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , sea  $W_k = \langle H_2, H_3, \dots, H_m, [x_1, e_k] - \{x_1, e_k\}, [x_1, e_{k+1}] - \{x_1, e_{k+1}\}, \dots, [x_1, e_{k+n-m}] - \{x_1, e_{k+n-m}\} \rangle_n$ , donde  $H_2, H_3, \dots, H_m$  son como en el caso (1). Procediendo como en el caso (1), tenemos que  $\mathcal{V} \cap \mathcal{E}_n(X)$  tiene una infinidad de componentes.  $\square$

#### 4. TEOREMA PRINCIPAL

En esta sección probamos que los continuos localmente conexos  $X$  tales que  $\mathcal{E}_n(X)$  es denso en  $F_n(X)$  tienen hiperespacio único  $F_n(X)$ , para cada  $n \in \mathbb{N} - \{2, 3\}$ .

Primero presentamos dos resultados que utilizan el siguiente conjunto.

Dado un continuo  $X$ , sea

$$\Gamma_n(X) = \{A \in F_n(X) - \mathcal{E}_n(X) : A \text{ tiene una base, } \beta, \text{ de abiertos en } F_n(X) \text{ tal que para cada } \mathcal{V} \in \beta, \text{ el conjunto } \mathcal{V} \cap \mathcal{E}_n(X) \text{ es arco conexo}\}.$$

Como los conjuntos  $\Gamma_n(X)$  y  $\mathcal{E}_n(X)$  están definidos mediante propiedades topológicas, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.** *Sean  $X$  y  $Y$  continuos y  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $h : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$  es un homeomorfismo, entonces  $h(\Gamma_n(X)) = \Gamma_n(Y)$  y  $h(\mathcal{E}_n(X)) = \mathcal{E}_n(Y)$ .*

El siguiente resultado es la generalización de [10, Teorema 2.10] para continuos localmente conexos tales que  $\mathcal{E}_n(X)$  es denso en  $F_n(X)$ .

**Teorema 4.2.** *Sean  $X$  un continuo localmente conexo casi enrejado y  $n \geq 4$ . Entonces*

$$\Gamma_n(X) = F_1(X) \cap \Lambda_n(X).$$

*Demostración.* Primero veamos que  $\Gamma_n(X) \subset F_1(X) \cap \Lambda_n(X)$ . Sean  $A \in \Gamma_n(X)$  y  $\beta$  una base de abiertos en  $F_n(X)$  tal que para cada  $\mathcal{V} \in \beta$ , el conjunto  $\mathcal{V} \cap \mathcal{E}_n(X)$  es arco conexo. Por el Teorema 3.9, implicamos que  $A \notin P_n(X)$ . Luego, existe una gráfica finita  $T$  en  $X$  tal que  $A \subset \text{int}_X(T)$ . Dado que  $A \in \langle \text{int}_X(T) \rangle_n$ , podemos suponer que todos los elementos de  $\beta$  son subconjuntos de  $F_n(T)$  y así abiertos en  $F_n(T)$ . Además, para cada  $\mathcal{V} \in \beta$ , tenemos que  $\mathcal{V} \cap \mathcal{E}_n(T) = \mathcal{V} \cap \mathcal{E}_n(X)$ , luego  $\mathcal{V} \cap \mathcal{E}_n(T)$  también es arco conexo. Por [6, Lema 4.5], inferimos que  $A \in F_1(T) - R_n(T)$ . Por tanto,  $A \in F_1(X) - R_n(X)$  y así,  $A \in F_1(X) \cap \Lambda_n(X)$ . Concluimos que  $\Gamma_n(X) \subset F_1(X) \cap \Lambda_n(X)$ .

Ahora veamos que  $F_1(X) \cap \Lambda_n(X) \subset \Gamma_n(X)$ . Sean  $A \in F_1(X) \cap \Lambda_n(X)$ . Aplicando el Teorema 3.7(b), deducimos que  $A \notin \mathcal{E}_n(X)$ . Como  $A \notin P_n(X)$ , existe una gráfica finita  $T$  en  $X$  tal que  $A \subset \text{int}_X(T)$ . Notemos que  $A \in F_1(T) - R_n(T)$ , así por [6, Lema 4.5], existe una base  $\beta$  de abiertos en  $F_n(T)$  tal que para cada  $\mathcal{V} \in \beta$ , el conjunto  $\mathcal{V} \cap \mathcal{E}_n(T)$  es arco conexo. Como  $A \in \text{int}_{F_n(X)}(F_n(T)) \cap F_n(T)$ , existe  $\mathcal{U} \in \beta$  tal que  $A \subset \mathcal{U} \subset \text{int}_{F_n(X)}(F_n(T)) \cap F_n(T)$ . Por lo que  $\mathcal{U}$  es abierto en  $F_n(X)$  y así podemos suponer que  $\beta$  es también una base de abiertos de  $A$  en  $F_n(X)$ . Por otra parte, para cada  $\mathcal{V} \in \beta$ , tenemos que  $\mathcal{V} \cap \mathcal{E}_n(X) = \mathcal{V} \cap \mathcal{E}_n(T)$ , luego  $\mathcal{V} \cap \mathcal{E}_n(X)$  también es arco conexo. Por tanto,  $A \in \Gamma_n(X)$ . Esto completa la prueba del teorema.  $\square$

A continuación presentamos nuestro resultado principal.

**Teorema 4.3.** *Sean  $X$  un continuo localmente conexo casi enrejado y  $n \geq 4$ . Si  $Y$  es continuo tal que  $F_n(X)$  es homeomorfo a  $F_n(Y)$ , entonces  $X$  es homeomorfo a  $Y$ .*

*Demostración.* Sea  $h : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$  un homeomorfismo. Dado que  $X$  es un continuo localmente conexo, también  $Y$  es un continuo localmente conexo. Por el Teorema 4.1,  $h(\mathcal{E}_n(X)) = \mathcal{E}_n(Y)$  y así por el Teorema 3.1,  $\mathcal{E}_n(Y)$  es denso en  $F_n(Y)$ . De nuevo por el Teorema 3.1,  $Y$  es casi enrejado. Por el Teorema 4.1,  $h(\Gamma_n(X)) = \Gamma_n(Y)$  y así por el Teorema 4.2,  $h(F_1(X) \cap \Lambda_n(X)) = F_1(Y) \cap \Lambda_n(Y)$ . Por tanto,  $h(cl_{F_n(X)}(F_1(X) \cap \Lambda_n(X))) = cl_{F_n(Y)}(F_1(Y) \cap \Lambda_n(Y))$ . Por el Corolario 3.1,  $h(F_1(X)) = F_1(Y)$ . Concluimos que  $X$  es homeomorfo a  $Y$ .  $\square$

Combinando [8, Lema 2], Teorema 3.2 y Teorema 4.3, tenemos el resultado siguiente.

**Corolario 4.4.** *Sean  $n \in \mathbb{N} - \{2, 3\}$  y  $X$  un continuo que pertenece a alguna de las siguientes clases:*

- (a) *enrejado (recordemos que  $\mathfrak{G}, \mathfrak{D}, \mathfrak{LD} \subset \mathcal{M}$ );*
- (b) *dendritas locales cuyo conjunto de puntos ordinarios es abierto.*

*Entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $F_n(X)$ .*

En otro trabajo de investigación estamos interesados en responder las siguientes preguntas.

