



Fernando Macías Romero

Es profesor e investigador en el área de las matemáticas. Nació el 11 de noviembre de 1961 en Huauchingo, Puebla, México. Su pasión por las matemáticas lo llevó a estudiar la licenciatura, maestría y doctorado en esta noble área. Llegó a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP en el año 1979.

Además de contar con el reconocimiento y respeto de la comunidad de su facultad, recurrentemente es solicitado como árbitro de publicaciones y evaluador de proyectos, así como de programas de proyectos de estudio. Como formador de nuevo talento matemático ha dirigido 36 tesis de licenciatura, 9 de maestría y 7 de doctorado, todas ellas concluidas con éxito, así como varias tesis en proceso. Actualmente es Investigador Nacional reconocido por el SNI.

Durante varios años ha sido el organizador de las International Conference on Mathematics and its Applications, que brindan un espacio de encuentro a un vasto número de expositores, asistentes y expertos internacionales de todas las áreas de la matemática y también es editor y autor de varios libros de matemáticas como los de Matemáticas y sus aplicaciones.



Matemáticas y sus aplicaciones 18

Matemáticas y sus aplicaciones 18



Fernando Macías Romero  
David Herrera Carrasco

Editores



David Herrera Carrasco

Nació en Tapanatepec, Oaxaca, el 21 de abril de 1955. Llegó a la ciudad de Puebla a los seis años junto con su familia en una situación precaria.

Es un prestigioso profesor e investigador que estudió la licenciatura en matemáticas en la segunda generación de la refundación de la Escuela de Ciencias Físico Matemáticas de la Univesidad Autónoma de Puebla (UAP). En 1975 inició su labor docente como profesor de matemáticas en la Preparatoria Alfonso Calderón (UAP).

Desde 1981 a la fecha es profesor de tiempo completo en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemerita Universidad Autónoma de Puebla. Ha sido miembro organizador de las International Conference on Mathematics and its Applications. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Ha publicado varios artículos, en revistas internacionales. Es autor de varios libros (como coautor, con otros profesores de la FCFM); es editor de algunos libros. Además, ha concluido la dirección de tesis: 4 de doctorado, 7 de maestría y más de 26 de Licenciatura; todas en matemáticas a excepción de una en electrónica, y actualmente tiene en proceso varias asesorías de tesis de licenciatura y del posgrado.







# *Matemáticas y sus aplicaciones* *18*



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Fernando Macías Romero  
David Herrera Carrasco  
Editores

Primera edición: 2022

ISBN: 978-607-525-858-4

DR © Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
4 Sur 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000  
Teléfono: 01 (222) 2 29 55 00  
[www.buap.mx](http://www.buap.mx)

Dirección General de Publicaciones  
2 Norte 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000  
Teléfonos: 01 (222) 246 85 59 y 01 (222) 229 55 00 ext. 5768 y 5764  
<http://publicaciones.buap.mx/>

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas  
Av. San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel, Edificio FM1-101B  
Ciudad Universitaria, Puebla, Pue. México. CP. 72570  
Teléfonos: 01 (222) 229 55 00 ext. 7552  
[www.fcfm.buap.mx](http://www.fcfm.buap.mx)

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA • *Rector*: Ma.  
Lilia Cedillo Ramírez • *Secretario General*: José Manuel Alonso Orozco •  
*Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura*: José Carlos Bernal Suárez •  
*Director General de Publicaciones*: Luis Antonio Lucio Venegas • *Directora de  
la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas*: Martha Alicia Palomino Ovando

Hecho en México  
Made in Mexico

# Matemáticas y sus aplicaciones 18

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de investigación realizados para acrecentar el International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA), FCFM, BUAP.

## Editores

Fernando Macías Romero  
David Herrera Carrasco

## Comité científico internacional

Ermínia de Lourdes Campello Fanti (UNESP, BRA), Hugo Adán Cruz Suárez (BUAP), Luis Miguel de la Cruz Salas (UNAM), Antonio Díaz Ramos (UMA, ESP), Sina Greenwood (UA,NZ), Gerardo Hernández Valdez (BUAP), Miguel Antonio Jiménez Pozo (BUAP), Judy Kennedy (LU, USA), Christian Lehn (TUC, DE), Antonio de Jesús Libreros López (BUAP), Edgar Martínez Moro (UVA, ESP), Fernando Macías Romero (BUAP), Daria Michalik (UKSW, PL), Nayeli Berenice Quiñones Baldazo (BUAP), Abigail Rodríguez Nava (UAM), José Gregorio Rodríguez Nieto (UNC, CO), Saúl Alonso Zavala Ortiz (I.T. Ensenada).



# Contenido

**Presentación** 1

## Álgebra

**Capítulo 1. Matroides: algunas definiciones equivalentes** 5

*Mireya Díaz López, Carlos Alberto López Andrade, Carlos Guillén Galván*

## Análisis matemático

**Capítulo 2. Funciones semi-Lipschitz** 43

*Luz del Carmen Álvarez Marín, Héctor Noé Flores Meza, José Margarito Hernández Morales*

## Probabilidad y Estadística

**Capítulo 3. Opciones europeas sobre el bitcoin: valuación y cobertura por expectativa de volatilidad** 77

*Ana Lorena Jiménez Preciado, María Teresa V. Martínez Palacios, Ambrosio Ortiz Ramírez*

## Topología



<b>Capítulo 4. Continuos <math>\frac{1}{n}</math>-homogéneos con tamaño menor que <math>n</math></b>	109
<i>Felipe de Jesús Aguilar Romero, Patricia Domínguez Soto, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero</i>	
<b>Capítulo 5. La <math>\theta_m</math>-gráfica tiene hiperespacio <math>n</math>-ésimo producto simétrico suspensión único</b>	133
<i>David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías Romero, Germán Montero Rodríguez</i>	
<b>Capítulo 6. Propiedades básicas de los continuos casi enrejados y enrejados</b>	157
<i>David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Leonardo Ramírez Aparicio</i>	
<b>Capítulo 7. Una breve introducción a las propiedades de hiperespacios de un espacio métrico</b>	181
<i>David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Esaú Alejandro Pérez Rosales</i>	
<b>Capítulo 8. Una introducción a la dinámica de la familia senoidal y dos perturbaciones de ella</b>	213
<i>Laura Cano Cordero, Patricia Domínguez Soto, Gabriel Martínez Ramos, María de Jesús López Toriz</i>	
<b>Índice de autores</b>	233

# Presentación

Las International Conferences On Mathematics and its Applications (CIMA) llevan ya 16 años realizándose, año tras año. Aquí participa como organizadora la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) en compañía de sus estudiantes. Contamos con la participación de matemáticos de nivel internacional en estos CIMA. Esta es la razón por la cual editamos el libro que tienen en sus manos. La felicidad que propone este libro por su divulgación, investigación e intercambio de ideas se debe a la generosidad de muchísimos matemáticos que participaron en el denominado *Eighth International Conference on Mathematics and its Applications* (8CIMA, 2021), un esfuerzo profesional consolidado que ha permitido la participación de grandes personajes de diversas universidades, nacionales y extranjeras, tanto en el desarrollo del 8CIMA, 2021 como en su memoria escrita, que es el presente libro. La base ha sido un comité organizador especializado, entusiasta y vigoroso emanado de la Academia de Matemáticas de la FCFM de la BUAP. Es por el amor a la matemática que ha nacido este ejemplar que nos brinda la sabiduría necesaria para mostrarles parte de nuestros quehaceres cotidianos.

Los capítulos de este libro están agrupados por secciones de acuerdo al área temática. Dichos capítulos fueron sometidos a arbitraje riguroso.

Agradecemos, con toda el alma, a todos los árbitros su amabilidad, gentileza, dedicación y trabajo científico.

*Fernando Macías Romero*  
*David Herrera Carrasco*  
*Editores*



---

# Álgebra

---



# Capítulo 1

## Matroides: algunas definiciones equivalentes

Mireya Díaz López, Carlos Alberto López Andrade,  
Carlos Guillén Galván  
FCFM, BUAP

### Resumen

La teoría de matroides surgió en los años 30's del siglo XX. Hassler Whitney desarrolló una noción de independencia y rango en el contexto de la teoría de grafos y observó similitudes con los conceptos de independencia lineal y dimensión de álgebra lineal. Después de identificar las propiedades de independencia abstracta, Whitney introdujo el concepto de matroide en 1935 en [6] y se inspiró en la palabra matriz para crearlo. Otros matemáticos contemporáneos de Whitney también contribuyeron al nacimiento de la teoría de matroides. En 1937, B. L. van der Waerden, en la segunda edición de *Moderne Algebra*, estableció tres propiedades fundamentales que son comunes a la dependencia algebraica y lineal, descubriendo con ello el concepto de matroide de manera independiente a Whitney. En este capítulo se estudiarán los conceptos fundamentales de la teoría de matroides y se establecerán las equivalencias entre algunas de las definiciones de matroide.

## 1 Introducción

Una importante característica de los matroides es que pueden definirse de muchas formas diferentes pero equivalentes. Desde su artículo fundador, Whitney estableció cuatro definiciones equivalentes de matroides. Esto podría parecer molesto, pero es una de las principales cualidades que posee esta teoría, ya que puede preferirse una definición sobre otra, dependiendo del problema que quiera abordarse.

En las secciones siguientes se enunciarán algunas de las principales y más útiles definiciones de matroide. Se tomará como primera definición aquella

que abstrae las propiedades que satisface un conjunto de vectores linealmente independiente. Esta definición, por tanto, proviene del álgebra lineal. Posteriormente, se definirán nuevos conceptos y se demostrarán algunas de las propiedades que dichos conceptos satisfacen. A continuación se destacarán aquellas propiedades que serán suficientes para dar una definición alternativa del concepto de matroide y se probará la equivalencia de las definiciones. El desarrollo de esta teoría estará acompañada de algunos ejemplos y observaciones. Para el desarrollo de este capítulo de libro se tomaron [2] y [3] como principales referencias. A lo largo de este capítulo  $[n]$  denotará el conjunto de números naturales menores o iguales a  $n$ , es decir,  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

## 2 Definición por conjuntos independientes

Sea  $V$  un espacio vectorial. Los subconjuntos linealmente independientes de  $V$  cumplen las siguientes propiedades:

- a) Todo subconjunto de un conjunto linealmente independiente también es linealmente independiente.
- b) Si  $I$  y  $J$  son conjuntos linealmente independientes tales que  $|I| < |J|$ , entonces existe  $x \in J \setminus I$  tal que  $I \cup \{x\}$  es linealmente independiente.

A continuación se presenta una definición de conjunto independiente en grafos que permitirá establecer una importante conexión con la independencia lineal en álgebra lineal.

**Definición 2.1.** Sea  $G$  un grafo finito no dirigido, no necesariamente simple, con conjunto de aristas  $E$  y conjunto de vértices  $V$ . Un conjunto  $S \subseteq E$  es *independiente* si no contiene ciclos y es dependiente en otro caso.

Nótese que ésta no es la definición clásica de independencia de la teoría de grafos, la cual dice que un conjunto de vértices en un grafo es independiente si ninguno de sus vértices es adyacente a otro. Sin embargo, esta nueva definición es útil pues resulta que las propiedades a) y b) también se cumplen para los conjuntos de aristas independientes:

- A) Todo subconjunto de un conjunto acíclico de aristas es acíclico.

- B) Si  $I$  y  $J$  son dos conjuntos de aristas acíclicos y  $|I| < |J|$ , entonces existe  $e \in J \setminus I$  tal que  $I \cup \{e\}$  es acíclico.

Anteriormente se mencionó que Whitney y van der Waerden se basaron en las propiedades que cumplen los conjuntos linealmente independientes en álgebra lineal y teoría de grafos para definir el concepto de matroide. Dichas propiedades son justamente los incisos a), b), y A), B), respectivamente. La primera definición que se dará en este capítulo va en este sentido y se eligió porque está basada en resultados conocidos, y por ello puede resultar más familiar para la mayoría de los lectores.

**Definición 2.2** (Por conjuntos independientes). Un *matroide*  $M$  es un par ordenado  $(E, \mathcal{I})$  que consiste de un conjunto finito  $E$  y una familia  $\mathcal{I}$  de subconjuntos de  $E$  que satisface las tres condiciones siguientes:

- (I1) (No trivialidad)  $\mathcal{I} \neq \emptyset$ .
- (I2) (Cerrado bajo subconjuntos) Si  $I \in \mathcal{I}$  y  $J \subseteq I$ , entonces  $J \in \mathcal{I}$ .
- (I3) (Aumento de independencia) Si  $I, J \in \mathcal{I}$  y  $|I| < |J|$ , entonces existe un elemento  $e \in J \setminus I$  tal que  $I \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ .

En este caso es usual referirse a  $M$  como matroide sobre  $E$ . Los elementos de  $\mathcal{I}$  son los *conjuntos independientes* de  $M$  y  $E$  es el *conjunto subyacente* de  $M$ . Cuando es necesario se denota a  $\mathcal{I}$  con  $\mathcal{I}(M)$  y a  $E$  con  $E(M)$ . Un subconjunto de  $E$  que no pertenece a  $\mathcal{I}$  se llama *conjunto dependiente*.

Puede darse una definición de matroide muy similar a la Definición 2.2 con ligeras modificaciones a las propiedades (I1) e (I3), que puede resultar más práctica al momento de verificar si un par ordenado es un matroide. Esto se establece en el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.** Sean  $E$  un conjunto finito e  $\mathcal{I}$  una familia de subconjuntos de  $E$ . Entonces  $\mathcal{I}$  es la familia de conjuntos independientes de un matroide si y sólo si satisfacen las tres condiciones siguientes:

- (J1)  $\emptyset \in \mathcal{I}$ .
- (J2) Si  $I \in \mathcal{I}$  y  $J \subseteq I$ , entonces  $J \in \mathcal{I}$ .



(J3) Si  $I, J \in \mathcal{I}$  son tales que  $|J| = |I| + 1$ , entonces existe un elemento  $x \in J \setminus I$  que cumple que  $I \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ .

*Demostración.* Sea  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroide. Veamos que  $\mathcal{I}$  verifica las propiedades (J1) y (J3). Dado que  $\mathcal{I}$  satisface la condición (I1),  $\mathcal{I} \neq \emptyset$ . Así, existe un conjunto independiente, al que llamamos  $X$ . Como también se cumple (I2) y tenemos que  $\emptyset \subseteq X$ , concluimos que  $\emptyset \in \mathcal{I}$ , es decir, se satisface (J1). La condición (J3) es un caso particular de (I3) y por lo tanto, se verifica. Para la suficiencia supongamos que  $E$  es un conjunto finito y que  $\mathcal{I}$  es una familia de subconjuntos de  $E$  que satisface las propiedades (J1), (J2) y (J3). Veamos que  $M = (E, \mathcal{I})$  es un matroide. Por (J1),  $\emptyset \in \mathcal{I}$ , entonces se verifica (I1). Ahora, sean  $I, J \in \mathcal{I}$  con  $|I| < |J|$ . Como  $I$  y  $J$  son conjuntos finitos, entonces existe  $I_1 \subseteq J$  tal que  $|I_1| = |I| + 1$ . Por (J2),  $I_1 \in \mathcal{I}$ , luego por (J3) existe  $x \in I_1 \setminus I$  tal que  $I \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ . Más aún,  $x \in J \setminus I$ . Por lo tanto,  $M$  es un matroide. □

La equivalencia entre los conjuntos de propiedades (I1), (I2), (I3) y (J1), (J2), (J3) no puede establecerse probando de manera independiente que las parejas (I1), (J1) e (I3), (J3) son proposiciones equivalentes. Para verificar esto sea  $E = \{a, b, c\}$ ,  $\mathcal{I} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}\}$ . La condición (J3) se satisface (no existe una pareja de elementos  $I, J$  de  $\mathcal{I}$  que satisfagan  $|J| = |I| + 1$ ). Sin embargo, (I3) no se satisface, pues los conjuntos  $\{a\}$  y  $\{a, b, c\}$  cumplen que  $|\{a\}| < |\{a, b, c\}|$  y no existe un elemento  $x \in \{a, b, c\} \setminus \{a\} = \{b, c\}$  tal que  $\{a\} \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ .

A continuación se muestran dos ejemplos de matroides. Es importante tenerlos presentes porque son básicos para comprender los conceptos y resultados que se darán en las secciones posteriores.

**Ejemplo 2.4.** Sean  $V$  un espacio vectorial sobre un campo  $\mathbb{F}$  y  $E$  un subconjunto finito de  $V$ . Defínase  $\mathcal{I}$  como la colección de subconjuntos de  $E$  que son linealmente independientes sobre  $\mathbb{F}$ . Como  $\emptyset$  es un conjunto linealmente independiente entonces  $\emptyset \in \mathcal{I}$ . Además,  $\mathcal{I}$  satisface las propiedades a) y b) mencionadas anteriormente. Por lo tanto,  $M = (E, \mathcal{I})$  es un matroide y se llama *matroide vector* o *matroide representable* y se dice que  $M$  es *representable sobre  $\mathbb{F}$* . Este es uno de los ejemplos que motivaron la definición de matroide.

**Ejemplo 2.5.** Sean  $n$  y  $k$  enteros no negativos tales que  $k \leq n$ . Sea  $E$  un conjunto de cardinalidad  $n$ . Tómesese  $\mathcal{I}$  como la familia de todos los subconjuntos de  $E$  que tienen una cardinalidad menor o igual a  $k$ . Como  $\emptyset \subseteq E$  y

$|\emptyset| = 0 \leq k$ , entonces  $\emptyset \in \mathcal{I}$ . Ahora, supóngase que  $I \in \mathcal{I}$  y  $J \subseteq I$ . Entonces  $|I| \leq k$ ,  $|J| \leq |I|$ , y por tanto  $|J| \leq k$ , de donde  $J \in \mathcal{I}$ . Finalmente, sean  $I, J \in \mathcal{I}$  tales que  $|I| < |J|$ . Como  $|I| < |J|$ , entonces existe un elemento  $x \in J \setminus I$  y se tiene que  $|I \cup \{x\}| \leq |J|$ . Dado que  $J \in \mathcal{I}$ , verifica que  $|J| \leq k$  y por ello  $|I \cup \{x\}| \leq |J| \leq k$ . Por consiguiente  $I \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ . Así que  $M$  es un matroide.  $M$  se llama el *matroide uniforme* de rango  $k$  sobre un conjunto de  $n$  elementos y se denota por  $U_{k,n}$ . El matroide  $U_{n,n}$  se llama *matroide libre*. Nótese que en el matroide libre todos los subconjuntos de  $E$  son independientes, es decir,  $\mathcal{I} = \mathcal{P}(E)$ .

Es igual de importante saber identificar lo que sí es un matroide de aquello que no lo es. Es por ello que en el siguiente ejemplo se presenta una familia de conjuntos que no satisface la condición (I3) y por tanto no es un matroide.

**Ejemplo 2.6.** Sean  $E = \{a, b, c, d\}$ ,  $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ . Se puede ver claramente que  $\mathcal{I}$  satisface las propiedades (I1) e (I2), sin embargo, no cumple con (I3). Para comprobar esto, tómesese los conjuntos  $\{a\}$  y  $\{c, d\}$  de la familia  $\mathcal{I}$ . Puede verse que no existe elemento  $x$  en  $\{c, d\} \setminus \{a\}$  tal que  $\{a\} \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ , ya que ni  $\{a, c\}$  ni  $\{a, d\}$  son elementos de  $\mathcal{I}$ . Por lo tanto,  $\mathcal{I}$  no es una familia de conjuntos independientes.

### 3 Definición por bases

Sea  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroide. Para conocer por completo a  $M$  es necesario poder identificar todos sus conjuntos independientes. Si  $M$  posee una gran cantidad de conjuntos independientes dar una lista exhaustiva de todos ellos podría resultar una tarea complicada. Sin embargo, existe una manera de facilitar este trabajo. Sea  $I$  un conjunto independiente de  $M$ . Si no existe un conjunto independiente que contenga propiamente a  $I$  entonces  $I$  es un conjunto independiente maximal. En otro caso, supóngase que  $I_1 \in \mathcal{I}$  es tal que  $I \subsetneq I_1$ . Si no existe un conjunto independiente que contenga propiamente a  $I_1$  entonces  $I_1$  es independiente maximal. De lo contrario existe un conjunto independiente  $I_2$  diferente a  $I_1$  que lo contiene. Podemos continuar este proceso, pero no de manera indefinida, pues como  $E$  es finito también lo es su conjunto potencia. Así que después de un número finito de pasos hallaremos un conjunto independiente que contiene a  $I$  y que no está contenido

propriadamente en otro conjunto independiente, es decir, independiente maximal. De aquí concluimos que todo conjunto independiente está contenido en un conjunto independiente maximal. Además, todo subconjunto de un conjunto independiente es independiente por (I2). Así que una manera efectiva de enlistar todos los conjuntos independientes es proporcionar una lista de los conjuntos independientes maximales. De aquí la importancia de definir el siguiente concepto.

**Definición 3.1.** Sea  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroide.  $B$  es una *base* del matroide  $M$  si  $B$  es un conjunto independiente maximal. Se denotará el conjunto de las bases de  $M$  por  $\mathcal{B}$ .

Enseguida se enunciarán algunas de las propiedades más importantes que satisface el conjunto de bases de un matroide. Dichas propiedades permitirán dar una definición de matroide partiendo de este nuevo concepto. Para probarlas se empleará el siguiente lema.

**Lema 3.2.** *Sea  $M$  un matroide. Si  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , entonces  $|B_1| = |B_2|$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $B_1$  y  $B_2$  son bases de  $M$  tales que  $|B_1| \neq |B_2|$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $|B_1| < |B_2|$ . Ya que  $B_1$  y  $B_2$  son conjuntos independientes, por (I3) existe  $e \in B_2 \setminus B_1$  tal que  $B_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ , de modo que  $B_1 \cup \{e\}$  es un conjunto independiente que contiene propriadamente a  $B_1$ , lo cual contradice que  $B_1$  sea base. Por lo tanto,  $B_1$  y  $B_2$  tienen la misma cardinalidad.  $\square$

Concluimos entonces que cualesquiera dos bases de un matroide  $M$  tienen la misma cardinalidad.

**Teorema 3.3.** *El conjunto de bases  $\mathcal{B}$  de un matroide  $M$  verifica las siguientes propiedades:*

(B1) (No trivialidad)  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ .

(B2) (Familia Sperner o clutter) Si  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  y  $B_1 \subseteq B_2$ , entonces  $B_1 = B_2$ .

(B3) (Intercambio débil en bases) Si  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  y  $x \in B_1 \setminus B_2$ , entonces existe un elemento  $y \in B_2 \setminus B_1$  tal que  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ .

*Demostración.* Sabemos que  $\emptyset$  es un conjunto independiente. Entonces existe un conjunto independiente maximal  $B$  que lo contiene. Por la definición de  $\mathcal{B}$ ,  $B \in \mathcal{B}$  y por lo tanto (B1) se cumple. Tomemos  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  tales que  $B_1 \subseteq B_2$ . Si suponemos que  $B_1 \subsetneq B_2$  entonces  $|B_1| < |B_2|$ , lo cual no puede ocurrir por el Lema 3.2. Entonces  $B_1 = B_2$ . Para probar que se cumple (B3), sean  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  y  $x \in B_1 \setminus B_2$ . Como  $B_1 \setminus \{x\} \subseteq B_1$  y  $B_1 \in \mathcal{I}$ , por (I2) tenemos que  $B_1 \setminus \{x\} \in \mathcal{I}$ . Por el Lema 3.2,  $|B_1| = |B_2|$ , luego  $|B_1 \setminus \{x\}| < |B_2|$ . Por (I3) existe un elemento  $y \in B_2 \setminus (B_1 \setminus \{x\})$  tal que  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{I}$ . Queremos probar que  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$  es una base, así que sólo falta probar que es conjunto independiente maximal. Tenemos que  $|(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}| = |B_1|$ . Si suponemos que  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \notin \mathcal{B}$ , debe existir  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \subsetneq B_3$  y por tanto  $|B_1| = |(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}| < |B_3|$ , lo cual contradice el Lema 3.2. Concluimos que  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ , por lo que (B3) se verifica.  $\square$

La propiedad (B2) manifiesta que  $\mathcal{B}$  es una familia Sperner o clutter, es decir, que los conjuntos de dicha familia no se contienen entre sí. La propiedad (B3) expresa que dadas dos bases  $B_1$  y  $B_2$ , para un elemento  $x \in B_1 \setminus B_2$  existe un elemento en la otra diferencia de conjuntos  $y \in B_2 \setminus B_1$  tal que  $x$  puede “intercambiarse” por  $y$  para obtener nuevamente una base, es decir,  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$  (de ahí el nombre de propiedad de intercambio débil en bases). Aplicando la propiedad (B3) al elemento  $y$  se tiene que existe  $z \in B_1 \setminus B_2$  tal que  $(B_2 \setminus \{y\}) \cup \{z\} \in \mathcal{B}$ . Sin embargo, dicha propiedad no afirma algo acerca del conjunto  $(B_2 \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ . El Teorema 3.4 es una versión más fuerte de la propiedad de intercambio débil en bases, pues asegura que siempre es posible que se dé un intercambio doble, es decir, que para cada elemento de  $B_1 \setminus B_2$  es posible encontrar un elemento en  $B_2 \setminus B_1$  de tal forma que pueden intercambiarse (el primero por el segundo y el segundo por el primero) para obtener dos bases. En muchas ocasiones bastará con tener la primera versión de esta propiedad, pero se menciona a continuación ya que será de utilidad más adelante.

**Teorema 3.4.** ([2, pág. 91]) *Sea  $M$  un matroide.  $\mathcal{B}$  satisface la siguiente propiedad:*

(B3\*) *Si  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  y  $x \in B_1 \setminus B_2$ , entonces existe un elemento  $y \in B_2 \setminus B_1$  de tal manera que  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}, (B_2 \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{B}$ .*

La propiedad (B3\*) se conoce como propiedad de *Intercambio Fuerte en Bases*.

Como pudo apreciarse, el Lema 3.2 fue crucial en la demostración del Teorema 3.3. En el Teorema 3.5 se verá que dicho lema puede emplearse para formular una nueva caracterización de matroide. Para ello identificaremos a la propiedad enunciada en el Lema 3.2 como (B2\*).

**Teorema 3.5.** *Sean  $E$  un conjunto finito y  $\mathcal{B}$  una familia de subconjuntos de  $E$ . La familia  $\mathcal{B}$  satisface (B1), (B2) y (B3) si y sólo si satisface (B1), (B2\*) y (B3).*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{B}$  una familia que cumple (B1), (B2) y (B3) y sean  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ,  $B_1 \neq B_2$ . Supongamos que  $|B_1| < |B_2|$ .  $B_1$  y  $B_2$  pueden escribirse como las siguientes uniones disjuntas:  $B_1 = (B_1 \setminus B_2) \cup (B_1 \cap B_2)$ ,  $B_2 = (B_2 \setminus B_1) \cup (B_1 \cap B_2)$ . Como  $|B_1| < |B_2|$ , entonces debe ocurrir que  $|B_1 \setminus B_2| < |B_2 \setminus B_1|$ . Si  $B_1 \setminus B_2 = \emptyset$ , entonces  $B_1 \subseteq B_2$ , y por (B2),  $B_1 = B_2$ , lo cual es una contradicción. Así que  $B_1 \setminus B_2 \neq \emptyset$ . Sea  $n = |B_1 \setminus B_2|$ . Tomemos  $x_1 \in B_1 \setminus B_2$ . Por (B3) existe  $y_1 \in B_2 \setminus B_1$  tal que  $B_3 = (B_1 \setminus \{x_1\}) \cup \{y_1\} \in \mathcal{B}$ . Sea  $x_2 \in B_3 \setminus B_2$ , entonces  $x_2 \in (B_1 \setminus B_2) \setminus \{x_1\}$ . Por (B3) existe  $y_2 \in B_2 \setminus B_3$  tal que  $B_4 = (B_3 \setminus \{x_2\}) \cup \{y_2\} \in \mathcal{B}$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned} B_2 \setminus B_3 &= B_2 \cap [(B_1 \setminus \{x_1\}) \cup \{y_1\}]^C = B_2 \cap [(B_1 \cap \{x_1\})^C \cap \{y_1\}^C] \\ &= B_2 \cap [(B_1^C \cup \{x_1\}) \cap \{y_1\}^C] = [(B_2 \cap B_1^C) \cup (B_2 \cap \{x_1\})] \cap \{y_1\}^C \\ &= (B_2 \setminus B_1) \setminus \{y_1\} \end{aligned}$$

esto es,  $B_2 \setminus B_3 = (B_2 \setminus B_1) \setminus \{y_1\}$ , por lo que  $y_2 \in (B_2 \setminus B_1) \setminus \{y_1\}$ . Nótese que  $x_1, x_2, y_1$  y  $y_2$  son todos diferentes entre sí. Por eso y por los conjuntos en los cuales se tomaron tales elementos se tiene que

$$B_4 = [[(B_1 \setminus \{x_1\}) \cup \{y_1\}] \setminus \{x_2\}] \cup \{y_2\} = (B_1 \setminus \{x_1, x_2\}) \cup \{y_1, y_2\}.$$

Tomemos  $x_3 \in B_4 \setminus B_2$ , entonces  $x_3 \in (B_1 \setminus B_2) \setminus \{x_1, x_2\}$ . Por (B3) existe  $y_3 \in B_2 \setminus B_4$  tal que  $B_5 = (B_4 \setminus \{x_3\}) \cup \{y_3\} \in \mathcal{B}$ . Puede verse que  $B_2 \setminus B_4 = (B_2 \setminus B_1) \setminus \{y_1, y_2\}$ . Además,

$$B_5 = [[(B_1 \setminus \{x_1, x_2\}) \cup \{y_1, y_2\}] \setminus \{x_3\}] \cup \{y_3\} = (B_1 \setminus \{x_1, x_2, x_3\}) \cup \{y_1, y_2, y_3\}.$$

Realizando este proceso  $n$  veces encontramos  $x_1, x_2, \dots, x_n \in B_1 \setminus B_2$  todos diferentes entre sí y  $y_1, y_2, \dots, y_n \in B_2 \setminus B_1$  también diferentes entre sí tales

que  $B_{n+2} = (B_1 \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}) \cup \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \in \mathcal{B}$ . Recordemos que  $|B_1 \setminus B_2| = n$ , entonces ocurre que  $B_1 \setminus B_2 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , y como  $B_1 = (B_1 \setminus B_2) \cup (B_1 \cap B_2)$ , entonces  $B_1 \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = B_1 \setminus (B_1 \setminus B_2) = B_1 \cap B_2$ , lo cual implica que  $B_{n+2} = (B_1 \cap B_2) \cup \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subseteq B_2$  y por (B2) se concluye que  $B_{n+2} = B_2$ , pero  $|B_{n+2}| = |B_1|$  y estamos suponiendo que  $|B_1| < |B_2|$ , entonces  $|B_{n+2}| < |B_2|$ , lo cual es una contradicción. Similarmente se prueba que no puede ocurrir que  $|B_1| > |B_2|$ . Entonces  $|B_1| = |B_2|$ , es decir, (B2\*) es verdadera.

Para demostrar la suficiencia supongamos que  $\mathcal{B}$  es una familia de subconjuntos de un conjunto finito  $E$  que satisface las propiedades (B1), (B2\*) y (B3). Veamos que también satisface la propiedad (B2). Para ello sean  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  tales que  $B_1 \subseteq B_2$ . No puede ocurrir que  $B_1 \subsetneq B_2$ , ya que por (B2\*),  $|B_1| = |B_2|$ . Entonces la igualdad de los conjuntos se verifica y por lo tanto, (B2) se cumple.  $\square$

Hasta este momento se ha abordado la manera mediante la cual pueden conocerse las bases de un matroide considerando sus conjuntos independientes, y las propiedades que dichas bases cumplen. Es de interés saber si puede construirse un matroide a partir de una familia  $\mathcal{B}$  que cumple (B1), (B2) y (B3). La respuesta es sí. Esto se logra formando a partir de  $\mathcal{B}$  una familia  $\mathcal{I}$  de lo que serán los conjuntos independientes y demostrando que dicha familia satisface las propiedades (I1), (I2) e (I3). El punto clave de esta construcción es saber cómo definir la familia  $\mathcal{I}$ . Las bases se definieron como los conjuntos independientes maximales, luego todo conjunto independiente está contenido en una base y cualquier subconjunto de una base es un conjunto independiente, así que de manera natural  $\mathcal{I}$  se toma como el conjunto de todos los subconjuntos de los elementos de  $\mathcal{B}$ . Esto se aborda en el Teorema 3.6.

**Teorema 3.6.** *Sean  $E$  un conjunto finito y  $\mathcal{B}$  una familia de subconjuntos de  $E$  que satisface (B1), (B2) y (B3). Se define el conjunto  $\mathcal{I} = \{I \subseteq E \mid \exists B \in \mathcal{B} : I \subseteq B\}$ . Entonces  $M = (E, \mathcal{I})$  es un matroide que tiene a  $\mathcal{B}$  como su colección de bases.*

*Demostración.* Por (B1),  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ , entonces existe  $B \in \mathcal{B}$ . Como  $B \subseteq B$ , entonces  $B \in \mathcal{I}$ , esto es, (I1) es verdadera. Ahora, sea  $I \in \mathcal{I}$ . Entonces existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $I \subseteq B$ . Luego, si  $J \subseteq I$ , por transitividad de la contención de conjuntos tenemos que  $J \subseteq B$ , y por tanto  $J \in \mathcal{I}$ . Entonces (I2) se cumple.