**Pregunta 4.5.** *Sean  $X$  una dendrita tal que  $\mathcal{E}_n(X)$  no es denso en  $F_n(X)$  y  $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ . ¿Será cierto que  $X$  tiene hiperespacio único  $F_n(X)$ ?*

**Pregunta 4.6.** *Sean  $X$  un continuo localmente conexo tal que  $\mathcal{E}_n(X)$  es denso en  $F_n(X)$  y  $n \in \{2, 3\}$ . ¿Será cierto que  $X$  tiene hiperespacio único  $F_n(X)$ ?*

#### REFERENCIAS

- [1] G. Acosta, *Continua with unique hyperspace*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 230, Marcel Dekker Inc., New York, 2002, 33–49.
- [2] G. Acosta, R. Hernández-Gutiérrez, V. Martínez-de-la-Vega, *Dendrites and symmetric products*, Glasnik Math. Ser. III 44(1) (2009), 195–210.
- [3] G. Acosta, D. Herrera-Carrasco, *Dendrites without unique hyperspace*, Houston J. Math. 35(2) (2009), 451–467.
- [4] G. Acosta, D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero *Local dendrites with unique hyperspace  $C(X)$* , Topology Appl. 157 (2010), 2069–2085.
- [5] J. J. Charatonik, A. Illanes, *Local connectedness in hyperspaces*, Rocky Mountain J. Math. 36 (2006), 811–856.
- [6] E. Castañeda, A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topology Appl. 153 (2006), 1434–1450.
- [7] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph*, I, Fund. Math. 62 (1968), 265–286.
- [8] R. J. Hernández Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, to appear in Rocky Mountain J. Math.
- [9] D. Herrera-Carrasco, *Dendrites with unique hyperspace*, Houston J. Math., 33(3) (2007), 795–805.
- [10] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero *Dendrites with unique symmetric products*, Topology Proc. 34 (2009), 175–190.
- [11] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero *Dendrites with unique  $n$ -fold hyperspace*, Topology Proc. 32 (2008), 321–337.

- [12] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero *Local dendrites with unique  $n$ -fold hyperspace*, Topology Appl. 158 (2011), 244–251.
- [13] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero y F. Vázquez-Juárez, *Peano Continua with Unique Symmetric Products*, Journal of Mathematics Research, 4(4) (2012), 1–9.
- [14] A. Illanes, *Dendrites with unique hyperspace  $F_2(X)$* , J. P. Geometry and Topology 2(1)(2002), 75–96.
- [15] A. Illanes, *The hyperspace  $C_2(X)$  for a finite graph  $X$  is unique*, Glasnik Mat. 37 (57)(2002), 347–363.
- [16] A. Illanes, *Finite graphs  $X$  have unique hyperspaces  $C_n(X)$* , Topology Proc. 27 (2003), 179–188.
- [17] Alejandro Illanes, *Hiperespacios de Continuos*, Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, Textos, vol. 28, 2004.
- [18] A. Illanes, *Dendrites with unique hyperspace  $C_2(X)$ , II*, Topology Proc. 34 (2009), 77–96.
- [19] A. Illanes, S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [20] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. 2, Academic Press and PWN, New York, London and Warszawa 1968.
- [21] J. M. Martínez-Montejano, *Non-confluence of the natural map of products onto symmetric products*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 230, Marcel Dekker, Inc., New York, 2002, 229–236.
- [22] S. B. Nader, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.
- [23] S. B. Nader, Jr., *Continuum Theory: An introduction*, Monographs and Text books in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Francisco Vázquez Juárez:

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel

Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx, fmacias@fcfm.buap.mx, 205702875@fcfm.buap.mx



# CAPÍTULO 21

## CARDINALIDAD DE LA FAMILIA DE FUNCIONES CON UN CONJUNTO DE CONTINUIDAD DADO

REINALDO MARTÍNEZ CRUZ, JOSÉ ERASMO PÉREZ VÁZQUEZ  
MARISOL RODRÍGUEZ XICOHTENCATL  
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE TLAXCALA

RESUMEN. En este trabajo estamos interesados en caracterizar el conjunto donde una función es continua, así como calcular el número de elementos que posee la familia de funciones con un conjunto de continuidad dado.

### 1. INTRODUCCIÓN

Este es un trabajo en topología general que se desarrolla principalmente en el tema de los espacios métricos. En éste, el objetivo es exponer resultados relacionados a los problemas siguientes:

Sean  $X$  un espacio topológico,  $Y$  un espacio métrico y  $C \subseteq X$ .

**Problema 1.1.** ¿Bajo qué condiciones existe una función  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f$  es continua en  $x$  si y sólo si  $x \in C$ ?

Relacionado a este problema, podemos preguntarnos.

**Problema 1.2.** Si existe tal función  $f$ ; ¿ésta es única?. En otras palabras, ¿Cuál es la cardinalidad de la familia de funciones  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f$  es continua en  $x$  si y sólo si  $x \in C$ ?

Más general, dada una colección  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ .

**Problema 1.3.** ¿Cuál es la cardinalidad de la familia de funciones  $f : X \rightarrow Y$  tal que existe  $A \in \mathcal{A}$ , para el cual  $f$  es continua en  $x$  si y sólo si  $x \in A$ ?

Con respecto al problema 1.1; no es difícil de probar que una condición necesaria para que una función arbitraria sea continua en un conjunto  $C$ , es que  $C$  sea un conjunto  $G_\delta$  véase Teorema 3.1; también justificamos por qué el codominio de la función no puede ser un espacio topológico cualquiera. Por otra parte, Sung Soo Kim en [4] demuestra la proposición recíproca del problema 1.1 para cuando  $X$  es un espacio métrico sin puntos aislados,  $C$  un conjunto  $G_\delta$  en  $X$  y  $Y$  el conjunto de los números reales; aquí, damos una solución particular cuando el dominio de la función real valuada es un espacio topológico conteniendo dos conjuntos densos y disjuntos, el cual como veremos generaliza el resultado dado por Sung Soo Kim ver Teorema 3.2. La información recabada respecto de los Problemas 1.2 y 1.3, relacionados al primero, está fuertemente apoyada en [2]. En esta cita, el propósito de

Jiaming C y Sam S es demostrar que el número de elementos que posee la familia de todas las funciones con un conjunto de continuidad dado, son tantos como números reales. Nosotros generalizamos tal hecho para espacios topológicos, ver Teorema 4.2.

Por último para concluir con esta breve introducción, queremos hacer algunos comentarios respecto al desarrollo del trabajo. Si bien es cierto que en la actualidad, se conoce mucho acerca de esta monografía, la información se encuentra dispersa a lo largo de los textos de espacios métricos y de algunos artículos lo cual hace difícil al lector asimilar esto de manera unificada. Por lo que, a quien leyere, ponemos a disposición esta obra.

Una vez planteado nuestro objetivo, pasamos a exponer nuestros resultados. En la sección de caracterizando el conjunto donde una función es continua, damos respuesta al primer problema planteado al inicio de esta introducción. En la última, atendemos el segundo y el tercer problema; para los resultados referentes a la teoría de la cardinalidad nos hemos basado en [3].

## 2. PRELIMINARES

Daremos un breve resumen de los conceptos empleados en esta obra, el lector interesado puede consultar el libro [1].

Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $x \in X$  y  $r > 0$ , la bola abierta con centro  $x$  y de radio  $r$ , denotado por  $B_r(x)$ , es el conjunto  $\{y \in X : d(x, y) < r\}$ . Un punto  $x \in X$  es punto interior del conjunto  $A$ , si existe  $r > 0$  tal que  $B_r(x) \subseteq A$ . Sea  $A \subseteq X$ . El interior del conjunto  $A$  es denotado por,  $int(A)$ , y definido como

$$int(A) = \{x \in X : x \text{ es punto interior } A\}.$$

**Definición 2.1.** (a)  $A$  es un conjunto *abierto* en  $X$ , si  $A = int(A)$ .

(b) La clausura o cerradura de  $A$  en  $X$  denotado por  $\overline{A}$ , es definido por

$$\overline{A} = \{x \in X : \text{para cada } r > 0, B_r(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

(c) La frontera del conjunto  $A$  se denota por  $F_r(A)$  y se define como

$$F_r(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

(d) Decimos que  $A$  es *denso* en  $X$  si y sólo si  $\overline{A} = X$ . En otras palabras;  $A$  es denso en  $X$ , si para cualquier  $x \in X$  y para cualquier  $r > 0$ ,  $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ .

(e)  $A$  es *acotado* si existe  $M > 0$  tal que, para todo  $a, b \in A$ ,  $d(a, b) \leq M$ .

(f) Para un conjunto acotado  $A$  en  $X$ , definimos el diámetro de  $A$  el cual es denotado por,  $diam(A)$ , como  $sup\{d(a, b) : a, b \in A\}$ .

Es consecuencia inmediata de la definición de conjunto acotado y de diámetro de un conjunto lo siguiente.

Si  $A$  es un subconjunto acotado en  $X$  y  $B$  es un subconjunto no vacío de  $A$ , entonces  $B$  es acotado. Más aún, el diámetro de  $B$  existe y  $diam(B) \leq diam(A)$ ;

$\text{diam}(A) = 0$  si y sólo si  $A = \{x\}$  para algún  $x \in X$ .

Un espacio métrico  $X$  es completo si cada sucesión de Cauchy de puntos en  $X$  converge a un punto en  $X$  y,  $X$  es separable si contiene un subconjunto denso numerable.

**Teorema 2.1.** (Cantor) *Un espacio métrico  $(X, d)$  es completo si y sólo si para cada sucesión decreciente  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de conjuntos cerrados no vacíos en  $X$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(B_n) = 0$ ,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$ .*

*Demostración.* Sean  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión decreciente de conjuntos cerrados no vacíos en  $X$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(B_n) = 0$ . Construyamos una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $X$  tomando arbitrariamente un punto  $x_n \in B_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , aprovechando que  $B_n \neq \emptyset$ . Verifiquemos que tal sucesión es de Cauchy. Para ver esto, sean  $\epsilon > 0$  y  $N > 0$  tal que  $\text{diam}(B_N) < \epsilon$ . Para todo  $n \geq N$ , se tiene que  $B_n \subseteq B_N$  y  $\text{diam}(B_n) < \epsilon$ . Así; si  $m, n \geq N$ , entonces  $d(x_n, x_m) < \epsilon$ . Esto demuestra que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy y, por la completitud de  $X$ , converge, digamos  $x_n \rightarrow x_0$ . Tomemos un  $B_m$  cualquiera. Por construcción, la sucesión  $\{x_m, x_{m+1}, \dots\}$  está en  $B_m$  y es una subsucesión de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , por lo que también converge a  $x_0$ . De aquí se sigue que  $x_0$  es un punto de adherencia de  $B_m$  y como éste es cerrado,  $x_0 \in B_m$ .

De manera que, para cada  $m \in \mathbb{N}$ ,  $x_0 \in B_m$ , es decir  $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$  y dicha intersección no es vacía.

Para demostrar el recíproco, sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy en  $X$ . Definamos los conjuntos  $T_n = \{x_k : k \geq n\}$ ,  $B_n = \overline{T_n}$ . Claramente; para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n$  es no vacío, cerrado y  $B_{n+1} \subseteq B_n$ . Como  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy, dado  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $m, n \geq N$ ,  $d(x_m, x_n) < \epsilon$ ; pero, por construcción, si  $x_n, x_m \in T_N$ , entonces  $n, m \geq N$ , de donde  $d(x_m, x_n) < \epsilon$ , lo cual implica  $\text{diam}(T_N) < \epsilon$ . Se deduce que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(T_n) = 0$ . Como  $\text{diam}(T_n) = \text{diam}(B_n)$ , también  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(B_n) = 0$ . Luego, por hipótesis, existe un único punto  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ . Ahora bien, dado  $\epsilon > 0$ , debe existir  $B_N$  con  $\text{diam}(B_N) < \epsilon$ . Pero  $x \in B_N$  y, por construcción, para cada  $n \geq N$ ,  $x_n \in T_N \subseteq B_N$ ; luego  $d(x_n, x) \leq \text{diam}(B_N) < \epsilon$ . O sea que  $x_n \rightarrow x$  y  $(X, d)$  es completo.  $\square$

Como dijo Ignacio R. Iribarren, una hermosa y profunda aplicación de este teorema la constituye el famoso resultado de Baire.

**Teorema 2.2.** (La propiedad de Baire) *Sean  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$  una familia numerable de conjuntos abiertos y densos en  $X$ , entonces  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$  es un conjunto denso.*

**Definición 2.2.** (a) Decimos que  $A$  es denso en ninguna parte en  $X$  si el conjunto  $X \setminus \overline{A}$  es denso en  $X$ .

(b)  $X$  es un espacio de primera categoría si existe una sucesión de conjuntos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  densos en ninguna parte en  $X$ , tales que  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , y  $X$  es de segunda categoría si no es de primera categoría.

**Corolario 2.1.** (Baire) *Si  $(X, d)$  es un espacio métrico completo, entonces  $X$  es de segunda categoría.*

El Teorema 2.2 y el Corolario 2.1 son conocidos como el Teorema de Baire, en este trabajo utilizaremos este nombre para referirnos a cualquiera de estos dos resultados.

**Definición 2.3.** Sean  $A, B \subseteq X$ . Decimos que  $A$  es un conjunto  $G_\delta$ , si  $A$  es la intersección numerable de conjuntos abiertos y,  $B$  es un conjunto  $F_\sigma$ , si  $B$  es la unión numerable de conjuntos cerrados.

Notemos que, si  $A$  es un conjunto numerable en  $X$ , entonces  $A$  es un conjunto  $F_\sigma$  en  $X$ ; además, el complemento de un conjunto  $G_\delta$  es un conjunto  $F_\sigma$  y, el complemento de un conjunto  $F_\sigma$  es un conjunto  $G_\delta$ . Estos comentarios implican lo que sigue:

Si  $X \setminus A$  es numerable, entonces  $A$  es un conjunto  $G_\delta$  en  $X$ . En efecto, existe una biyección  $f : \mathbb{N} \rightarrow X \setminus A$ ; ahora, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{a_n\}$  es un conjunto cerrado en  $X$  ( $X$  es un espacio  $T_1$ ) y como  $X \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\}$ , se sigue que  $X \setminus A$  es un espacio  $F_\sigma$ . Luego,  $A$  es un conjunto  $G_\delta$ .

En términos de la noción de cardinalidad; diremos que un conjunto  $A$  es numerable si  $\text{card}(A) = \aleph_0$ , donde  $\text{card}(A)$  y  $\aleph_0$  denotan el número de elementos que poseen tanto el conjunto  $A$  como el conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$  respectivamente. Formalmente

**Definición 2.4.** Decimos que un conjunto  $X$  es numerable si  $\text{card}(X) = \text{card}(\mathbb{N})$  y es a lo mas numerable si  $\text{card}(X) \leq \text{card}(\mathbb{N})$ .

Así, por ejemplo  $\text{card}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$  y  $\text{card}(\mathcal{P}(A)) = 2^{\text{card}(A)}$ .