Sean  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$  tales que  $|I_1| < |I_2|$  y supongamos que (I3) no se cumple, es decir, que para todo  $x \in I_2 \setminus I_1$ ,  $I_1 \cup \{x\} \notin \mathcal{I}$ . Como  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ , existen  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  tales que  $I_1 \subseteq B_1$  e  $I_2 \subseteq B_2$ . Queremos analizar el conjunto

Figura 1: Diagrama de Venn de las relaciones entre  $B_1, B_2, I_1$  e  $I_2$ .

coloreado de negro de la Figura 1, es decir, el conjunto  $(I_2 \cap B_1) \setminus I_1$ . Si  $(I_2 \cap B_1) \setminus I_1 \neq \emptyset$ , entonces existe  $x \in (I_2 \cap B_1) \setminus I_1$ , esto es,  $x \in I_2 \setminus I_1$  y  $x \in B_1$ , por lo que  $I_1 \cup \{x\} \subseteq B_1$ , de donde  $I_1 \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ , lo cual contradice nuestra suposición. Por lo tanto,  $(I_2 \cap B_1) \setminus I_1 = \emptyset$ , o expresado de otra forma,  $I_2 \cap (B_1 \setminus I_1) = \emptyset$ , y como  $B_1 \cap I_2 = (I_2 \cap I_1) \cup (I_2 \cap (B_1 \setminus I_1))$  concluimos que  $B_1 \cap I_2 = I_1 \cap I_2$ . Por otro lado, puede existir más de un elemento en  $\mathcal{B}$  que contenga a  $I_2$ . Tomaremos a  $B_2$  de tal forma que  $|B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)|$  sea minimal (ver en la Figura 1 región coloreada de gris). Afirmamos que  $B_2 \setminus (I_2 \cup B_1) = \emptyset$ . Si existe  $x \in B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)$ , en particular  $x \in B_2 \setminus B_1$ , luego aplicando la propiedad (B3) a  $B_2$  y a  $B_1$  (en ese orden), existe  $y \in B_1 \setminus B_2$  tal que  $B_3 = (B_2 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ . Veamos que  $B_3 \setminus (I_2 \cup B_1) \subsetneq B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)$ .

$$\begin{aligned}
 B_3 \setminus (I_2 \cup B_1) &= [(B_2 \setminus \{x\}) \cup \{y\}] \setminus (I_2 \cup B_1) \\
 &= [(B_2 \cap \{x\}^C) \cup \{y\}] \setminus (I_2 \cup B_1) \\
 &= [(B_2 \cup \{y\}) \cap (\{x\}^C \cup \{y\})] \setminus (I_2 \cup B_1) \\
 &= [(B_2 \cup \{y\}) \cap \{x\}^C] \setminus (I_2 \cup B_1) \\
 &= [(B_2 \cup \{y\}) \cap \{x\}^C] \cap (I_2 \cup B_1)^C \tag{1} \\
 &= [(B_2 \cup \{y\}) \cap (I_2 \cup B_1)^C] \cap \{x\}^C \\
 &= [(B_2 \cap (I_2 \cup B_1)^C) \cup (\{y\} \cap (I_2 \cup B_1)^C)] \cap \{x\}^C \\
 &= [(B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)) \cup (\{y\} \cap (I_2 \cup B_1)^C)] \cap \{x\}^C \\
 &= [B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)] \setminus \{x\} \subsetneq [B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)]
 \end{aligned}$$

La última igualdad se consigue ya que  $y \in B_1$  y la contención propia se da puesto que  $x \in B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)$ . De aquí tenemos que  $|B_3 \setminus (I_2 \cup B_1)| < |B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)|$ . Como  $I_2 \subseteq B_2$  y  $x \notin I_2$  entonces  $I_2 \subseteq (B_2 \setminus \{x\}) \cup \{y\} = B_3$ . Entonces  $B_3$  es un elemento de  $\mathcal{B}$  que contiene a  $I_2$  y tal que  $|B_3 \setminus (I_2 \cup B_1)| < |B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)|$ , lo cual contradice la elección de  $B_2$ . Concluimos entonces que  $B_2 \setminus (I_2 \cup B_1) = \emptyset$ . Usando un argumento similar, podemos elegir  $B_1$  de tal forma que  $B_1 \setminus (I_1 \cup B_2) = \emptyset$ . Ahora bien, como  $B_2 \setminus B_1 = (I_2 \setminus B_1) \cup [(B_2 \setminus$

$I_2 \setminus B_1] = (I_2 \setminus B_1) \cup [B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)]$  y como  $B_2 \setminus (I_2 \cup B_1) = \emptyset$ , entonces  $B_2 \setminus B_1 = I_2 \setminus B_1$ . Previamente habíamos visto que  $I_1 \cap I_2 = B_1 \cap I_2$ , lo cual es equivalente a que  $I_2 \setminus I_1 = I_2 \setminus B_1$ , así que tenemos la siguiente igualdad:

$$B_2 \setminus B_1 = I_2 \setminus B_1 = I_2 \setminus I_1. \quad (2)$$

Puede demostrarse también que  $B_1 \setminus B_2 = I_1 \setminus B_2$ . Además, como  $I_2 \subseteq B_2$ , entonces  $I_1 \setminus B_2 \subseteq I_1 \setminus I_2$ . Por tanto, tenemos las siguientes contenciones de conjuntos:

$$B_1 \setminus B_2 = I_1 \setminus B_2 \subseteq I_1 \setminus I_2 \quad (3)$$

Como  $\mathcal{B}$  cumple (B1), (B2) y (B3), por el Teorema 3.5 también satisface (B2\*), así,  $|B_1| = |B_2|$ , y como  $B_1 = (B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \setminus B_2)$ ,  $B_2 = (B_1 \cap B_2) \cup (B_2 \setminus B_1)$ , y dichas uniones son disjuntas, entonces  $|B_1 \setminus B_2| = |B_2 \setminus B_1|$ . Por las relaciones establecidas en (2) y (3), resulta que

$$|I_2 \setminus I_1| \leq |I_1 \setminus I_2|. \quad (4)$$

Pero  $I_1$  e  $I_2$  son tales que  $|I_1| < |I_2|$ , y pueden escribirse como las uniones disjuntas  $I_1 = (I_1 \cap I_2) \cup (I_1 \setminus I_2)$ ,  $I_2 = (I_1 \cap I_2) \cup (I_2 \setminus I_1)$ , entonces  $|I_1 \setminus I_2| < |I_2 \setminus I_1|$ , lo cual contradice (4). Por lo tanto, (I3) es verdadera. Así que en efecto  $M = (E, \mathcal{I})$  es un matroide.

Sólo resta verificar que los elementos de la familia  $\mathcal{B}$  son las bases de  $M$ . Sea  $B \in \mathcal{B}$ . Como  $B \subseteq B$ , entonces  $B \in \mathcal{I}$ , esto es,  $B$  es un conjunto independiente. Ahora supongamos que  $B'$  es un conjunto independiente tal que  $B \subseteq B'$ . Por (B2) tenemos que  $B = B'$ , es decir, el único conjunto independiente que contiene a  $B$  es él mismo, con lo cual queda probado que  $B$  es un conjunto independiente maximal. Para el sentido inverso, sea  $B$  una base de  $M$ .  $B \in \mathcal{I}$ , entonces existe  $B' \in \mathcal{B}$  tal que  $B \subseteq B'$ .  $B'$  también es conjunto independiente, pero  $B$  es maximal, entonces ocurre que  $B = B'$  y por consiguiente  $B \in \mathcal{B}$ .  $\square$

Los Teoremas 3.3 y 3.6 justifican la equivalencia entre la definición de matroide por conjuntos independientes (Definición 2.2) y la que se da a continuación.

**Definición 3.7** (Por bases). Un *matroide*  $M$  es un par ordenado  $(E, \mathcal{B})$  donde  $E$  es un conjunto finito y  $\mathcal{B}$  es una familia de subconjuntos de  $E$  que satisface las siguientes tres condiciones:



(B1) (No trivialidad)  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ .

(B2) (Familia Sperner o clutter) Si  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  y  $B_1 \subseteq B_2$ , entonces  $B_1 = B_2$ .

(B3) (Intercambio débil en bases) Si  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  y  $x \in B_1 \setminus B_2$ , entonces existe un elemento  $y \in B_2 \setminus B_1$  tal que  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ .

$M$  se llama matroide sobre  $E$  y los elementos de  $\mathcal{B}$  se llaman *bases* de  $M$ .

Esta definición surge de la idea de abstraer algunas de las propiedades que cumple la familia de bases de un espacio vectorial  $V$  de dimensión  $n$ . Dicha familia satisface (B1) porque todo espacio vectorial tiene una base; satisface (B2\*) porque todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de elementos. A continuación se verá que también se verifica (B3). Sean  $B_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $B_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  dos bases para  $V$ . Sin pérdida de generalidad supóngase que  $v_1 \notin B_2$  y que para todo  $i \in [n]$ ,  $(B_1 \setminus \{v_1\}) \cup \{w_i\}$  no es una base para  $V$ . Entonces  $(B_1 \setminus \{v_1\}) \cup \{w_i\}$  es linealmente dependiente, de manera que existen escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  no todos iguales a cero tales que:

$$\alpha_1 w_i + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0.$$

Note que  $\alpha_1$  debe ser distinto de cero, pues los vectores  $v_2, \dots, v_n$  son linealmente independientes, así que

$$w_i = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n.$$

Esto es, para todo  $i \in [n]$ ,  $w_i \in \text{gen}(\{v_2, \dots, v_n\})$ , por lo que,

$$\text{gen}(\{w_1, w_2, \dots, w_n\}) \subseteq \text{gen}(\{v_2, \dots, v_n\})$$

y como  $\text{gen}(\{w_1, w_2, \dots, w_n\}) = V$ , luego  $V = \text{gen}(\{v_2, \dots, v_n\})$ , pero esto contradice que la dimensión de  $V$  sea  $n$ . Entonces se cumple (B3).

Sin embargo, ésta no es la única manera de definir un matroide a partir de sus bases. El Teorema 3.5 presenta propiedades equivalentes que pueden emplearse para tal fin además de (B1), (B2) y (B3). El siguiente corolario expone una equivalencia más que es consecuencia inmediata de resultados anteriores, pero se enuncia ya que se empleará posteriormente.

**Corolario 3.8.** *Sea  $E$  un conjunto finito y  $\mathcal{B}$  una familia de subconjuntos de  $E$  que satisface las propiedades  $(B1)$ ,  $(B2^*)$  y  $(B3^*)$ . Sea  $\mathcal{I}$  la familia de subconjuntos de  $E$  que están contenidos en algún elemento de  $\mathcal{B}$ . Entonces  $M = (E, \mathcal{I})$  es un matroide y  $\mathcal{B}$  es su conjunto de bases. De manera inversa, si  $M$  es un matroide, entonces su familia de bases  $\mathcal{B}$  satisface las propiedades  $(B1)$ ,  $(B2^*)$  y  $(B3^*)$ .*

*Demostración.* Para la necesidad supongamos que  $\mathcal{B}$  satisface las propiedades  $(B1)$ ,  $(B2^*)$  y  $(B3^*)$ . Por ser un caso particular de  $(B3^*)$ ,  $\mathcal{B}$  cumple  $(B3)$ . Por el Teorema 3.5,  $\mathcal{B}$  satisface  $(B1)$ ,  $(B2)$  y  $(B3)$ . La conclusión del corolario es inmediata por el Teorema 3.6.

Para la suficiencia, sea  $M$  un matroide. Por el Lema 3.2 y por los Teoremas 3.3 y 3.4, la familia de bases  $\mathcal{B}$  satisface las propiedades  $(B1)$ ,  $(B2^*)$  y  $(B3^*)$ .  $\square$

En los siguientes ejemplos se presentan las bases de cada uno de los matroides mencionados anteriormente.

**Ejemplo 3.9.** Sea  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroide representable. Una base de  $M$  es un conjunto de vectores de  $E$  linealmente independiente maximal, es decir, es una base para el generado de  $E$  en el sentido usual de álgebra lineal. En caso de que el generado de  $E$  sea igual al espacio vectorial  $V$ , entonces una base para  $M$  es una base para  $V$ .

**Ejemplo 3.10.** Sea  $M = (E, \mathcal{I})$  el matroide uniforme de rango  $k$  sobre un conjunto de  $n$  elementos definido en el Ejemplo 2.5. Veamos que  $\mathcal{B}$  es la familia de todos los subconjuntos de  $E$  de cardinalidad  $k$ . Sea  $B \subseteq E$  de cardinalidad  $k$ . Claramente  $B \in \mathcal{I}$ . Ahora, supongamos que  $B'$  es un conjunto independiente tal que  $B \subseteq B'$ , entonces  $k = |B| \leq |B'|$ . Como  $B' \in \mathcal{I}$ , entonces  $|B'| \leq k$ . Concluimos pues que  $|B'| = k$  y por tanto  $B = B'$ , con lo cual queda probado que  $B$  es una base. A la inversa, supongamos que  $B$  es una base de  $M$  y supongamos que  $|B| \neq k$ . Como  $B$  es un conjunto independiente ocurre que  $|B| \leq k$ , luego  $|B| < k$ . Como  $B \subseteq E$  y  $k \leq n = |E|$  entonces existe un subconjunto  $B_1$  de  $E$  que contiene propiamente a  $B$  y cuya cardinalidad es igual  $k$ . Por sus características  $B_1$  es elemento de  $\mathcal{I}$ , pero esto contradice que  $B$  sea un conjunto independiente maximal. Así,  $|B| = k$ .

## 4 Definición por circuitos

A continuación se enuncia un concepto que permitirá dar una definición más de matroide. Es el concepto dual de base, así que, si una base es un conjunto independiente maximal, el siguiente concepto se referirá a un conjunto dependiente minimal.

**Definición 4.1.** Sea  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroide. Un subconjunto  $C$  de  $E$  se llama *circuito* si es un conjunto dependiente minimal, es decir, si es dependiente pero todos sus subconjuntos propios son independientes. Se denota con  $\mathcal{C}$  el conjunto de circuitos de  $M$ . En símbolos:

$$\mathcal{C} = \{C \subseteq E \mid C \notin \mathcal{I} \text{ y } \forall I \subsetneq C : I \in \mathcal{I}\}.$$

Nótese que a diferencia de las bases, los circuitos de un matroide pueden tener diferente cardinalidad entre ellos; un circuito podría ser un conjunto unitario cuyo único subconjunto propio independiente sea el conjunto vacío, o podría ser todo el conjunto subyacente del matroide.

En el siguiente teorema se establecen algunas de las propiedades que caracterizan a la familia de circuitos de un matroide.

**Teorema 4.2.** *Sea  $M$  un matroide. Su colección de circuitos  $\mathcal{C}$  tiene las siguientes propiedades:*

(C1) (No trivialidad)  $\emptyset \notin \mathcal{C}$ .

(C2) (Clutter) Si  $C_1$  y  $C_2$  son elementos de  $\mathcal{C}$  y  $C_1 \subseteq C_2$ , entonces  $C_1 = C_2$ .

(C3) (Eliminación de circuito) Si  $C_1$  y  $C_2$  son elementos distintos de  $\mathcal{C}$  y  $e \in C_1 \cap C_2$ , entonces existe un elemento  $C_3$  de  $\mathcal{C}$  tal que  $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ .

*Demostración.* Por (J1),  $\emptyset$  es independiente, entonces (C1) se cumple. Sean  $C_1$  y  $C_2$  circuitos tales que  $C_1 \subseteq C_2$  y supongamos que  $C_1 \neq C_2$ , es decir, que  $C_1$  es subconjunto propio de  $C_2$ . Como  $C_2$  es un conjunto dependiente minimal,  $C_1$  debe ser independiente, lo cual contradice que  $C_1$  sea un circuito. Por lo tanto,  $C_1 = C_2$ , esto es, se cumple (C2).

Probemos ahora que (C3) es cierta. Tomemos dos circuitos diferentes  $C_1$  y  $C_2$ , y un elemento  $e \in C_1 \cap C_2$ . Supongamos que ningún subconjunto de  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$  es circuito, en particular tenemos que  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$  no es

un circuito. Entonces  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$  no es un conjunto dependiente o es un conjunto dependiente pero no minimal. Lo segundo no puede ocurrir, pues en caso de que sí,  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$  debería tener como subconjunto un conjunto dependiente minimal, es decir, algún circuito, lo cual contradice lo supuesto. Así que  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$  es independiente. Dado que  $C_1 \neq C_2$ , entonces  $C_1 \not\subseteq C_2$  o  $C_2 \not\subseteq C_1$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que ocurre lo segundo. Entonces existe un elemento de  $C_2$  que no está en  $C_1$ , digamos  $f \in C_2 \setminus C_1$ . El conjunto  $C_2 \setminus \{f\}$  es independiente pues  $C_2$  es un circuito. Elijamos un subconjunto  $I$  de  $C_1 \cup C_2$ , independiente maximal que contenga a  $C_2 \setminus \{f\}$  (existe porque  $C_2 \setminus \{f\} \in \mathcal{I}$  y  $C_2 \setminus \{f\} \subseteq C_1 \cup C_2$ ). Si  $f \in I$ , entonces  $C_2 \subseteq I$ , y tendríamos que  $C_2$  es independiente, lo cual no es cierto, así que  $f \notin I$ .  $C_1 \not\subseteq I$  pues  $C_1$  es dependiente, así que existe  $g \in C_1 \setminus I$ . Como  $f \notin C_1$  y  $g \in C_1$ , entonces  $f \neq g$ . Ya que  $f$  y  $g$  no son elementos de  $I$  se cumple que

$$|I| \leq |(C_1 \cup C_2) \setminus \{f, g\}| = |C_1 \cup C_2| - 2 < |(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}|.$$

Como  $I$  y  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$  son conjuntos independientes tales que  $|I| < |(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}|$ , por (I3) existe  $h \in \{(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}\} \setminus I$  tal que  $I \cup \{h\} \in \mathcal{I}$ . Dado que  $I \subseteq C_1 \cup C_2$  y  $h \in C_1 \cup C_2$ , luego  $I \cup \{h\} \subseteq C_1 \cup C_2$ , y como  $h \notin I$ ,  $I \cup \{h\}$  es un subconjunto de  $C_1 \cup C_2$  independiente de cardinalidad mayor que  $I$  que contiene a  $C_2 \setminus \{f\}$ , lo cual contradice la elección de  $I$ . Por lo tanto, la propiedad (C3) es verdadera.  $\square$

Existen dos tipos de conjuntos dependientes en un matroide: los minimales, que son los circuitos, y los que no son minimales, y por lo tanto, contienen un circuito. Entonces los conjuntos independientes son todos aquellos que no pertenecen a ninguna de esas dos clases de conjuntos, es decir, conjuntos que no son un circuito y que no contienen un circuito, en resumen, conjuntos que no contienen un circuito. Esta idea se emplea en el siguiente teorema que establece cómo puede construirse un matroide a partir de una familia de conjuntos que verifica las tres propiedades dadas en el Teorema 4.2.

**Teorema 4.3.** *Sean  $E$  un conjunto y  $\mathcal{C}$  una familia de subconjuntos de  $E$  que satisface (C1), (C2) y (C3). Sea  $\mathcal{I}$  la familia de subconjuntos de  $E$  tales que ninguno de sus subconjuntos es elemento de  $\mathcal{C}$ , es decir,*

$$\mathcal{I} = \{I \subseteq E \mid \forall C \in \mathcal{C}, C \not\subseteq I\}.$$

*Entonces  $(E, \mathcal{I})$  es un matroide que tiene a  $\mathcal{C}$  como su colección de circuitos.*

*Demostración.* El único subconjunto del conjunto  $\emptyset$  es el conjunto  $\emptyset$  y por (C1)  $\emptyset \notin \mathcal{C}$ , entonces  $\emptyset$  no contiene algún elemento de  $\mathcal{C}$ . Por tanto  $\emptyset \in \mathcal{I}$ , así que (I1) es verdadera. Sean  $I \in \mathcal{I}$  y  $J \subseteq I$ . Ninguno de los subconjuntos de  $I$  es elemento de  $\mathcal{C}$ , entonces todo subconjunto de  $J$  tampoco es elemento de  $\mathcal{C}$ , de donde  $J$  es elemento de  $\mathcal{I}$  y, por lo tanto, (I2) se cumple.

Veamos por último que (I3) es verdadera. Sean  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$  tales que  $|I_1| < |I_2|$ . Supongamos que para toda  $x \in I_2 \setminus I_1$ ,  $I_1 \cup \{x\} \notin \mathcal{I}$ . Elijamos un elemento  $I_3$  de  $\mathcal{I}$  que esté contenido en  $I_1 \cup I_2$ , cuya cardinalidad sea mayor que la de  $I_1$  ( $I_2$  satisface tales condiciones) y tal que  $|I_1 \setminus I_3|$  sea mínima. Si suponemos que  $I_1 \setminus I_3 = \emptyset$ , entonces  $I_1 \subseteq I_3$  y como  $|I_1| < |I_3|$ , entonces existe  $x \in I_3 \setminus I_1$ , y dado que  $I_3 \subseteq I_1 \cup I_2$ , entonces  $x \in I_2 \setminus I_1$  y como  $I_1 \cup \{x\} \subseteq I_3$ , por (I2)  $I_1 \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ , lo cual contradice lo supuesto. Así pues,  $I_1 \setminus I_3 \neq \emptyset$ ; elegimos un elemento  $e$  de  $I_1 \setminus I_3$ . Si suponemos que  $I_3 \setminus I_1 = \emptyset$ , entonces  $I_3 \subseteq I_1$ , lo cual no ocurre porque la cardinalidad de  $I_1$  es menor que la cardinalidad de  $I_3$ . Por tanto,  $I_3 \setminus I_1 \neq \emptyset$ . Para cada elemento  $f$  de  $I_3 \setminus I_1$ , sea  $T_f = (I_3 \cup \{e\}) \setminus \{f\}$ . Por su definición,  $T_f \subseteq I_1 \cup I_2$ . Además, tomando en cuenta que  $e \in I_1 \cap I_3^C$  y  $f \notin I_1$  se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} I_1 \setminus T_f &= I_1 \cap [(I_3 \cup \{e\}) \cap \{f\}^C]^C = I_1 \cap [(I_3 \cup \{e\})^C \cup \{f\}] \\ &= I_1 \cap [(I_3^C \cap \{e\}^C) \cup \{f\}] = [I_1 \cap (I_3^C \cap \{e\}^C)] \cup [I_1 \cap \{f\}] \\ &= [I_1 \cap (I_3^C \cap \{e\}^C)] \cup \emptyset = (I_1 \cap I_3^C) \setminus \{e\} \subsetneq I_1 \cap I_3^C = I_1 \setminus I_3. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $|I_1 \setminus T_f| < |I_1 \setminus I_3|$ .  $T_f$  es un subconjunto de  $I_1 \cup I_2$  y tiene cardinalidad mayor que  $I_1$  ( $|T_f| = |I_3|$ ). Por la manera en la que elegimos a  $I_3$ , tenemos que  $T_f \notin \mathcal{I}$ , de donde  $T_f$  contiene un elemento  $C_f$  de  $\mathcal{C}$ . Dado que  $f \notin T_f$ , entonces  $f \notin C_f$ . También debe cumplirse que  $e \in C_f$ , en caso contrario  $C_f \subseteq I_3$ , lo cual contradice que  $I_3 \in \mathcal{I}$ . Si  $C_f \cap (I_3 \setminus I_1) = \emptyset$ , entonces  $C_f \subseteq (I_3 \setminus I_1)^C = (I_3 \cap I_1^C)^C = I_3^C \cup I_1$ , es decir,  $C_f \subseteq I_1 \cup I_3^C$ . Como  $C_f$  también es subconjunto de  $(I_3 \cup \{e\}) \setminus \{f\}$  se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} C_f &\subseteq (I_1 \cup I_3^C) \cap [(I_3 \cup \{e\}) \setminus \{f\}] \\ &= \left[ I_1 \cap [(I_3 \cup \{e\}) \cap \{f\}^C] \right] \cup \left[ I_3^C \cap [(I_3 \cup \{e\}) \cap \{f\}^C] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ I_1 \cap \left[ (I_3 \cap \{f\}^C) \cup (\{e\} \cap \{f\}^C) \right] \right] \cup \\
&\quad \left[ I_3^C \cap \left[ (I_3 \cap \{f\}^C) \cup (\{e\} \cap \{f\}^C) \right] \right] \\
&= (I_1 \cap I_3 \cap \{f\}^C) \cup (I_1 \cap \{e\}) \cup (I_3^C \cap I_3 \cap \{f\}^C) \cup (I_3^C \cap \{e\}) \\
&= [(I_1 \cap I_3) \cap \{f\}^C] \cup \{e\} \\
&= [(I_1 \cap I_3) \cup \{e\}] \setminus \{f\} \\
&\subseteq I_1.
\end{aligned}$$

Esto es,  $C_f \subseteq I_1$ , lo cual contradice que  $I_1 \in \mathcal{I}$ . Entonces existe un elemento  $g$  en  $C_f \cap (I_3 \setminus I_1)$ . Nótese que como  $f \notin C_f$ , entonces  $g \neq f$ . Como  $g \in I_3 \setminus I_1$ , existe su respectivo  $C_g \in \mathcal{C}$ . No puede ocurrir que  $C_g = C_f$  ya que  $g \in C_f$  y  $g \notin C_g$ . Entonces  $C_f$  y  $C_g$  son dos elementos distintos de  $\mathcal{C}$  y  $e \in C_f \cap C_g$ . Por (C3) existe  $C \in \mathcal{C}$  tal que  $C \subseteq (C_f \cup C_g) \setminus \{e\}$ . Como  $C_f$  y  $C_g$  son subconjuntos de  $I_3 \cup \{e\}$ , entonces  $(C_f \cup C_g) \setminus \{e\} \subseteq I_3$ , de donde  $C \subseteq I_3$ , lo cual contradice que  $I_3 \in \mathcal{I}$ . Entonces debe cumplirse (I3). Por lo tanto,  $M = (E, \mathcal{I})$  es un matroide.

Ahora veamos que  $\mathcal{C}$  es el conjunto de circuitos de  $M$ . Sea  $C$  un circuito de  $M$ , veamos que  $C \in \mathcal{C}$ . Como  $C$  es circuito, no es un conjunto independiente, así que por la definición de  $\mathcal{I}$ ,  $C$  debe tener un subconjunto  $C'$  que es elemento de  $\mathcal{C}$ . Como  $C$  es circuito, todo subconjunto propio de  $C$  es independiente. Sea  $I$  un subconjunto propio de  $C$ . Para todo  $C \in \mathcal{C}$  se cumple que  $C \not\subseteq I$  y como  $I \subseteq C$  entonces  $I \notin \mathcal{C}$  y por lo tanto todo subconjunto propio de  $C$  no es elemento de  $\mathcal{C}$ , por consiguiente  $C' = C$ , es decir,  $C \in \mathcal{C}$ . Ahora, si  $C \in \mathcal{C}$ , como  $C \subseteq C$ , entonces  $C \notin \mathcal{I}$ , luego  $C$  es dependiente. Si suponemos que un subconjunto  $C'$  de  $C$  también es dependiente, entonces  $C' \notin \mathcal{I}$ , de donde existe  $C'' \in \mathcal{C}$  tal que  $C'' \subseteq C'$ . En particular tenemos que  $C'' \subseteq C$ . Para  $C$  y  $C''$  se cumple (C2) y por tanto concluimos que  $C = C''$ , más aún,  $C' = C$  lo cual verifica que  $C$  es conjunto dependiente minimal, y por tanto  $C$  es circuito de  $M$ .  $\square$

Los Teoremas 4.2 y 4.3 justifican la siguiente definición.

**Definición 4.4** (Por circuitos). Un *matroide*  $M$  es un par ordenado  $(E, \mathcal{C})$ , donde  $E$  es un conjunto finito y  $\mathcal{C}$  es un subconjunto de  $\mathcal{P}(E)$  que verifica las siguientes tres propiedades:

(C1) (No trivialidad)  $\emptyset \notin \mathcal{C}$ .

(C2) (Familia Sperner o clutter) Si  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  son tales que  $C_1 \subseteq C_2$ , entonces  $C_1 = C_2$ .

(C3) (Eliminación de circuito) Si  $C_1$  y  $C_2$  son dos elementos distintos de  $\mathcal{C}$  y  $e \in C_1 \cap C_2$ , entonces existe  $C_3 \in \mathcal{C}$  tal que  $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ .

$M$  se llama matroide sobre  $E$  y los elementos de  $\mathcal{C}$  se llaman *circuitos* de  $M$ .

Para finalizar este apartado, se presentan los circuitos de los matroides dados en los ejemplos que se trataron en las secciones anteriores.

**Ejemplo 4.5.** Sea  $M$  un matroide representable. Los circuitos de  $M$  son conjuntos de vectores linealmente dependientes, cuyos subconjuntos propios son todos linealmente independientes.

**Ejemplo 4.6.** Sea  $M$  el matroide uniforme de rango  $k$  sobre el conjunto  $E$  de  $n$  elementos. Claramente  $\mathcal{C}$  es la familia de subconjuntos de  $E$  de cardinalidad  $k + 1$ . En este ejemplo, todos los circuitos del matroide tienen la misma cardinalidad. Sin embargo, no siempre es así.

## 5 Definición por función rango

Sean  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroide y  $A \subseteq E$ . Como  $\emptyset \subseteq A$  y  $\emptyset$  es un conjunto independiente, entonces  $A$  tiene a un elemento de  $\mathcal{I}$  como subconjunto. Puede compararse el tamaño de todos los conjuntos independientes que están contenidos en  $A$ . Como  $A$  es finito, entonces existe el máximo de dichas cardinalidades. Lo anterior garantiza que el siguiente concepto está bien definido.

**Definición 5.1.** Sean  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroide y  $A \subseteq E$ . El *rango* o la *dimensión* de  $A$  es la mayor de las cardinalidades de los conjuntos independientes que están contenidos en  $A$  y se denota por  $r(A)$ , es decir:

$$r(A) = \max\{|I| : I \in \mathcal{I} \text{ e } I \subseteq A\}.$$

$r(E)$  se llama el *rango del matroide*  $M$ , y se denota por  $r(M)$ .

En otras palabras, la función rango  $r$  asociada a un matroide es una función del conjunto potencia del conjunto subyacente del matroide al conjunto de los enteros no negativos que se define de la siguiente forma:

$$r: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$A \mapsto \text{máx}\{|I| : I \in \mathcal{I} \text{ e } I \subseteq A\}.$$

Puede darse una definición de matroide en términos de la función rango. La manera de hacerlo se presenta en los teoremas siguientes. Para probarlos se necesita una generalización de la propiedad (J3) que se enuncia y se demuestra a continuación.

**Lema 5.2.** *Sea  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroide, y sean  $I$  y  $J$  dos conjuntos independientes tales que  $|I| < |J|$ ,  $n = |J| - |I|$ . Entonces existen  $x_1, x_2, \dots, x_n \in J \setminus I$  tales que  $I \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathcal{I}$ .*

*Demostración.* Sean  $I, J \in \mathcal{I}$  tales que  $|J| - |I| = n$ ,  $n \geq 1$ . Si  $n = 1$ , la proposición es cierta ya que es justamente (J3). Supongamos que el resultado es válido para cualquier pareja de conjuntos independientes tales que la diferencia de sus cardinalidades es igual a  $n$ . Si  $|J| - |I| = n + 1$ , elijamos  $x \in J$ . Por (I2),  $J \setminus \{x\} \in \mathcal{I}$ , además  $|J \setminus \{x\}| - |I| = n$ . Por la hipótesis de inducción existen  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (J \setminus \{x\}) \setminus I$  tales que  $I \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathcal{I}$ . Ahora,  $I \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  y  $J$  son dos conjuntos independientes tales que  $|J| = |I \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\}| + 1$ . Por (J3) tenemos que existe  $x_{n+1} \in J \setminus (I \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\})$  tal que  $I \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\} \in \mathcal{I}$ , es decir,  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in J \setminus I$  son tales que  $I \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\} \in \mathcal{I}$ , con lo cual el lema queda establecido.  $\square$

**Teorema 5.3.** *Sea  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroide. La función rango  $r$  de  $M$  satisface las siguientes propiedades para cualesquiera  $A, B \subseteq E$ :*

- (r1) (Normalización)  $0 \leq r(A) \leq |A|$ ;
- (r2) (Creciente) Si  $A \subseteq B$ , entonces  $r(A) \leq r(B)$ ;
- (r3) (Semimodular)  $r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B)$ .

*Demostración.* Como  $r(A)$  es la cardinalidad de un subconjunto de  $A$  entonces trivialmente se cumple que  $0 \leq r(A) \leq |A|$ . Sean  $A, B \subseteq E$  tales que  $A \subseteq B$ . Todo subconjunto de  $A$  también es subconjunto de  $B$ , así que

$$r(A) = \text{máx}\{|I| : I \in \mathcal{I} \text{ e } I \subseteq A\} \leq \text{máx}\{|J| : J \in \mathcal{I} \text{ y } J \subseteq B\} = r(B).$$



Esto prueba que (r2) se satisface. Sea  $I_1$  un conjunto independiente contenido en  $A \cap B$  tal que  $r(A \cap B) = |I_1|$ . Queremos encontrar un subconjunto  $I$  de  $A \cup B$  que sea independiente, que satisfaga que  $r(A \cup B) = |I|$  y que contenga a  $I_1$ . Lo haremos de la siguiente forma: como  $A \cap B \subseteq A \cup B$ , por (r2) ocurre que  $r(A \cap B) = r(A \cup B)$  o  $r(A \cap B) < r(A \cup B)$ . Si ocurre lo primero, entonces  $I_1$  es un subconjunto de  $A \cup B$  que es independiente y que satisface que  $r(A \cup B) = |I_1|$ , así que elegimos  $I = I_1$ . Si ocurre lo segundo, sea  $I_2$  un conjunto independiente contenido en  $A \cup B$  tal que  $r(A \cup B) = |I_2|$ . Tenemos que  $|I_1| < |I_2|$ , sea  $n = |I_2| - |I_1|$ . Por el Lema 5.2, existen  $x_1, x_2, \dots, x_n \in I_2 \setminus I_1$  tales que  $I_1 \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathcal{I}$ . En particular,  $x_1, x_2, \dots, x_n \in A \cup B$ , por lo tanto,  $I_1 \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es un subconjunto independiente de  $A \cup B$  de la misma cardinalidad que  $I_2$ , entonces  $r(A \cup B) = |I_1 \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\}|$ , así que elegimos  $I = I_1 \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Podemos descomponer a  $I$  como la siguiente unión disjunta:

$$I = [I \cap (A \cap B)] \cup [I \cap (A \setminus B)] \cup [I \cap (B \setminus A)].$$

Definimos  $I_A = I \cap (A \setminus B)$  e  $I_B = I \cap (B \setminus A)$ . Observemos que  $I \cap (A \cap B) = (I_1 \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\}) \cap (A \cap B)$ . Si suponemos que para algún  $i \in [n]$ ,  $x_i \in A \cap B$ , entonces  $I_1 \cup \{x_i\} \subseteq A \cap B$ . Dado que  $I_1 \cup \{x_i\} \subsetneq I$ ,  $I_1 \cup \{x_i\} \in \mathcal{I}$ . Por consiguiente,  $I_1 \cup \{x_i\}$  sería un subconjunto de  $A \cap B$  de mayor cardinalidad que  $I_1$ , lo cual contradice que  $r(A \cap B) = |I_1|$ . Por lo tanto,  $I \cap (A \cap B) = I_1$  y tenemos lo siguiente:

$$r(A \cup B) = |I| = |I_1| + |I_A| + |I_B|. \quad (5)$$

También la unión disjunta  $I_1 \cup I_A$  es un conjunto independiente por ser subconjunto de  $I$  y además está contenido en  $A$ . Por lo tanto,  $|I_1| + |I_A| \leq r(A)$ . De manera análoga obtenemos que  $|I_1| + |I_B| \leq r(B)$ . Entonces  $2|I_1| + |I_A| + |I_B| \leq r(A) + r(B)$ . Pero recordemos que  $|I_1| = r(A \cap B)$ , entonces

$$|I_1| + |I_A| + |I_B| + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B). \quad (6)$$

De (5) y (6) obtenemos la desigualdad esperada. Así que la función rango  $r$  de  $M$  satisface (r1), (r2) y (r3).  $\square$

Existe un conjunto de condiciones que son equivalentes a (r1), (r2) y (r3). En los siguientes teoremas se demuestra dicha equivalencia.

**Teorema 5.4.** *Sea  $r$  una función de valor entero con dominio el conjunto potencia de un conjunto finito  $E$  que satisface las propiedades (r1), (r2) y (r3). También  $r$  satisface lo siguiente:*

(r1\*) (Normalización local)  $r(\emptyset) = 0$ .

(r2\*) (Incremento del rango en una unidad) Para todo  $A \subseteq E$  y para todo  $x \in E$ , se tiene que

$$r(A) \leq r(A \cup \{x\}) \leq r(A) + 1.$$

(r3\*) (Semimodularidad local) Para cualquier  $A \subseteq E$  y cualesquiera  $x, y \notin A$ , si  $r(A) = r(A \cup \{x\}) = r(A \cup \{y\})$ , entonces

$$r(A) = r(A \cup \{x, y\}).$$

*Demostración.* Por (r1) tenemos que  $0 \leq r(\emptyset) \leq |\emptyset| = 0$ , y, por lo tanto,  $r(\emptyset) = 0$ , esto es, (r1\*) se cumple. Sean  $A \subseteq E$  y  $x \in E$ . Como  $A \subseteq A \cup \{x\}$ , por (r2),  $r(A) \leq r(A \cup \{x\})$ . Ahora, por (r3) tenemos que  $r(A \cup \{x\}) \leq r(A) + r(\{x\}) - r(A \cap \{x\})$ . Como  $|\{x\}| = 1$ , por (r1) tenemos que  $r(\{x\})$  es igual a 0 o a 1. Si  $r(\{x\}) = 0$ , entonces  $r(A \cup \{x\}) \leq r(A) - r(A \cap \{x\})$ . También por (r1) sabemos que el rango de cualquier subconjunto de  $E$  es mayor o igual que 0, así que  $r(A) - r(A \cap \{x\}) \leq r(A) < r(A) + 1$ . Si  $r(\{x\}) = 1$ , entonces  $r(A \cup \{x\}) \leq r(A) + 1 - r(A \cap \{x\}) \leq r(A) + 1$ . Podemos concluir entonces que (r2\*) se satisface.