**Definición 2.5.** Sean  $X, Y$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Decimos que  $f$  es continua en un punto  $x_0 \in X$  si y sólo si para cada abierto  $V$  en  $Y$  con  $f(x_0) \in V$ , existe un abierto  $U$  en  $X$  con  $x_0 \in U$  tal que  $f(U) \subseteq V$ . Decimos que  $f$  es continua en  $X$  si es continua en cada punto de  $X$ .

### 3. CARACTERIZANDO EL CONJUNTO DONDE UNA FUNCIÓN ES CONTINUA

En esta sección vamos a dar respuesta al problema 1.1. Para empezar, el conjunto de puntos de continuidad de una función  $f$  lo denotamos por  $C_f$  y lo definimos como el conjunto  $\{x \in X : f \text{ es continua en } x\}$ . Ahora, el problema se escribe de la siguiente manera.

Sean  $X$  un espacio topológico,  $Y$  un espacio métrico y  $C \subseteq X$ .

Nos preguntamos: ¿Bajo que condiciones existe una función  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $C_f = C$ ?

Lo primero que haremos es ver que, para que una función  $f : X \rightarrow Y$  sea continua en un subconjunto de  $X$ , éste debe ser un conjunto  $G_\delta$ .

**Teorema 3.1.** Sean  $X$  un espacio topológico,  $Y$  un espacio métrico. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función cualquiera, entonces  $C_f$  es un conjunto  $G_\delta$ .

*Demostración.* Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función arbitraria. Ahora, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $\mathcal{F}_n = \{U : U \text{ es abierto en } X \text{ y } \text{diam} f(U) \leq \frac{1}{n}\}$  y sea  $V_n = \bigcup \mathcal{F}_n$ . Como la unión

arbitraria de abiertos es abierto, se sigue que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n$  es un conjunto abierto en  $X$ . Afirmamos que  $C_f = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ . En efecto, sea  $z_0 \in C_f$ . Esto implica que, para cada abierto  $W$  en  $Y$  con  $f(z_0) \in W$ , existe un abierto  $U$  en  $X$  con  $z_0 \in U$  tal que  $f(U) \subseteq W$ . En particular; para cada  $n \in \mathbb{N}$ , si  $W_n = B_{\frac{1}{3n}}(f(z_0))$ , tenemos que existe  $U_n$  abierto en  $X$  con  $z_0 \in U_n$  tal que  $f(U_n) \subseteq W_n$ . De aquí se sigue que,  $U_n \in \mathcal{F}_n$ . Como  $z_0 \in U_n$  tenemos que  $z_0 \in \bigcup \mathcal{F}_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Luego, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_0 \in V_n$ . Esto demuestra que,  $C_f \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ .

Por otra parte, sean  $z_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$  y  $W$  un abierto en  $Y$  con  $f(z_0) \in W$ . Como  $W$  es abierto en  $Y$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $B_{\frac{1}{n_0}}(f(z_0)) \subseteq W$ .

Dado que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_0 \in V_n$  y  $V_n = \bigcup \mathcal{F}_n$ , se sigue que existe un abierto  $U_0$  en  $X$  con  $z_0 \in U_0$  y  $U_0 \in \mathcal{F}_{2n_0}$ . Veamos que  $f(U_0) \subseteq W$ . Sea  $u \in U_0$ , tenemos que  $d(f(z_0), f(u)) \leq \text{diam} f(U_0) \leq \frac{1}{2n_0} < \frac{1}{n_0}$ . Esto implica que  $f(u) \in B_{\frac{1}{n_0}}(f(z_0))$ .

Así,  $f$  es continua en  $z_0$ ; luego,  $z_0 \in C_f$ . Esto demuestra que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \subseteq C_f$ . Con todo la afirmación es cierta.  $\square$

En el siguiente ejemplo, vamos a justificar por qué el codominio de la función dada en el Teorema 3.1 no puede ser un espacio topológico cualquiera.

**Ejemplo 3.1.** Sea  $Y = \mathbb{R} \cup \{p\}$ , donde  $p \notin \mathbb{R}$ . No es difícil verificar que la colección

$$\tau_Y = \{Y\} \cup \{E \subseteq Y : p \notin E\}$$

es una topología para  $Y$ .

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  fijo con  $A \neq \emptyset$ . Definamos  $f : \mathbb{R} \rightarrow Y$  como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} p & \text{si } x \in A \\ x & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Entonces  $C_f = A$ .

En efecto: Sean  $x \in A$  y  $W$  un abierto en  $Y$  con  $f(x) \in W$ . Tenemos que  $W = Y$ , ya que, el único abierto en  $\tau_Y$  que contiene a  $p$  es  $Y$ . Como  $f^{-1}(W) = \mathbb{R}$ , el cual es abierto en  $\mathbb{R}$ ; se sigue que,  $f$  es continua en  $x$ . Esto demuestra que  $A \subseteq C_f$ .

Ahora demostremos que  $C_f \subseteq A$ . Sea  $x \in C_f$ , entonces para cada abierto  $W$  en  $Y$  con  $f(x) \in W$  existe un abierto  $U$  en  $\mathbb{R}$  con  $x \in U$  tal que  $f(U) \subseteq W$ . En particular; para  $W = Y$ , existe un abierto  $U_0$  en  $\mathbb{R}$  con  $x \in U_0$  tal que  $f(U_0) \subseteq Y$ . Si  $x \notin A$ , entonces de acuerdo a la definición de  $f$ ,  $f(x) \neq p$ . Pero,  $f(x) \in W$  y  $Y = W$  es el único abierto que contiene a  $p$ . Esto implica que  $f(x) = p$ , lo cual nos da una contradicción. Luego,  $x \in A$ ; así,  $C_f \subseteq A$ . Con todo  $A = C_f$ .

Si en el ejemplo anterior ponemos  $A = \mathbb{Q}$ , tenemos que  $C_f$  no es un conjunto  $G_\delta$ , ya que el conjunto de los números racionales,  $\mathbb{Q}$ , no es  $G_\delta$ . Este hecho hace ver que en el Teorema 3.1, no se puede omitir la hipótesis de métrico para  $Y$ .

Ahora nos preguntamos si la proposición recíproca al Teorema 3.1 es verdadera. Es decir,

**Problema 3.1.** Sea  $C$  un conjunto  $G_\delta$  en  $X$ . ¿Existe una función  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $C = C_f$ ?

Antes de dar una respuesta a esta pregunta se introducen algunos hechos de gran utilidad. Se deja como ejercicio para el lector verificarlos.

Denotemos por  $I = \{x \in X : x \text{ es punto aislado en } X\}$ . Entonces  $x \in I$  si y sólo si  $\{x\}$  es abierto en  $X$ .

**Observación 3.1.** Si  $X, Y$  son espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  es una función, entonces  $I \subseteq C_f$ . Esto es, toda función definida en  $X$  es continua en los puntos aislados de  $X$ .

*Demostración.* Sea  $x \in I$  y  $W$  un abierto en  $Y$  con  $f(x) \in W$ . Notemos que  $U = \{x\}$  es un abierto en  $X$  con  $x \in U$  tal que  $f(U) \subseteq W$ . Así,  $f$  es continua en  $x$  y, esto implica que  $x \in C_f$ .  $\square$

El siguiente resultado da una respuesta parcial al problema 3.1.