Sean  $A \subseteq E$ ,  $x, y \notin A$  tales que  $r(A) = r(A \cup \{x\}) = r(A \cup \{y\})$ . Si  $x = y$  el resultado claramente es cierto, así que podemos suponer  $x \neq y$ . Aplicando la propiedad (r3) a los conjuntos  $A \cup \{x\}$  y  $A \cup \{y\}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} r((A \cup \{x\}) \cup (A \cup \{y\})) + r((A \cup \{x\}) \cap (A \cup \{y\})) &\leq r(A \cup \{x\}) + \\ &\quad r(A \cup \{y\}) \\ &= r(A) + r(A). \end{aligned}$$

Dado que  $(A \cup \{x\}) \cap (A \cup \{y\}) = [(A \cup \{x\}) \cap A] \cup [(A \cup \{x\}) \cap \{y\}] = A \cup \emptyset = A$ , ocurre que  $r(A \cup \{x, y\}) + r(A) \leq r(A) + r(A)$ , de donde  $r(A \cup \{x, y\}) \leq r(A)$ . Además, por (r2),  $r(A) \leq r(A \cup \{x, y\})$ . Concluimos que  $r(A \cup \{x, y\}) = r(A)$ , por lo que (r3\*) es verdadera.  $\square$

A continuación se demostrará el recíproco del Teorema 5.4, es decir, que una función de valor entero  $r$  que satisface las propiedades  $(r1^*)$ ,  $(r2^*)$  y  $(r3^*)$  también verifica  $(r1)$ ,  $(r2)$  y  $(r3)$ . Primero se probará que se cumplen  $(r1)$  y  $(r2)$ .

**Teorema 5.5.** *Sean  $E$  un conjunto finito y  $r$  una función de valor entero con dominio  $\mathcal{P}(E)$  que satisface  $(r1^*)$ ,  $(r2^*)$  y  $(r3^*)$ . Entonces  $r$  satisface las propiedades  $(r1)$  y  $(r2)$ .*

*Demostración.* Sea  $A \subseteq E$ . Probaremos que se cumple la condición  $(r1)$  por inducción sobre  $|A|$ . Si  $|A| = 0$ , por  $(r1^*)$  tenemos que  $r(\emptyset) = 0 = |\emptyset|$ , así que  $(r1)$  es verdadera si  $|A| = 0$ . Supongamos que  $(r1)$  es cierta para todos los conjuntos de cardinalidad  $n$  y que  $A$  es un conjunto de cardinalidad  $n + 1$ . Sea  $A' \subseteq A$  tal que  $|A'| = n$  y sea  $x$  tal que  $\{x\} = A \setminus A'$ . Por hipótesis de inducción se tiene que

$$0 \leq r(A') \leq |A'|. \quad (7)$$

Por  $(r2^*)$  obtenemos la siguiente desigualdad:

$$r(A') \leq r(A' \cup \{x\}) \leq r(A') + 1. \quad (8)$$

Así que por (7) y por (8) obtenemos que

$$0 \leq r(A') \leq r(A' \cup \{x\}) \leq r(A') + 1 \leq |A'| + 1 = |A|,$$

de donde,  $0 \leq r(A' \cup \{x\}) \leq |A|$ . Pero  $A' \cup \{x\} = A$ , así que  $0 \leq r(A) \leq |A|$ . Por lo tanto, la proposición  $(r1)$  es válida.

Sean  $A, B \subseteq E$  tales que  $A \subseteq B$ . Demostraremos que se cumple  $(r2)$  por inducción sobre  $|B \setminus A|$ . Si  $|B \setminus A| = 0$ , entonces  $A = B$  y  $(r2)$  se satisface. Supongamos ahora que la afirmación se cumple para todas las parejas de conjuntos tales que uno es subconjunto del otro y tales que la cardinalidad de la diferencia del más grande con el más pequeño igual a  $n$ . Supongamos que  $|B \setminus A| = n + 1$ . Podemos elegir  $x \in B \setminus A$  tal que  $|B \setminus (A \cup \{x\})| = n$ . Como  $A \cup \{x\} \subseteq B$ , podemos aplicar la hipótesis de inducción y obtenemos que  $r(A \cup \{x\}) \leq r(B)$ . Por  $(r2^*)$ ,  $r(A) \leq r(A \cup \{x\})$ , así que  $r(A) \leq r(B)$ . Por lo tanto,  $(r2)$  se cumple.  $\square$

Mostrar que una función de valor entero que satisface  $(r1^*)$ ,  $(r2^*)$  y  $(r3^*)$  verifica también  $(r3)$  es un tanto más complejo. En la prueba se hará uso de dos lemas; el primero se demuestra y del segundo se omite su demostración.

**Lema 5.6.** Sean  $E$  un conjunto finito y  $r$  una función de valor entero con dominio  $\mathcal{P}(E)$  que satisface  $(r1^*)$ ,  $(r2^*)$  y  $(r3^*)$ . Si  $A \subseteq E$ , y  $x_1, x_2, \dots, x_n \in E \setminus A$  son tales que  $r(A) = r(A \cup \{x_1\}) = r(A \cup \{x_2\}) = \dots = r(A \cup \{x_n\})$ , entonces

$$r(A \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\}) = r(A).$$

*Demostración.* La demostración la haremos por inducción sobre  $n$ . Si  $n = 1$ , el resultado es trivialmente cierto. Supongamos que la afirmación es válida para algún  $n$ . Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in E \setminus A$  tales que para cada  $i \in [n + 1]$ ,  $r(A) = r(A \cup \{x_i\})$  y sin pérdida de generalidad supongamos que son todos diferentes entre sí. Podemos aplicar la hipótesis de inducción a los conjuntos  $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  y  $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}\}$ , ya que ambos tienen  $n$  elementos, de donde obtenemos lo siguiente:

$$r(A) = r(A \cup \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}) = r(A \cup \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}\}). \quad (9)$$

Por el Teorema 5.5 (r2) se cumple, así que las siguientes desigualdades son ciertas:

$$\begin{aligned} r(A) &= r(A \cup \{x_1\}) \leq r(A \cup \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}) \\ &\leq r(A \cup \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}) \\ &= r(A), \end{aligned}$$

por lo cual  $r(A \cup \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}) = r(A)$ . Por (9) se tiene que:

$$\begin{aligned} r(A \cup \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}) &= r((A \cup \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}) \cup \{x_n\}) \\ &= r((A \cup \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}) \cup \{x_{n+1}\}). \end{aligned}$$

Por  $(r3^*)$  aplicado al conjunto  $A \cup \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$  concluimos que  $r(A \cup \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}) = r((A \cup \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}) \cup \{x_n, x_{n+1}\})$ , de aquí tenemos finalmente que  $r(A \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}) = r(A)$ . Así que el resultado es válido para toda  $n$ .  $\square$

La propiedad mencionada en el Lema 5.6 se identificará con  $(r3^{**})$ .

**Lema 5.7.** ([2] Lema 2.47, pág. 69) Sean  $E$  un conjunto finito y  $r$  una función de valor entero con dominio  $\mathcal{P}(E)$  que satisface  $(r1^*)$ ,  $(r2^*)$  y  $(r3^*)$ . Sean  $A, B \subseteq E$  tales que  $A \subseteq B$ , y sea  $x \in E$ . Entonces

$$r(A \cup \{x\}) - r(A) \geq r(B \cup \{x\}) - r(B).$$

**Teorema 5.8.** Sean  $E$  un conjunto finito y  $r$  una función de valor entero con dominio  $\mathcal{P}(E)$  que satisface  $(r1^*)$ ,  $(r2^*)$  y  $(r3^*)$ . Entonces  $r$  satisface la propiedad  $(r3)$ .

*Demostración.* Sean  $A, B \subseteq E$ . Si  $|A \setminus B| = 0$ , entonces  $A \subseteq B$ , y por lo tanto,  $A \cup B = B$ ,  $A \cap B = A$ , de donde  $r(A \cup B) + r(A \cap B) = r(B) + r(A)$  y el resultado se cumple. Supongamos que el resultado es cierto para cualquier pareja de conjuntos tales que la cardinalidad de su diferencia es igual a  $n$ . Supongamos que  $|A \setminus B| = n + 1$ . Podemos elegir  $x \in A \setminus B$ . Entonces  $|(A \setminus \{x\}) \setminus B| = n$ . Por la hipótesis de inducción tenemos que

$$r((A \setminus \{x\}) \cup B) + r((A \setminus \{x\}) \cap B) \leq r(A \setminus \{x\}) + r(B).$$

Como  $A \setminus \{x\} \subseteq (A \setminus \{x\}) \cup B$ , por el Lema 5.7 se verifica que

$$r((A \setminus \{x\}) \cup \{x\}) - r(A \setminus \{x\}) \geq r(((A \setminus x) \cup B) \cup \{x\}) - r((A \setminus x) \cup B),$$

de donde

$$r(A) - r(A \setminus \{x\}) \geq r(A \cup B) - r((A \setminus x) \cup B). \quad (10)$$

De (10) y de la hipótesis de inducción obtenemos las siguientes desigualdades:

$$r(A \cup B) - r(A) + r(A \setminus \{x\}) \leq r((A \setminus x) \cup B) \leq r(A \setminus \{x\}) + r(B) - r((A \setminus \{x\}) \cap B).$$

Como  $x \notin B$ , entonces  $A \setminus \{x\} \cap B = A \cap B$ . Por lo tanto,

$$r(A \cup B) - r(A) \leq r(B) - r(A \cap B),$$

de donde obtenemos la desigualdad  $r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B)$ , es decir,  $(r3)$  es verdadera.  $\square$

Dada la colección de conjuntos independientes de un matroide, es posible encontrar el rango de todo subconjunto de  $E$ . Si se tiene el conjunto subyacente  $E$  de un matroide  $M$  y el rango de cada subconjunto de  $E$ , ¿cómo se encuentran los conjuntos independientes? El rango de un conjunto independiente es igual a su cardinalidad, y si un conjunto tiene rango igual a su cardinalidad, entonces éste debe ser independiente, ya que dicho conjunto es finito y por lo tanto, no puede tener un subconjunto independiente propio con su misma cardinalidad. Esto indica que los conjuntos independientes son los únicos conjuntos con la propiedad de que su rango coincide con su cardinalidad. Esta idea permite construir un matroide partiendo de una función que satisface las propiedades  $(r1)$ ,  $(r2)$  y  $(r3)$  como se explica en el siguiente teorema.

**Teorema 5.9.** *Sea  $E$  un conjunto finito con una función de valor entero  $r$  con dominio  $\mathcal{P}(E)$  tal que satisface las propiedades (r1), (r2) y (r3). Definimos la familia*

$$\mathcal{I} = \{I \subseteq E \mid r(I) = |I|\}.$$

*Entonces  $M = (E, \mathcal{I})$  es un matroide que tiene a  $r$  como su función rango.*

*Demostración.* A continuación probaremos que la familia  $\mathcal{I}$  satisface (I1), (I2) e (I3).

Por (r1) tenemos que  $0 \leq r(\emptyset) \leq |\emptyset|$ , de donde  $r(\emptyset) = 0 = |\emptyset|$ , y por lo tanto,  $\emptyset \in \mathcal{I}$ , es decir, (I1) se cumple. Sean  $I \in \mathcal{I}$  y  $J \subseteq I$ . Aplicando (r3) a los conjuntos  $I \setminus J$  y  $J$  tenemos que  $r((I \setminus J) \cup J) + r((I \setminus J) \cap J) \leq r(I \setminus J) + r(J)$ , es decir,  $r(I) + r(\emptyset) \leq r(I \setminus J) + r(J)$ , y por (I1),  $r(I) \leq r(I \setminus J) + r(J)$ . Como  $I \in \mathcal{I}$ , entonces  $r(I) = |I|$ , así que

$$|I| \leq r(I \setminus J) + r(J). \quad (11)$$

Por (r1),  $r(I \setminus J) \leq |I \setminus J|$  y  $r(J) \leq |J|$ , lo cual implica que

$$r(I \setminus J) + r(J) \leq |I \setminus J| + |J| = |I|. \quad (12)$$

De (11) y de (12) tenemos que  $|I| \leq r(I \setminus J) + r(J) \leq |I|$ , así que  $r(I \setminus J) + r(J) = |I| = |I \setminus J| + |J|$ , de donde  $|I \setminus J| - r(I \setminus J) = r(J) - |J|$ . Como  $r(I \setminus J) \leq |I \setminus J|$  y  $r(J) \leq |J|$ , entonces  $0 \leq |I \setminus J| - r(I \setminus J)$  y  $r(J) - |J| \leq 0$ , por lo que  $0 \leq |I \setminus J| - r(I \setminus J) = r(J) - |J| \leq 0$ , luego  $0 = |I \setminus J| - r(I \setminus J) = r(J) - |J|$ , por consiguiente,  $r(I \setminus J) = |I \setminus J|$  y  $r(J) = |J|$ . Así queda demostrado que  $J \in \mathcal{I}$ , es decir, (I2) se satisface. Para probar (I3), sean  $I, J \in \mathcal{I}$  tales que  $|I| < |J|$ . Como  $I, J \in \mathcal{I}$ , entonces  $r(I) = |I|$  y  $r(J) = |J|$ . Sea  $J \setminus I = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , para alguna  $k \geq 1$ . Supongamos que (I3) no se cumple, es decir, que para todo  $i \in [k]$ ,  $I \cup \{x_i\} \notin \mathcal{I}$ , entonces  $r(I \cup \{x_i\}) \neq |I \cup \{x_i\}| = |I| + 1$ . Por (r1),  $r(I \cup \{x_i\}) \leq |I \cup \{x_i\}| = |I| + 1$ , entonces  $r(I \cup \{x_i\}) < |I| + 1$ . Por (r2),  $r(I) \leq r(I \cup \{x_i\})$ , así que  $|I| \leq r(I \cup \{x_i\}) < |I| + 1$ . Por lo tanto, para todo  $i \in [k]$ ,  $r(I \cup \{x_i\}) = |I|$ . Si  $|J \setminus I| = 1$ , entonces  $I \cup \{x_1\} = J$  y por lo anterior tenemos que  $r(J) = r(I \cup \{x_1\}) = r(I) = |I| < |J| = r(J)$ , lo cual es una contradicción. Entonces  $|J \setminus I| > 1$ , es decir, existe  $k > 1$  tal que  $J \setminus I = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ . Como  $r$  verifica (r1), (r2) y (r3), por el Teorema 5.4  $r$  cumple con (r1\*), (r2\*) y (r3\*), luego por el Lema 5.6 se cumple (r3\*\*), así que  $r(I \cup \{x_1, x_2, \dots, x_k\}) = |I|$ , pero  $I \cup \{x_1, x_2, \dots, x_k\} = J$ , entonces

$|J| = r(J) = |I| < |J|$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto, (I3) se satisface y en efecto  $M = (E, \mathcal{I})$  es un matroide.

Por último, vamos a demostrar que en efecto  $r$  es la función rango de  $M$ . Sea  $s$  la función rango de  $M$ , es decir, la función que a cada subconjunto de  $E$  le asigna la mayor de las cardinalidades de los conjuntos independientes contenidos en él. Nuestro objetivo es comprobar que  $r = s$ . El dominio de ambas funciones es  $\mathcal{P}(E)$ , así que sólo falta verificar que su regla de correspondencia es la misma. Sean  $A \subseteq E$  e  $I \subseteq A$  un conjunto independiente tal que  $s(A) = |I|$ . Como  $I \in \mathcal{I}$ , cumple que  $r(I) = |I|$ , de manera que  $s(A) = |I| = r(I)$ . Además, por (r2) tenemos que  $r(I) \leq r(A)$ . Por lo tanto, para todo  $A \in \mathcal{P}(E)$ ,  $s(A) \leq r(A)$ . Supongamos que la otra desigualdad no se cumple, es decir, que existe  $A \in \mathcal{P}(E)$  tal que  $s(A) < r(A)$ . Sea  $I \in \mathcal{I}$  subconjunto de  $A$  tal que  $s(A) = |I|$ , entonces  $|I| < r(A)$  y para todo  $x \in A \setminus I$ ,  $I \cup \{x\} \notin \mathcal{I}$ . Por (r2\*),  $|I| = r(I) \leq r(I \cup \{x\}) \leq r(I) + 1 = |I| + 1$ , pero por la manera en la que se tomó  $I$  no puede ocurrir que  $r(I \cup \{x\}) = |I| + 1$ , por lo que  $r(I \cup \{x\}) = r(I)$ . Como  $r$  verifica (r3\*\*), obtenemos que  $r(A) = r(I) = |I|$ , lo cual contradice que  $|I| < r(A)$ . Concluimos entonces que para todo  $A \in \mathcal{P}(E)$ ,  $r(A) \leq s(A)$ . Así que en efecto,  $r$  es la función rango de  $M$ .  $\square$

Los Teoremas 5.3 y 5.9 permiten establecer una cuarta definición de matroide.

**Definición 5.10** (Por función rango). Un *matroide*  $M$  es un par ordenado  $(E, r)$  donde  $E$  es un conjunto finito y  $r$  es una función de valor entero con dominio  $\mathcal{P}(E)$  que cumple las siguientes propiedades para cualesquiera  $A, B \subseteq E$ :

$$(r1) \text{ (Normalización)} \quad 0 \leq r(A) \leq |A|;$$

$$(r2) \text{ (Creciente)} \quad \text{Si } A \subseteq B, \text{ entonces } r(A) \leq r(B);$$

$$(r3) \text{ (Semimodular)} \quad r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B).$$

En este contexto,  $M$  se llama un matroide sobre  $E$ . La función  $r$  se conoce como la *función rango* de  $M$ .

## 6 Representación gráfica de un matroide

En matemáticas es de gran ayuda poder representar gráficamente un concepto, pues en muchas ocasiones es más sencillo interpretar algunas de sus propiedades mediante un dibujo o diagrama que teniendo sólo texto. En el caso de matroides, igual que ocurre con sus definiciones, existen múltiples formas de representar un matroide. Esto depende en gran medida del rango del matroide que desee representarse. A continuación se presenta una manera de representar e interpretar gráficamente un matroide de rango 3.

**Ejemplo 6.1.** Las reglas para elaborar la representación gráfica de un matroide de rango 3 son las siguientes:

- Los puntos aislados que se colocan dentro de una nube representan un conjunto unitario dependiente. Cualquier otro punto representa un conjunto unitario independiente.
- Dos puntos que se colocan en la misma posición corresponden a un conjunto dependiente de dos elementos. Cualquier otro par de puntos en el que ninguno de los dos pertenezca a un conjunto unitario dependiente representa un conjunto independiente.
- Tres puntos colineales simbolizan un conjunto dependiente. Cualquier otro conjunto de tres puntos que no contenga un conjunto dependiente de cardinalidad uno o dos es considerado independiente.
- Cualquier conjunto de 4 o más puntos representa a un conjunto dependiente.

Figura 2: Representación de un matroide.

Sea  $M$  el matroide representado en la Figura 2.  $M$  tiene como conjunto subyacente a  $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ .  $M$  tiene 20 conjuntos independientes y son los siguientes:

- Cardinalidad 0:  $\emptyset$ .
- Cardinalidad 1:  $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}$ .



- Cardinalidad 2:  $\{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}$ .
- Cardinalidad 3:  $\{a, c, e\}, \{a, d, e\}, \{b, c, e\}, \{b, d, e\}, \{c, d, e\}$ .

Las bases de  $M$ , son justamente todos los conjuntos independientes de cardinalidad 3.

Los conjuntos dependientes de  $M$  son los siguientes 44 conjuntos:

- Cardinalidad 1:  $\{f\}$ .
- Cardinalidad 2:  $\{a, b\}, \{a, f\}, \{b, f\}, \{c, f\}, \{d, f\}, \{e, f\}$ .
- Cardinalidad 3:  $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, b, f\}, \{a, c, d\}, \{a, c, f\}, \{a, d, f\}, \{a, e, f\}, \{b, c, d\}, \{b, c, f\}, \{b, d, f\}, \{b, e, f\}, \{c, d, f\}, \{c, e, f\}, \{d, e, f\}$ .
- Cardinalidad 4:  $\{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, c, f\}, \{a, b, d, e\}, \{a, b, d, f\}, \{a, b, e, f\}, \{a, c, d, e\}, \{a, c, d, f\}, \{a, c, e, f\}, \{a, d, e, f\}, \{b, c, d, e\}, \{b, c, d, f\}, \{b, c, e, f\}, \{b, d, e, f\}, \{c, d, e, f\}$ .
- Cardinalidad 5:  $\{a, b, c, d, e\}, \{a, b, c, d, f\}, \{a, b, c, e, f\}, \{a, b, d, e, f\}, \{a, c, d, e, f\}, \{b, c, d, e, f\}$ .
- Cardinalidad 6:  $\{a, b, c, d, e, f\}$ .

Los conjuntos dependientes minimales, o bien, los circuitos de  $M$ , son  $\{f\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$ . Vemos en este ejemplo circuitos que tienen distinta cardinalidad entre sí, como se había mencionado anteriormente.

A continuación se enlistan todos los subconjuntos de  $E$  agrupados según su rango.

- Rango 0:  $\emptyset, \{f\}$ .
- Rango 1:  $\{a, b\}, \{a, f\}, \{b, f\}, \{c, f\}, \{d, f\}, \{e, f\}$  y todos los conjuntos independientes de cardinalidad 1.
- Rango 2:  $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, f\}, \{a, d, f\}, \{a, e, f\}, \{b, c, d\}, \{b, c, f\}, \{b, d, f\}, \{b, e, f\}, \{c, d, f\}, \{c, e, f\}, \{d, e, f\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, f\}, \{a, b, d, f\}, \{a, b, e, f\}, \{a, c, d, f\}, \{b, c, d, f\}, \{a, b, c, d, f\}$  y los conjuntos independientes de cardinalidad 2.

- Rango 3: los conjuntos independientes de cardinalidad 3 y los conjuntos restantes.

## 7 Matroide representable sobre el campo $\mathbb{F}$ y matroide dual

Como es usual en matemáticas, después de definir un nuevo concepto y establecer algunas de las propiedades que cumple es de interés saber si pueden relacionarse entre sí objetos del mismo tipo, por ejemplo, dos espacios vectoriales, dos grupos o dos anillos. Se busca una función que preserve la operación u operaciones definidas y una estructura en la que por alguna razón sea más sencillo resolver determinado problema. En el caso de matroides lo que se desea es una función que preserve la independencia de los conjuntos.

**Definición 7.1.** Sean  $M_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$  y  $M_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$  matroides. Una función  $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$  es un *morfismo de matroides* si para cada  $I \in \mathcal{I}_1$ ,  $\varphi(I) \in \mathcal{I}_2$ . La función  $\varphi$  se llama *isomorfismo de matroides* si  $\varphi$  es morfismo de matroides,  $\varphi$  es biyectiva y  $\varphi^{-1}$  es también un morfismo de matroides. Si existe un isomorfismo de matroides entre  $M_1$  y  $M_2$ , decimos que  $M_1$  y  $M_2$  son *isomorfos*.

Recuérdese que uno de los objetivos principales de este trabajo es asociar un matroide a un código lineal. Se ha visto que ciertos resultados de la teoría de códigos pueden demostrarse con menos dificultad empleando resultados de la teoría de matroides. A un código lineal ya se le ha asignado su matriz generadora.

Lo que se hará a continuación es relacionar una matriz con un matroide.

**Teorema 7.2.** Sea  $E_G = [n]$  el conjunto de etiquetas de las columnas de una matriz  $G$  de tamaño  $k \times n$  sobre un campo  $\mathbb{F}$  y sea  $\mathcal{I}_G$  la familia de subconjuntos  $I$  de  $E_G$  para los cuales el conjunto de columnas con etiquetas en  $I$  es linealmente independiente en el espacio vectorial  $\mathbb{F}^k$ . Entonces  $(E_G, \mathcal{I}_G)$  es un matroide.

*Demostración.* Demostraremos que  $(E_G, \mathcal{I}_G)$  es un matroide mediante la caracterización de conjuntos independientes. La condición (II) se satisface ya que el conjunto de columnas etiquetadas por  $\emptyset$  es el conjunto  $\emptyset$ , que es linealmente independiente en  $\mathbb{F}^k$ . Sea  $I \in \mathcal{I}_G$ , entonces el conjunto de columnas etiquetadas por  $I$  es linealmente independiente en  $\mathbb{F}^k$ , así que si  $J \subseteq I$ , el

conjunto de columnas etiquetadas por  $J$  está contenido en el conjunto de columnas etiquetadas por  $I$ , y por ello también es linealmente independiente en  $\mathbb{F}^k$ . Por lo tanto, se cumple (I2). Para probar (I3), tomemos  $I, J \in \mathcal{I}$ , tales que  $|I| < |J|$ . Sea  $W$  el subespacio de  $\mathbb{F}^k$  generado por los vectores columna etiquetados por  $I \cup J$ . Tenemos que  $\dim W \geq |J|$ . Supongamos que para todo elemento  $e$  de  $J \setminus I$ , el conjunto de vectores columna etiquetados por  $I \cup \{e\}$  es linealmente dependiente. Sea  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  el conjunto de vectores etiquetados por  $I$  y  $\{u_1, u_2, \dots, u_l\}$  el conjunto de vectores correspondiente al conjunto  $J \setminus I$ . Entonces para cada  $i \in \{1, 2, \dots, l\}$  existen escalares  $\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_k^{(i)}, \lambda_{k+1}^{(i)}$  no todos iguales a 0, tales que

$$\lambda_1^{(i)}v_1 + \lambda_2^{(i)}v_2 + \dots + \lambda_k^{(i)}v_k + \lambda_{k+1}^{(i)}u_i = 0,$$

en particular  $\lambda_{k+1}^{(i)} \neq 0$ , pues los vectores  $v_1, v_2, \dots, v_k$  son linealmente independientes, así que

$$u_i = -\frac{\lambda_1^{(i)}}{\lambda_{k+1}^{(i)}}v_1 - \frac{\lambda_2^{(i)}}{\lambda_{k+1}^{(i)}}v_2 - \dots - \frac{\lambda_k^{(i)}}{\lambda_{k+1}^{(i)}}v_k,$$

es decir, cada uno de los elementos  $u_i$  puede escribirse como una combinación lineal de los elementos  $v_i$ . Entonces  $W$  es el subespacio generado por los vectores etiquetados por  $I$ , luego

$$|J| \leq \dim W = |I| < |J|$$

lo cual no puede ocurrir. Por lo tanto, (I3) se cumple. Entonces,  $(E_G, \mathcal{I}_G)$  es un matroide.  $\square$

**Definición 7.3.** El matroide que se obtiene como en el Teorema 7.2 a partir de una matriz  $G$  se denota por  $M[G]$  y se llama el *matroide vector* de  $G$ .

Nótese que el Teorema 7.2 es más general, ya que no se limita a matrices con entradas en un campo finito, sino que abarca incluso campos infinitos como es el caso del siguiente ejemplo.

**Ejemplo 7.4.** Sea  $G$  la matriz

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sobre el campo de los números reales. Sean  $E_G$  e  $\mathcal{I}_G$  como en el Teorema 7.2. Entonces  $E_G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $\mathcal{I}_G = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}$ . La familia de bases de  $M[G]$  es  $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}$ ; la familia de conjuntos dependientes de este matroide es  $\{\{3\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\} \cup \{X \subseteq E: |X| \geq 3\}$  y su familia de circuitos es  $\{\{3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 4, 5\}\}$ . Observe que  $M[G]$  es un matroide de rango 2.

**Definición 7.5.** Un matroide  $M$  se llama *representable* sobre el campo  $\mathbb{F}$  si existe una matriz  $G$  con entradas en  $\mathbb{F}$  tal que  $M$  es isomorfo al matroide  $M[G]$ .  $G$  se llama *representación* para  $M$  sobre  $\mathbb{F}$  o  $\mathbb{F}$ -*representación* para  $M$ . Un matroide es *representable* si tiene una representación sobre algún campo.

Sea  $C$  un código sobre  $\mathbb{F}_q$  con matrices generadoras  $G_1$  y  $G_2$ . ¿Es cierto que  $(E_{G_1}, \mathcal{I}_{G_1}) = (E_{G_2}, \mathcal{I}_{G_2})$ ? La respuesta es afirmativa, pero para demostrar que en efecto es así, se presenta el siguiente teorema.

**Teorema 7.6.** Sea  $G$  una matriz de tamaño  $k \times n$  con entradas en un campo  $\mathbb{F}$ . Sea  $G'$  una matriz que se obtiene realizando algunas de las operaciones elementales con los renglones de  $G$  (es decir, intercambio de renglones, multiplicación de un renglón por una constante diferente de cero o sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón). Entonces  $M[G] = M[G']$ .

*Demostración.* Sean  $G = (g_{ij})$ ,  $G' = (g'_{ij})$ . Por la forma en la que se obtiene  $G'$ , las matrices  $G$  y  $G'$  son del mismo tamaño, así que  $E_G = E_{G'}$ . Veamos que los conjuntos independientes de  $M[G]$  pertenecen a  $\mathcal{I}_{G'}$ . Si  $J = \{l_1, l_2, \dots, l_r\} \in \mathcal{I}_G$ , entonces los vectores columna con etiquetas en  $J$  son linealmente independientes, así que la única solución al sistema lineal homogéneo

$$\begin{aligned} \alpha_1 g_{1l_1} + \alpha_2 g_{1l_2} + \dots + \alpha_r g_{1l_r} &= 0 \\ \alpha_1 g_{2l_1} + \alpha_2 g_{2l_2} + \dots + \alpha_r g_{2l_r} &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_1 g_{kl_1} + \alpha_2 g_{kl_2} + \dots + \alpha_r g_{kl_r} &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

es el vector  $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r] = [0, 0, \dots, 0]$ . Queremos ver si los vectores columna de  $G'$  etiquetados por  $J$  también son linealmente independientes. Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \beta_1 g'_{1l_1} + \beta_2 g'_{1l_2} + \dots + \beta_r g'_{1l_r} &= 0 \\ \beta_1 g'_{2l_1} + \beta_2 g'_{2l_2} + \dots + \beta_r g'_{2l_r} &= 0 \\ &\vdots \\ \beta_1 g'_{kl_1} + \beta_2 g'_{kl_2} + \dots + \beta_r g'_{kl_r} &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema lineal homogéneo (14) es  $(g'_{ml_n})$  de tamaño  $k \times r$ . Como  $G'$  se obtiene mediante operaciones elementales con los renglones de  $G$ , entonces existe una serie de operaciones elementales que al aplicarlas a la matriz  $G'$  se obtiene la matriz  $G$ , así que si aplican dichas operaciones a la matriz  $(g'_{ml_n})$  se obtiene la matriz  $(g_{ml_n})$  que es la matriz asociada al sistema (13). Por lo tanto, la única solución al sistema (14) es el vector  $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r] = [0, 0, \dots, 0]$ , entonces los vectores columna de  $G'$  etiquetados por  $J$  en efecto son linealmente independientes, por lo que  $J \in \mathcal{I}_{G'}$ . Análogamente se prueba que si  $J \in \mathcal{I}_{G'}$  también  $J \in \mathcal{I}_G$ . En conclusión,  $\mathcal{I}_G = \mathcal{I}_{G'}$  y con ello queda probado que  $M[G] = M[G']$ .  $\square$

**Definición 7.7.** Sea  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroide y  $\mathcal{B}$  su familia de bases. Para cada  $B \in \mathcal{B}$  se establece la notación  $B^\perp = E \setminus B$ . Definimos la familia  $\mathcal{B}^\perp = \{B^\perp \mid B \in \mathcal{B}\}$ . Sea  $\mathcal{I}^\perp = \{I \subseteq E \mid \exists B \in \mathcal{B} : I \subseteq B^\perp\}$ .  $M^\perp = (E, \mathcal{I}^\perp)$  se llama *matroide dual* de  $M$ .

**Teorema 7.8.** *Sea  $M$  un matroide. Entonces  $M^\perp$  es, en efecto, un matroide.*

*Demostración.* En esta prueba haremos uso del Corolario 3.8: usaremos el hecho de que  $M$  es matroide y por ello la familia  $\mathcal{B}$  satisface (B1), (B2\*) y (B3\*), y por otro lado probaremos que la familia  $\mathcal{B}^\perp$  satisface las propiedades (B1), (B2\*) y (B3\*) para demostrar que  $M^\perp$  es un matroide.

La familia  $\mathcal{B}$  satisface la propiedad (B1), así que existe  $B \in \mathcal{B}$ , de donde  $B^\perp \in \mathcal{B}^\perp$ , es decir,  $\mathcal{B}^\perp \neq \emptyset$  y por tanto,  $\mathcal{B}^\perp$  satisface la propiedad (B1). Ahora, sean  $B_1^\perp, B_2^\perp \in \mathcal{B}^\perp$ , donde  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ . Por (B2\*),  $|B_1| = |B_2|$ , de aquí obtenemos inmediatamente que  $|E \setminus B_1| = |E \setminus B_2|$ , es decir,  $|B_1^\perp| = |B_2^\perp|$ , así que  $\mathcal{B}^\perp$  también satisface (B2\*). Dado que  $B_1^\perp \setminus B_2^\perp = (E \setminus B_1) \setminus (E \setminus B_2) = B_2 \setminus B_1$ , si  $x \in B_1^\perp \setminus B_2^\perp$ , entonces  $x \in B_2 \setminus B_1$ .  $\mathcal{B}$  verifica la propiedad (B3\*), es decir, la propiedad de intercambio fuerte en bases, por lo que existe

$y \in B_1 \setminus B_2 = B_2^\perp \setminus B_1^\perp$  tal que  $(B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\}$  y  $(B_2 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$  son bases del matroide  $M$ , entonces  $E \setminus [(B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\}]$  y  $E \setminus [(B_2 \setminus \{x\}) \cup \{y\}]$  son elementos de  $\mathcal{B}^\perp$ . Se tiene que  $E \setminus [(B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\}] = [E \setminus (B_1 \setminus \{y\})] \cap (E \setminus \{x\}) = [(E \setminus B_1) \cup \{y\}] \cap (E \setminus \{x\}) = [E \setminus (B_1 \cup \{x\})] \cup \{y\} = [(E \setminus B_1) \setminus \{x\}] \cup \{y\} = (B_1^\perp \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ , y de manera análoga puede mostrarse que  $E \setminus [(B_2 \setminus \{x\}) \cup \{y\}] = (B_2^\perp \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ , por lo cual concluimos que  $(B_1^\perp \setminus \{x\}) \cup \{y\}$  y  $(B_2^\perp \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{B}^\perp$ . Entonces  $\mathcal{B}^\perp$  verifica (B3\*). Por lo tanto,  $M^\perp$  es un matroide.  $\square$

El siguiente teorema muestra una forma sencilla de calcular en el matroide dual el rango de un subconjunto a partir de la función rango del matroide original. Se denotará la función rango del matroide dual como  $r^\perp$ .