**Ejemplo 3.2.** Si  $X$  es un espacio  $T_1$  e  $I \neq \emptyset$ , entonces para cada  $x \in I$ , se tiene que  $X \setminus \{x\}$  es un abierto, y así un conjunto  $G_\delta$ . En otras palabras, hemos hallado un conjunto  $G_\delta$ , a saber,  $X \setminus \{x\}$  tal que, para cada función  $f : X \rightarrow Y$ ,  $C_f \neq X \setminus \{x\}$ .

Como los espacios métricos son  $T_1$ , la respuesta a la pregunta planteado en el problema 3.1 es negativa para espacios métricos en general.

Sin embargo: si  $X$  posee dos conjuntos densos, disjuntos y  $Y = \mathbb{R}$ , entonces se tiene una respuesta afirmativa. Veamos el resultado siguiente.

**Teorema 3.2.** Sea  $X$  un espacio topológico tal que contiene dos conjuntos densos, disjuntos  $S, T$ . Entonces para cada conjunto  $G_\delta, C$ , en  $X$  existe una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $C = C_f$ .

*Demostración.* Supongamos que  $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ , donde  $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$  es una familia numerable de abiertos en  $X$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $E_n = X \setminus U_n$ , y  $F_n = \bigcup_{j=1}^n E_j$ . Se tiene que  $E_n$  es cerrado y  $F_n$  también. Es claro que; para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n \subseteq F_{n+1}$ . Notemos que,  $X \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ .

Para cada  $x \notin C$ , denotemos  $n_x = \min\{n \in \mathbb{N} : x \in F_n\}$ , y definamos  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ \frac{1}{n_x} & \text{si } x \in S \cap (X \setminus C) \\ -\frac{1}{n_x} & \text{si } x \in (X \setminus S) \cap (X \setminus C). \end{cases}$$

Afirmamos que  $C = C_f$ . En efecto, sean  $x \in C$ . Para cada  $\epsilon > 0$ , sea  $V = (-\epsilon, \epsilon)$ .

Tenemos que  $V$  es un abierto en  $Y$ . Fijemos  $N \in \mathbb{N}$  con  $\frac{1}{N} < \epsilon$ . Sea  $W = X \setminus F_N$ , es claro que  $W$  es abierto en  $X$  tal que  $x \in W$ . Vamos a demostrar que  $f(W) \subseteq V$ . Sea  $w \in W$  y consideremos los siguientes casos:

Caso I.  $w \in C$ ; en este caso  $f(w) = 0$ , y así  $f(w) \in V$ .

Caso II.  $w \notin C$ ; para este otro caso, primero notemos que  $w \notin F_N$ . Puesto que  $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_N$ , se tiene que  $w \notin F_n$  para  $n \in \{1, \dots, N\}$ . Se sigue que  $n_w \geq N + 1$ . Luego,  $|f(w)| = \frac{1}{n_x} \leq \frac{1}{N+1} < \frac{1}{N} < \epsilon$ ; así,  $f(w) \in V$ . Esto demuestra que  $f$  es continua en  $x$ . Hemos probado que  $C \subseteq C_f$ .

Ahora, vamos a demostrar que  $C_f \subseteq C$  o equivalentemente  $X \setminus C \subseteq X \setminus C_f$ .

Sea  $x \in X \setminus C$ . Como  $x \notin C$ , entonces  $f(x) = \frac{1}{n_x}$  o  $f(x) = -\frac{1}{n_x}$ . Sin perder generalidad, supongamos que  $f(x) = \frac{1}{n_x}$ . Sea  $V$  un abierto en  $\mathbb{R}$  con  $f(x) \in V$  y  $V \cap (-\infty, 0] = \emptyset$ . Ahora supongamos que  $f$  es continua en el punto  $x$ . Entonces existe un abierto  $W$  en  $X$  tal que  $x \in W$  y  $f(W) \subseteq V$ . Por otra parte, como  $T$  es denso en  $X$ , se tiene que  $W \cap T \neq \emptyset$ . Sea  $w \in W \cap T$ . Dado que  $T \cap S = \emptyset$ , se sigue que  $w \notin S$ , es decir,  $w \in X \setminus S$ . Luego, de acuerdo a la definición de  $f$ ,  $f(w) = -\frac{1}{n_x}$ . Como  $f(w) \leq 0$ , y  $f(w) \in V$ , entonces  $V \cap (-\infty, 0] \neq \emptyset$ . Lo cual nos da una contradicción. Así,  $f$  no es continua en  $x$ . Esto demuestra que  $X \setminus C \subseteq X \setminus C_f$ . Con todo  $C_f = C$ .  $\square$

Se ha demostrado la siguiente caracterización.

**Teorema 3.3.** *Sea  $X$  un espacio topológico que contiene dos conjuntos densos y disjuntos. Sea  $C$  un subconjunto de  $X$ . Entonces existe una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $C_f = C$  si y sólo si  $C$  es un conjunto  $G_\delta$  en  $X$ .*

*Demostración.* La necesidad se sigue del Teorema 3.1, y la suficiencia del Teorema 3.2.  $\square$

Como una aplicación directa del Teorema 3.2, se tiene el resultado dado por Sung Soo Kim. Pero, primero estableceremos los siguientes lemas.

**Definición 3.1.** Sean  $X$  un espacio métrico con métrica  $d$  y  $\epsilon > 0$ . Un Subconjunto  $S$  de  $X$  se llama  $\epsilon$ -red si satisface lo siguiente:

- (i)  $d(x, y) \geq \epsilon$  para cada  $x, y \in S$  con  $x \neq y$ ,
- (ii)  $S$  es maximal con respecto de (i).

**Observación 3.2.** La condición (ii) significa que si  $S \subseteq R \subseteq X$  y  $S \neq R$  entonces  $R$  no satisface (i), esto es, existen  $x, y \in R$  con  $x \neq y$ , tales que  $d(x, y) < \epsilon$ .

**Lema 3.1.** *Sea  $X$  un espacio métrico con métrica acotada  $d$ , entonces para cada  $\epsilon > 0$  con  $\epsilon < \text{diam}(X)$  existe una  $\epsilon$ -red en  $X$ .*

*Demostración.* Sean  $X$  y  $\epsilon > 0$  como se indican. Por la definición de diámetro, existen puntos  $x_0, y_0 \in X$  tales que  $d(x_0, y_0) \geq \epsilon$ . Pongamos  $A = \{x_0, y_0\}$ . Sea  $\mathcal{A} = \{E \subseteq X : E \text{ satisface la condición (i)}\}$ . Observemos que  $A \neq \emptyset$ , pues  $A \in \mathcal{A}$ . Ahora, consideremos en  $\mathcal{A}$  el orden parcial dado por la inclusión de conjuntos, esto es,  $E_1 < E_2$  si y sólo si  $E_1 \subseteq E_2$ , para  $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ . Consideremos una cadena  $\mathcal{J}$  en  $\mathcal{A}$ , es decir,  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}$  y para cada  $E_1, E_2 \in \mathcal{J}$ ,  $E_1 \subseteq E_2$  o  $E_2 \subseteq E_1$ . Pongamos  $C^* = \bigcup \{E : E \in \mathcal{J}\}$ . Observemos que si  $x, y \in C^*$  con  $x \neq y$ , entonces existen  $E_1, E_2 \in \mathcal{J}$  tales que  $x \in E_1$  y  $y \in E_2$ . Sin perder generalidad supongamos que  $E_1 \subseteq E_2$ , se tiene que  $x, y \in E_2$  y como  $E_2 \in \mathcal{A}$ , se sigue que  $E_2$  satisface la condición (i), esto es  $d(x, y) \geq \epsilon$ . En resumen, dados  $x, y \in C^*$  con  $x \neq y$ ,  $d(x, y) \geq \epsilon$ . Así,  $C^* \in \mathcal{A}$ . Además, es claro que  $C^*$  es una cota superior en  $\mathcal{A}$  para la cadena  $\mathcal{J}$  ( $E \subseteq C^*$  para cada  $E \in \mathcal{J}$ ). Se sigue del Lema de Zorn que  $\mathcal{A}$  tiene un elemento maximal.  $\square$