**Teorema 7.9.** *Sea  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroide y  $r$  su función rango. Para  $A \subseteq E$  se cumple lo siguiente:*

$$r^\perp(A) = r(E \setminus A) + |A| - r(M).$$

*Demostración.* Veamos que  $r^\perp(A) = \max\{|A \cap B^\perp| : B^\perp \in \mathcal{B}^\perp\}$ . Por definición  $r^\perp(A)$  es la cardinalidad del conjunto independiente más grande de  $M^\perp$  que está contenido en  $A$ . Sea  $I_A \subseteq A$  conjunto independiente tal que  $r^\perp(A) = |I_A|$  y  $B_1^\perp$  una base de  $M^\perp$  tal que  $I_A \subseteq B_1^\perp$ , por lo tanto  $I_A \subseteq A \cap B_1^\perp$ . Además, existe una base  $B_1$  del matroide  $M$  tal que  $B_1^\perp = E \setminus B_1$ . Si suponemos que  $I_A \subsetneq A \cap B_1^\perp$ , entonces existe  $x \in A \cap B_1^\perp$  tal que  $x \notin I_A$  y se cumple que  $I_A \subsetneq I_A \cup \{x\} \subseteq A \cap B_1^\perp$ . Como  $I_A \cup \{x\} \subseteq B_1^\perp$  e  $I_A \cup \{x\} \subseteq A$ ,  $I_A \cup \{x\}$  es un conjunto independiente de  $M^\perp$  que es subconjunto de  $A$  y cuya cardinalidad es mayor que  $I_A$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $I_A = A \cap B_1^\perp$ . Finalmente, como todos los conjuntos de la forma  $A \cap B^\perp$  son conjuntos independientes de  $M^\perp$  que están contenidos en  $A$  e  $I_A$  es uno de tales conjuntos pero de cardinalidad máxima, entonces concluimos que  $r^\perp(A) = |I_A| = \max\{|A \cap B^\perp| : B^\perp \in \mathcal{B}^\perp\}$ . Entonces  $B_1^\perp$  es un elemento de  $\mathcal{B}^\perp$  cuya intersección con  $A$  es máxima, o equivalentemente,  $B_1^\perp$  es un elemento de  $\mathcal{B}^\perp$  cuya intersección con  $E \setminus A$  es mínima, entonces la intersección de  $B_1 = E \setminus B_1^\perp$  y  $E \setminus A$  es máxima entre todos los complementos de las bases de  $\mathcal{B}^\perp$  (que son las bases de  $M$ ), así que por definición de rango del matroide  $M$ ,  $r(E \setminus A) = |(E \setminus A) \cap B_1|$ .  $E$  se divide en los siguientes cuatro conjuntos ajenos entre sí:  $A \setminus B_1^\perp$ ,  $A \cap B_1^\perp$ ,  $B_1^\perp \setminus A$  y  $E \setminus (A \cup B_1^\perp) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B_1^\perp) = (E \setminus A) \cap B_1$ . Sean  $x_1, x_2, x_3$

y  $x_4$  las cardinalidades de dichos conjuntos, respectivamente. Tenemos que  $x_2 = |A \cap B_1^\perp| = r^\perp(A)$  y  $x_4 = |E \setminus (A \cup B_1^\perp)| = |(E \setminus A) \cap B_1| = r(E \setminus A)$ . Además,  $x_3 + x_4 = |B_1^\perp \setminus A| + |E \setminus (A \cup B_1^\perp)| = |E| - |A|$  y  $x_2 + x_3 = |A \cap B_1^\perp| + |B_1^\perp \setminus A| = |B_1^\perp| = |E| - |B_1| = |E| - r(M)$ , así que por el valor de  $x_3$  en ambas igualdades tenemos que  $|E| - |A| - x_4 = |E| - r(M) - x_2$ , por lo que  $x_2 = |A| + x_4 - r(M)$ , y sustituyendo los valores ya conocidos de  $x_2$  y  $x_4$  concluimos finalmente que  $r^\perp(A) = r(E \setminus A) + |A| - r(M)$ .  $\square$

## 8 Conclusiones

En este trabajo se estudiaron los conceptos básicos de la teoría de matroides, poniendo especial atención al establecimiento de las equivalencias entre algunas de las definiciones del concepto de matroide. Tales equivalencias, explicadas a detalle en las secciones 2, 3, 4 y 5, pueden esquematizarse como se muestra en la Figura 3.

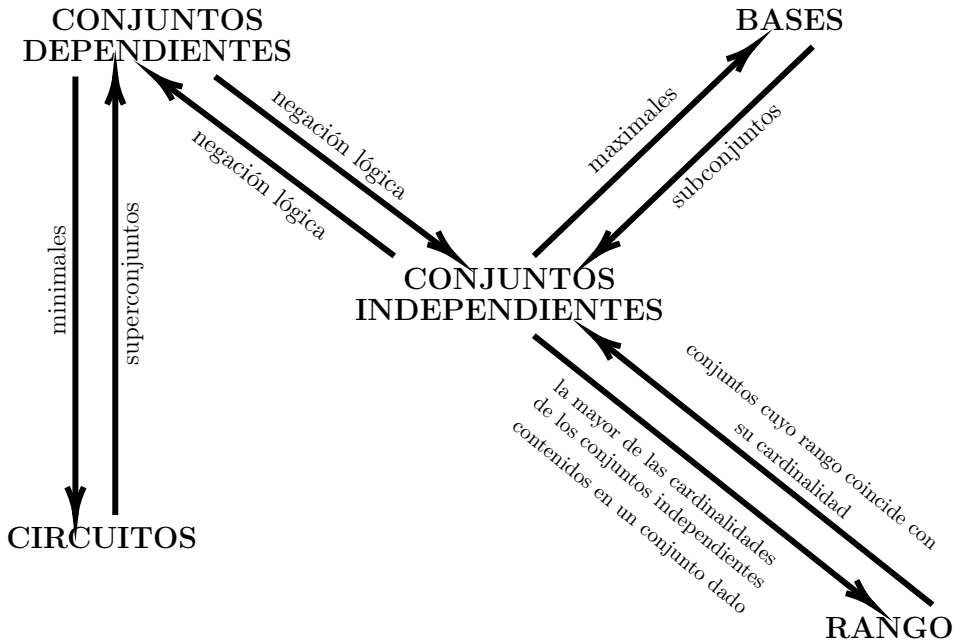


Figura 3: Equivalencias entre definiciones de matroide

Además se presentaron algunos ejemplos de los conceptos definidos y se abordó una manera de representar un matroide de manera gráfica. Esperamos que este material sea una herramienta útil para el lector que está por iniciarse en el estudio de alguna de las múltiples aplicaciones de esta rama de las matemáticas. Como ejemplos de estas aplicaciones invitamos al lector a consultar [4], donde encontrará una utilización de los matroides en el área de la Teoría de la Información ó [5], en el cual los matroides son ocupados para resolver problemas en el área de Cinemática de Robots ó [1], en donde se relacionan a los matroides con la Criptografía a través del esquema de compartición de secretos ideal.

## Agradecimientos

## Bibliografía

- [1] Ernest F. Brickell and Daniel M. Davenport, *On the Classification of Ideal Secret Sharing Schemes*, J. Cryptology **4** (1991), 123–134
- [2] Gary Gordon y Jennifer McNulty, *Matroids: A Geometric Introduction*, Cambridge University Press, 2012.
- [3] James Oxley, *Matroid Theory*, Oxford University Press, 1992.
- [4] S. El Rouayheb, A. Sprintson y C. Georghiades, *On the Index Coding Problem and Its Relation to Network Coding and Matroid Theory*, IEEE Transactions on Information Theory, **56(7)**, (2010), 3187-3195, doi: 10.1109/TIT.2010.2048502.
- [5] J. Lenarčič, y B. Siciliano (Eds.), *Advances in Robot Kinematics 2020*, Vol. 15, Springer Nature, 2020.
- [6] Hassler Whitney, *On the Abstract Properties of Linear Dependence*, American Journal of Mathematics **57** (1935), 63–87.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,



Puebla, Pue. C.P. 72570

mireya.diaz.ljdb@gmail.com

carlos.lopezandrade@correo.buap.mx

cguillen@cfm.buap.mx

---

# **Análisis matemático**

---



## Capítulo 2

### Funciones semi-Lipschitz

Luz del Carmen Álvarez Marín, Héctor Noé Flores  
Meza, José Margarito Hernández Morales

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

#### Resumen

En este capítulo se presenta un breve estudio sobre los espacios de funciones semi-Lipschitz,  $SLip_{\mu,r}(X, Y)$ , para cuando  $(X, \rho)$  es un espacio cuasi-métrico, con  $\mu = \rho, \bar{\rho}, \rho^s$ ; y  $(Y, q)$  un espacio normado asimétricamente, con  $r = q, \bar{q}, q^s$ . Se presentan resultados tales como que dicho conjunto de funciones forma un cono normado y otros que dan condiciones para cuando éstos resultan ser espacios lineales. Otro resultado importante que tratamos es un teorema de extensión de una función semi-Lipschitz, se anexa además un ejemplo que muestra que no siempre es posible extender una función semi-Lipschitz sobre cualquier contradominio métrico. Posteriormente abordamos una aplicación de las funciones semi-Lipschitz en el espacio de complejidad de algoritmos.

## 1 Preliminares

Uno de los conceptos del análisis funcional clásico que tuvo y sigue teniendo mucha importancia, es el de función Lipschitz. La extensión de este concepto al contexto de los espacios asimétricos se introdujo en los años setenta, véase [1], [4].

**Definición 1.1** (Función de Lipschitz). Sea  $I$  un intervalo en los números reales, una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se llama de Lipschitz (o que cumple la condición de Lipschitz) si existe una constante  $M \geq 0$ , tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|$$

para cualesquiera  $x, y \in I$ .

Este concepto se generalizó a espacios métricos y se enuncia a continuación.

**Definición 1.2** (Función Lipschitz). Sean  $(X, d_1)$ ,  $(Y, d_2)$  espacios métricos, una función  $f : X \rightarrow Y$  se llama *función de Lipschitz* si existe una constante  $L \geq 0$ , tal que

$$d_2(f(x), f(y)) \leq L d_1(x, y),$$

para todo los  $x, y \in X$ . A  $L$  se le llama una constante de Lipschitz.

Análogamente para codominios normados se tiene la definición siguiente:

**Definición 1.3** (Función Lipschitz). Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $(Y, \|\cdot\|)$  un espacio normado, la función  $f : X \rightarrow Y$  se llama *función de Lipschitz* si existe una constante  $L \geq 0$ , tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L d(x, y),$$

para todo los  $x, y \in X$ . A  $L$  se le llama una constante de Lipschitz.

Si  $(X, d)$  es un espacio métrico y  $(Y, \|\cdot\|)$  un espacio normado, el conjunto  $\text{Lip}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ es Lipschitz}\}$  resulta ser un espacio vectorial con la suma usual de funciones y el producto por escalar usual. Además en [10], la expresión

$$\text{máx} \left\{ \sup \left\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d(x, y)} : x, y \in X \ d(x, y) > 0 \right\}, \|f\|_\infty \right\},$$

define una norma sobre el espacio  $\text{Lip}(X, Y)$ , denotada por  $\|f\|_{(d, \|\cdot\|)}$ .

**Definición 1.4** (Cono). Un cono es una tripleta  $(X, +, \cdot)$  donde  $(X, +)$  es un monoide abeliano y la función  $\cdot : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$  satisface que para cada  $r, s \in \mathbb{R}^+$ ,  $x, y \in X$ ,

1.  $r \cdot (s \cdot x) = (rs) \cdot x$ ,
2.  $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$ ,
3.  $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$ ,
4.  $1 \cdot x = x$ .

El cono  $(X, +, \cdot)$  puede denotarse simplemente por  $X$ , siempre y cuando no haya duda de las operaciones que estén asociadas a él. Un cono  $X$  puede ser dotado también de una norma, de la siguiente manera.

**Definición 1.5** (Norma). Dado un cono  $X$ , una función  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0 + \infty)$ , tal que para cada  $x, y \in X$ ,  $r > 0$ , cumple:

1.  $\|rx\| = r\|x\|$ ,
2.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,
3.  $\|x\| = 0$  implica que  $-x \in X$  y  $\|-x\| = 0$ ,

se llama norma sobre  $X$ .

Un cono  $X$  equipado con una norma  $\|\cdot\|$ , se denomina *cono normado*.

## 2 Espacios Asimétricos

A rasgos muy generales los espacios asimétricos son: los espacios cuasi-semimétricos y los seminormados asimétricamente, los cuales se definen en los siguientes párrafos.

**Definición 2.1** (Cuasi-semimétrica). Una cuasi-semimétrica sobre un conjunto no vacío  $X$ , es una función  $\rho : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ , que para cualesquiera  $x, y, z \in X$ , satisface las condiciones siguientes:

1.  $\rho(x, x) = 0$ ,
2.  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ .

Si además  $\rho$  cumple para toda  $x, y \in X$  que

3.  $[\rho(x, y) = \rho(y, x) = 0] \implies x = y$ ,

entonces a  $\rho$  se le llama una cuasi-métrica.

El par  $(X, \rho)$  recibe el nombre de *espacio cuasi-semimétrico*, respectivamente *espacio cuasi-métrico*.

**Ejemplo 2.2.** Dado un número real  $\alpha > 0$ , en el conjunto de números naturales  $\mathbb{N}$ , la función

$$\rho_\alpha(n, m) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \leq m; \\ \alpha, & \text{si } n > m; \end{cases}$$

es una cuasi-métrica, por lo que  $(\mathbb{N}, \rho_\alpha)$  es un espacio cuasi-métrico.

La conjugada de una cuasi-semimétrica  $\rho$ , denotada por  $\bar{\rho}$ , es también una cuasi-semimétrica, ésta se define mediante  $\bar{\rho}(x, y) = \rho(y, x)$ ,  $x, y \in X$ . El mapeo  $\rho^s(x, y) = \max\{\rho(x, y), \bar{\rho}(x, y)\}$ ,  $x, y \in X$ , es una semimétrica, la cual es una métrica si y sólo si  $\rho$  es cuasi-métrica. Con frecuencia se trabaja con cuasi-semimétricas extendidas, entendiendo que la cuasi-semimétrica puede tomar el valor  $+\infty$  para algunos pares  $(x, y) \in X \times X$ .

Es fácil ver que las desigualdades:

$$\rho(y, x) \leq \rho^s(x, y) \quad \text{y} \quad \bar{\rho}(x, y) \leq \rho^s(x, y). \quad (1)$$

son válidas para cualesquiera  $x, y \in X$ :

Por otra parte, una cuasi-semimétrica induce una topología en el conjunto  $X$ , la cual se construye mediante bolas abiertas, análogamente como en los espacios métricos.

[Bola abierta, bola cerrada] Sean  $(X, \rho)$  un espacio cuasi-semimétrico,  $r > 0$  un número real y  $x_0$  un elemento de  $X$ . Se define la bola abierta  $B_\rho(x_0, r)$ , centrada en  $x_0$  de radio  $r$  por el conjunto

$$B_\rho(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < r\}.$$

La bola cerrada centrada en  $x_0$  de radio  $r$  se denota y define por

$$B_\rho[x_0, r] = \{x \in X : \rho(x_0, x) \leq r\}.$$

Note que  $B_\rho(x, r) \neq \emptyset$ , al igual que  $B_\rho[x, r] \neq \emptyset$ .

**Definición 2.3** (Subconjunto abierto y subconjunto cerrado). En un espacio cuasi-semimétrico  $(X, \rho)$ , un subconjunto  $A$  de  $X$  se llama abierto respecto a  $\rho$  o  $\rho$ -abierto, si para cada  $x \in A$ , existe  $r_x > 0$  tal que  $B_\rho(x, r_x) \subseteq A$ .

El subconjunto  $A$  se llama cerrado respecto a  $\rho$  o  $\rho$ -cerrado si  $X - A$  es  $\rho$ -abierto.

Las siguientes proposiciones muestran algunas similitudes y diferencias a las correspondientes en espacios métricos respecto a la anterior definición, veáse [3]; por ejemplo el resultado siguiente es análogo a lo que pasa en un espacio métrico:

**Proposición 2.4.** *En un espacio cuasi-semimétrico  $(X, \rho)$ , toda bola abierta  $B_\rho(x, r)$  es un conjunto  $\rho$ -abierto.*

Sin embargo, el siguiente resultado difiere a lo que sucede en un espacio métrico.

**Proposición 2.5.** *En un espacio cuasi-semimétrico  $(X, \rho)$ , toda bola cerrada  $B_\rho[x, r]$  es un conjunto  $\bar{\rho}$ -cerrado.*

Incluso no siempre se cumple que toda bola cerrada  $B_\rho[x, r]$  sea un conjunto  $\rho$ -cerrado.

Como se había mencionado, un espacio cuasi-semimétrico  $(X, \rho)$  puede dotarse de dos topologías de manera natural  $\tau_\rho$  y  $\tau_{\bar{\rho}}$ , correspondientes a las cuasi-semimétricas  $\rho$  y  $\bar{\rho}$ , respectivamente. Más aún, se puede construir una tercer topología  $\tau_{\rho^s}$ , correspondiente a la semimétrica  $\rho^s$ . Si  $A$  es un subconjunto  $\rho$ -abierto de  $X$ , entonces para cada  $x \in A$ , existe  $r_x > 0$ , tal que  $B_\rho(x, r_x) \subseteq A$  pero como  $\rho(x, y) \leq \rho^s(x, y)$ , se tiene que  $B_{\rho^s}(x, r_x) \subseteq B_\rho(x, r_x) \subseteq A$ . De donde obtenemos que  $A$  es también  $\rho^s$ -abierto, esto es,  $\tau_{\rho^s}$  es más fina que  $\tau_\rho$ . Análogamente puede verse también que  $\tau_{\rho^s}$  es más fina que  $\tau_{\bar{\rho}}$ . Hay más de una relación sobresaliente entre estas tres topologías, por ejemplo:

**Proposición 2.6.** *Sea  $\rho$  una cuasi-semimétrica sobre el conjunto  $X$ . Para todo  $x \in X$  y  $r > 0$  se satisface la siguiente igualdad:*

$$B_{\rho^s}(x, r) = B_\rho(x, r) \cap B_{\bar{\rho}}(x, r).$$

Otro resultado importante e interesante es el siguiente:

**Proposición 2.7.** *Si  $(X, \rho)$  es un espacio cuasi-semimétrico, entonces la topología  $\tau_\rho$  es  $T_1$  si y sólo si  $\rho(x, y) > 0$  siempre que  $x \neq y$ .*

A continuación se tiene un segundo tipo de espacio asimétrico, este es un conjunto que tiene una estructura algebraica de espacio vectorial, concretamente: [Norma asimétrica] Sea  $X$  un espacio vectorial real. Una función  $q : X \rightarrow [0, +\infty)$  es una norma asimétrica sobre  $X$ , si para toda  $x, y \in X$  y  $r \geq 0$ ,



1.  $q(x) = q(-x) = 0$  si y sólo si  $x = 0$ ;
2.  $q(rx) = rq(x)$ ;
3.  $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$ .

El par  $(X, q)$  recibe el nombre de *espacio normado asimétricamente*. Si la función  $q$  sólo satisface las condiciones (2) y (3), entonces ésta se llama una *seminorma asimétrica*, y el par  $(X, q)$ , *espacio seminormado asimétricamente*. También en algunas instancias, el valor  $+\infty$  podrá ser permitido para  $q$ , en cuyo caso  $q$  es una norma (seminorma) asimétrica extendida.

De manera similar a lo que pasa en espacios cuasi-semimétricos, la conjugada de una seminorma asimétrica  $q$ ,  $\bar{q}(x) = q(-x)$ ,  $x \in X$ , resulta ser también seminorma asimétrica. La función  $q^s(x) = \max\{q(x), \bar{q}(x)\}$ ,  $x \in X$ , resulta ser una seminorma, la cual es llamada *la seminorma asociada a  $q$* . Más aún,  $q$  es una norma asimétrica si y sólo si  $q^s$  es una norma sobre  $X$ . Una seminorma asimétrica  $q$  define también una cuasi-semimétrica  $\rho_q$  sobre  $X$ , que recibe el nombre de *cuasi-semimétrica generada por  $q$ , o asociada a  $q$* , mediante la fórmula

$$\rho_q(x, y) = q(y - x), \quad x, y \in X. \quad (2)$$

En este caso, en analogía a las desigualdades (1), se tiene que

$$q(x) \leq q^s(x) \quad y \quad \bar{q}(x) \leq q^s(x), \quad x \in X. \quad (3)$$

De manera análoga que en los espacios cuasi-semimétricos, a cualquier espacio seminormado asimétricamente se le puede dotar de tres topologías respecto a, la norma asimétrica, su conjugada y el máximo de ellas dos, esto se hace a través de una base para los abiertos, de bolas abiertas, como “usualmente” se conocen. Para la construcción se puede uno auxiliar de la cuasi-métrica asociada.

También en un cono se puede definir una norma asimétrica, obteniendo así una dupla, llamada cono normado asimétricamente.

[Norma asimétrica sobre un cono [2]] Sea  $X$  un cono. Una función  $p : X \rightarrow [0, +\infty)$  es una seminorma asimétrica sobre  $X$ , si para toda  $x, y \in X$  y  $r \geq 0$ ,

1.  $p(0) = 0$  y si  $x, -x \in X \wedge p(x) = p(-x) = 0$  entonces  $x = 0$ ;
2.  $p(rx) = rp(x)$ ;
3.  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ .

Si además  $p$  cumple que  $p(x) = 0 \iff x = 0$ , entonces  $p$  se llama norma asimétrica.

En  $\mathbb{R}$ , la norma asimétrica definida por  $u(x) = \max\{0, x\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , tiene como cuasi-métrica asociada a

$$\rho_u(x, y) = u(y - x) = \max(0, y - x).$$

Si se cambia el espacio vectorial  $\mathbb{R}$  por el cono  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ , entonces  $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}, u)$  es un cono normado asimétricamente.

**Observación 2.8.** Si  $p$  es una seminorma asimétrica en el espacio  $X$ , entonces se puede construir a partir de ella otra cuasi-semimétrica mediante  $D(x, y) = \max(0, p(y) - p(x))$ , la cual es llamada la cuasi-semimétrica inducida por  $p$ .

[Norma relativizada sobre un cono [7]] Sea  $X$  un cono. Una función  $p : X \rightarrow [0, +\infty)$  es una norma relativizada sobre  $X$ , si para toda  $x, y \in X$  y  $r > 0$ , se cumple  $p(rx) = \frac{1}{r}p(x)$  y  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ .

## Funciones crecientes

Sea  $(X, \rho)$  un espacio cuasi-métrico. Se define en  $X$  la relación  $\leq_\rho$  como sigue,  $x \leq_\rho y$  si y solo si  $\rho(x, y) = 0$ .

La relación  $\leq_\rho$  resulta ser un orden parcial en  $X$ . En efecto, dado que  $\rho(x, x) = 0$  para cualquier  $x \in X$ , se sigue que  $x \leq_\rho x$  para todo  $x \in X$ . De modo que  $\leq_\rho$  es una relación reflexiva. Por la desigualdad del triángulo, si  $x \leq_\rho y$  y  $y \leq_\rho z$ , entonces  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) = 0$ , en consecuencia  $\rho(x, z) = 0$ , con lo que  $x \leq_\rho z$ . Por lo tanto,  $\leq_\rho$  es transitivo. Con todo,  $\leq_\rho$  es un orden parcial.

**Observación 2.9.** Note que todo espacio o cono  $(X, q)$  normado asimétricamente se dota del orden anterior con la cuasi-métrica asociada a la norma asimétrica  $q$ , en este caso el orden parcial en cuestión se denota solo por  $\leq_q$ .

Considerando las definiciones previas podemos definir justificadamente el siguiente término.

**Definición 2.10** (Función creciente). Sea  $(X, \rho)$  un espacio cuasi-métrico y  $(Y, q)$  un espacio normado asimétricamente. Una función  $f: X \rightarrow Y$  se llama  $(\rho, q)$ -creciente si para cada  $x, y \in X$  con  $x \leq_\rho y$  se sigue que  $f(x) \leq_q f(y)$ .

En otras palabras,  $f$  es  $(\rho, q)$ -creciente si

$$\rho(x, y) = 0 \quad \text{implica que} \quad q(f(x) - f(y)) = 0, \quad x, y \in X,$$

o equivalentemente

$$q(f(x) - f(y)) > 0 \quad \text{implica que} \quad \rho(x, y) > 0, \quad x, y \in X.$$

**Observación 2.11.** Si  $(X, \tau_\rho)$  es  $T_1$ , entonces toda función  $f: X \rightarrow Y$  es  $(\rho, q)$ -creciente. En efecto, si  $x \leq_\rho y$ , entonces  $\rho(x, y) = 0$ . Dado que  $X$  es  $T_1$  se tiene que  $x = y$ . Por lo tanto  $q(f(x) - f(y)) = q(0) = 0$ , esto es  $f(x) \leq_q f(y)$ .

### 3 El espacio de funciones semi-Lipschitz

En su mayor parte el estudio del espacio de funciones semi-Lipschitz se debe a algunas de sus aplicaciones, como por ejemplo en el computo de la complejidad de ciertos algoritmos.

**Definición 3.1** (Función semi-Lipschitz). Dado un espacio cuasi-métrico  $(X, \rho)$  y un espacio normado asimétricamente  $(Y, q)$ , una función  $f: X \rightarrow Y$  es llamada semi-Lipschitz si existe una constante  $M \geq 0$ , tal que

$$q(f(x) - f(y)) \leq M\rho(x, y),$$

para todos los  $x, y \in X$ .

**Observación 3.2.** Si  $(X, \rho)$  espacio cuasi-métrico y  $(Y, q)$  un espacio normado asimétrico, toda función  $f: X \rightarrow Y$  semi-Lipschitz es  $(\rho, q)$ -creciente.

Contrario a lo que ocurre con el espacio de funciones Lipschitz,  $Lip(X, Y)$ , donde  $Y$  es un espacio normado, el conjunto de funciones semi-Lipschitz,  $SLip_{\rho, q}(X, Y)$ , donde  $Y$  es un espacio normado asimétricamente, no necesariamente resulta ser un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma

de funciones y multiplicación de una función por un escalar. El siguiente ejemplo muestra una función semi-Lipschitz cuyo inverso aditivo no lo es.

**Ejemplo 3.3.** Sea  $X = \mathbb{N}$  con la cuasi-métrica  $\rho_\alpha$  del Ejemplo 2.2 ( $\alpha > 1$ ), y sea  $Y = \mathbb{R}$  con la norma asimétrica  $q$  del Ejemplo 2. Considere la función  $f : X \rightarrow Y$  dada por  $f(n) = -\frac{1}{n}$ . Se tiene que  $f$  es una función semi-Lipschitz.

Sin embargo,  $-f$  no es una función semi-Lipschitz. En efecto, para  $n < m$ , se tiene que  $\rho_\alpha(n, m) = 0$ , luego  $q((-f)(n) - (-f)(m)) = \frac{m-n}{nm} > 0$ .

El ejemplo anterior muestra que, en general el conjunto  $SLip_{\rho,q}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ es semi-Lipschitz}\}$ , no es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación de una función por un escalar, sin embargo se tiene el siguiente:

**Teorema 3.4.** Sean  $(X, \rho)$  un espacio cuasi-métrico y  $(Y, q)$  un espacio normado asimétricamente. El conjunto  $SLip_{\rho,q}(X, Y)$  es un cono.

El siguiente resultado, muestra una relación entre los espacios  $SLip_{\rho,q}(X, Y)$  y  $SLip_{\bar{\rho},q}(X, Y)$ .

**Teorema 3.5.** Sean  $(X, \rho)$  un espacio cuasi-métrico y  $(Y, q)$  un espacio normado asimétricamente,  $f \in SLip_{\rho,q}(X, Y)$  si y sólo si  $-f \in SLip_{\bar{\rho},q}(X, Y)$ .

*Demostración.* Si  $f \in SLip_{\rho,q}(X, Y)$ , entonces existe  $M > 0$  tal que

$$q(f(x) - f(y)) \leq M\rho(x, y)$$

para todos los  $x, y \in X$ . Cambiando  $x$  por  $y$  y viceversa, tenemos  $q(f(y) - f(x)) \leq M\rho(y, x)$ , o equivalentemente  $q((-f)(x) - (-f)(y)) \leq M\bar{\rho}(x, y)$ , por tanto  $-f \in SLip_{\bar{\rho},q}(X, Y)$ .

El recíproco se obtiene de manera análoga. □

Los siguientes 3 resultados tienen una prueba sencilla, por lo que se omite en este trabajo y todos se refieren a condiciones para tener una estructura de espacio vectorial en espacios de funciones semi-Lipschitz.

**Teorema 3.6.** Si  $(X, \rho)$  es un espacio cuasi-métrico y  $(Y, q)$  un espacio normado asimétricamente, entonces  $H = SLip_{\rho,q}(X, Y) \cap SLip_{\bar{\rho},q}(X, Y)$  es un espacio vectorial.

**Proposición 3.7.** Si  $(X, \rho)$  es un espacio cuasi-métrico y  $(Y, \|\cdot\|)$  un espacio normado, entonces  $SLip_{\rho, \|\cdot\|}(X, Y)$  es un espacio vectorial.

**Proposición 3.8.** Si  $(X, d)$  es un espacio métrico y  $(Y, q)$  un espacio normado asimétricamente, entonces  $SLip_{d, q}(X, Y)$  es un espacio vectorial.

**Teorema 3.9.** Dados un espacio cuasi-métrico  $(X, \rho)$  y un espacio normado asimétricamente  $(Y, q)$ . Entonces se cumple:

$$H = SLip_{\rho, q}(X, Y) \cap SLip_{\bar{\rho}, q}(X, Y) \subseteq SLip_{\rho^s, q}(X, Y).$$

*Demostración.* Sea  $f \in H$ , entonces

$$q(f(x) - f(y)) \leq M_1\rho(x, y) \quad \text{y} \quad q(f(x) - f(y)) \leq M_2\bar{\rho}(x, y),$$

luego

$$\begin{aligned} q(f(x) - f(y)) &\leq \max\{M_1, M_2\} \max\{\rho(x, y), \bar{\rho}(x, y)\} \\ &= M\rho^s(x, y), \end{aligned}$$

por tanto  $f \in SLip_{\rho^s, q}(X, Y)$ . □

Sea  $X = \mathbb{N}$  con la cuasi-métrica

$$\rho_1(n, m) = \begin{cases} 0, & n \leq m; \\ 1, & n > m; \end{cases},$$

como en el Ejemplo 2.2. Claramente

$$\bar{\rho}_1(n, m) = \begin{cases} 1, & n < m; \\ 0, & n \geq m; \end{cases},$$

y es fácil ver que  $\rho_1^s(n, m)$  es la métrica discreta en  $\mathbb{N}$ .

Para  $Y = \mathbb{R}$  con la norma asimétrica  $q = u$  dada en el Ejemplo 2. Definamos  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(n) = -\frac{1}{n}$ , se tiene que  $f \in SLip_{\rho_1, q}(X, Y)$ , pero  $-f \notin SLip_{\rho_1, q}(X, Y)$ , luego por el Teorema 3.5,  $f \notin SLip_{\rho_1, q}(X, Y) \cap SLip_{\bar{\rho}_1, q}(X, Y)$ , sin embargo,  $f \in SLip_{\rho_1^s, q}(X, Y)$ .

Así, con este ejemplo se ha mostrado que en general,  $SLip_{\rho^s, q}(X, Y) \neq SLip_{\rho, q}(X, Y) \cap SLip_{\bar{\rho}, q}(X, Y)$ . En los siguientes teoremas, se dan condiciones suficientes para que se cumpla la igualdad:

**Teorema 3.10.** *Sea  $(X, \rho)$  es un espacio cuasi-métrico y  $(Y, q)$  un espacio normado asimétricamente, entonces  $H = SLip_{\rho, q}(X, Y) \cap SLip_{\bar{\rho}, q}(X, Y) = SLip_{\rho, q^s}(X, Y)$ .*

*Demostración.* Para la primera contención, sea  $f \in H$ , entonces

$$q(f(x) - f(y)) \leq M_1\rho(x, y), \quad \text{y} \quad q(f(x) - f(y)) \leq M_2\bar{\rho}(x, y), \quad (A)$$

de la última desigualdad, tenemos  $q(f(x) - f(y)) \leq M_2\rho(y, x)$ , como esto es válido para todos los  $x, y \in X$ , podemos cambiar  $x$  por  $y$  y viceversa, obteniendo

$$\begin{aligned} \bar{q}(f(x) - f(y)) &= q(f(y) - f(x)) \\ &\leq M_2\rho(x, y) \end{aligned}$$

de (A) obtenemos que

$$q^s(f(x) - f(y)) \leq \text{máx} \{M_1, M_2\} \rho(x, y)$$

luego  $f \in SLip_{\rho, q^s}(X, Y)$ .

Para la contención inversa, sea  $f \in SLip_{\rho, q^s}(X, Y)$ , entonces

$$q^s(f(x) - f(y)) \leq M\rho(x, y)$$

pero

$$q(f(x) - f(y)) \leq q^s(f(x) - f(y)) \quad \text{y} \quad \bar{q}(f(x) - f(y)) \leq q^s(f(x) - f(y)),$$

luego  $f \in SLip_{\rho, q}(X, Y) \cap SLip_{\bar{\rho}, q}(X, Y)$ . □

Similarmente al teorema anterior, resulta interesante el hecho de cambiar los intersectandos por los espacios análogos con la diferencia de conjugar la norma asimétrica en vez de la cuasi-métrica y es aún más interesante que la nueva intersección coincide con el mismo conjunto,  $SLip_{\rho, q^s}(X, Y)$ .

**Teorema 3.11.** *Sea  $(X, \rho)$  es un espacio cuasi-métrico y  $(Y, q)$  un espacio normado asimétricamente, entonces  $L = SLip_{\rho, q}(X, Y) \cap SLip_{\rho, \bar{q}}(X, Y) = SLip_{\rho, q^s}(X, Y)$ .*

**Observación 3.12.** Si  $(X, \rho)$  es un espacio cuasi-métrico y  $(Y, q)$  un espacio normado asimétricamente, entonces los siguientes conjuntos son iguales:

- $H = \text{SLip}_{\rho,q}(X, Y) \cap \text{SLip}_{\bar{\rho},q}(X, Y),$
- $L = \text{SLip}_{\rho,q}(X, Y) \cap \text{SLip}_{\rho,\bar{q}}(X, Y),$
- $\text{SLip}_{\rho,q^s}(X, Y).$

Con base en las Proposiciones 3.7 y 3.8, si alguno de los espacios  $X$  o  $Y$  son simétricos, entonces el espacio  $\text{SLip}_{\sigma,r}(X, Y)$  es un espacio vectorial. De modo que,  $\text{SLip}_{\rho^s,q}(X, Y)$  y  $\text{SLip}_{\rho,q^s}(X, Y)$  son espacios vectoriales pero ¿habrá alguna relación entre ellos a través de las intersecciones que hemos manejado? En camino a responder esta pregunta se tiene el siguiente hecho.

**Observación 3.13.**  $\text{SLip}_{\rho,q^s}(X, Y) \subseteq \text{SLip}_{\rho^s,q}(X, Y).$  En efecto,

$$\text{SLip}_{\rho,q^s}(X, Y) \subseteq \text{SLip}_{\rho,q}(X, Y) \subseteq \text{SLip}_{\rho^s,q}(X, Y).$$

El Teorema 2.10 dado por Sánchez-Álvarez en [6], se puede entender más rápidamente si se ve el siguiente resultado,

**Teorema 3.14.** *Si  $\text{SLip}_{\rho,q}(X, Y) \subseteq \text{SLip}_{\bar{\rho},q}(X, Y)$ , entonces  $\text{SLip}_{\rho,q}(X, Y) = \text{SLip}_{\bar{\rho},q}(X, Y).$*

*Demostración.* Sólo hay que probar que  $\text{SLip}_{\bar{\rho},q}(X, Y) \subseteq \text{SLip}_{\rho,q}(X, Y).$  Si  $f \in \text{SLip}_{\bar{\rho},q}(X, Y)$ , por el Teorema 3.5 se cumple que:

$$-f \in \text{SLip}_{\rho,q}(X, Y) \subseteq \text{SLip}_{\bar{\rho},q}(X, Y),$$

luego  $f \in \text{SLip}_{\rho,q}(X, Y).$  □

**Teorema 3.15.** *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (1)  $\text{SLip}_{\rho,q}(X, Y) = \text{SLip}_{\bar{\rho},q}(X, Y)$
- (2)  $\text{SLip}_{\rho,q}(X, Y)$  es un espacio vectorial.
- (3)  $\text{SLip}_{\bar{\rho},q}(X, Y)$  es un espacio vectorial.
- (4)  $\text{SLip}_{\rho,q}(X, Y) \subseteq \text{SLip}_{\bar{\rho},q}(X, Y).$
- (5)  $\text{SLip}_{\bar{\rho},q}(X, Y) \subseteq \text{SLip}_{\rho,q}(X, Y).$

*Demostración.* (1)  $\rightarrow$  (2) Se obtiene de inmediato por el Teorema 3.6.

(2)  $\rightarrow$  (3) Supongamos que  $SLip_{\rho,q}(X, Y)$  es un espacio vectorial, sea  $f \in SLip_{\bar{\rho},q}(X, Y)$  entonces  $-f \in SLip_{\rho,q}(X, Y)$  y como el espacio es un espacio vectorial,  $f \in SLip_{\rho,q}(X, Y)$ , luego  $-f \in SLip_{\bar{\rho},q}(X, Y)$ .

(3)  $\rightarrow$  (4) Si  $SLip_{\bar{\rho},q}(X, Y)$  es un espacio vectorial, dado cualquier  $f \in SLip_{\rho,q}(X, Y)$  entonces  $-f \in SLip_{\bar{\rho},q}(X, Y)$  y  $f \in SLip_{\bar{\rho},q}(X, Y)$ , luego

$$SLip_{\rho,q}(X, Y) \subseteq SLip_{\bar{\rho},q}(X, Y).$$

(4)  $\rightarrow$  (5) Si  $f \in SLip_{\bar{\rho},q}(X, Y)$  entonces  $-f \in SLip_{\rho,q}(X, Y)$ , por 4) se sigue que  $-f \in SLip_{\bar{\rho},q}(X, Y)$ , así  $f \in SLip_{\rho,q}(X, Y)$ .

(5)  $\rightarrow$  (1) Se satisface por el teorema previo que se mencionó, al cambiar  $\rho$  por su conjugada. □

La utilidad del teorema 3.15 radica, por un lado, en que es más fácil trabajar en espacios vectoriales y, por otro, para ver una igualdad de conjuntos por contenciones es más rápido ver sólo una de ellas. A continuación se presenta un hecho relacionado al mezclar las conjugaciones en la norma y la cuasi-métrica.

**Proposición 3.16.**  $SLip_{\rho,\bar{q}}(X, Y) \subseteq SLip_{\bar{\rho},q}(X, Y)$ .

Además, obsérvese que

$$SLip_{\bar{\rho},q}(X, Y) = SLip_{\bar{\rho},\bar{q}}(X, Y) \subseteq SLip_{\bar{\rho},q}(X, Y) = SLip_{\rho,\bar{q}}(X, Y).$$

Consecuentemente,  $SLip_{\rho,\bar{q}}(X, Y) = SLip_{\bar{\rho},q}(X, Y)$ .

## 4 El cono normado $SLip_{\rho,q}(X, Y)$

Definimos la aplicación  $\|\cdot\|_{\rho,q} : SLip_{\rho,q}(X, Y) \rightarrow [0, +\infty)$  dada por

$$\|f\|_{\rho,q} = \sup_{\substack{x,y \in X \\ \rho(x,y) \neq 0}} \frac{q(f(x) - f(y))}{\rho(x,y)}. \tag{4}$$

Para un número real  $r > 0$  y para  $f, g \in SLip_{\rho,q}(X, Y)$ , se cumple:



$$\begin{aligned}
 \|f + rg\|_{\rho,q} &= \sup_{\substack{x,y \in X \\ \rho(x,y) \neq 0}} \frac{q((f + rg)(x) - (f + rg)(y))}{\rho(x,y)} \\
 &\leq \sup_{\substack{x,y \in X \\ \rho(x,y) \neq 0}} \frac{q(f(x) - f(y)) + q(rg(x) - rg(y))}{\rho(x,y)} \\
 &\leq \sup_{\substack{x,y \in X \\ \rho(x,y) \neq 0}} \frac{q(f(x) - f(y))}{\rho(x,y)} + r \sup_{\substack{x,y \in X \\ \rho(x,y) \neq 0}} \frac{q(g(x) - g(y))}{\rho(x,y)} \\
 &= \|f\|_{\rho,q} + r \|g\|_{\rho,q}.
 \end{aligned}$$

Ahora, si  $f, -f \in \text{SLip}_{\rho,q}(X, Y)$  y cumplen que  $\|f\|_{\rho,q} = \|-f\|_{\rho,q} = 0$  entonces

$$\sup_{\substack{x,y \in X \\ \rho(x,y) \neq 0}} \frac{q(f(x) - f(y))}{\rho(x,y)} = \sup_{\substack{x,y \in X \\ \rho(x,y) \neq 0}} \frac{q((-f)(x) - (-f)(y))}{\rho(x,y)} = 0$$

luego  $f(x) - f(y) = 0$  para todos los  $x, y \in X$  y por tanto  $f$  es una constante.

En el espacio  $\text{SLip}_{\rho,u}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , donde  $\rho$  y  $u$  son como en el Ejemplo 2, la función constante  $f(x) = C$  es semi-Lipschitz y además  $\|f\|_{\rho,u} = 0$ .

El ejemplo anterior muestra que  $\|\cdot\|_{\rho,q}$  no necesariamente es una norma asimétrica para el cono  $\text{SLip}_{\rho,q}(X, Y)$ . Se tienen dos opciones para construir un cono normado asimétricamente. La primera opción es tomar el cociente de  $\text{SLip}_{\rho,q}(X, Y)$  sobre el conjunto de funciones constantes entre  $X$  y  $Y$ , de tal manera que  $\|f\|_{\rho,q} = 0$  si y sólo si  $f = 0$ . Y la segunda opción es, volver un espacio punteado a  $X$ , esto es, distinguir un punto  $x_0$  en  $X$  ( $x_0$  es la punta del conjunto). En el segundo caso, para  $x_0 \in X$  se define

$$\text{S}_0\text{Lip}_{\rho,q}(X, Y) = \{f \in \text{SLip}_{\rho,q}(X, Y) : f(x_0) = 0\}.$$

Claramente, en  $\text{S}_0\text{Lip}_{\rho,q}(X, Y)$  la suma y la multiplicación por un escalar positivo son cerradas, luego  $\text{S}_0\text{Lip}_{\rho,q}(X, Y)$  es un cono. Para este espacio, si  $\|f\|_{\rho,q} = \|-f\|_{\rho,q} = 0$ , entonces

$$\sup_{\substack{x,y \in X \\ \rho(x,y) \neq 0}} \frac{q(f(x) - f(y))}{\rho(x,y)} = \sup_{\substack{x,y \in X \\ \rho(x,y) \neq 0}} \frac{q((-f)(x) - (-f)(y))}{\rho(x,y)} = 0$$

luego  $f$  es una constante, pero  $f(x_0) = 0$  así que  $f = 0$ , por lo que se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 4.1.** *El conjunto  $(S_0Lip_{\rho,q}(X, Y), \|\cdot\|_{\rho,q})$  es un cono normado asimétricamente.*

**Teorema 4.2.** *Sea  $(X, \rho)$  es un espacio cuasi-métrico y  $(Y, q)$  un espacio normado asimétrico, entonces se cumple:*

1.  $SLip_{\rho,q}(X, Y)$  es un cono en el espacio vectorial  $Lip_{\rho^s, q^s}(X, Y)$  y además  $\|f\|_{\rho^s, q^s} \leq \|f\|_{\rho, q}$ , para toda  $f \in SLip_{\rho,q}(X, Y)$ , donde

$$\|f\|_{\rho^s, q^s} = \sup_{x, y \in X, x \neq y} \frac{q^s(f(x) - f(y))}{\rho^s(x, y)}.$$

2. Si  $f \in SLip_{\rho,q}(X, Y)$ , entonces  $\|f\|_{\rho, q}$  es la constante de semi-Lipschitz más pequeña para  $f$ .
3.  $f \in SLip_{\rho,q}(X, Y)$  si y sólo si  $f$  es  $(\rho, q)$ -creciente y  $\|f\|_{\rho, q} < \infty$ .

Recordar que  $SLip_{\rho,q}(X, Y) \cap SLip_{\rho, \bar{q}}(X, Y) = SLip_{\rho, q^s}(X, Y)$  es un espacio vectorial, para este caso  $\|\cdot\|_{\rho, q^s}$  queda como:

$$\|f\|_{\rho, q^s} = \sup_{\substack{x, y \in X \\ \rho(y, x) \neq 0}} \frac{q^s(f(x) - f(y))}{\rho(x, y)}.$$

Es fácil ver que  $\|\cdot\|_{\rho, q^s}$  es una norma asimétrica. Más aún, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.3.**  $S_0Lip_{\rho,q}(X, Y) \cap S_0Lip_{\rho, \bar{q}}(X, Y) = S_0Lip_{\rho, q^s}(X, Y)$  es un subespacio cerrado en  $SLip_{\rho,q}(X, Y) \cap SLip_{\rho, \bar{q}}(X, Y) = SLip_{\rho, q^s}(X, Y)$ .

**Teorema 4.4.** Sean  $(X, \rho)$  es un espacio cuasi-métrico,  $y_1 \in X$  y  $A$  un subconjunto de  $X$  no vacío.

1.  $s : X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $r : X \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $s(x) = \rho(x, y_1)$  y  $r(x) = d(x, A) = \inf \{\rho(x, a) : a \in A\}$  para cada  $x \in X$ , son funciones semi-Lipschitz con  $\|s\|_{\rho, u} = 1$  y  $\|r\|_{\rho, u} = 1$ .

2. Para cada  $a \in X$ ,  $f(x) = \rho(a, x_0) - \rho(a, x)$  y  $g(x) = \rho(x, a) - \rho(x_0, a)$ , cumplen que

$$f \in SLip_{\rho, \bar{u}}(X, \mathbb{R}) \text{ y } g \in SLip_{\rho, u}(X, \mathbb{R})$$

$$\text{con } \|f\|_{\rho, \bar{u}} \leq 1 \text{ y } \|g\|_{\rho, u} \leq 1.$$

*Demostración.* 1. Sea  $x \in X$ , por la desigualdad triangular, para cada  $x' \in X$   $\rho(x, y_1) \leq \rho(x, x') + \rho(x', y_1)$ , de donde

$$u(\rho(x, y_1) - \rho(x', y_1)) = \begin{cases} 0, & \text{si } \rho(x, y_1) < \rho(x', y_1), \\ \rho(x, y_1) - \rho(x', y_1), & \text{si } \rho(x, y_1) \geq \rho(x', y_1), \end{cases}$$

Note que  $u(\rho(x, y_1) - \rho(x', y_1)) \leq 1\rho(x, x')$ , esto es, para cada  $x, x' \in X$ ,  $u(s(x) - s(x')) \leq \rho(x, x')$ , obteniendo así que  $s$  es una función semi-Lipschitz y  $\|s\|_{\rho, u} = 1$ . Por otro lado, dado que la desigualdad  $\rho(x, a) \leq \rho(x, x') + \rho(x', a)$  se cumple para cada  $a \in A$  y  $x, x' \in X$ , al tomar el ínfimo respecto a  $a \in A$  se obtiene que  $d(x, A) \leq \rho(x, x') + d(x', A)$ . Luego

$$\begin{aligned} u(d(x, A) - d(x', A)) &= \begin{cases} 0, & \text{si } d(x, A) < d(x', A), \\ d(x, A) - d(x', A), & \text{si } d(x, A) \geq d(x', A), \end{cases} \\ &\leq 1\rho(x, x'). \end{aligned}$$

Probando así que  $r$  es una función semi-Lipschitz y  $\|r\|_{\rho, u} = 1$ .

2. De la desigualdad  $\rho(a, x_0) \leq \rho(a, x) + \rho(x, x_0)$  se sigue que

$$f(x) = \rho(a, x_0) - \rho(a, x) \leq \rho(x, x_0),$$

y por tanto

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \rho(a, x_0) - \rho(a, x) - \rho(a, x_0) + \rho(a, y) \\ &= \rho(a, y) - \rho(a, x) \\ &\leq \rho(y, x) = \bar{\rho}(x, y) \end{aligned}$$

así que  $f \in SLip_{\bar{\rho}, u}(X, \mathbb{R}) = SLip_{\rho, \bar{u}}(X, \mathbb{R})$ .

Análogamente se prueba para  $g$ .

□

Se acostumbra denotar por  $\text{SLip}_\rho(X)$  al espacio  $\text{SLip}_{\rho,u}(X)$  y a la norma asimétrica  $\|\cdot\|_{\rho,u}$  por  $\|\cdot\|_\rho$ .

**Teorema 4.5.** *Sea  $(X, \rho)$  es un espacio cuasi-métrico. Si  $S_0\text{Lip}_\rho(X) = S_0\text{Lip}_{\bar{\rho}}(X)$ , entonces  $\tau_\rho$  es  $T_1$  y existen constantes positivas  $\alpha, \beta$  tales que  $\rho(a, x_0) \leq \alpha\rho(x_0, a)$  y  $\rho(x_0, a) \leq \beta\rho(a, x_0)$ .*

Con algunas modificaciones, tenemos el recíproco del teorema anterior.

**Teorema 4.6.** *Sea  $(X, \rho)$  es un espacio cuasi-métrico, tal que  $\tau_\rho$  es  $T_1$  y existen constantes positivas  $\alpha, \beta$  tales que  $\rho(x, y) \leq \alpha\rho(y, x)$  y  $\rho(y, x) \leq \beta\rho(x, y)$ . para todas las  $x, y \in X$ , entonces  $S_0\text{Lip}_\rho(X) = S_0\text{Lip}_{\bar{\rho}}(X)$ .*

## 5 Sobre la extensión de una función Lipschitz entre espacios métricos

Existen teoremas de extensión sobresalientes en distintas áreas de la matemática, por ejemplo el teorema de Hahn-Banach, el cual ya tiene una versión en espacios asimétricos [2]. En este documento estamos interesados en teoremas de extensión para funciones semi-Lipschitz, pero primero podemos observar algunos resultados para funciones Lipschitz.

**Teorema 5.1** (Extensión de una función Lipschitz real.). *Dado un espacio métrico  $(X, d)$  y  $A \subset X$  no vacío. Si  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  es una función Lipschitz, entonces existe una función Lipschitz  $F: X \rightarrow \mathbb{R}$  que extiende a  $f$  y  $\|F\|_{(d, \|\cdot\|)} = \|f\|_{(d, \|\cdot\|)}$ .*

En la misma dirección, el siguiente resultado fue dado por Kirsbraun, veáse [9].

**Teorema 5.2** (De Kirszbraun). *Sean  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $E$  un espacio euclídeo,  $A \subset E^n$  y  $f: A \rightarrow E^m$  una función Lipschitz. Existe una función Lipschitz  $F: E^n \rightarrow E^m$  que extiende a  $f$  y tiene la misma constante Lipschitz que  $f$ .*

Los teoremas de extensión son un tipo de teoremas de lo más conveniente tener, sin embargo, no siempre es posible obtenerlos. Sobre el que un día fue un problema abierto: determinar si existe un teorema de extensión de funciones Lipschitz cuyo codominio es un espacio normado arbitrario, en 1966,

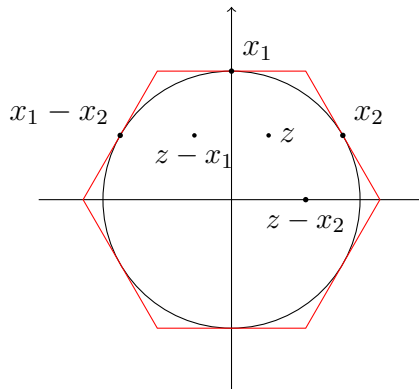
Schönbeck en [8], dió un contraejemplo sobre ello, éste se presenta a continuación:

En  $\mathbb{R}^2$ , sea  $H$  el hexágono regular tal que la circunferencia unitaria  $\mathbb{S}^1$  está inscrita en él, además  $H$  tiene un lado paralelo a el eje  $x$ . Sean  $E$  y  $F$  igual a  $\mathbb{R}^2$ , como espacios vectoriales con las operaciones usuales, dotados respectivamente con las normas  $\|\cdot\|_E$  y  $\|\cdot\|_F$  tales que  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_E = 1\} = H$  y  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_F = 1\} = \mathbb{S}^1$ , nótese que  $\|\cdot\|_F$  coincide con la norma usual de  $\mathbb{R}^2$ . Después de algunos cálculos véase que para cada  $(x, y) \in E$ ,  $\|(x, y)\|_E = \max\{|y|, \frac{\sqrt{3}}{2}|x| + \frac{1}{2}|y|\}$ . Sean  $x_1 = (0, 1)$  y  $x_2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ . Se tiene que  $x_1$  y  $x_2$  son dos puntos contiguos de tangencia entre  $H$  y  $\mathbb{S}^1$ . Notar que  $\|x_1\|_E = \|x_1\|_F = \|x_2\|_E = \|x_2\|_F = 1$ . Póngase  $z = \frac{x_1+x_2}{3} = (\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$ .

También se cumple que,  $\|x_1 - x_2\|_F = \|(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})\|_F = 1$  y  $\|x_1 - x_2\|_E = \max\{\frac{1}{2}, 1\} = 1$ . Además,

$$\begin{aligned} \|z\|_E &= \left\| \left( \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} \right) \right\|_E = \max\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}; \\ \|z - x_1\|_E &= \left\| \left( \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2} \right) \right\|_E = \max\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}; \\ \|z - x_2\|_E &= \left\| \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right) \right\|_E = \max\left\{ 0, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

Figura 1: Representación gráfica de algunos elementos significativos.



Ahora, póngase  $D = \{(0, 0), x_1, x_2\} \subseteq E$ . Defina la función,  $T: D \rightarrow F$

tal que  $T(0, 0) = (0, 0)$ ,  $T(x_1) = x_1$  y  $T(x_2) = x_2$ . Luego,

$$\begin{aligned} \|T(0, 0) - T(x_i)\|_F &= \|(0, 0) - x_i\|_F = \|x_i\|_E \quad \text{para } i = 1, 2; \\ \|T(x_1) - T(x_2)\|_F &= \|x_1 - x_2\|_F = \|x_1 - x_2\|_E. \end{aligned}$$

Dado que para cada  $x, y \in D$ ,  $\|T(x) - T(y)\|_F \leq \|x - y\|_E$ , se tiene que  $T$  es una función Lipschitz, con constante Lipschitz igual a 1.

Afirmamos que  $T$  no tiene una extensión Lipschitz sobre  $E$ . En efecto, por contradicción. Supóngase que  $T'$  es una extensión de  $T$ , luego se satisface lo siguiente:

$$\|T'(z)\|_F = \|T'(z) - T'(0, 0)\|_F \leq \|z\|_E = \frac{1}{2}, \tag{5}$$

$$\|T'(z) - x_i\|_F = \|T'(z) - T'(x_i)\|_F \leq \|z - x_i\|_E = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2; \tag{6}$$

Como la norma  $\|\cdot\|_F$  es la norma euclidiana, se tiene que para  $i = 1, 2$ :

$$|\|T'(z)\|_F - \|x_i\|_F| \leq \frac{1}{2}, \text{ si y sólo si } -\frac{1}{2} + \|x_i\|_F \leq \|T'(z)\|_F \leq \|x_i\|_F + \frac{1}{2}.$$

Puesto que  $\|x_i\|_F = 1$  para  $i = 1, 2$ ; y por (5), se sigue que  $\|T'(z)\|_F = \frac{1}{2}$ . De donde,  $T'(z)$  se encuentra en la circunferencia  $C$  de radio  $\frac{1}{2}$ .

Por otro lado,

$$\begin{aligned} 1 = \|x_1 - x_2\|_F &= \|x_1 - T'(z) + T'(z) - x_2\|_F \\ &\leq \|x_1 - T'(z)\|_F + \|T'(z) - x_2\|_F \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz cumple lo siguiente  $\|x_1 - T'(z) + T'(z) - x_2\|_F = \|x_1 - T'(z)\|_F + \|T'(z) - x_2\|_F$ . Pero  $\|x_1 - T'(z) + T'(z) - x_2\|_F = \|x_1 - T'(z)\|_F + \|T'(z) - x_2\|_F$  si y sólo si  $x_1, x_2$  y  $T'(z)$  son colineales. Lo que claramente resulta imposible. Por lo tanto,  $T$  no tiene una función extensión.

Más aún, nótese que dicho ejemplo ilustra el hecho de que existen funciones semi-Lipschitz que no pueden ser extendidas.

## 6 Extensiones de funciones semi-Lipschitz

Sea  $(X, \rho)$  un espacio cuasi-métrico y  $A \subseteq X$ , la dupla  $(A, \rho)$  es un espacio cuasi-métrico con la cuasi-métrica inducida por  $\rho$  y denotada también por  $\rho$ . Denote por  $\text{SLip}_\rho(A) = \text{SLip}_{\rho,u}(A, \mathbb{R})$  al conjunto de funciones semi-Lipschitz definidas sobre  $A$ ; además  $\|\cdot\|_\rho$  denota la restricción de  $\|\cdot\|_\rho$  sobre  $A$ , es decir la función  $\|\cdot\|_\rho|_A$ . Note que  $\|f\|_\rho$  es la menor constante semi-Lipschitz para  $f \in \text{SLip}_\rho(A)$ .

Para una función  $f \in \text{SLip}_\rho(A)$ , una extensión de  $f$  es una función  $F \in \text{SLip}_\rho(X)$  si y sólo si  $F|_A = f$ . El siguiente resultado fue dado por Mustăța en [5].

**Teorema 6.1.** *Sea  $(X, \rho)$  un espacio cuasi-métrico y  $A \subseteq X$  no vacío. Si  $f \in \text{SLip}_\rho(A)$ , entonces existe  $F \in \text{SLip}_\rho(X)$  tal que  $F$  es una extensión de  $f$  y conserva la menor constante semi-Lipschitz de  $f$ , es decir  $\|F\|_\rho = \|f\|_\rho$ .*

*Demostración.* Sea  $f \in \text{SLip}_\rho(A)$ , considere la función

$$F(x) = \inf \left\{ f(a) + \|f\|_\rho \rho(x, a) : a \in A \right\} \quad x \in X. \quad (7)$$

1. La función  $F$  está bien definida. Sean  $z \in A$  y  $x \in X$ . Para cada  $a \in A$ , se tiene que

$$\begin{aligned} f(a) + \|f\|_\rho \rho(x, a) &= f(z) + \|f\|_\rho \rho(x, a) - (f(z) - f(a)) \\ &\geq f(z) + \|f\|_\rho \rho(x, a) - u(f(z) - f(a)) \\ &\geq f(z) + \|f\|_\rho \rho(x, a) - \|f\|_\rho \rho(z, a) \\ &= f(z) - \|f\|_\rho (\rho(z, a) - \rho(x, a)) \\ &\geq f(z) - \|f\|_\rho \rho(z, x) \end{aligned}$$

Lo anterior prueba que para cada  $x \in X$  el conjunto  $\{f(a) + \|f\|_\rho \rho(x, a) : a \in A\}$  está acotado inferiormente, así el ínfimo en (7) es finito.

2. La función  $F$  es una extensión de  $f$ . Sean  $y \in A$ , se sigue que

$$F(y) \leq f(y) + \|f\|_\rho \rho(y, y) = f(y).$$

Para cada  $a \in A$ , se tiene que  $u(f(y) - f(a)) \leq \|f\|_\rho \rho(y, a)$  de donde  $f(y) - f(a) \leq \|f\|_\rho \rho(y, a)$ , de esta manera,  $f(y) \leq \|f\|_\rho \rho(y, a) + f(a)$ . Por lo tanto,  $f(y) \leq \inf \{f(a) + \|f\|_\rho \rho(y, a) | a \in A\} = F(y)$ . En consecuencia,  $F(y) = f(y)$  para cada  $y \in A$ .

3. Se cumple que  $\|F\|_\rho = \|f\|_\rho$ . En efecto, dado que  $F|_A = f$ , por definición,  $\|F\|_\rho \geq \|f\|_\rho$ .

Por otro lado, dados  $x, y \in X$  y  $\varepsilon > 0$ , existe  $a \in A$  tal que

$$F(y) \leq f(a) + \|f\|_\rho \rho(y, a) \leq F(y) + \varepsilon,$$

de donde,  $-F(y) \leq -(f(a) + \|f\|_\rho \rho(y, a) - \varepsilon)$ . Además,  $F(x) \leq f(a) + \|f\|_\rho \rho(x, a)$ , de ambas desigualdades previas, se obtiene que

$$\begin{aligned} F(x) - F(y) &\leq f(a) + \|f\|_\rho \rho(x, a) - (f(a) + \|f\|_\rho \rho(y, a) - \varepsilon) \\ &= \|f\|_\rho (\rho(x, a) - \rho(y, a)) + \varepsilon \\ &\leq \|f\|_\rho \rho(x, y) + \varepsilon \end{aligned}$$

Por la arbitrariedad de  $\varepsilon > 0$  se concluye que  $F(x) - F(y) \leq \|f\|_\rho \rho(x, y)$ . Por lo tanto  $u(F(x) - F(y)) \leq \|f\|_\rho \rho(x, y)$ , para cualesquiera  $x, y \in X$ , luego  $\|F\|_\rho \leq \|f\|_\rho$ . De modo que  $\|F\|_\rho = \|f\|_\rho < \infty$ .

4. La función  $F$  es  $(\rho, u)$  - creciente. Dado que para cada  $x, y \in X$  tales que  $x \leq_\rho y$ , se tiene que  $\rho(x, y) = 0$ . Por la desigualdad del triángulo,  $\rho(x, a) \leq \rho(x, y) + \rho(y, a)$  para cualquier  $a \in A$ . Con esto,  $\rho(x, a) \leq \rho(y, a)$

En consecuencia,

$$f(a) + \|f\|_\rho \rho(x, a) \leq f(a) + \|f\|_\rho \rho(y, a).$$

De la desigualdad previa, se sigue que  $F(x) \leq F(y)$ . Así,  $u(F(x) - F(y)) = 0$ , por definición  $F(x) \leq_u F(y)$ .

De los puntos, 3 y 4 se obtiene que  $F \in \text{SLip}_\rho(X)$ . □

Similarmente, la función

$$G(x) = \sup \{f(b) - \|f\|_\rho \bar{\rho}(x, b) : b \in A\}$$



es una extensión semi-Lipschitz de  $f$ . De hecho para cualquier  $a, b \in A$  y  $x \in X$ , como  $f$  es semi-Lipschitz se tiene

$$\begin{aligned} \|f\|_\rho \rho(x, a) + \|f\|_\rho \rho(b, x) &\geq u(f(x) - f(a)) + u(f(b) - f(x)); \\ &\geq u(f(b) - f(a)); \\ &\geq f(b) - f(a), \end{aligned}$$

Por lo tanto, al tomar el ínfimo respecto a  $a$  y el supremo respecto a  $b$  se sigue que

$$\begin{aligned} G(x) &= \sup \{f(b) - \|f\|_\rho \bar{\rho}(x, b) : b \in A\} \\ &\leq \inf \{f(a) + \|f\|_\rho \rho(x, a) : a \in A\} \\ &= F(x). \end{aligned}$$

**Teorema 6.2.** *Dado un espacio cuasi-métrico  $(X, \rho)$ ,  $A \subseteq X$  no vacío y  $f \in SLip_\rho(A)$ . Si  $H$  es una extensión semi-Lipschitz de la función  $f$ , entonces*

$$G(x) \leq H(x) \leq F(x), \quad x \in X.$$

*Demostración.* Sea  $H \in SLip_\rho(X)$  una extensión de  $f$ . Sea  $x \in X$  y  $y \in A$  se tiene

$$u(H(x) - H(y)) \leq \|f\|_\rho \rho(x, y), \text{ así } H(x) - H(y) \leq \|f\|_\rho \rho(x, y)$$

lo que implica

$$H(x) \leq H(y) + \|f\|_\rho \rho(x, y) = f(y) + \|f\|_\rho \rho(x, y).$$

Tomando el ínfimo respecto a  $y \in A$  da como resultado

$$H(x) \leq \sup \{f(y) + \|f\|_\rho \rho(x, y) : y \in A\} = F(x), \quad x \in X.$$

De manera análoga se prueba que  $G(x) \leq H(x)$ , para todo  $x \in X$ . □

**Corolario 6.3.** *Una función  $f \in SLip_\rho(A)$  tiene una única extensión en  $SLip_\rho(X)$  si y sólo si*

$$\sup \{f(b) - \|f\|_\rho \bar{\rho}(x, b) : b \in A\} = \inf \{f(a) + \|f\|_\rho \rho(x, a) : a \in A\},$$

para cada  $x \in X$ .

Sea  $\rho_\alpha$ , con  $\alpha > 1$ ,  $A = \mathbb{N}$  y  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(n) = -\frac{1}{n}$ , como en el Ejemplo 3.3. Se tiene que  $f$  es semi-Lipschitz y  $\|f\|_\rho = 1$ . Sean  $X = (0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$ . Para la función  $F$  definida por (7) se tiene que

$$\begin{aligned} F(x) &= \inf \{f(a) + \|f\|_\rho \rho(x, a) : a \in A\}, \\ &= \inf \left\{ -\frac{1}{a} + \rho(x, a) : a \in A = \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

Si  $0 < x \leq 1$ ,  $F(x) = \inf \{-\frac{1}{a} : a \in A = \mathbb{N}\} = -1$ . Si  $x \in A = \mathbb{N}$ ,  $F(x) = \inf \{-\frac{1}{a} : a \in A = \mathbb{N}\} = -\frac{1}{x}$ . Si  $n < x < n + 1$ , entonces  $F(x) = \inf \{-\frac{1}{a} + \alpha, -\frac{1}{n+1} : a \in A = \mathbb{N}\} = -\frac{1}{n+1} = -\frac{1}{\lfloor x \rfloor}$ . Así

$$F(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } 0 < x \leq 1; \\ -\frac{1}{x}, & \text{si } x \in A = \mathbb{N}; \\ -\frac{1}{\lfloor x \rfloor}, & \text{si } x \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Y de manera similar la función  $G$  definida por (6) es

$$G(x) = \begin{cases} -\alpha, & \text{si } 0 < x \leq 1; \\ -\frac{1}{x}, & \text{si } x \in A = \mathbb{N}; \\ -\frac{1}{\lfloor x \rfloor}, & \text{si } x \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Claramente,  $G(x) \leq F(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

## 7 Funciones semi-Lipschitz y complejidad de algoritmos

En 2004 Schellekens introdujo el espacio (cuasi-métrico) de funciones de complejidad para obtener un fundamento topológico para el análisis de compleji-

dad de programas y algoritmos. Este espacio consiste del par  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ , donde

$$\mathcal{C} = \left\{ f: \omega \rightarrow (0, \infty] : \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{f(n)} < \infty \right\},$$

y  $d_{\mathcal{C}}$  es la cuasi-métrica sobre  $\mathcal{C}$  dada por

$$d_{\mathcal{C}}(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \left[ \left( \frac{1}{g(n)} - \frac{1}{f(n)} \right) \vee 0 \right],$$

para cada  $f, g \in \mathcal{C}$  y se toma la convención que  $\frac{1}{\infty} = 0$ . Los elementos de  $\mathcal{C}$  se llaman *funciones de complejidad*.

En [7] Sánchez Álvarez muestra que las funciones semi-Lipschitz proveen una herramienta eficiente para computar la complejidad de cierto tipo de algoritmos en el siguiente sentido: Si  $T$  es la ecuación de recurrencia sobre  $\mathbb{N}$  asociada a un algoritmo dado (con  $T(n) > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ) y  $f$  denota la función de complejidad que es solución de dicha ecuación de recurrencia, entonces la complejidad de este algoritmo se representa via  $f$ . Más aún,  $f$  constituye una función total definida recursivamente, esto es, es el límite de la sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de funciones parciales también definidas recursivamente.

El espacio de funciones semi-Lipschitz que resulta útil para los fines mencionados es  $\text{SLip}_{\rho_{\alpha}, d_{\mathcal{C}}}(\omega, \mathcal{C})$  donde  $\omega$  es igual al conjunto de los números enteros no negativos,  $\rho_{\alpha}$  es la cuasi-métrica definida en el Ejemplo 2.2 sobre  $\omega$  y  $\mathcal{C}$  es el espacio cuasi-métrico de funciones de complejidad, el cual también puede ser descrito de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \text{SLip}_{(\bar{\rho}_{\alpha}, d_{\mathcal{C}})}(\omega, \mathcal{C}) &= \left\{ F \in \mathcal{C}_{(\bar{\rho}_{\alpha}, d_{\mathcal{C}})}^{\omega} : \sup_{\bar{\rho}_{\alpha}(n, m) \neq 0} \frac{d_{\mathcal{C}}(F(n), F(m))}{\bar{\rho}_{\alpha}(n, m)} < \infty \right\} \\ &= \left\{ F \in \mathcal{C}_{(\bar{\rho}_{\alpha}, d_{\mathcal{C}})}^{\omega} : \frac{1}{\alpha} \sup_{n < m} d_{\mathcal{C}}(F(n), F(m)) < \infty \right\}, \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{C}_{(\bar{\rho}_{\alpha}, d_{\mathcal{C}})}^{\omega} = \{F : (\omega, \bar{\rho}_{\alpha}) \rightarrow (\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}}) \mid F \text{ es función} \}$ .

El espacio  $\text{SLip}_{(\bar{\rho}_{\alpha}, d_{\mathcal{C}})}(\omega, \mathcal{C})$  con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación por escalar, para escalares positivos, resulta ser un cono. Más aún, con la función  $\|\cdot\|_{(\bar{\rho}_{\alpha}, d_{\mathcal{C}})} : \text{SLip}_{(\bar{\rho}_{\alpha}, d_{\mathcal{C}})}(\omega, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que

$$\|F\|_{(\bar{\rho}_{\alpha}, d_{\mathcal{C}})} = \frac{1}{\alpha} \sup_{n < m} d_{\mathcal{C}}(F(n), F(m)),$$

para todo elemento  $F$  en  $SLip_{(\bar{\rho}_\alpha, d_C)}(\omega, \mathcal{C})$ , se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 7.1.** *El espacio  $(SLip_{(\bar{\rho}_\alpha, d_C)}(\omega, \mathcal{C}), \|\cdot\|_{(\bar{\rho}_\alpha, d_C)})$  es un cono normado relativizadamente.*

Como se vió en la Observación 2.8, la cuasi-semimétrica inducida por  $\|\cdot\|_{(\bar{\rho}_\alpha, d_C)}$ , queda como:

$$D(F, G) = \text{máx} \left\{ 0, \|G\|_{(\bar{\rho}_\alpha, d_C)} - \|F\|_{(\bar{\rho}_\alpha, d_C)} \right\}. \tag{8}$$

### Descripción del método de aproximación

Sea  $T$  una ecuación de recurrencia sobre  $\mathbb{N}$  asociada a un algoritmo dado y denote por  $f$  a la función de complejidad que es solución de dicha ecuación de recurrencia (suponga que  $f(0) = \infty$ ).

La función  $f$  puede ser aproximada por una sucesión de funciones parciales  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , donde cada función  $p_n: \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow (0, \infty]$  está definida como sigue:

$$p_n(k) = \begin{cases} \infty, & \text{si } k = 0; \\ T(k), & \text{si } k = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Cada una de las funciones  $p_n$  puede asociarse con una función de complejidad  $f_n$  definida por

$$f_n(k) = \begin{cases} \infty, & \text{si } k = 0; \\ T(k), & \text{si } k = 1, 2, \dots, n; \\ \infty, & \text{si } k > n. \end{cases} \tag{9}$$

De tal manera que se cumple  $f \leq f_n$  y  $f_{n+1} \leq f_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . A continuación se demuestra que la sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $f$  respecto las cuasi-métricas  $d_C$  y su conjugada, lo que concuerda con la interpretación computacional de las funciones parciales  $p_n$ . Dado que para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  se cumple que  $f \leq f_n$ , es claro que  $d_C(f, f_n) = 0$ , de tal manera que  $\bar{d}_C(f_n, f) = 0$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Luego, si  $n \rightarrow \infty$ , entonces:  $f_n \xrightarrow{\bar{d}_C} f$ . Por otro lado, puesto que  $f_n(k) = f(k)$  para  $k = 0, 1, \dots, n$  y  $f_n(k) = \infty$  si  $k > n$ , se

obtiene que para  $n \in \omega$  arbitrario,

$$\begin{aligned}
 d_{\mathcal{C}}(f_n, f) &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \left[ \left( \frac{1}{f(k)} - \frac{1}{f_n(k)} \right) \vee 0 \right] \\
 &= \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} \frac{1}{f(k)} \\
 &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} \frac{1}{T(k)} \\
 &= \frac{1}{T(n+1)} \left( \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} - \sum_{k=0}^n 2^{-k} \right) \\
 &= \frac{1}{T(n+1)} \left( \frac{1}{1-2^{-1}} - \frac{1-2^{-n-1}}{1-2^{-1}} \right) \\
 &= \frac{1}{T(n+1)} \frac{2^{-n-1}}{2^{-1}} \\
 &= \frac{2^{-n}}{T(1)}
 \end{aligned}$$

En consecuencia si  $n \rightarrow \infty$ , entonces  $d_{\mathcal{C}}(f_n, f) \rightarrow 0$ , así  $f_n \rightarrow_{d_{\mathcal{C}}} f$ .