**Lema 3.2.** *Sea  $X$  un espacio métrico con métrica acotada  $d$  sin puntos aislados, entonces existen conjuntos densos  $S$  y  $T$  en  $X$  tales que  $S \cap T = \emptyset$ .*

*Demostración.* Sea  $X$  como se indica en la hipótesis. Notemos que en este caso  $X$  no consiste sólo de un punto, de hecho  $X$  no es finito. Así,  $\text{diam}(X) > 0$ . Fijemos

$n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n_1} < \text{diam}(X)$ . Por Lema 3.1, existe una  $\epsilon$ -red, para  $\epsilon = \frac{1}{n_1}$ , la cual denotamos por  $S_1$ . Como  $X$  no tiene puntos aislados  $X \neq S_1$ . Así,  $X \setminus S_1$  es un espacio métrico sin puntos aislados. Ahora fijemos un  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_2 > n_1$  y  $\frac{1}{n_2} < \text{diam}(X \setminus S_1)$ . Nuevamente por Lema 3.1, existe una  $\epsilon$ -red, para  $\epsilon = \frac{1}{n_2}$  en  $X \setminus S_1$ , la cual denotamos por  $S_2$ . De este modo, inductivamente, se obtiene una subsucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  de  $\{n\}_{n=1}^{\infty}$  (esto es  $n_k \in \mathbb{N}$  y  $n_k < n_{k+1}$ ), y para cada  $k \in \mathbb{N}$ , una  $\frac{1}{n_k}$ -red,  $S_k$ , en  $X$  tal que  $S_k \cap S_m = \emptyset$  si  $k \neq m$ . Pongamos  $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{2k}$  y  $T = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_{2m-1}$ . Afirmamos que  $S \cap T = \emptyset$ . En efecto, supongamos que  $S \cap T \neq \emptyset$  y, sea  $t \in S \cap T$ , entonces existen  $k, m \in \mathbb{N}$  tales que  $t \in S_{2k} \cap S_{2m-1}$ . Es decir,  $S_{2k} \cap S_{2m-1} \neq \emptyset$ , lo cual nos da una contradicción. Luego,  $S \cap T = \emptyset$ .

Además; para cada  $x \in X$  y cada  $\epsilon > 0$ , se tiene que  $B_\epsilon(x) \cap S \neq \emptyset$ . En efecto, sean  $x \in X$  y  $\epsilon > 0$ . Como  $X = S \cup (X \setminus S)$  y  $S \cap (X \setminus S) = \emptyset$ , se sigue que  $x \in S$  o  $x \in (X \setminus S)$ . Supongamos que  $x \in S$ , entonces  $B_\epsilon(x) \cap S \neq \emptyset$ ; es decir,  $S$  es denso en  $X$ . Similarmente se demuestra que  $T$  es denso en  $X$ .  $\square$

**Corolario 3.1.** (S.S. Kim) Sea  $X$  un espacio métrico sin puntos aislados. Sea  $C$  un conjunto  $G_\delta$  en  $X$ , entonces existe una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $C_f = C$ .

*Demostración.* Como  $X$  es un espacio métrico sin puntos aislados, entonces por Lema 3.2, existen dos conjuntos densos y disjuntos  $S, T$  en  $X$ . Ahora, ya se tienen las hipótesis del Teorema 3.2. Luego, dado que  $C$  es un conjunto  $G_\delta$  en  $X$ , existe una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $C_f = C$ .  $\square$

Como una aplicación de la Observación 3.1, obtenemos lo que sigue.

**Corolario 3.2.** Sea  $X$  un espacio métrico. Sea  $C$  un conjunto  $G_\delta$  en  $X$  con  $I \subseteq C$ , entonces existe una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $C_f = C$ .

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es un espacio métrico,  $C$  un conjunto  $G_\delta$  en  $X$  con  $I \subseteq C$  y para cada función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C_f \neq C$ . Sin perder generalidad, supongamos que  $C \not\subseteq C_f$ . Como  $C$  es un conjunto  $G_\delta$  en  $X$  e  $I \subseteq C$ , entonces  $I \not\subseteq C_f$ . Es decir, existe una función  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g$  no es continua en sus puntos aislados de  $X$ ; pero, esto contradice a la Observación 3.1. Luego, existe una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $C_f = C$ .  $\square$

El Teorema 3.1 y Corolario 3.1 implican la siguiente caracterización.

**Teorema 3.4.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico sin puntos aislados y  $C \subseteq X$ . Entonces existe una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $C = C_f$  si y sólo si  $C$  es un conjunto  $G_\delta$  en  $X$ .

#### 4. CARDINALIDAD DE LA FAMILIA DE FUNCIONES CON UN CONJUNTO DE CONTINUIDAD DADO

En esta última sección, atendemos el segundo y tercer problema planteado en la introducción. Algunas notaciones nos son de utilidad: la familia de funciones con dominio un conjunto  $A$  y codominio un conjunto  $B$  lo denotamos por;  $B^A$  y  $\mathcal{P}(A)$  denota el conjunto potencia de  $A$ .

Sea  $f$  como en el Teorema 3.2. Ahora nos preguntamos:  
¿ $f$  es única?. En otras palabras, ¿Cuál es la cardinalidad de la familia de funciones  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $C_f = C$ ?

Más general, dada una colección  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . ¿Cuál es la cardinalidad de la familia de funciones  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $C_f = A$  para algún  $A \in \mathcal{A}$ ?

Notemos que la asignación  $f \mapsto C_f$  determina una función  $\mathcal{C}_X : \mathbb{R}^X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  dada por  $\mathcal{C}_X(f) = C_f$ .

La imagen inversa de  $\mathcal{A}$  bajo  $\mathcal{C}_X$  es definido por:

$$\mathcal{C}_X^{-1}(\mathcal{A}) = \{f \in \mathbb{R}^X : \text{existe un } A \in \mathcal{A} \text{ tal que } A = \mathcal{C}_f\}.$$

El siguiente hecho es de gran utilidad para lo que sigue.

**Teorema 4.1.** Sean  $X$  un conjunto con  $\text{card}(X) = \mathfrak{c}$ , y  $A, B \subseteq X$  con  $A$  infinito y  $B$  conteniendo por lo menos dos elementos. Entonces

$$\text{card}(B^A) = \begin{cases} \mathfrak{c} & \text{si } A \text{ es numerable} \\ 2^{\mathfrak{c}} & \text{si } A \text{ no es numerable.} \end{cases}$$

*Demostración.* Supongamos que  $B$  contiene por lo menos dos elementos y consideremos los casos cuando  $A$  es numerable y cuando no lo es.

Si  $A$  es numerable, entonces

$$(1) \quad \mathfrak{c} = 2^{\text{card}(A)} \leq \text{card}(B)^{\text{card}(A)} = \text{card}(B^A)$$

ahora, si  $A$  es no numerable, entonces

$$(2) \quad 2^{\mathfrak{c}} = 2^{\text{card}(A)} \leq \text{card}(B)^{\text{card}(A)} = \text{card}(B^A).$$

En lo que sigue, supongamos que  $B = \mathbb{R}$  y  $\text{card}(\mathbb{R}) = \text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$  y nuevamente procedamos como antes.