Como segundo paso, se demuestra que la complejidad representada por la función  $f$  puede ser obtenida calculando la norma relativizada  $\|\cdot\|_{(\rho_{\alpha}, d_{\mathcal{C}})}$  sobre ciertas funciones semi-Lipschitz que toman valores en la sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , en sus segmentos iniciales; por lo que se tiene una ventaja de calcular sumas finitas (que son correspondientes a los segmentos iniciales de elementos en  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ) en lugar de las series infinitas.

En efecto, sea  $F: \omega \rightarrow \mathcal{C}$  dada por

$$F(n) = \begin{cases} f_n, & \text{si } n = 1, 2, \dots; \\ f_{\infty}, & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Donde  $f_{\infty}(n) = \infty$  para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . Note que en cierto sentido  $F$  puede identificarse con la sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y por lo tanto con  $f$ . Véase que  $F \in$

$\text{SLip}_{(\bar{\rho}_\alpha, d_C)}(\omega, \mathcal{C})$  dado que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \sup_{n < m} d_C(F(n), F(m)) &= \frac{1}{\alpha} \sup_{n < m} d_C(f_n, f_m) \\ &= \frac{1}{\alpha} \sup_{n < m} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \left[ \left( \frac{1}{f_m(k)} - \frac{1}{f_n(k)} \right) \vee 0 \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} \sup_{n < m} \sum_{k=n+1}^m 2^{-k} \frac{1}{f_m(k)} \\ &= \frac{1}{\alpha} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m 2^{-k} \frac{1}{f_m(k)} \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{1}{f(k)} < \infty \end{aligned}$$

De donde se observa que

$$\|F\|_{(\bar{\rho}_\alpha, d_C)} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{1}{f(k)}$$

Construya la sucesión de funciones  $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  que van del espacio cuasi-métrico  $\omega$  al espacio de completitud  $\mathcal{C}$ . Dado para cada  $i \in \mathbb{N}$  se define

$$F_i(n) = \begin{cases} f_\infty, & \text{si } n = 0; \\ f_n, & \text{si } 0 < n < i; \\ f_i & \text{si } i \leq n. \end{cases} \quad (10)$$

Obsérvese que  $F \leq F_i$  y  $F_{i+1} \leq F_i$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Más aún,  $F_i \in \text{SLip}_{(\bar{\rho}_\alpha, d_C)}(\omega, \mathcal{C})$ , dado que

$$\frac{1}{\alpha} \sup_{n < m} d_C(F_i(n), F_i(m)) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \sup_{i \leq n < m} d_C(f_i, f_i) & (\text{si } i \leq n); \\ \frac{1}{\alpha} \sup_{n < i \leq m} d_C(f_n, f_i) & (\text{si } n < i \text{ y } i \leq m); \\ \frac{1}{\alpha} \sup_{n < m < i} d_C(f_n, f_m) & (\text{si } m < i). \end{cases}$$

Para los tres casos anteriores observe que si  $i \leq n$  se tiene que

$$\frac{1}{\alpha} \sup_{i \leq n < m} d_C(f_i, f_i) = 0;$$

si  $n < i$  y  $i \leq m$  se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \sup_{n < i \leq m} d_{\mathcal{C}}(f_n, f_i) &= \frac{1}{\alpha} \sup_{n < i \leq m} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \left[ \left( \frac{1}{f_i(k)} - \frac{1}{f_n(k)} \right) \vee 0 \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} \sup_{n < i \leq m} \sum_{k=n+1}^i 2^{-k} \frac{1}{f_i(k)} \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^i 2^{-k} \frac{1}{f_i(k)}. \end{aligned}$$

Y si  $m < i$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \sup_{n < m < i} d_{\mathcal{C}}(f_n, f_m) &= \frac{1}{\alpha} \sup_{n < i < m} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \left[ \left( \frac{1}{f_m(k)} - \frac{1}{f_n(k)} \right) \vee 0 \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} \sup_{n < m < i} \sum_{k=n+1}^m 2^{-k} \frac{1}{f_m(k)} \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{i-1} 2^{-k} \frac{1}{f_{i-1}(k)}. \end{aligned}$$

Puesto que  $f_i \leq f_{i-1}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$  se obtiene que

$$\|F_i\|_{(\bar{\rho}_\alpha, d_{\mathcal{C}})} = \frac{1}{\alpha} \sup_{n < m} d_{\mathcal{C}}(F_i(n), F_i(m)) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^i 2^{-k} \frac{1}{f_i(k)} < \infty \quad (11)$$

Con base en el resultado anterior, se concluye que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \|F_i\|_{(\bar{\rho}_\alpha, d_{\mathcal{C}})} = \|F\|_{(\bar{\rho}_\alpha, d_{\mathcal{C}})}$ .

Más concretamente,

$$\begin{aligned}
 \|F\|_{(\bar{p}_\alpha, d_C)} - \|F_i\|_{(\bar{p}_\alpha, d_C)} &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{1}{f(k)} - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^i 2^{-k} \frac{1}{f_i(k)} \\
 &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=i+1}^{\infty} 2^{-k} \frac{1}{f(k)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^i 2^{-k} \left( \frac{1}{f(k)} - \frac{1}{f_i(k)} \right) \\
 &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=i+1}^{\infty} 2^{-k} \frac{1}{f(k)} \\
 &= \frac{1}{\alpha} d_C(f_j, f) \\
 &\leq \frac{1}{\alpha} \frac{2^{-i}}{T(1)}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, note que el uso de la cuasi-semimétrica inducida  $D$  dada en (8), también resulta en una interpretación satisfactoria puesto que la relación

$$D(F, F_i) = 0 \text{ y } D(F_{i+1}, F_i) = 0$$

concuera con el hecho de que  $F$  es más eficiente que  $F_i$  y el hecho de que  $F_{i+1}$  es más eficiente que  $F_i$ , dando así una cuantificación de la cercanía a la función solución por cada nuevo valor de la sucesión  $(F_i)$ .

El siguiente ejemplo ilustra el método desarrollado anteriormente, ver [7]. Considere el algoritmo Quicksort para el caso promedio, donde se tiene la siguiente ecuación de recurrencia,  $T(1) = 1$  y

$$T(n) = \frac{n+2}{n+1} T(n-1) + \frac{2n}{n+1}, n \geq 2$$

Se considera hasta  $n = 3$ , primero note que  $T(2) = \frac{8}{3}$  y  $T(3) = \frac{58}{12}$ . En seguida defina la sucesión de funciones  $f_n$  como en (9) (he aquí la imagen de



los primeros 3 elementos)

$$\begin{array}{l}
 f_1: \omega \rightarrow (0, \infty] \\
 f_1(0) = \infty \\
 f_1(1) = 1 \\
 f_1(n) = \infty \quad n > 1
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 f_2: \omega \rightarrow (0, \infty] \\
 f_2(0) = \infty \\
 f_2(1) = 1 \\
 f_2(2) = \frac{8}{3} \\
 f_2(n) = \infty \quad n > 2
 \end{array}
 \right|
 \begin{array}{l}
 f_3: \omega \rightarrow (0, \infty] \\
 f_3(0) = \infty \\
 f_3(1) = 1 \\
 f_3(2) = \frac{8}{3} \\
 f_3(3) = \frac{58}{12} \\
 f_3(n) = \infty \quad n > 3
 \end{array}$$

Nuevamente, defina la otra sucesión de funciones  $(F_i)$ , como en (10), para las primeras tres funciones de acuerdo a la ecuación (11) se tienen los siguientes valores para las normas de dichos elementos:

Para  $n = 1$ :

$$\|F_1\|_{(\bar{\rho}_\alpha, d_C)} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^1 2^{-k} \frac{1}{f_1(k)} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2}$$

Para  $n = 2$ :

$$\|F_2\|_{(\bar{\rho}_\alpha, d_C)} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^2 2^{-k} \frac{1}{f_2(k)} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{32} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{19}{32}$$

Para  $n = 3$ :

$$\|F_3\|_{(\bar{\rho}_\alpha, d_C)} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^3 2^{-k} \frac{1}{f_3(k)} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{32} + \frac{12}{464} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{575}{928}$$

Por lo que si se considera un error  $\varepsilon = 0.003$ , se puede obtener el número de pasos  $(i)$  resolviendo  $\frac{2^{-i}}{\alpha} \leq 0.003$  y para  $\alpha = 1$  se tiene que  $i \geq 9$ .

## Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo obtenido por parte de los organizadores del CIMA para poder presentar este trabajo en el VIII CIMA, celebrado del 31 de agosto al 3 de septiembre del 2021.

## Bibliografía

- [1] Chadam, J. M. *On the Cauchy Problem for the Coupled Maxwell-Dirac Equations*, Journal of Mathematical Physics 13, 5 (1972), 597-604.
- [2] Cobzaş, Ş. *Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces*, Frontiers in Mathematics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel. 006, (2013).
- [3] Hernández, JM and Castañeda, CH and Álvarez, L. C. and Tochiuitl, V. y Vázquez, R. *Decomposition of metrics and norms*, Global Journal of Mathematics and Mathematical Sciences (GJMMS) 6, 1 (2016), 1-9 .
- [4] Meyer, R. y Taylor, A. D. *Run-up on beaches*, Waves on Beaches and Resulting Sediment Transport, edited by RE Meyer, (1972), 357-411.
- [5] Mustăţa, C. *Extensions of semi-Lipschitz functions on quasi-metric spaces*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx. 30, 1 (2001), 61-67.
- [6] Sánchez-Álvarez, J. M. *On semi-Lipschitz functions with values in a quasi-normed linear space*, Applied General Topology 6, 2 (2005), 217-228.
- [7] Sánchez-Álvarez, J. M. *Semi-Lipschitz functions, best approximation, and fuzzy quasi-metric hyperspaces*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia (2009).
- [8] Schönbeck, S. O. *Extension of nonlinear contractions*, Bulletin of the American Mathematical Society 72, 1 (1966), 99-101.
- [9] Sevilla, M. J. y Rábago, M. G. *Una introducción a las Extensiones Diferenciables de Funciones*, Tesis de maestría, Universidad Complutense de Madrid (2017).
- [10] Weaver, N. *Lipschitz algebras*, segunda edición, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 5 Toh Tuck Link, Singapore 596224 (1999).

Universidad Tecnológica Mixteca  
Km 2.5 Carretera a Acatlima,  
Huajuapán de León, Oaxaca, C.P. 69000

fomh970309@ndikandi.utm.mx

lalvarez@mixteco.utm.mx

jmh@mixteco.utm.mx

---

# **Probabilidad y Estadística**

---



## Capítulo 3

# Opciones europeas sobre el bitcoin: valuación y cobertura por expectativa de volatilidad

Ana Lorena Jiménez Preciado, María Teresa Verónica  
Martínez Palacios, Ambrosio Ortiz Ramírez  
Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico  
Nacional

### Resumen

En este trabajo se propone la estrategia de cobertura de riesgo como sobre el BTCUSD. El cono se compone con una opción de compra y otra de venta, con precios de ejercicio y fecha de vencimiento iguales. Los precios de las opciones se obtienen por simulación Monte Carlo con el modelo de difusión con saltos de Merton, con parámetros calibrados por máxima verosimilitud de acuerdo con Rémillard (2013). La muestra para la estimación de los parámetros abarca el periodo 01/01/2020-01/01/2022 con 732 observaciones. Se obtienen los rendimientos logarítmicos y se realiza la estadística descriptiva a la muestra y prueba de normalidad de Jarque-Bera; se rechaza la hipótesis nula de normalidad para los rendimientos. Con los precios obtenidos se genera la estrategia como a tres vencimientos: 30, 60 y 90 días. El análisis de los resultados de la estrategia indica que se obtienen ganancias para inversiones a 30 días para un precio de ejercicio de 46000USD, debido a que en ese plazo el BTCUSD tiene un retroceso notable de 47686.8125 USD el 01/01/2022 a 38483.125 USD el 31/01/2022 generando una ganancia de 867.51USD. No obstante, esta estrategia no es adecuada para inversiones a 60 y 90 días, puesto que en ambos plazos se obtuvieron pérdidas, por ejemplo, con un precio de ejercicio  $K = 48000$  para un plazo de 60 días la pérdida fue de -5162USD, mientras que para un plazo de 90 días con  $K = 48000$  la pérdida fue de -9775.25USD. La fuente de estas pérdidas es debido a que el precio del BTCUSD no tuvo fluctuaciones suficientemente grandes para que la estrategia como fuera exitosa.

# 1 Introducción

Las criptomonedas se han vuelto un tema muy popular entre los inversionistas, no solo son un tema relevante en la diversificación de los portafolios, puesto que en los últimos meses ha presentado cambios notables en su cotización. Mucha atención se centró en el Bitcoin al pasar de una cotización de 10,600 dólares en octubre de 2020 a 40,700 dólares para enero del 2021, a 61,000 dólares a finales de octubre y pasando a alrededor de 50,000 para diciembre del mismo año, lo cual implica e incremento en cinco veces su precio. Empresas como Tesla, MicroStrategy Incorporated, y Galaxy Digital Holdings depositaron su confianza en este activo al invertir grandes cantidades. El Bitcoin se ha convertido en un activo muy volátil, teniendo grandes rendimientos, pero también presentando caídas abruptas, por lo cual nace la necesidad de diseñar e implementar estrategias que cubran la posición de este activo dentro de un portafolio de inversión limitando las posibles pérdidas o administrar el riesgo mercado con un derivado, por ejemplo, con opciones.

El bitcoin es la primera y más representativa criptomoneda del mercado, en 2008 se publica un documento llamado peer-to-peer electronic cash system firmada con el seudónimo de Satoshi Nakamoto. El autor plantea que es posible crear dinero electrónico que permita hacer transacciones directamente entre las partes sin necesidad de contar con un intermediario financiero o alguna institución, evitando cargos por comisiones y teniendo la privacidad de nuestros pagos [15].

Posterior al surgimiento del bitcoin se abrió la puerta para crear diferentes tipos de criptomonedas, como el Ethereum que es parecido al Bitcon, pero además de hacer trasferencias de dinero también se negocian contratos con acuerdos específicos, o el Tether el cual tiene un valor ligado a dinero fiat como el dólar o el euro y por tal motivo se le considera una moneda electrónica estable. Para inicios del 2021 existían más de 4 mil criptomonedas y cada vez se crean más, con características específicas basadas en algún proyecto, sin embargo, solo hay 20 monedas que representan el 90 % del mercado total y la mayoría concentran su popularidad en regiones como China, Estados Unidos y Europa [18].

A continuación, se presentan las principales características del bitcoin descritas en [1]:

- (a) **Descentralizadas.** No hay una autoridad que regule o sea gestora de

las criptomonedas, no tienen algún respaldo de gobiernos, bancos o cualquier tipo de institución, y por lo cual no presenta cambios directos ante políticas de bancos centrales o la situación económica de un determinado país. De esta manera su valor se moverá de acuerdo a la perspectiva que se tenga en el conjunto de los mercados para cada momento determinado.

- (b) **Blockchain.** Es la tecnología a través de la cual funciona el Bitcoin, con ella se pueden generar las transferencias de valor electrónicas de forma inmediata, segura y permanente sin que sea necesario la vigilancia o atención de un tercero llamado banco o institución financiera. En esta aplicación tecnológica se conserva el registro con una sola copia por medio de criptografía para verificar transacciones. En este Blockchain que también se denomina libro mayor existe una red en la que todos tienen acceso al registro de todas las transacciones generadas, en el momento que se crea una nueva transacción, automáticamente se recibe la actualización para todos los usuarios dentro de la red. De esta manera es imposible gastar el mismo valor dos veces o hacer una transacción duplicada sin que toda la red pueda visualizarlo.
- (c) **No se puede falsificar.** Las unidades de Bitcoin se crean e imprimen a través de complejos problemas matemáticos. Cada cierto tiempo las diferentes partes de la red tratan de solucionar un nuevo problema que se ha creado, ya que la recompensa por resolver estos problemas de manera más rápida son Bitcoins. A este mecanismo de compilación y creación de Bitcoins se le llama minería. Los usuarios de la red que realizan esta actividad son llamados mineros, estos mineros certifican todas las transacciones ocupando su propia infraestructura computacional resolviendo problemas matemáticos y obteniendo criptomonedas.
- (d) **Certificación de propiedad.** Después de ganar la recompensa, el Bitcoin obtenido presenta una certificación de posesión que no puede cambiar, a menos que sea por una transacción de venta. Esta certificación puede ser depositada en una cartera digital la cual puede ser guardada en cualquier computadora, celular o en servidores en línea.
- (e) **Incremento de unidades y poder computacional.** Cada cierto tiempo se crearán más unidades digitales en el mercado y la compleji-



dad de los problemas matemáticos será cada vez más compleja. Dado se han incrementado los participantes de la red, la verificación y seguimiento de las transacciones es mucho mayor. Actualmente esta moneda digital tiene un poder computacional mayor las 500 supercomputadoras combinadas en el mundo y para poder quebrantar la seguridad de su tecnología, he introducir una operación falsa se necesitaría un poder computacional más potente que esté, funcionando al mismo tiempo y lo se podría considerar imposible.

La regulación también se inserta en este tipo de activos, de acuerdo con [6] en 2019 treinta y dos estados de Estados Unidos ya habían promovido una legislación que permite el uso del Bitcoin y su tecnología blockchain, y más actualmente a inicios del 2021 cuarenta y dos de los cincuenta estados ya tenían regulaciones, en Europa también ha promovido la generación de estos marcos regulatorios en los últimos años, desde el año 2020 plantea una estrategia de finanzas digitales que contempla un marco legal sobre criptoactivos. En Asia se busca intensificar las regulaciones, principalmente en Singapur y Hong Kong se han creado nuevas leyes de licencia para la aprobación regulatoria, pero con algunos requisitos, tales como el evaluar las tecnologías de monitoreo de intercambio para evitar el abuso de mercado que puede llevar al lavado de dinero o financiamientos terroristas.

América Latina es una de las regiones que presenta un retraso en materia de esta regulación, solo Colombia y México tienen avances. Colombia ha creado el Registro Único de Plataformas de Intercambio de Criptoactivos (RUPIC) que es un marco regulatorio para intermediarios financieros. México por su parte generó un sistema de regulación a través de la Ley Fintech [6], asimismo las transacciones comerciales con criptomonedas deben pagar los correspondientes impuestos como se plantea en [16].

En los que sigue se presenta una breve revisión respecto a investigaciones relacionadas con criptomonedas. En [21] se revisan las propiedades de las colas anchas y la valoración de opciones europeas sobre la acción GCARSO y estrategias de varianza mínima. En [14] se utiliza la distribución varianza gamma y analizan la dependencia entre Bitcoin, Ripple y Ether, el método de estimación de parámetros es por medio del algoritmo EM (Expectation-Maximization). Un resultado importante es que hallan que existe una dependencia positiva entre los tres tipos de cambio respecto del dólar americano y se estima una distribución Varianza-Gamma de dimensión tres, cuya lep-

to curtosis y sesgo se adapta eficientemente a esta distribución, porque tiene influencia en cuanto a la diversificación de portafolios.

En [5] se hace una revisión exhaustiva de las aplicaciones financieras de Bitcoin. La atención se centra en tres líneas de investigación: formación de precios, detección de ineficiencia del mercado y construcción de portafolios diversificados. Refieren que estudios empíricos encuentran que los mercados de Bitcoin son ineficientes, con enormes fluctuaciones de precios y memoria de largo plazo, y que estos mercados están fuertemente influenciados por noticias y eventos específicos del sector, o por condiciones de infraestructura como el volumen de negociación y la liquidez del mercado. En [10] se analiza el desempeño de ocho de las principales criptomonedas (Bitcoin, Litecoin, Ethereum, Ripple, Tether, BitcoinCash, EOS y Tron) en términos de capitalización del mercado. Calculan diferentes métricas de desempeño y de riesgo como: Valor en Riesgo (VaR) y Valor en Riesgo Condicional (CVaR). Entre sus resultados resalta que el Ethereum es la criptomoneda que proporciona mayor porcentaje de rendimientos positivos diarios y que existe un alto grado de heterogeneidad en el desempeño de los activos no obstante que pertenecen a una misma clase de activo, por lo que concluyen que su inclusión en portafolios de inversión aportaría poca diversificación por lo que se requiere mayor análisis en cuanto a su dinámica y participación del mercado.

En [9] se presenta evidencia que apoya los beneficios de diversificación de criptomonedas mediante la utilización de portafolios media varianza, mejorando la frontera eficiente y los rendimientos ajustados al riesgo de un portafolio de economía un mercado emergente compuesto por activos tradicionales (acciones, bonos, divisas), activos alternativos (materias primas, bienes raíces) y criptomonedas.

Este capítulo está organizado como sigue, en la sección siguiente se describen: el modelo de difusión con saltos de Merton y el desarrollo de las fórmulas semi-analíticas para obtener precios de opciones de compra y de venta. Asimismo, se presenta el método para la estimación de parámetros por máxima verosimilitud según [17] y el procedimiento para obtener precios de opciones de compra y de venta con el modelo de Merton por simulación Monte Carlo. En la sección 3 se presenta un análisis de resultados de la aplicación de la metodología propuesta, comenzando con un análisis de estadística descriptiva y prueba de normalidad sobre la serie de rendimientos del BTCUSD, asimismo se ejecuta el análisis de los resultados de las estrategia de cobertura cono. Por último, en la sección 4 se presentan las conclusiones del presente trabajo

resumiendo los principales hallazgos.

## 2 Modelo de difusión con saltos de Merton

En la descripción de los modelos teóricos que se usan en finanzas matemáticas, el proceso estocástico más importante es el proceso de Wiener, que se utiliza para modelar las trayectorias de precios de los activos en tiempo continuo. El siguiente proceso estocástico importante es el proceso de Poisson, que se utiliza para modelar variables aleatorias discontinuas [8]. Aunque el tiempo se supone en tiempo continuo, la variable es discontinua porque puede representar un “salto” en el precio de un activo, por ejemplo, precios de materias primas, precios de criptomonedas, precios de la electricidad, o un evento de riesgo crediticio, como la descripción de escenarios de incumplimiento, migración de calificación crediticia, entre otros fenómenos.

**Definición 2.1.** La variable aleatoria Poisson  $X$  con parámetro de intensidad  $\varepsilon > 0$  modela el número de veces que ocurre un evento durante un periodo de tiempo dado. La probabilidad de que sucedan  $k \geq 0$  ocurrencias en un periodo de tiempo está dado por la siguiente función de densidad:

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\varepsilon^k e^{-\varepsilon}}{k!}$$

con  $E(X) = \varepsilon$  y  $\text{Var}(X) = \varepsilon$ . El parámetro  $\varepsilon > 0$  representa el número de veces que se espera que ocurra el fenómeno o evento durante un intervalo dado.

**Definición 2.2.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad. Un proceso de Poisson (o proceso de Poisson homogéneo)  $\{N_t : t \geq 0\}$  con intensidad  $\varepsilon > 0$  es un proceso de conteo con las siguientes propiedades:

- a)  $N_0 = 0$ ;
- b)  $N_t$  tiene incrementos estacionarios e independientes; es decir,  $\forall t_0 = 0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n, N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$  son variables aleatorias independientes,

c) Para  $h \geq 0, t > 0$ , y valores enteros  $k \geq 0$  los incrementos son conducidos por una Poisson:

$$P[N(t+h) - N(t) = k] = \frac{(\varepsilon t)^k e^{-\varepsilon t}}{k!} \quad (1)$$

d)

$$P[N_{t+h} = i + j | N_t = i] = \begin{cases} 1 - \varepsilon h + o(h) & \text{si } j = 0. \\ \varepsilon h + o(h) & \text{si } j = 1. \\ o(h) & \text{si } j > 0. \end{cases}$$

El proceso de Poisson  $N(t)$  es un proceso de conteo al definir el número de saltos en un periodo de tiempo  $t$  con (4.2), asimismo, los incrementos son estacionarios puesto que sólo dependen de la longitud del intervalo y no del tiempo inicial  $t$ . El parámetro  $\varepsilon$  es la “tasa” o intensidad del proceso  $N(t)$  e indica el número de saltos en un periodo de tiempo.

Dado que el proceso  $N_t$  con intensidad  $\varepsilon$  es un proceso de conteo creciente, por ello no es una martingala. Sin embargo, en su forma compensada,  $N_t - \varepsilon t$  es una martingala.

**Definición 2.3.** Sea  $\{N_t : t \geq 0\}$  un proceso de Poisson con intensidad  $\varepsilon > 0$  definido en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  con respecto a la filtración  $\mathcal{F}_t$ , sean  $X_1, X_2, \dots$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media  $E(X_i) = (X) = \mu$  y varianza  $\text{Var}(X_i) = \text{Var}(X) = \sigma^2$ . Suponga además que  $X_1, X_2, \dots$  son independientes de  $N_t$ . El proceso de Poisson compuesto  $M_t$  se define como:

$$M_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i, t \geq 0.$$

De la definición se deduce que aunque los saltos en  $N_t$  son siempre de tamaño 1, los saltos en  $M_t$  son aleatorios ya que  $X_t$  es una variable aleatoria. La única similitud entre los dos procesos es que los saltos de  $N_t$  y  $M_t$  suceden simultáneamente. Además, al igual que el proceso  $N_t$ , el proceso  $M_t$  también tiene la propiedad de incrementos independientes y estacionarios. Otra generalización importante del proceso de Poisson es agregar un parámetro

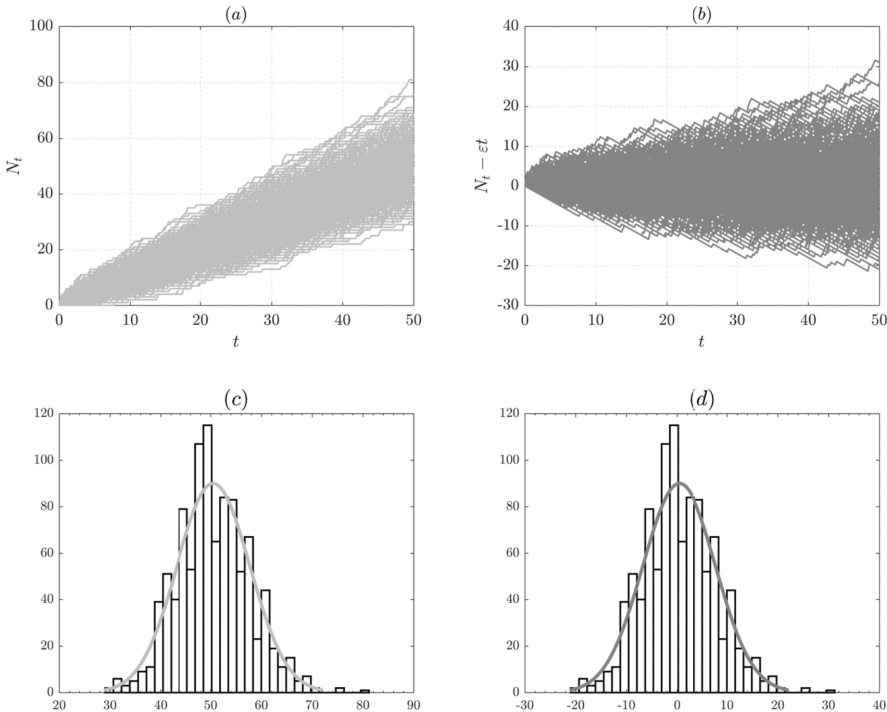
de tendencia y un proceso de Wiener estándar para generar un proceso de difusión con salto como:

$$dX_t = \mu(X_{t-}, t)dt + \sigma(X_{t-}, t)dW_t + J(X_{t-}, t)dN_t$$

donde  $J(X_{t-}, t)$  es una variable aleatoria que modela el tamaño del salto y además:

$$dN_t = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } \varepsilon dt. \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - \varepsilon dt. \end{cases}$$

Figura 1: Generación de trayectorias por Monte Carlo con  $\varepsilon = 1$ . Lado izquierdo: proceso de Poisson. Lado derecho: proceso de Poisson compuesto.



Fuente: elaboración propia.

La figura (1) muestra 1000 trayectorias discretas de un proceso de Poisson con  $\varepsilon = 1$ , en este caso se hace  $T = 50$ ,  $dt = T/250$  [19]. En el caso del proceso de Poisson (a) las trayectorias son siempre positivas y su correspondiente

histograma (c) de los valores finales muestra una distribución multimodal debido a los saltos. En cambio, en la gráfica del proceso de Poisson compuesto (b) las trayectorias en algún momento toma valores negativos y el histograma de sus valores finales (d) hereda la propiedad de ser multimodal.

En lo que sigue se describe el modelo de difusión con saltos de Merton 1976 de acuerdo con [3].

**Definición 2.4.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad,  $\{N_t : t \geq 0\}$  un proceso de Poisson con intensidad  $\varepsilon > 0$  y  $\{B_t : t \geq 0\}$  un movimiento browniano relacionado con la misma filtración  $(\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$ . Suponga que  $X_t$  sigue un proceso de difusión con saltos conducido por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dX_t}{X_{t-}} = (\mu - q)dt + \sigma dB_t + (J_t - 1)dN_t \quad (2)$$

donde:

$$dN_t = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } \varepsilon dt. \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - \varepsilon dt. \end{cases}$$

con constantes  $\mu, q$  y  $\sigma$  la tendencia, tasa continua de dividendos y la volatilidad, respectivamente, y  $J_t$  la variable de salto tal que  $\ln J_t \sim \mathcal{N}(\mu_J, \sigma_J^2)$ .

Suponga que  $J_t, B_t$  y  $N_t$  son mutuamente independientes. Asimismo, sea  $J_i, i = 1, 2, \dots$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que también son independientes de  $N_t$  y  $B_t$ . Si  $X_{t-}$  denota el valor de  $X_t$  antes de un evento de salto; al expandir  $d(\ln X_t)$  en serie de Taylor y aplicando el lema de Itô [20]:

$$\begin{aligned} d(\ln X_t) &= \frac{dX_t}{X_{t-}} - \frac{1}{2} \left( \frac{dX_t}{X_{t-}} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{dX_t}{X_{t-}} \right)^3 - \frac{1}{4} \left( \frac{dX_t}{X_{t-}} \right)^4 + \dots \\ &= (\mu - q)dt + \sigma dB_t + (J_t - 1)dN_t - \frac{1}{2} \left( \sigma^2 dt + (J_t - 1)^2 dN_t \right) \\ &\quad + \frac{1}{3} (J_t - 1)^3 dN_t - \frac{1}{4} (J_t - 1)^4 dN_t + \dots \\ &= \left( \mu - q - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB_t \\ &\quad + \left[ (J_t - 1) - \frac{1}{2} (J_t - 1)^2 + \frac{1}{3} (J_t - 1)^3 - \frac{1}{4} (J_t - 1)^4 + \dots \right] dN_t \\ &= \left( \mu - q - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB_t + \ln J_t dN_t \end{aligned}$$

siempre que  $-1 < J_t - 1 \leq 1$  ó  $0 < J_t \leq 2$ . Al integrar se tiene que:

$$\int_t^T d(\ln X_u) = \int_t^T \left( \mu - q - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) du + \int_t^T \sigma dB_u + \int_t^T \ln J_u dN_u$$

$$\ln \left( \frac{X_T}{X_t} \right) = \left( \mu - q - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t) + \sigma B_{T-t} + \sum_{i=1}^{N_{T-t}} \ln J_i$$

aplicando la exponencial se obtiene:

$$X_T = X_t e^{(\mu - q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma B_{T-t}} \prod_{i=1}^{N_{T-t}} J_i \quad (3)$$

donde  $J_i \in (0, 2]$  es el tamaño de salto aleatorio que ocurre al tiempo  $t_i$  y  $N_{T-t} = N_T - N_t$  es el número total de saltos en el intervalo de tiempo  $(t, T]$ .

Puesto que  $B_{T-t} \sim \mathcal{N}(0, T-t)$ ,  $\ln J_i \sim \mathcal{N}(\mu_J, \sigma_J^2)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  y por independencia entre los procesos:

$$\ln X_T | \{X_t, N_{T-t} = n\} \sim \mathcal{N} \left[ \ln X_t + \left( \mu - q - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t) + n\mu_J, \sigma^2(T - t) + n\sigma_J^2 \right]. \quad (4)$$

Además, a partir de  $X_t$  y del supuesto de la mutua independencia del browniano y del proceso de Poisson compuesto:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_T | X_t) &= \mathbb{E} \left[ X_t e^{(\mu - q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma B_{T-t}} \prod_{i=1}^{N_{T-t}} J_i | X_t \right] \\ &= X_t e^{(\mu - q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \mathbb{E}(e^{\sigma B_{T-t}}) \mathbb{E} \left( \prod_{i=1}^{N_{T-t}} J_i \right) \\ &= X_t e^{(\mu - q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} (e^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}) \mathbb{E} \left( \prod_{i=1}^{N_{T-t}} J_i \right) \\ &= X_t e^{(\mu - q)(T-t)} \mathbb{E} \left( \prod_{i=1}^{N_{T-t}} J_i \right) \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\mathbb{E}(X_T | X_t) = X_t e^{(\mu - q)(T-t)} \exp \left\{ \varepsilon \left( e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1 \right) (T - t) \right\}. \quad (5)$$

En cuanto a la varianza de  $X_T$  condicional a  $X_t$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_T|X_t) &= \text{Var} \left[ X_t e^{(\mu - q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma B_{T-t}} \prod_{i=1}^{N_{T-t}} J_i | X_t \right] \\ &= X_t^2 e^{2(\mu - q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \text{Var}(e^{\sigma B_{T-t}}) \text{Var} \left( \prod_{i=1}^{N_{T-t}} J_i \right). \end{aligned}$$

Dado que  $\text{Var}(e^{\sigma B_{T-t}}) = (e^{\sigma^2(T-t)} - 1) e^{\sigma^2(T-t)}$  entonces:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_T|X_t) &= X_t^2 e^{2(\mu - q)(T-t)} (e^{\sigma^2(T-t)} - 1) \\ &\times \left[ \exp \left\{ \varepsilon(T-t) (e^{2(\mu_J - \sigma_J^2)} - 1) \right\} - \exp \left\{ 2\varepsilon(T-t) (e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Bajo este mismo marco, bajo una medida martingala equivalente  $\mathbb{Q}$  [7] el proceso en (2) se puede escribir como:

$$\frac{dX_t}{X_t} = (r - d - \varepsilon(\bar{J} - 1)) dt + \sigma d\tilde{B}_t + (J_t - 1)dN_t$$

donde  $\bar{J} = E^{\mathbb{P}}(J_t) = e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2}$ ,  $\tilde{B} = B_t - \left( \frac{\mu - r + \varepsilon(\bar{J} - 1)}{\sigma} \right) t$  es un movimiento browniano bajo la medida  $\mathbb{Q}$  y  $N_t \sim \text{Poisson}(\varepsilon t)$ .  $\mathbb{Q}$  es la medida de la martingala equivalente obtenida al cambiar la tendencia del browniano, pero dejando la parte de saltos sin cambios<sup>1</sup>, esto significa, que las propiedades de riesgo neutral del componente de saltos de  $X_t$  son las mismas que las de sus propiedades estadísticas. En particular, la distribución de los tiempos de saltos y los tamaños de los saltos no cambian. De esta manera se reescribe (3) como sigue:

$$X_T = X_t e^{(r - q - \varepsilon(\bar{J} - 1) - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma \tilde{B}_{T-t}} \prod_{i=1}^{N_{T-t}} J_i$$

donde  $J_i \sim \mathcal{LN}(\mu_J, \sigma_J^2)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_{T-t}$  es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y  $\tilde{B}_{T-t} \sim \mathcal{N}(0, T-t)$ . Por

<sup>1</sup>Merton justificó esto bajo el supuesto de que el riesgo de un salto es diversificable, por lo que no hay prima de riesgo relacionada.



independencia de  $J_i = 1, 2, \dots, N_{T-t}$ ,  $B_{T-t}$  y  $N_{T-t}$ :

$$\ln X_T | \{X_t, N_{T-t} = n\} \sim \mathcal{N} \left[ \ln X_t + \left( r - q - \varepsilon \left( e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1 \right) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t) + n\mu_J, \sigma^2(T - t) + n\sigma_J^2 \right].$$

Al hacer:

$$\ln X_T | \{X_t, N_{T-t} = n\} \sim \mathcal{N} \left[ \ln X_t + \left( \mu - \tilde{q} - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 \right) (T - t), \tilde{\sigma}^2(T - t) \right]$$

donde  $\tilde{q}$  es la tasa con composición continua de los dividendos y  $\sigma$  la volatilidad del precio del activo  $X_t$  conducido por un movimiento geométrico browniano. Así se genera un sistema de ecuaciones a resolver:

$$\begin{aligned} \left( \mu - \tilde{q} - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 \right) (T - t) &= \left( r - q - \varepsilon \left( e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1 \right) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t) + n\mu_J \\ \tilde{\sigma}^2(T - t) &= \sigma^2(T - t) + n\sigma_J^2. \end{aligned}$$

Al resolver se tiene:

$$\tilde{q} = q + \varepsilon \left( e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1 \right) - \frac{n}{T - t} \left( \mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2 \right) \quad (7)$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 + \frac{n\sigma_J^2}{T - t}. \quad (8)$$

A partir de la definición del precio de una opción de compra de tipo europeo<sup>2</sup> con precio de ejercicio  $K > 0$  y plazo al vencimiento  $T \geq t$ :

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{M}}(X_t, t; K, T) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(X_T - K, 0)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{Q}(N_{T-t} = n) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(X_T - K, 0)^+ | \mathcal{F}_t, N_{T-t} = n] \\ &= e^{-r(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-\varepsilon(T-t)} [\varepsilon(T-t)]^n}{n!} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} (X_T - K, 0)^+ | \mathcal{F}_t, N_{T-t} = n \right\} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Observe que:  $(X_T - K, 0)^+ = \max(X_T - K, 0)$ , el valor intrínseco de la opción.

donde el término  $\frac{e^{-\varepsilon(T-t)}[\varepsilon(T-t)]^n}{n!}$  es la probabilidad de  $n$  saltos en el período de tiempo  $(t, T]$ . Dado que la distribución condicional de  $X_T$  dado  $X_t$  y  $N_{T-t} = n$  puede escribirse de la siguiente manera:

$$\ln X_T | \{X_t, N_{T-t} = n\} \sim \mathcal{N} \left[ \ln X_t + \left( \mu - \tilde{q} - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 \right) (T - t), \tilde{\sigma}^2 (T - t) \right].$$

Entonces, de acuerdo con el modelo de Black y Scholes [2, 11], el precio de la opción de compra con un enfoque probabilista [22] definido como el valor presente de la esperanza bajo la medida neutral al riesgo  $\mathbb{Q}$  dado por:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(X_T - K, 0)^+ | \mathcal{F}_t, N_{T-t} = n]$$

es simplemente el precio de la opción de compra con dividendo  $\tilde{q}$  y volatilidad  $\tilde{\sigma}$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(X_T - K, 0)^+ | \mathcal{F}_t, N_{T-t} = n] = C_{BS}(X_t, t; K, T),$$

donde:

$$C_{BS}(X_t, t; K, T) = X_t e^{-\tilde{q}(T-t)} \Phi(\tilde{d}_+) - K e^{-r(T-t)} \Phi(\tilde{d}_-)$$

Entonces, la expresión para valuar la opción de compra europea del modelo de Merton es:

$$C_{\mathcal{M}}(X_t, t; K, T) = e^{-r(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\varepsilon(T-t)}[\varepsilon(T-t)]^n}{n!} C_{BS}(X_t, t, K, T) \quad (9)$$

Para el precio de una opción de venta de tipo europeo con precio de ejercicio  $K > 0$  y plazo al vencimiento  $T \geq t$  se tiene que:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(K - X_T, 0)^+ | \mathcal{F}_t, N_{T-t} = n] = P_{BS}(X_t, t; K, T).$$

Bajo los mismos supuestos anteriores, la expresión para valuar la opción de venta de tipo europeo con el modelo de Merton es:

$$P_{\mathcal{M}}(X_t, t; K, T) = e^{-r(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\varepsilon(T-t)}[\varepsilon(T-t)]^n}{n!} P_{BS}(X_t, t, K, T) \quad (10)$$

donde:

$$P_{BS}(X_t, t; K, T) = K e^{-r(T-t)} \Phi(-\tilde{d}_-) - X_t e^{-\tilde{q}(T-t)} \Phi(-\tilde{d}_+)$$

con:

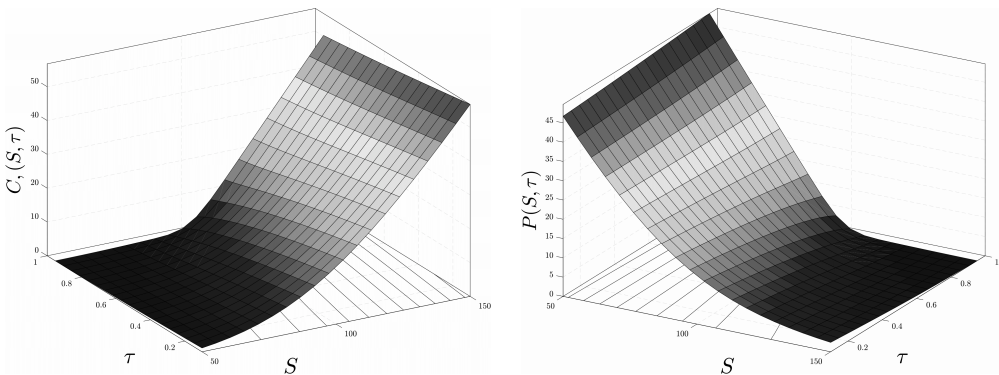
$$\tilde{d}_{\pm} = \frac{\ln\left(\frac{X_t}{K}\right) + \left(r - \tilde{q} \pm \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_2\right)(T - t)}{\tilde{\sigma}\sqrt{T - t}}.$$

donde la función  $\Phi(d)$  es la función de distribución acumulada de  $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , es decir,

$$\Phi(d) = \mathbb{P}_{\mathcal{E}}\{\mathcal{E} \leq d\} = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 1 - \Phi(-d).$$

De acuerdo con (9) o (10), el precio de la opción, se calcula como el valor ponderado, con respecto al proceso de Poisson que modela los saltos y el precio de la opción de compra o de venta con el modelo de Black y Scholes. Para  $n$  suficientemente grande tales expresiones permitirán obtener aproximaciones a precios de opciones de compra o de venta de tipo europeo del modelo de difusión con saltos.

Figura 2: Superficie de precios de opciones compra y de venta con Merton 1976. Los parámetros son:  $r = 0.05, T = 1, \sigma_{BS} = 0.25, \mu_J = 0.1, \sigma_J = 0.1$  y  $\lambda = 1.0$ ;  $X_t$  varía de  $50, \dots, 150$  y el precio de ejercicio  $K = 100$ .



((a)) Precios de opciones de compra

((b)) Precios de opciones de venta

Fuente: elaboración propia.

Con el supuesto que la volatilidad en el modelo de Merton y la de Black-Scholes-Merton son iguales al hacer  $\sigma_M = \sqrt{\sigma_{BS}^2 + n \times \sigma_J/T}$ ; en la figura (2) se muestra a continuación superficies de precios de opciones de venta y de compra.

Después de haber desarrollado la fórmula analítica para el precio de la opción entonces es pertinente plantear estimación de parámetros del proceso de difusión con saltos, lo que implica estimar cinco parámetros: la tendencia del movimiento browniano y su varianza, así como la tendencia, la varianza de los saltos y su intensidad asociada al proceso de Poisson.

De acuerdo con [17] un método de estimación basado en el principio de máxima verosimilitud es viable si la densidad de los rendimientos está disponible. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones, la densidad es una suma infinita, por lo que debe truncarse en algún punto, lo que induce errores que dependen de la precisión del método numérico empleado.

Si se tiene un serie de precios del activo en intervalos regulares de tamaño  $h$ , los rendimientos se obtienen mediante:

$$R_i = \ln \left[ \frac{X(i\tau)}{X \{(i-1)\tau\}} \right], i \in \{1, \dots, n\}$$

que son observaciones independientes e idénticamente distribuidas con la misma distribución.

Para el caso del modelo de Merton, condicionando a  $N_t = n \geq 0$ , los rendimientos se distribuyen como:

$$R_i \sim \mathcal{N}(\alpha + n\mu_J, \sigma^2\tau + n\sigma_J^2).$$

y su densidad está dada por:

$$f_{R_i}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\varepsilon\tau} \frac{(\varepsilon\tau)^k}{n!} \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(r-\alpha-n\mu_J)^2}{\sigma^2\tau+n\sigma_J^2}}}{\sqrt{2\pi(\sigma^2\tau+n\sigma_J^2)}}, r \in \mathbb{R}$$

Donde  $\mu$  y  $\sigma$  son la media y varianza de  $B_t$ , respectivamente,  $\varepsilon$  son los saltos,  $\mu_J$  y  $\sigma_J^2$  son la media y varianza de difusión con saltos, respectivamente.

## Simulación Monte Carlo del modelo de Merton 1976

La simulación de Monte Carlo es una de las técnicas numéricas más importantes en finanzas cuantitativas, puede ser que no sea la más importante, pero si la más utilizada cuando se pretenden resolver problemas en los que no existe una expresión analítica. Esto se debe principalmente al hecho de que es el método numérico más flexible cuando se trata de la evaluación de

expresiones matemáticas como, por ejemplo, integrales y en particular, la valoración de derivados financieros. Sin embargo, la flexibilidad tiene el costo de una carga computacional relativamente alta, ya que con frecuencia se deben realizar cientos de miles o incluso millones de cálculos complejos para obtener una estimación confiable.

Una de las aplicaciones de la simulación Monte Carlo es la valoración de activos contingentes (opciones, derivados financieros, notas estructuradas, etc.). En resumen, en un mundo neutral al riesgo, el valor de un activo contingente es la esperanza del pago descontado bajo una medida (martingala) neutral al riesgo. Esta es la medida de probabilidad que hace que todos los factores de riesgo (acciones, índices, divisas, criptomonedas, materias primas) se “muevan” con la tasa libre de riesgo, haciendo que los procesos descontados sean martingalas. De acuerdo con el Teorema Fundamental de la Valoración de Activos, la existencia de tal medida de probabilidad es equivalente a la ausencia de arbitraje [4].

Una opción financiera otorga el derecho a comprar (opción de compra) o vender (opción de venta) un activo particular en una fecha de vencimiento determinada (opción europea), o durante un período de tiempo específico (opción americana), a un precio determinado (precio de ejercicio). Considere el caso de valuación de opciones europeas y la función de pago de una opción de compra europea sobre un activo al vencimiento

$$h(S_T) = \max(X_T - K, 0)$$

Donde  $X_T$  es el nivel del activo a la fecha de vencimiento  $T$  y  $K$  es el precio de ejercicio. En un mercado completo, la medida neutral al riesgo para un proceso estocástico particular, por ejemplo: un movimiento browniano geométrico o un proceso de difusión con saltos; el precio de la opción está dado por

$$c_0 = e^{-rT} E_0^Q (h(X_T)) = e^{-rT} \int_0^\infty h(x)q(x)dx$$

En este caso para evaluar la integral anterior se debe calcular la esperanza, que en el caso continuo es una integral, pero para fines de la simulación es una suma, por lo que se debe obtener la esperanza de la función de pago bajo una medida neutral al riesgo, bajo estas condiciones se tiene la siguiente expresión

$$\hat{c}_0 = e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M h(\hat{X}_T^i)$$

La expresión anterior representa una estimación del precio de la opción europea por simulación Monte Carlo, donde  $\widehat{X}_T^i$  es el  $i$ -ésimo nivel del activo simulado al vencimiento y  $M$  es el número de trayectorias simuladas.

Por último, a continuación se presenta el procedimiento para ejecutar la simulación Monte Carlo y obtener el precio de la opción:

0. Variables y parámetros iniciales.

- i)*  $X_0$ : Precio inicial del activo.
- ii)*  $r$ : tasa de interés libre de riesgo.
- iii)*  $q$ : tasa de dividendos.
- iv)*  $K$ : Precio de ejercicio.
- v)*  $\sigma$ : Volatilidad del activo.
- vi)*  $N$ : Número de periodos de tiempo.
- vii)*  $\Delta t$ : Duración de cada período de tiempo (en años).
- viii)*  $M$ : Número de trayectorias.
- ix)* Opción de compra o venta.
- x)* Parámetros de difusión con saltos:  $\mu_J, \sigma_J$ .
- xi)* Intensidad del proceso de Poisson  $\varepsilon$ .

1. Inicio.

- i)* Hacer  $\Delta t = \frac{T}{N}$ .
- ii)* Establecer la semilla de la trayectoria inicial para cualquier entero positivo.
- iii)* Generar v.a.'s  $Z_j$  para cada trayectoria  $j = 1, 2, \dots, M$ .
- iv)* Generar v.a.'s  $J_j(t)$  para cada trayectoria  $j = 1, 2, \dots, M$  y calcular el tamaño de salto para cada período  $i$  con:  $J_i = \prod_{n=1}^{N_t} J_n$

2. Calcular  $X_N$  a la fecha de vencimiento  $T$  usando:

$$|X(t_i) = X(t_{i-1}) \exp \left[ \left( \mu - q - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t} + J \right]$$

$J = \mu_X N(\Delta t) + \sigma_X Z_2 \sqrt{N(\Delta t)}$ ,  $Z_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $N(\Delta t) \sim \text{Poisson}(\varepsilon \Delta t)$   
con  $Z_1$  y  $Z_2$  dos variables aleatorias normales estándar independientes,  
 $Z_\bullet \sqrt{\Delta t}$  una versión discreta del movimiento browniano estándar  $B_t$ , y  
 $\mu_X$  y  $\sigma_X$  la media y desviación estándar de los saltos, definida por:

$$\mu_X = E[X_j] = \exp\left\{a + \frac{1}{2}b^2\right\}$$

$$\sigma_X^2 = \text{Var}[X_j] = \exp\{2a + b^2\}(\exp\{b^2\} - 1)$$

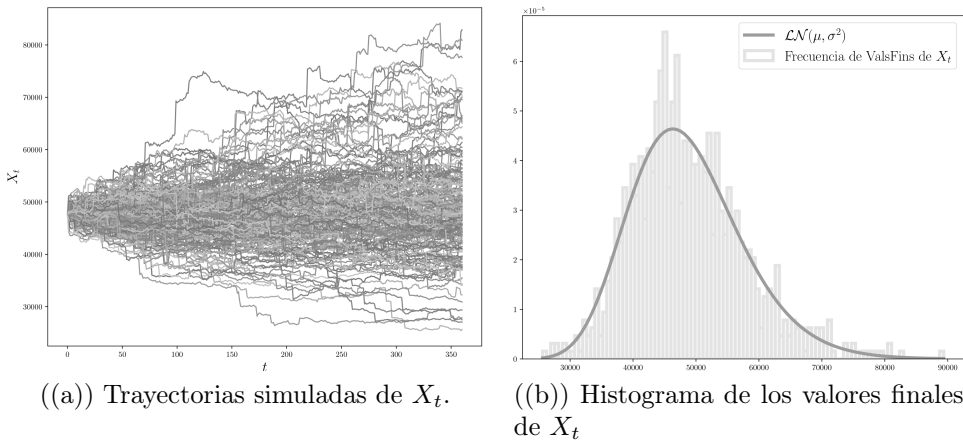
con  $a$  y  $b$  tales que  $\ln(X_j) \sim \mathcal{N}(a, b^2)$ .

3. Calcular los precios de las opciones con:

$$\hat{c}_0 = e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max(\hat{S}_T^i - X, 0)$$

$$\hat{p}_0 = e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max(X - \hat{S}_T^i, 0)$$

Figura 3: Trayectorias simuladas del modelo de Merton.



((a)) Trayectorias simuladas de  $X_t$ .

((b)) Histograma de los valores finales de  $X_t$

Fuente: elaboración propia.

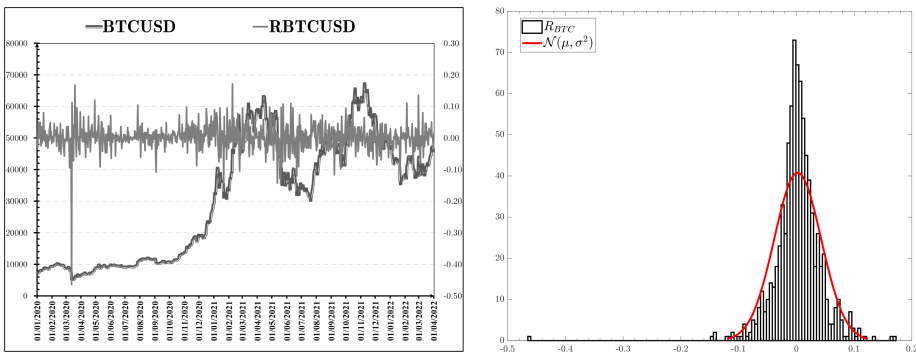
La figura (3.4(a)) muestra 200 trayectorias del modelo de Merton con  $X_0 = 47686.813$ ,  $\mu = 0.05$ ,  $\sigma = 0.2449$ ,  $\varepsilon = 203.4208$ ,  $\mu_J = -0.0003$ ,  $\sigma_J = 0.0390$ ,

y la figura (3.4(b)) el histograma de los valores finales de  $X_t$ , se observa el exceso de curtosis y la asimetría propios del modelo de Merton.

### 3 Análisis y Discusión de Resultados

En este apartado se calculan los rendimientos de los precios del BITCOIN (BTCUSD) obtenidos de yahoo finance del periodo 01/01/2020–24/03/2022 con 874 observaciones de precios expresados en dólares americanos. Como el lector nota, se observa un comportamiento de precios influenciado por eventos extremos a finales del 2020 e inicios del 2021, la figura (3.5(a)) muestra la evolución de precios y rendimientos del periodo considerado. Se observa un evento extremo en el 12 de marzo de 2020, ya que el precio pasa de 7911 USD el 11 de marzo a 4911 USD el día siguiente, lo que significó un rendimiento negativo de -46% aproximadamente. La figura (3.5(b)) muestra el histograma de los rendimientos con un ajuste de una distribución normal con  $\mathcal{N} \sim (0.0022, 0.0406)$ , claramente se nota el exceso de curtosis y el efecto de ese evento extremo en la cola izquierda del histograma.

Figura 4: Precios, rendimientos e histograma del BTCUSD del 01/01/2020–24/03/2022.



((a)) Precios y rendimientos del BTC en USD.

((b)) Histograma de rendimientos del BTC en USD.

Fuente: elaboración propia.

Al ejecutar la prueba de normalidad de los rendimientos con Jarque-Bera



al 5% de significancia, el resultado es que se rechaza tal supuesto, puesto que se obtiene una estadística de 6035543.476 con un valor crítico de 5.911. El cuadro 1 muestra la estadística descriptiva de los rendimientos del período 01/01/2020 al 01/04/2022 obtenida mediante Excel. Se observa un promedio positivo muy cercano a cero. El coeficiente de variación indica que los rendimientos tuvieron una alta dispersión, lo que se confirma con la desviación estándar (diaria) y la curtosis. Respecto al coeficiente de asimetría tiene un valor negativo, lo que indica que su distribución es ligeramente sesgada hacia la derecha.

Cuadro 1: Estadística descriptiva de los rendimientos de BTCUSD.

RBTCUSD									
$\mu$	CV	$\sigma_M$	$\sigma_M^2$	Curt.	Coef. Asim.	Rango	Mín.	Máx.	Obs.
0.0023	18	0.04	0.0016	23	-1.8	0.6366	-0.4647	0.1718	821

Fuente: elaboración propia.

## Resultados de estimación de parámetros y las estrategias

En esta parte se presentan los resultados de la estimación de parámetros por máxima verosimilitud de acuerdo con [17] y los resultados de la estrategia cono a los plazos de 30, 60 y 90 días.

Cuadro 2: Estimación de parámetros del modelo difusión con saltos por máxima verosimilitud a partir de los rendimientos de BTCUSD, período 01/01/2020–01/01/2022.

$\mu$	$\sigma$	$\varepsilon$	$\mu_J$	$\sigma_J$
0.7400	0.2449	203.4208	-0.0003	0.0390

Fuente: elaboración propia.

El cuadro 3 muestra precios de opciones de compra y de venta sobre el BTCUSD para plazos de  $T = 30, 60, 90$  días. Los precios se obtuvieron

mediante simulación Monte Carlo con el modelo de difusión con saltos de Merton 1976 con un precio inicial del día 01/01/2022 de 47686.813 USD, con  $M = 10000$  trayectorias. La tasa libre de riesgo se obtiene de la página web: <https://home.treasury.gov/> en la parte de *Daily Treasury Bill Rates*. Como se observa en el cuadro, conforme aumenta el plazo los precios de opciones son crecientes. Además, los precios de opciones de compra van disminuyendo a medida que aumenta el precio de ejercicio y en el caso de opciones de venta van aumentando. Con estos precios se genera la estrategia cono, la cual se compone con dos posiciones largas: la primera con una opción de compra (call largo) y la segunda con una opción de venta (put largo), ambas opciones con el mismo precio de ejercicio y fecha de vencimiento.

Cuadro 3: Precios de opciones de compra y de venta sobre BTCUSD con el modelo de Merton76.

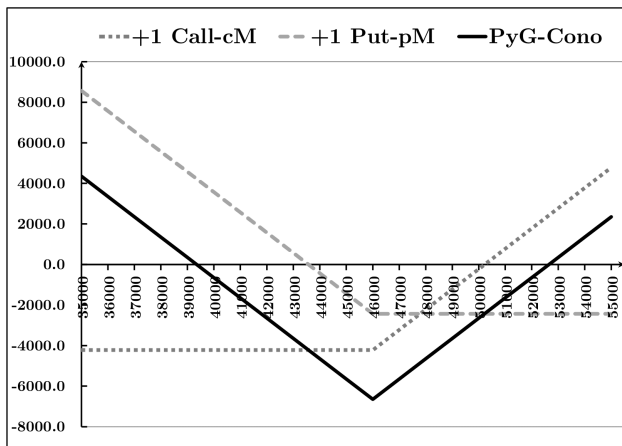
$K$	$T = 30d$		$T = 60d$		$T = 90d$	
	Call 30d	Put 30d	Call 60d	Put 60d	Call 90d	Put 90d
35000	13033.35	121.01	13614.57	463.70	14116.83	907.80
36000	11929.66	159.76	12595.95	625.66	13215.07	1122.91
37000	11119.99	225.29	11804.73	802.01	12516.66	1235.45
38000	9984.74	316.19	11091.47	976.07	11818.87	1510.80
39000	9245.89	448.70	10284.18	1110.51	11106.05	1845.30
40000	8581.80	595.29	9223.18	1419.57	10338.76	2163.19
41000	7496.92	746.63	8892.31	1671.26	9581.12	2437.00
42000	6846.27	1046.63	8060.18	2068.62	9069.46	2745.49
43000	6128.58	1314.65	7222.25	2367.34	8421.34	3170.97
44000	5444.01	1654.94	6875.93	2670.64	7708.91	3668.90
45000	4921.17	1983.64	6435.74	3197.43	7244.53	4016.06
46000	4218.71	2430.65	5669.79	3576.87	6833.27	4460.99
47000	3650.54	2876.17	5019.49	4072.38	6293.50	5061.39
48000	3309.39	3387.12	4677.83	4559.88	5940.67	5552.93
49000	2788.76	3896.13	4314.03	5166.03	5349.54	6080.69

50000	2439.44	4540.65	3947.10	5787.37	5126.81	6640.57
51000	2075.70	5306.75	3516.06	6503.35	4868.39	7381.73
52000	1755.10	5696.37	3227.95	7131.44	4386.83	8011.72
53000	1484.45	6567.47	2817.67	7606.02	3792.39	8687.97
54000	1338.36	7389.72	2578.86	8471.47	3642.70	9222.61
55000	1123.22	8161.05	2238.59	9329.94	3396.79	10085.58

Fuente: elaboración propia

El siguiente cuadro muestra el perfil de pérdidas y ganancias para la estrategia cono a un plazo de 30 días con precio de ejercicio de 46000USD. La fecha inicial es el 01/01/2022 y la fecha final es 31/01/2022, cada día se compara el precio que tuvo el subyacente con el cono, es decir, se calcula la pérdida o ganancia al restarle a la función de pérdidas y ganancias del call largo la prima obtenida con el modelo de Merton:  $\max(X_T - K, 0) - c_M$  y lo mismo para el put largo:  $\max(K - X_T, 0) - p_M$  lo que resulte de esas operaciones se suma, si es positivo significa una ganancia en la estrategia cono y en caso contrario una pérdida. El 31/01/2022 el precio del BTCUSD fue de 38483.125 USD, al hacer los cálculos anteriores se tiene una ganancia de 867.51USD. La figura (5) muestra la evolución de las pérdidas y ganancias de la estrategia al variar el precio del subyacente desde 35000USD a 55000USD.

Figura 5: Representación del perfil de PyG de estrategia cono  $T = 30$  días.



Fuente: elaboración propia.

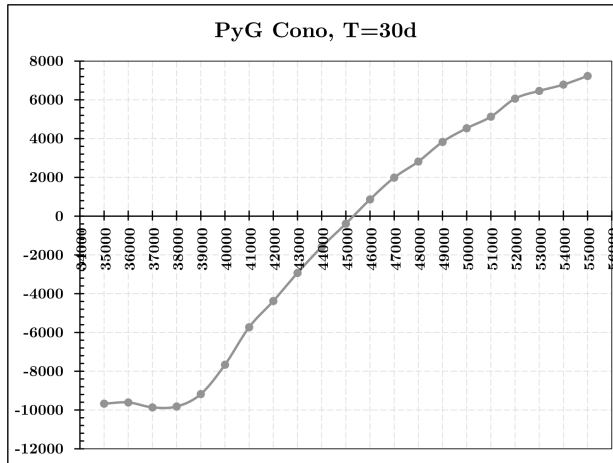
Cuadro 4: Perfil de pérdidas y ganancias de estrategia cono con  $T = 30$  días.

$X$	PyG Call largo	PyG Put largo	PyG estrategia cono
35000	-4218.71	8569.35	4350.63
36000	-4218.71	7569.35	3350.63
37000	-4218.71	6569.35	2350.63
38000	-4218.71	5569.35	1350.63
39000	-4218.71	4569.35	350.63
40000	-4218.71	3569.35	-649.37
41000	-4218.71	2569.35	-1649.37
42000	-4218.71	1569.35	-2649.37
43000	-4218.71	569.35	-3649.37
44000	-4218.71	-430.65	-4649.37
45000	-4218.71	-1430.65	-5649.37
46000	-4218.71	-2430.65	-6649.37
47000	-3218.71	-2430.65	-5649.37
48000	-2218.71	-2430.65	-4649.37
49000	-1218.71	-2430.65	-3649.37
50000	-218.71	-2430.65	-2649.37
51000	781.29	-2430.65	-1649.37
52000	1781.29	-2430.65	-649.37
53000	2781.29	-2430.65	350.63
54000	3781.29	-2430.65	1350.63
55000	4781.29	-2430.65	2350.63
38483.125	-4218.71	5086.22	867.51

Fuente: elaboración propia

La gráfica (6) muestra las pérdidas y ganancias efectivas para todos los precios del  $X_t$  y  $K$  para el plazo de  $T = 30$  días, como se observa a partir de  $K = 46000$  se comienza a tener ganancias para todos los precios de ejercicio siguientes, lo que indica que la estrategia como tuvo éxito.

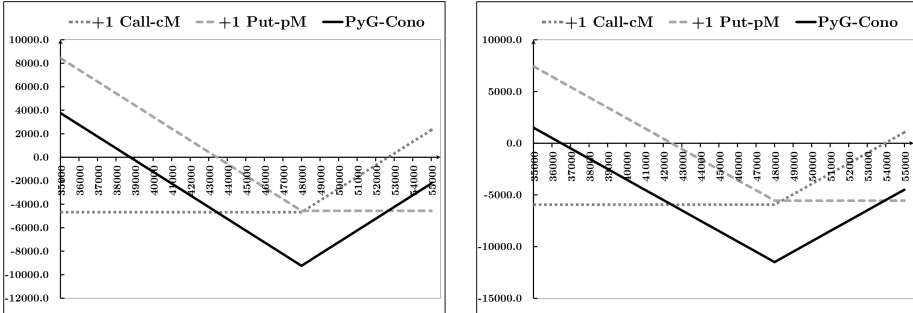
Figura 6: Representación de PyG para todo  $X_t$  a  $T = 30$  días.



Fuente: elaboración propia.

Posteriormente al hacer los perfiles de pérdidas y ganancias para los plazos de  $T = 60$  días y de  $T = 90$  días se obtuvieron pérdidas para todos los precios de ejercicio y del subyacente considerados con la estrategia. Una explicación de estos resultados es que el precio del BTCUSD no tuvo variaciones significativas para que la estrategia presentara ganancias, ya que al plazo de  $T = 60$  que corresponde al día 02/03/2022 el precio del BTCUSD cerró en 43924.117USD, mientras que al plazo de  $T = 90$  días que corresponde al día 01/04/2022 cerró en 46281.645 USD, que están muy cerca del precio inicial de 47686.813USD considerado para generar los precios de las opciones de compra y de venta por simulación Monte Carlo. A manera de ejemplificar para un precio de ejercicio  $K = 48000$  a plazo de 60 días la pérdida fue de -5162USD, mientras que a un plazo de 90 días con  $K = 48000$  la pérdida fue de -9775.25USD, la figura (7) muestra el perfil de pérdidas y ganancias para los precios de ejercicio anteriores:

Figura 7: Perfil de pérdidas y ganancias para  $T = 60$  y  $T = 90$  con  $K = 48000$ .



((a)) Perfil de PyG para  $T = 60$  días.

((b)) Perfil de PyG para  $T = 90$  días.

Fuente: elaboración propia.

## 4 Conclusiones

La dinámica de los mercados financieros durante la última década ha demostrado que el modelo de Black y Scholes no refleja de manera confiable varios fenómenos atípicos que se presentan en tales mercados. Como resultado, el modelo de Black y Scholes se debe mejorar para incluir tanto un proceso de salto como uno de difusión para que se capturen los “saltos” en el mercado. Por ejemplo, el mercado de criptomonedas uno de los saltos más representativos en el mercado de las criptomonedas fue la caída en -2941USD el día 12/03/2020 en el precio del BTCUSD durante la crisis del COVID 19, un alza de 7293 USD el 08/02/2021 o más reciente una caída de -5483.45 USD el 28/02/2022. Lo anterior hace evidente que el movimiento browniano estándar incluido en el modelo de Black y Scholes no tiene la capacidad de modelar tales cambios tan significativos e inmediatos en el precio de ese activo u otros. Ha habido muchos casos como los anteriores en los que el mercado ha presentado alzas o bajas extraordinarias en un corto período de tiempo. Estos hechos ilustran la necesidad de una mejora del modelo de Black y Scholes y considerar otros modelos como el de difusión con saltos de Merton.

El fenómeno de las criptomonedas ha ganado mucha atención desde la introducción de Bitcoin en 2008. La relevancia de tal fenómeno se ha atribuido a sus características distintivas, ya que utiliza la tecnología de blockchain que lo diferencia de las clases de activos tradicionales [15]. Desde un enfoque

de cobertura con opciones sobre el bitcoin y la evidencia empírica que se desprende de este trabajo, se afirma que es deseable analizar en el corto plazo, la conveniencia de los posibles beneficios de diversificación al incorporar una criptomoneda como el BTCUSD en un portafolio, con el objetivo de protegerse contra los riesgos de un deterioro inesperado en el valor de las inversiones debido a choques exógenos como pueden ser el COVID-19, conflictos bélicos, altos niveles de inflación generalizados y así sucesivamente.

En el presente capítulo se ha desarrollado un metodología sustentada en conceptos financieros y computacionales, con el objetivo de que un agente que participa en el mercado de criptomonedas cuente con una alternativa para implementar una estrategia de cobertura con opciones sobre el BTCUSD. Los precios de opciones de compra y de venta se obtienen mediante simulación Monte carlo con el modelo de difusión con saltos de Merton 1976, calibrado por máxima verosimilitud de acuerdo con [17], la muestra comprende precios en dólares americanos (USD) del BTCUSD desde el 01/01/2020 hasta el 01/01/2022 con un total de 732 observaciones. Con los precios de opciones de compra y de venta obtenidos se generaron estrategias de volatilidad con un cono, el cual se forma a partir de una posición larga en una opción de compra y una posición larga en una opción de venta, ambas opciones con igual precio de ejercicio y fecha de vencimiento. Se consideran tres vencimientos: 30, 60 y 90 días. Se parte de un precio inicial del BTCUSD de 47686.813USD para el 01/01/2022 para ejecutar la simulación Monte Carlo. Al término de cada vencimiento se compara el precio que tuvo el subyacente con el cono, es decir, se calcula la pérdida o ganancia al restarle a la función de pérdidas y ganancias del call largo la prima obtenida con el modelo de Merton:  $\max(X_T - K, 0) - c_M$  y lo mismo para el put largo:  $\max(K - X_T, 0) - p_M$  lo que resulte de esas operaciones se suma, si es positivo significa una ganancia en la estrategia cono y en caso contrario una pérdida. El análisis de los resultados de la estrategia indica que se obtienen ganancias para inversiones a 30 días para un precio de ejercicio de 46000USD, debido a que en ese plazo el BTCUSD tiene un retroceso notable de 47686.8125 USD el 01/01/2022 a 38483.125 USD el 31/01/2022 generando una ganancia de 867.51USD. No obstante, esta estrategia no es adecuada para inversiones a 60 y 90 días, puesto que en ambos plazos se obtuvieron pérdidas, una causa de tales pérdidas se debe a que el precio del BTCUSD no tuvo variaciones significativas para que la estrategia cono fuera exitosa a esos plazos.

## Agradecimientos

El presente trabajo ha sido apoyado por el proyecto de investigación: ‘*Riesgo y cobertura con Bitcoin: estrategias con opciones y difusión con saltos*’ con clave SIP-20211400, de la Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional. De la misma manera, los autores agradecemos a los árbitros sus valiosas observaciones y recomendaciones.