Supongamos que  $A$  es numerable, entonces

$$\text{card}(B^A) = \text{card}(B)^{\text{card}(A)} \leq \mathfrak{c}^{\text{card}(A)} = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Con la desigualdad (1), obtenemos que  $\text{card}(B^A) = \mathfrak{c}$ .

Por otra parte, para cada  $f \in B^A$ , sea  $\Delta(f) = \{(a, f(a)) : a \in A\}$  la diagonal de  $f$ . Notemos que  $\Delta(f) \subseteq A \times B$ . La asignación  $f \mapsto \Delta(f)$  define una función inyectiva  $\Delta : B^A \rightarrow \mathcal{P}(A \times B)$ . En efecto, sean  $f, g \in B^A$  con  $f \neq g$ . Entonces existe  $a_0 \in A$  tal que  $f(a_0) \neq g(a_0)$ ; de aquí se sigue que  $(a_0, f(a_0)) \neq (a_0, g(a_0))$ . Así,  $\Delta(f) \neq \Delta(g)$ .

Ahora, supongamos que  $A$  es no numerable, entonces

$$\text{card}(B^A) \leq \text{card}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}) \leq \text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})) = \text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) = 2^{\mathfrak{c}}.$$

Con (2), se sigue que  $2^{\mathfrak{c}} = \text{card}(B^A)$ . □

**Teorema 4.2.** Sean  $X$  un espacio topológico  $A \subseteq X$  separable tal que  $X \setminus A$  es numerable y  $\mathcal{C}_X^{-1}(\{A\}) \neq \emptyset$ . Entonces  $\text{card}(\mathcal{C}_X^{-1}(\{A\})) = \mathfrak{c}$ .

*Demostración.* Sea  $r_0 \in \mathbb{R}$  fijo y  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por  $g(x) = r_0$  para cada  $x \in X$ . No es difícil verificar que  $g$  es continua.

Como  $\mathcal{C}_X^{-1}(\{A\}) \neq \emptyset$ , sea  $f \in \mathcal{C}_X^{-1}(\{A\})$ . Afirmamos que  $f + r_0 \in \mathcal{C}_X^{-1}(\{A\})$ ; en efecto,  $f + r_0 : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Veamos que existe  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $A = C_{(f+r_0)}$ . Para hacerlo, supongamos que para cada  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A \neq C_{f+r_0}$ . Luego, existe  $x_0 \in X \setminus A$  tal que  $f + r_0$  es continua en  $x_0$ ; de aquí se sigue que  $f + r_0 - r_0$  es continua en  $x_0$ . Pero,  $f + r_0 - r_0 = f$ ; así,  $f$  es continua en  $x_0$ , lo cual nos da una contradicción. Por lo

tanto,  $\mathfrak{c} \leq \text{card}(\mathcal{C}_X^{-1}(\{A\}))$ .

Ahora, veamos que  $\text{card}(\mathcal{C}_X^{-1}(\{A\})) \leq \mathfrak{c}$ .

Como  $A$  es separable, éste posee un subconjunto denso numerable, digamos  $D$ .

Sea  $F : \mathcal{C}_X^{-1}(\{A\}) \rightarrow \mathbb{R}^{D \cup (X \setminus A)}$  la función dada por  $F(f) = f|_{D \cup (X \setminus A)}$ . Tenemos que  $F$  es inyectiva. En efecto, sean  $f, h \in \mathcal{C}_X^{-1}(\{A\})$  tal que  $F(f) = F(h)$ . Ahora, demostremos que  $f = h$ . Como,  $\text{dom}(f) = \text{dom}(h)$ . Basta demostrar que, para cada  $a \in X$ ,  $f(a) = h(a)$ . Sea  $a \in X$ .

(i) Si  $a \in D \cup (X \setminus A)$ , entonces  $f(a) = h(a)$ , puesto que,  $f(a) = F(f)(a) = F(h)(a) = h(a)$ .

(ii) Si  $a \notin D \cup (X \setminus A)$ , entonces  $a \in (X \setminus D) \cap A$ ; de aquí se sigue que  $a \in A$ .

Pero,  $f|_D = h|_D$  implica que  $f|_A = h|_A$  pues  $D$  es denso en  $A$ . Por lo tanto  $f(a) = h(a)$ ; como  $D \cup (X \setminus A)$  es numerable, por Teorema 4.1, se sigue que  $\text{card}(\mathcal{C}_X^{-1}(\{A\})) \leq \mathfrak{c}$ .  $\square$

**Corolario 4.1.** (*Jiaming C y Sam S*) Sean  $X$  un espacio métrico separable,  $A \subseteq X$  tal que  $X \setminus A$  es numerable y  $\mathcal{C}_X^{-1}(\{A\}) \neq \emptyset$ . Entonces  $\text{card}(\mathcal{C}_X^{-1}(\{A\})) = \mathfrak{c}$ .

*Demostración.* Basta demostrar que  $A$  contiene un subconjunto denso numerable.

Para hacerlo, sea  $D'$  un conjunto denso numerable en  $X$ . No es difícil verificar que la colección  $\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(q') : q' \in D', n \in \mathbb{N}\}$ , constituye una base numerable para  $X$ . Ahora; para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $q_n \in B_{\frac{1}{n}}(q') \cap A$ . Pongamos  $D = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Es claro que  $D$  es denso y numerable en  $A$ .  $\square$

En el siguiente teorema junto con el Teorema 3.1, se encuentra el soporte para dar una respuesta al caso general.

**Teorema 4.3.** Sea  $X$  un espacio métrico completo y  $D$  un conjunto denso numerable en  $X$ . Entonces  $\mathcal{C}_X^{-1}(\{D\}) = \emptyset$ .

*Demostración.* Por Teorema 3.1, es suficiente demostrar que  $D$  no es un conjunto  $G_\delta$ . Supongamos lo contrario, es decir,  $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ , donde  $\{O_n : n \in \mathbb{N}\}$  es una familia numerable de conjuntos abiertos en  $X$ .

Para cada  $q \in D$ , sea  $V_q = X \setminus \{q\}$ . Notemos que  $D \cap V_q = \emptyset$ ; además, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D \subseteq O_n$ . Es decir, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X = \overline{D} \subseteq \overline{O_n}$  y, como  $\overline{O_n} \subseteq X$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ ; se sigue que,  $\overline{O_n} = X$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Por otro lado; para cada  $x \in X$  y cada  $\epsilon > 0$ ,  $B_\epsilon(x) \cap (X \setminus \{q\}) \neq \emptyset$ . Luego, tanto los  $V_q$  como los  $O_n$  son conjuntos densos en  $X$ . Así, la colección

$$\mathcal{U} = \{O_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{V_q : q \in D\}$$

es una unión numerable de conjuntos abiertos y densos en  $X$ .

Puesto que  $X$  es Baire (por ser completo), la  $\bigcap \mathcal{U}$ , resulta ser un conjunto denso en  $X$ . Pero,  $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$  lo cual es absurdo (el vacío no es un conjunto denso en  $X$ ). Por tanto  $D$  no puede ser  $G_\delta$ .  $\square$

**Teorema 4.4.** Sea  $X$  un espacio métrico completo, separable y sin puntos aislados. Entonces  $X$  es un punto o cada conjunto abierto no vacío  $U$  en  $X$ , tiene cardinalidad  $\mathfrak{c}$ .

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es un espacio métrico completo, separable sin puntos aislados y con más de un punto. Esto implica que, para cada  $x \in X$ ,  $\{x\}$  es denso en ninguna parte, pues,  $\{x\}$  es un cerrado en  $X$  y para cada  $y \in X$  y  $\epsilon > 0$ ,

$B_\epsilon(y) \cap (X \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ .

Sea  $U$  un conjunto abierto no vacío en  $X$ . Tenemos que,  $\bar{U}$  es un espacio métrico completo sin puntos aislados y, con los mismos argumentos dados anteriormente, concluimos que, para cada  $x \in \bar{U}$ ,  $\{x\}$  es denso en ninguna parte en  $\bar{U}$ . También tenemos que, la  $F_r(U)$  es un conjunto denso en ninguna parte en  $\bar{U}$ .

Notemos que,

$$\bar{U} = Fr(U) \cup U = (\bar{U} \setminus U) \cup \bigcup_{x \in U} \{x\}.$$

Luego, si  $U$  es numerable, entonces  $\bar{U}$  es una unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Pero, esto contradice el Teorema de Baire. Así,  $U$  es no numerable. Esto demuestra que  $\aleph_0 < card(U)$ .

Para demostrar que  $card(U) \leq \mathfrak{c}$ , sea  $D$  un conjunto denso numerable en  $X$ . Sea

$$\mathcal{CS} = \{\{q_n\}_{n=1}^\infty \in D^{\mathbb{N}} : \{q_n\}_{n=1}^\infty \text{ es una sucesión convergente de puntos en } D\}.$$

Para cada  $\{q_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{CS}$  definamos la función  $L : \mathcal{CS} \rightarrow X$  como sigue:

$$L(q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n \in X.$$

Como  $\bar{D} = X$ , entonces para cada  $x \in \bar{D}$ , existe una sucesión  $\{q_n\}_{n=1}^\infty$  en  $D$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x$ . Este hecho implica que  $L$  es suprayectiva y de aquí se sigue que  $card(U) \leq card(X) \leq card(\mathcal{CS}) \leq card(D^{\mathbb{N}}) = (\aleph_0)^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ . Por lo tanto,  $card(U) = \mathfrak{c}$ .  $\square$

Una consecuencia inmediata de este teorema es lo que sigue.

**Corolario 4.2.** *Sea  $X$  un espacio métrico completo separable con más de un punto y sin puntos aislados. Sea  $D$  un conjunto denso numerable en  $X$ . Entonces  $X \setminus D$  tiene cardinalidad  $\mathfrak{c}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $card(X \setminus D) = \aleph_0$ , entonces  $card(X) = \aleph_0$ , ya que,  $X = (X \setminus D) \cup D$ . Pero, esto contradice al Teorema 4.4. Luego,  $card(X \setminus D) = \mathfrak{c}$ .  $\square$

**Corolario 4.3.** *Sean  $X$  un espacio métrico completo y separable,  $A$  un conjunto  $G_\delta$  en  $X$  con  $I \subseteq A$ . Entonces la función  $F : \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}^{X \setminus A} \rightarrow \mathcal{C}_X^{-1}(\{A\})$  es inyectiva.*

*Demostración.* Como  $X$  es un espacio métrico separable éste posee un subconjunto denso numerable  $D$ . Sea  $\epsilon : X \setminus A \rightarrow \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$  una función. Para cada  $x \in X \setminus A$ , sea  $n(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : x \in F_n\}$ , donde los  $F_n$  son como en el Teorema 3.2.

Definamos  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ \epsilon(x)^{n(x)} & \text{si } x \in D \cap (X \setminus A) \\ \epsilon(x)^{-n(x)} & \text{si } x \in (X \setminus D) \cap (X \setminus A). \end{cases}$$

Es claro que,  $A = C_{f_\epsilon}$  vea el procedimiento de la prueba del Teorema 3.2.

Sea  $F : \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}^{X \setminus A} \rightarrow \mathcal{C}_X^{-1}(\{A\})$  la función dada por  $F(\epsilon) = f_\epsilon$ . Afirmamos que  $F$  es una función inyectiva. En efecto, sean  $\epsilon, \rho \in \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}^{X \setminus A}$  tales que  $F(\epsilon) = F(\rho)$ . Demostremos que  $\epsilon = \rho$ . Como  $dom(\epsilon) = dom(\rho)$ , basta demostrar que, para cada  $x \in X \setminus A$ ,  $\epsilon(x) = \rho(x)$ . Para ello, supongamos que existe  $x_0 \in X \setminus A$  tal que  $\epsilon(x_0) \neq \rho(x_0)$ , entonces  $\epsilon(x_0)^{n(x_0)} \neq \rho(x_0)^{n(x_0)}$  si  $x_0 \in D$ . Si  $x_0 \notin D$ , entonces  $\epsilon(x_0)^{-n(x_0)} \neq \rho(x_0)^{-n(x_0)}$ ; ambos casos implican que  $f_\epsilon(x_0) \neq f_\rho(x_0)$ , es decir,  $f_\epsilon \neq f_\rho$ . Así,  $F(\epsilon) \neq F(\rho)$ , lo cual nos da una contradicción. Más aún,  $2^{card(X \setminus A)} \leq card(\mathcal{C}_X^{-1}(\{A\}))$ .  $\square$

Para finalizar damos un teorema que resume o presenta una respuesta al problema general planteado en esta sección.

**Teorema 4.5.** *Sean  $X$  un espacio métrico completo, separable y  $I \subseteq X$ . Sea  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Entonces*

$$\text{card}(\mathcal{C}_X^{-1}(\mathcal{A})) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{A} \text{ no contiene un conjunto } G_\delta \text{ que contenga } I, \\ 2^{\mathfrak{c}} & \text{si } \mathcal{A} \text{ contiene un conjunto } G_\delta \text{ } A \text{ con } I \subset A \text{ y} \\ & (X \setminus A) \text{ es no numerable,} \\ \mathfrak{c} & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

*Demostración.* Por Teorema 3.1 y Observación 3.1, para cada función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , tenemos que  $C_f$  es un conjunto  $G_\delta$  e  $I \subseteq C_f$ . Luego, si para cada  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A$  no es un conjunto  $G_\delta$  o  $I \not\subseteq A$ , entonces  $\mathcal{C}_X^{-1}(A) = \emptyset$ . De lo contrario, existe  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $A$  es un conjunto  $G_\delta$ ,  $I \subseteq A$  y  $\mathcal{C}_X^{-1}(\{A\}) \neq \emptyset$ . Si  $X \setminus A$  es numerable, entonces aplicamos el Corolario 4.1; si  $X \setminus A$  no es numerable, aplicamos el Corolario 4.3.  $\square$

#### REFERENCIAS

- [1] Ignacio L. Iribarren, *Topología de los Espacios Métricos*, Limusa, México, 1987.
- [2] Jiaming C y Sam S, *Cardinality of the set of real functions with a given continuity set*, Pi Mu Epsilon Journal, 12 (2008) 449-454.
- [3] Karel H y Thomas J, *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekker, Inc. Tercera ed, 1999.
- [4] Sung. S. Kim, *A caracterización of the set of points of continuity of a real function*, American Mathematical Monthly, 106 (1999) 258-259.

rmc-eli@hotmail.com, po\_pericce@hotmail.com



*Matemáticas y sus Aplicaciones 2*  
de Miguel Ángel García Ariza, Fernando Macías Romero  
y José Jacobo Oliveros Oliveros, editores  
se terminó de imprimir en octubre de 2013  
en los talleres de El Errante editor, S.A. de C.V.  
ubicado en Privada Emiliano Zapata 5947  
Col. San Baltazar Campeche, Puebla, Pue.

El tiraje consta de 240 ejemplares.