## Bibliografía

- [1] Arreola, J. (2017, junio) Criptomonedas: ¿qué son y por qué importan?. Forbes, México. <https://www.forbes.com.mx/criptomonedas-que-son-y-por-que-importan/>
- [2] Black, F. y M. Scholes, (1973). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, The Journal of Political Economy, **81**(3), 637–654. <https://doi.org/10.1086/260062>
- [3] Climent Hernández, J. A., Hernández Bautista Luz M. y Ortiz-Ramírez A. (2020). Determinación del spread asociado a deuda corporativa con el modelo de difusión con saltos de Merton, en Matemáticas y sus Aplicaciones 15, capítulo 5, 103-127, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, F.C F.M.
- [4] Delbaen, F. y Schachermayer, W. (2004). The Mathematics of Arbitrage. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-31299-4>
- [5] Flori, A. (2019). Cryptocurrencies in finance: review and applications, International Journal of Theoretical and Applied Finance, **22** (05), 21-22. doi: 10.1142/S0219024919500201
- [6] Frers, J. (03/04/2021). Cómo están reguladas las criptomonedas en distintas partes del mundo. Obtenido de Columnistas: <https://www.cronista.com/columnistas/bitcoin-y-criptomonedas-como-es-la-regulacion-en-el-mundo/>



- [7] Gugole, N. (2016). *Merton jump-diffusion model versus the Black and Scholes approach for the log-returns and volatility smile fitting*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, **109**(3), 719-736. doi: 10.12732/ijpam.v109i3.19
- [8] Hirsa, A., Neftci, S.N., 2013. Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives, third ed. Academic Press, New York, NY.
- [9] Letho, L., Chelwa, G. y Alhassan, A.L. (2022), Cryptocurrencies and portfolio diversification in an emerging market, China Finance Review International, **12** (1), pp. 20-50. <https://doi.org/10.1108/CFRI-06-2021-0123>
- [10] López-Herrera, F., Macías Trejo, L.G., de la Torre Torres, O. V., (2020). Desempeño de ocho de las criptomonedas de mayor capitalización de mercado, **10** (1), pp. 103-126. <http://estocastica.azc.uam.mx/index.php/re/article/view/131/181>
- [11] Merton, R. C. *Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics, **4**(1) (1973), 141–183.
- [12] Merton, R. C. *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*, Journal of Financial Economics, **3**(1-2) (1976), 125–144. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(76\)90022-2](https://doi.org/10.1016/0304-405X(76)90022-2)
- [13] Merton, R. C. *On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates*, The Journal of Finance, **29**(2) (1974), 449–470. doi:10.2307/2978814
- [14] Mota Aragón, B., & Núñez Mora, J. (2019). Estimación de la distribución multivariada de los rendimientos de los tipos de cambio contra el dólar de las criptomonedas Bitcoin, Ripple y Ether. Revista Mexicana de Economía y Finanzas Nueva Época REMEF, , **14**(3), 447-457. doi: <https://doi.org/10.21919/remef.v14i3.409>
- [15] Nakamoto, S. (2009) Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System, bitcoin.org. Consultado el 21 de noviembre de 2021. <https://bitcoin.org/bitcoin.pdf>

- [16] PRODECON (2021). Ingresos obtenidos relacionados con CRIPTOMONEDAS, disponible en: <https://www.prodecon.gob.mx/Documentos/bannerPrincipal/2021/CRIPTOMONEDAS.pdf>
- [17] Rémillard, B. (2013). *Statistical Methods for Financial Engineering*. First edition. USA: CRC Press Taylor Francis Group.
- [18] Reyes, E. (2021, abril). El mercado de criptomonedas creció 300 % en 2020. Expansión <https://expansion.mx/tecnologia/2021/04/15/el-mercado-de-criptomonedas>
- [19] Ross, M. S. (2012). *Simulation*. Academic Press, 5a. edición, USA. <https://doi.org/10.1016/C2011-0-04574-X>
- [20] Tankov, P. (2004). *Financial modelling with Jump Processes*, first edition, Chapman and Hall/CRC Press, London.
- [21] Venegas-Martínez, F. (2001). *Opciones cobertura y procesos de difusión con saltos: una aplicación a los títulos de GCARSO*. Estudios Económicos, **16** (2), 203–226.
- [22] Venegas-Martínez, F., *Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Segunda edición, Cengage, México (2008).

Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional  
Plan de Agua Prieta no. 66, Col. Plutarco Elías Calles, Alcaldía Miguel Hidalgo  
Ciudad de México, C.P. 11340

ajimenezp@ipn.mx  
mmartinezpa@ipn.mx  
amortiz@ipn.mx



---

# Topología

---



## Capítulo 4

# Continuos $\frac{1}{n}$ -homogéneos con tamaño menor que $n$

Felipe de Jesús Aguilar Romero, Patricia Domínguez Soto, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero  
FCFM, BUAP

### Resumen

Sea  $X$  un continuo métrico y  $p \in X$ , se define  $C(p, X)$  como el hiperespacio de todos los subcontinuos de  $X$  que contienen al punto  $p$ . En el presente trabajo se estudia el hiperespacio  $K(X) = \{C(p, X) : p \in X\}$  y la relación entre el grado de homogeneidad de  $X$  y el tamaño de  $K(X)$ . Se construye una familia de gráficas finitas  $Y_n$  para las cuales el grado de homogeneidad y el tamaño de  $K(Y_n)$  son distintos.

## 1 Introducción

Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.

Dado un continuo  $X$ , el hiperespacio de  $X$  es una colección específica de subconjuntos de  $X$ . Los hiperespacios más conocidos son los siguientes:

$$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es cerrado}\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$

La familia  $2^X$  es llamada hiperespacio de los subconjuntos cerrados de  $X$ , y  $C(X)$  es el hiperespacio de los subcontinuos de  $X$ . En este trabajo utilizaremos también los siguientes hiperespacios; sean  $A \in C(X)$  y  $p \in X$ ,

$$C(A, X) = \{B \in C(X) : A \subset B\},$$

$$C(p, X) = \{B \in C(X) : p \in B\},$$

$$K(X) = \{C(p, X) : p \in X\}.$$

$K(X)$  fue introducido por Patricia Pellicer Covarrubias en el artículo [11]. En la sección 5 se presenta una relación entre el grado de homogeneidad de un continuo  $X$ , con el tamaño de  $K(X)$ , véase el teorema 4.6. Finalmente, en la sección 6 se muestra que para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe una gráfica finita  $Y_n$ , cuyo tamaño de  $K(Y_n)$  es menor a  $n$ , véase el teorema 5.12.

## 2 Preliminares

Dado un continuo  $X$  denotaremos por  $d$  a la métrica de  $X$ . Dado  $a \in X$  y  $\varepsilon > 0$ , la bola con centro en  $a$  y de radio  $\varepsilon$ , se denota por  $B_d(a, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon\}$ . Para cualquier  $A \subset X$  y  $\delta > 0$  definimos la **nube** de radio  $\delta$  al rededor de  $A$ , como  $N_d(A, \delta) = \bigcup_{a \in A} B_d(a, \delta)$ . La métrica  $d$  en  $X$  induce una métrica en  $2^X$ , que es la métrica de Hausdorff, que se define de la siguiente manera:  $H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N_d(B, \varepsilon) \text{ y } B \subset N_d(A, \varepsilon)\}$ , con  $A, B \in 2^X$ .

Dado un continuo  $X$ , en [6, Corolario 14.10] se demostró que  $(2^X, H)$  y  $(C(X), H)$  son continuos, así podemos hablar de hiperespacios de  $2^X$ . Será de nuestro interés la colección de subconjuntos cerrados no vacíos en  $2^X$ , que denotaremos por  $2^{2^X}$ . Para  $(2^X, H)$ , tenemos el hiperespacio  $(2^{2^X}, H_2)$ , donde  $H_2$  es la métrica de Hausdorff en  $2^{2^X}$  inducida por  $H$ . Se sabe que si  $p \in X$ , entonces  $C(p, X)$  es un continuo, así  $K(X) \subset 2^{2^X}$ . Decimos que  $X \approx Y$  cuando  $X$  es homeomorfo a  $Y$ . En este trabajo  $\mathbb{R}^n$  se considera con la topología euclidiana y por ende todos sus subespacios.

**Definición 2.1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\{A_i\}_{i=1}^\infty$  una sucesión de subconjuntos de  $X$ . Se define el **límite inferior** y **límite superior** de  $\{A_i\}$  de la siguiente manera:

$$\liminf A_i = \{x \in X : \text{Para cada abierto } U \text{ que contenga a } x, U \cap A_i \neq \emptyset \text{ para toda } i \in \mathbb{N} \text{ excepto para un número finito}\};$$

$$\limsup A_i = \{x \in X : \text{Para cada abierto } U \text{ que contenga a } x, U \cap A_i \neq \emptyset \text{ para un número infinito de } i's\}.$$

Dado  $A \subset X$  decimos que  $A = \lim A_i$ , si  $\lim inf A_i = A = \lim sup A_i$ .

**Definición 2.2.** Sea  $X$  un continuo y  $A$  un subconjunto de  $X$ . Se define el hiperespacio  $K(A, X) = \{C(p, X) : p \in A\}$  y se denota  $K(X, X)$  por  $K(X)$ .

**Definición 2.3.** Sea  $X$  un continuo y  $A \subset X$ , se define la función  $\tau_A : A \rightarrow K(A, X)$  por  $\tau_A(p) = C(p, X)$ . Si  $A = X$  denotamos  $\tau_X$  por  $\tau$ .

Algunas propiedades inmediatas de la definición son las siguientes.

**Teorema 2.4.** *Si  $X$  es un continuo y  $A \subset X$ , entonces la función  $\tau_A$  es biyectiva.*

**Teorema 2.5.** *Si  $X$  es un continuo y  $A \subset X$ , entonces la función  $\tau_A^{-1} : K(A, X) \rightarrow A$  es continua.*

### 3 Propiedades de $K(X)$

En esta sección, se exponen algunas condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir un continuo  $X$  para que  $K(X)$  sea compacto. Además, se da un continuo  $X$  para el cual  $K(X)$  no es compacto. Para ello definiremos la propiedad de Kelley. También se estudia la conexidad de este hiperespacio, dando una condición necesaria para que  $K(X)$  sea conexo.

#### Compacidad de $K(X)$

En esta sección, se exponen algunas condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir un continuo  $X$  para que  $K(X)$  sea compacto. Además, se da un continuo  $X$  para el cual  $K(X)$  no es compacto. Para ello definiremos la propiedad de Kelley.

**Definición 3.1.** Sea  $X$  un continuo y  $x \in X$ . Decimos que  $X$  tiene la **propiedad de Kelley** en  $x$ , si para toda sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$  que converge a  $x$  y para cada  $A \in C(x, X)$ , existe una sucesión  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(X)$  que converge a  $A$ , donde  $A_n \in C(x_n, X)$ .

El continuo  $X$  tiene la propiedad de Kelley, si  $X$  tienen la propiedad de Kelley en todos sus puntos.



El abanico armónico  $A_s$  es ejemplo de un continuo que tiene la propiedad de Kelley.

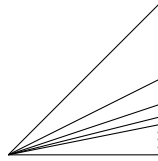


Figura 1: Abanico armónico.

Si al abanico armónico  $A_s$  se le pega un arco como en la figura 2, se obtiene un continuo  $A_{sa}$  que no tiene la propiedad de Kelley. A este nuevo continuo se le conoce como **abanico armónico con pata alargada**.

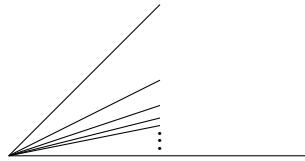


Figura 2: Abanico armónico con pata alargada.

El siguiente teorema da condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir  $X$  para que  $K(X)$  sea compacto.

**Teorema 3.2.** *Sea  $X$  un continuo. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1.  $K(X)$  es compacto;
2. La función  $\tau : X \rightarrow K(X)$  es continua;
3.  $X$  tiene la propiedad de Kelley;
4.  $X \approx K(X)$ .

**Ejemplo 3.3.** Existe un continuo  $X$  tal que  $K(X)$  no es compacto.

Consideraremos el abanico armónico con pata alargada  $A_{sa}$ , denotado por  $X$ . Sabemos que  $A_{sa}$  no tiene la propiedad de Kelley y  $K(X)$  no es compacto por el teorema 3.2. En conclusión si  $X$  es un continuo,  $K(X)$  no es necesariamente compacto y por lo tanto no es un continuo. Para poder dar más detalles de la compacidad de  $K(X)$ , es necesario agregar la hipótesis de que  $X$  sea localmente conexo, esto se trata en la siguiente sección.

## Conexidad de $K(X)$

En esta sección se da una condición necesaria para que  $K(X)$  sea conexo.

**Teorema 3.4.** *Si  $X$  es un continuo y  $B$  un subespacio localmente conexo de  $X$ , entonces la función  $\tau_B : B \rightarrow K(B, X)$  es continua.*

*Demostración.* Sea  $p \in B$  y  $\varepsilon > 0$ . Por ser  $B$  localmente conexo, podemos tomar  $U$  abierto y conexo, tal que  $p \in U \subset B$  y  $\text{diam}(U) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Veamos que

$$\tau_B(U) \subset B_{H_2}(\tau_B(p), \varepsilon).$$

Sean  $q \in U$ ,  $K \in C(p, X)$  y consideremos  $D = K \cup \text{cl}(U)$ . Es claro que  $D \in C(q, X)$ , además  $D \subset N(K, \varepsilon)$  y  $K \subset N(D, \varepsilon)$ , luego  $H(D, K) < \varepsilon$ , entonces  $C(p, X) \subset N_H(C(q, X), \varepsilon)$ . Dada  $L \in C(q, X)$  y tomando  $E = L \cup \text{cl}(U)$ , se cumple que  $E \subset N(L, \varepsilon)$  y  $L \subset N(E, \varepsilon)$ , por ende  $H(E, L) < \varepsilon$ . Como  $E \in C(p, X)$ , entonces  $C(q, X) \subset N_H(C(p, X), \varepsilon)$ . Finalmente, se tiene que  $H_2(\tau_B(q), \tau_B(p)) = H_2(C(q, X), C(p, X)) < \varepsilon$ . Así,  $\tau_B$  es continua.  $\square$

**Corolario 3.5.** *Si  $X$  es un continuo y  $B$  un subespacio localmente conexo de  $X$ , entonces  $B \approx K(B, X)$ . En particular,  $K(B, X)$  es localmente conexo.*

*Demostración.*  $\tau_A$  es biyectiva por el teorema 2.4,  $\tau_A^{-1}$  es continua por el teorema 2.5 y finalmente  $\tau_B$  es continua por el teorema 3.4. Por lo tanto  $B \approx K(B, X)$ .  $\square$

**Corolario 3.6.** *Si  $X$  es un continuo localmente conexo, entonces  $K(X)$  es conexo y localmente conexo.*

*Demostración.* En este caso  $X \approx K(X)$ .  $\square$

**Corolario 3.7.** *Sean  $X$  un continuo y  $A \in C(X)$ . Si  $A$  es localmente conexo, entonces  $K(A, X)$  es compacto.*

## 4 Tamaño y homogeneidad

En esta sección se presentan los conceptos de homogeneidad de un continuo  $X$  y el tamaño de  $K(X)$ , y se brinda una relación entre estos dos conceptos. Para ello note que, dado un continuo  $X$ , si dos elementos de  $K(X)$  son homeomorfos esto define una relación de equivalencia,  $\approx$ , en  $K(X)$ .

**Definición 4.1.** Sea  $X$  un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ , decimos que  $K(X)$  tiene **tamaño**  $n$ , si el espacio cociente  $K(X)/\approx$  tiene cardinalidad  $n$ .

**Lema 4.2.** Sean  $X, Y$  continuos,  $p \in X$  y  $f: X \rightarrow Y$  un homeomorfismo, entonces  $C(p, X) \approx C(f(p), Y)$

*Demostración.* Basta considerar la función  $C(f)_p: C(p, X) \rightarrow C(f(p), Y)$  tal que  $C(f)_p(A) = f(A)$ , ya que este es un homeomorfismo.  $\square$

**Definición 4.3.** Si  $Y$  es un conjunto y  $(G, \cdot)$  un grupo decimos que  $Y$  es un **G-conjunto** si existe una función (acción)  $\alpha_Y: G \times Y \rightarrow Y$  tal que:

1.  $\alpha_Y(Id, y) = y$  para cada  $y \in Y$ ,
2.  $\alpha_Y(f, \alpha(g, x)) = \alpha_Y(f \cdot g, x)$  para toda  $f, g \in G$  y  $y \in Y$ .

Sea  $X$  un continuo y  $\mathcal{H}(X) = \{f: X \rightarrow X : f \text{ es homeomorfismo}\}$ . Se cumple que  $(\mathcal{H}(X), \circ)$  es un grupo, donde  $\circ$  es la composición. El continuo  $X$  es un  $\mathcal{H}(X)$ -conjunto, con la acción  $\alpha_X: \mathcal{H}(X) \times X \rightarrow X$ ,  $\alpha_X(f, x) = f(x)$ .

**Definición 4.4.** Sea  $Y$  un  $G$ -conjunto. Dado  $y \in Y$  la **órbita** de  $y$  bajo la acción  $\alpha_Y$  es:

$$\mathcal{O}(y) = \{\alpha(f, y) : f \in G\} \subset Y.$$

Dado  $x \in X$  la órbita de  $x$  bajo la acción  $\alpha_X$  es  $\mathcal{O}(x) = \{f(x) : f \in \mathcal{H}(X)\}$ .

Las órbitas brindan una partición de  $X$ , esto define la siguiente relación de equivalencia:

$$x \equiv y \iff x \in \mathcal{O}(y) \quad (A).$$

(A) es una relación de equivalencia en  $X$ , donde las clases de equivalencia son las órbitas.

**Definición 4.5.** Dado un entero positivo  $n$ , decimos que el espacio  $X$  es  $\frac{1}{n}$ -**homogéneo**, si  $X$  tiene exactamente  $n$  órbitas distintas. De otra manera,  $X$  es  $\frac{1}{n}$ -homogéneo si la cardinalidad del espacio cociente  $X/\equiv$  es igual a  $n$ . Simplemente llamamos homogéneo al espacio 1-homogéneo.

Podemos afirmar que si  $y \in \mathcal{O}(x)$ , entonces  $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$ . Damos a continuación algunos ejemplos de estos espacios.

**Teorema 4.6.** Sean  $n, m \in \mathbb{N}$ . Si  $X$  es un continuo  $\frac{1}{n}$ -homogéneo y  $K(X)$  tiene tamaño  $m$ , entonces  $m \leq n$ .

*Demostración.* Supongamos que  $m > n$  y que  $C(x_1, X), C(x_2, X), \dots, C(x_m, X)$  son los  $m$  representantes de la clases de equivalencia. Supongamos que  $\mathcal{O}(x_i) = \mathcal{O}(x_j)$  para  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  con  $i \neq j$ , entonces existe  $f_i \in \mathcal{H}(X)$  tal que  $f_i(x_i) = x_j$ . Luego,  $C(f_i)|_{C(x_i, X)} : C(x_i, X) \rightarrow C(f(x_i), X)$  es un homeomorfismo por el lema 4.2. Así,  $C(x_i, X)$  es homeomorfo a  $C(x_j, X)$ , pero esto es una contradicción. Por lo tanto  $m \leq n$ . □

**Definición 4.7.** La **curva cerrada simple** es cualquier conjunto homeomorfo al subconjunto  $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ .

**Ejemplo 4.8.** La curva cerrada simple  $S^1$  es homogéneo y además  $K(S^1)$  tiene tamaño 1.

Haciendo uso del homeomorfismo de la rotación, se observa que todos los elemetos de  $S^1$  pertenecen a una misma órbita. Por lo tanto, dados dos puntos  $p, q \in X$  existe un homeomorfismo  $f : S^1 \rightarrow S^1$  tal que  $f(p) = q$  y por lo tanto  $C(f) : C(p, X) \rightarrow C(q, X)$  es un homeomorfismo, así  $K(S^1)$  tiene tamaño 1.

**Theorem 4.1.** Para una gráfica finita  $X$ , las siguientes condiciones son equivalentes:

1.  $K(X)$  tiene tamaño 1,
2.  $X$  es una curva cerrada simple,
3.  $X$  es homogéneo.

**Ejemplo 4.9.** Sea  $X$  un arco, entonces  $X$  es  $\frac{1}{2}$ -homogéneo y además  $K(X)$  tiene tamaño 2.

Basta probarlo para cuando  $X$  es el intervalo cerrado  $[0, 1]$ . Sea  $f \in \mathcal{H}([0, 1])$ , primero veamos que  $f(0), f(1) \in \{0, 1\}$ . Supongamos que  $f(0) \notin \{0, 1\}$ , así  $f(0) \in (0, 1)$ . Como  $f$  es sobreyectiva existen  $r, s \in (0, 1]$  con  $r \neq s$  tales que  $f(r) = 0$  y  $f(s) = 1$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $r < s$ . Definiendo la función  $h(x) = f(x) - f(0)$ , tenemos que  $h(r) < 0 < h(s)$ , por lo que existe  $c \in [r, s]$  tal que  $f(c) = f(0)$  y así  $c = 0$ , pero esto es una contradicción, por lo tanto,  $f(0) \in \{0, 1\}$ . De forma análoga se puede probar que  $f(1) \in \{0, 1\}$ . Así, tenemos que  $\mathcal{O}(0) = \{0, 1\} = \mathcal{O}(1)$ . Veamos ahora que  $\mathcal{O}(\frac{1}{2}) = \mathcal{O}(x)$ , para toda  $x \in (1, 0)$ . Sea  $y \in (0, 1)$ , podemos considerar que  $f_y : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  está definida por:

$$f_y(x) = \begin{cases} 2yx, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2(1-y)x + 2y - 1 & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Observe que  $f_y \in \mathcal{H}([0, 1])$  y además  $f_y(\frac{1}{2}) = y$ , es decir,  $y \in \mathcal{O}(\frac{1}{2})$ . Por lo tanto  $\mathcal{O}(y) = \mathcal{O}(\frac{1}{2})$ . Así, solo hay dos órbitas en  $[0, 1]$  que son  $\mathcal{O}(0)$  y  $\mathcal{O}(\frac{1}{2})$ , por lo tanto  $[0, 1]$  es  $\frac{1}{2}$ -homogéneo.

Por lo tanto, en  $K([0, 1]) / \approx$  solo hay dos clases de equivalencia, cuyos representantes son  $C(0, [0, 1])$  y  $C(\frac{1}{2})$ , así  $K([0, 1])$  tiene tamaño 2.

**Ejemplo 4.10.** El triodo simple  $T_3$  es  $\frac{1}{3}$ -homogéneo y  $K(T_3)$  es de tamaño 3, véase Figura 3

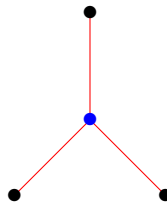


Figura 3: Triodo simple.

En [4] se estudia el caso en de las gráficas finitas con  $K(X)$  de tamaño igual que  $n$ .

## 5 Gráficas finitas con $K(X)$ de tamaño menor que $n$

El teorema 4.6 muestra que el grado de homogeneidad de un continuo  $X$  es una cota superior para el tamaño de  $K(X)$ . En esta sección se presenta una familia de gráficas finitas  $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ , las cuales cumplen que el tamaño de  $K(Y_n)$  es menor a  $n$  y que  $n$  coincide con el grado de homogeneidad de  $Y_n$ , véase el teorema 5.12. Antes definiremos el concepto de gráfica finita.

**Definición 5.1.** Un **arco** es cualquier conjunto homeomorfo al intervalo cerrado  $[0, 1]$ .

**Definición 5.2.** Un continuo  $X$  es una **gráfica finita** si se puede expresar como la unión de un número finito de arcos tales que, cada par de ellos son ajenos o se intersectan en uno o ambos puntos extremos. Cada arco que conforma a una gráfica finita le llamamos arista.

Para toda gráfica finita  $X$  consideramos la métrica  $d$ , dada por la “longitud de arco”, es decir, dados  $x, y \in X$ , la distancia de  $x$  a  $y$  será la longitud de la trayectoria más corta que conecta  $x$  con  $y$  en  $X$ . Se supondrá que la longitud de cada arista es igual a 1.

**Definición 5.3.** El  **$n$ -odo simple**, denotado por  $T_n$ , es un continuo que se construye uniendo  $n$  arcos que se intersectan dos a dos en un único punto llamado **vértice**, dicho vértice tiene que ser un punto extremo de cada uno de los  $n$  arcos y los otros puntos extremos de los arcos se llaman extremos del  $n$ -odo.

**Definición 5.4.** Dado  $X$  una gráfica finita,  $p \in X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , decimos que  $p$  es de **orden**  $n$  en  $X$ , denotado por  $ord(p, X) = n$ , si  $p$  tiene una vecindad cerrada que es homeomorfa a un  $n$ -odo simple que tiene a  $p$  como vértice.

Los puntos de orden 1 son puntos extremos, los de orden 2 son puntos ordinarios y los puntos de orden 3 o mayor son puntos de ramificación, estos se identifican con  $E(X)$ ,  $O(X)$  y  $R(X)$ , respectivamente. El conjunto de vertices de  $X$  se denota por  $V(X) = E(X) \cup O(X)$  y una arista será un arco cuyos puntos extremos son vértices.

**Teorema 5.5.** *Sea  $X$  una grafica finita, entonces  $K(X)$  es un continuo.*

*Demostración.* Se sabe por [8, Proposición 9.4] que una gráfica finita es localmente conexa, entonces por los teoremas 3.7 y 3.5 de la sección anterior se cumple que  $K(X)$  es un continuo.  $\square$

Del teorema 4.1 podemos concluir, que no existe una gráfica finita que sea  $\frac{1}{2}$ -homogénea cuyo tamaño de  $K(X)$  se igual a uno.

**Teorema 5.6.** Sean  $X, Y$  gráficas finitas y  $p \in X, q \in Y$  tales que  $C(p, X) \approx C(q, Y)$ , entonces  $ord(p, X) = ord(q, Y)$ .

El teorema anterior asegura que en una grafica finita  $X$ , dados  $p, q \in X$  tales que  $C(p, X) \approx C(q, X)$ , se cumple lo siguiente:

1. Si  $p \in E(X)$ , entonces  $q \in E(X)$ .
2. Si  $p \in O(X)$ , entonces  $q \in O(X)$ .
3. Si  $p \in R(X)$ , entonces  $q \in R(X)$ .

**Definición 5.7.** Sea  $X$  una gráfica finita, que no es un arco. Si  $q \in E(X)$ , denotamos por  $v(q)$  al único punto en  $R(X)$  tal que la componente  $Q$  de  $X - \{v(q)\}$ , que contiene a  $q$ , satisface que  $Q \cup \{v(q)\}$  es un arco.

Un punto  $v(q)$  es el primer punto de ramificación que nos encontramos, si caminamos sobre la gráfica finita saliendo desde  $p$ , véase Figura 5.

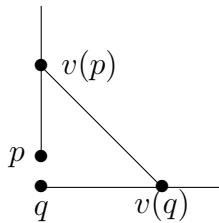


Figura 4: Puntos  $v(q)$  y  $v(p)$ .

**Teorema 5.8.** Sea  $X$  una gráfica finita distinta de un arco. Si  $e_1, e_2 \in E(X)$  y  $C(e_1, X) \approx C(e_2, X)$ , entonces  $ord(v(e_1), X) = ord(v(e_2), X)$ .

**Definición 5.9.** Sean  $X$  una gráfica finita,  $p \in O(X)$  y  $vw$  la arista de  $X$  que contiene a  $p$ , con  $v, w \in V(X)$ . Se define

$$\Sigma(p, X) = \begin{cases} \text{ord}(v, X) + \text{ord}(w, X), & \text{si } v \neq w, \\ \text{ord}(v, X), & \text{si } v = w. \end{cases}$$

**Teorema 5.10.** Sea  $X$  una gráfica finita. Si  $A$  es una arista de  $X$  y  $p \in O(X) \cap A$ , entonces existe  $\mathcal{A} \subset C(p, X)$  tal que  $\mathcal{A}$  esta contenido en una  $\Sigma(p, X) - \text{celda}$ .

**Teorema 5.11.** [5, Teorema 3.10] Sea  $X$  una gráfica finita. Si  $p, q \in O(X)$  y  $C(p, X) \approx C(q, X)$ , entonces  $\Sigma(p, X) = \Sigma(q, X)$ .

**Teorema 5.12.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe una gráfica finita  $X_n$  tal que es  $\frac{1}{n}$ -homogénea y  $K(X_n)$  tiene tamaño  $n$ .

Se definen los siguientes conjuntos en el plano euclideo  $\mathbb{R}^2$ , donde  $\|\cdot\|$  es la norma. Para  $n \in \mathbb{N}$  se definen los siguientes conjuntos:

1.  $I_n = [n - 1, n] \times \{0\}$ ;
2.  $J_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x - n, y - \frac{1}{4})\| = \frac{1}{4}\}$ ;
3.  $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x - 2, y - \frac{1}{8})\| = \frac{1}{8}\}$ ;
4. Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , consideramos a  $l_i^{(n)}$  como el segmento de recta que une a los puntos  $(n, 0)$  y  $(n - \frac{1}{i}, -1)$ ;
5. Si  $n \geq 3$ ,  $S_n = I_n \cup C_n \cup \bigcup_{i=1}^{2n} l_i^{(n)}$ .

Las Figuras 6, 7 y 8 muestran las gráficas finitas que serán la base para las gráficas que deseamos construir.



Figura 5:  $P_1 = I_2 \cup J_2 \cup J$  y  $P_2 = I_2 \cup J_1 \cup J_2 \cup J$ .



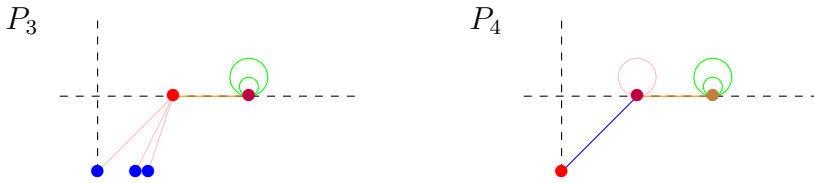


Figura 6:  $P_3 = P_1 \cup \bigcup_{i=1}^3 l_i^{(1)}$  y  $P_4 = P_2 \cup l_1^{(1)}$ .

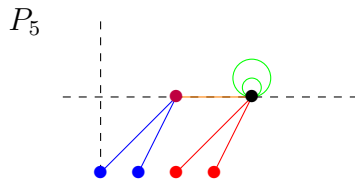


Figura 7:  $P_5 = P_1 \cup l_1^{(1)} \cup l_2^{(1)} \cup l_1^{(2)} \cup l_2^{(2)}$ .

En  $P_1$  los puntos en color azul y rojo definen dos órbitas en la que solo están esos puntos y por lo tanto su  $C(p, X)$  tiene un único representante, esto es claro por el teorema 5.6.

Los puntos en color naranja pertenecen a una misma órbita, según el teorema 5.6 podría ser posible que un punto naranja y un punto verde pertenezcan a la misma órbita, pero esto no es posible por el teorema 5.11. Así, los puntos naranjas definen una misma órbita, en la cual sus  $C(p, X)$  pertenecen a una misma clase.

Con argumentos análogos, los puntos en color verde pertenecen a una misma órbita y sus  $C(p, X)$  pertenecen a una misma clase. De esta manera  $P_1$  es  $\frac{1}{4}$ -homogéneo y  $K(P_1)$  tiene tamaño 4, esto ya que cada color define una órbita distinta y por los teoremas 5.6, 5.11 se prueba que cada color define una clase de equivalencia distinta en  $K(P_1)/\approx$ .

De manera similar al caso  $P_1$ , haciendo uso de los teoremas 5.6, 5.8 y 5.11, se prueba que  $P_i$  es  $\frac{1}{i+3}$ -homogéneo y que  $K(P_i)$  tiene tamaño  $i + 3$ ,

para  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Las gráficas finitas  $S_n$  juegan un papel importante en la construcción, por ello se presentan las gráficas de  $S_3$  y  $S_4$ , véase Figura 9.

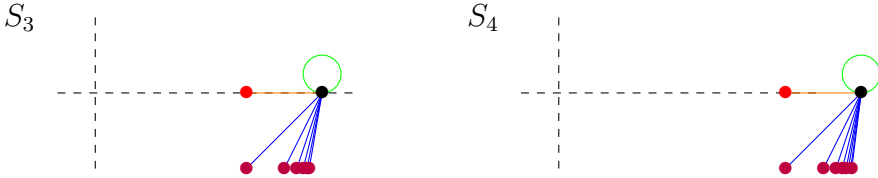


Figura 8:  $S_3$  y  $S_4$ .

Nuevamente utilizando los teoremas 5.6, 5.8, y 5.11, se prueba que  $S_3$  es  $\frac{1}{6}$ -homogéneo y que el tamaño de  $K(S_3)$  es 6, también que  $S_4$  es  $\frac{1}{6}$ -homogéneo y que el tamaño de  $K(S_4)$  es 6.

Para continuar con la exposición, debemos introducir un concepto nuevo.

**Definición 5.13.** Sean  $X$  un continuo y  $p, q \in X$ . Decimos que  $X$  es **pseudo-simétrico con respecto a  $p$  y  $q$** , si existe un homeomorfismo  $\varphi : C(p, X) \rightarrow C(q, X)$  tal que  $\varphi(\{p\}) = \{q\}$  y  $\varphi(X) = X$ .

**Teorema 5.14.** *Sea  $X$  un continuo. Si  $X$  es homogéneo, entonces  $X$  es pseudo-simétrico con respecto a cada par de sus puntos.*

*Demostración.* Sean  $p, q \in X$ , por ser  $X$  homogéneo existe  $f : X \rightarrow X$  un homeomorfismo tal que  $f(p) = q$ . Por el Lema 4.2, se cumple que  $C(f)_p : C(p, X) \rightarrow C(q, X)$  es un homeomorfismo, donde  $C(f)_p(A) = f(A)$ . Es claro que  $C(f)_p(\{p\}) = \{q\}$  y  $C(f)_p(X) = X$ .

□

La curva cerrada simple es homogénea, por lo que es pseudo-simétrico con respecto a cada par de sus puntos.

**Ejemplo 5.15.** El arco  $[0, 1]$  es pseudo-simétrico con respecto a 0 y 1.

Basta considerar el homeomorfismo  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , definido por  $f(x) = 1 - x$ . Tomando  $C(f)_0 : C(0, [0, 1]) \rightarrow C(1, [0, 1])$  por  $C(f)_0(A) = f(A)$  se cumple lo deseado.

**Definición 5.16.** Un continuo  $X$  es **descomponible**, si  $X$  puede ser puesto como la unión de dos subcontinuos propios. Diremos que  $X$  es **indescomponible**, si  $X$  no es descomponible.

**Definición 5.17.** Un continuo  $X$  es **hereditariamente descomponible (indescomponible)**, si cada uno de sus subcontinuos propios, no degenerados, es descomponible (indescomponible).

**Teorema 5.18.** [10, Lema 3.19] Sea  $X$  un continuo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1.  $X$  es hereditariamente indescomponible.
2.  $C(p, X)$  es un arco para cada  $p \in X$ .

**Teorema 5.19.** Sea  $X$  un continuo hereditariamente indescomponible, entonces  $X$  es pseudo-simétrico con respecto a cada par de sus puntos.

*Demostración.* Sean  $p, q \in X$ , por el Teorema 5.18, podemos tomar los siguientes homeomorfismos  $f_1 : C(p, X) \rightarrow [0, 1]$  y  $f_2 : [0, 1] \rightarrow C(q, X)$ . Tenemos que  $f_1(\{p\}) = a$ ,  $f_1(X) = b$  y  $f_2(c) = \{q\}$ ,  $f_2(d) = X$ , donde  $a, b, c, d \in [0, 1]$ . Supongamos, sin perder generalidad, que  $a < b$  y  $c < d$ . Se define la función  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{a}x, & \text{si } x \in [0, a], \\ \frac{d-c}{b-a}x + (c - \frac{d-c}{b-a}a), & \text{si } x \in (a, b], \\ \frac{1-d}{1-b}x + (d - \frac{1-d}{1-b}b), & \text{si } x \in (b, 1]. \end{cases}$$

Note que la función  $f$  es un homeomorfismo. Sea  $\varphi : C(p, X) \rightarrow C(q, X)$  dada por  $\varphi(A) = (f_2 \circ f \circ f_1)(A)$ . Se cumple que  $\varphi$  es un homeomorfismo, además  $\varphi(\{p\}) = (f_2 \circ f)(f_1(\{p\})) = (f_2 \circ f)(a) = f_2(f(a)) = f_2(c) = \{q\}$  y  $\varphi(X) = (f_2 \circ f)(f_1(X)) = (f_2 \circ f)(b) = f_2(f(b)) = f_2(d) = X$ . Por lo tanto,  $X$  es pseudo-simétrico con respecto de  $p$  y  $q$ . □

El siguiente teorema es fundamental para la construcción de la clase de gráficas finitas que deseamos exponer.

**Teorema 5.20.** Sean  $Y$  un continuo pseudo-simétrico con respecto a los puntos  $p$  y  $q$ , supongamos que la función  $\varphi$  cumple que, si  $A \in C(p, X) \cap C(q, X)$ , entonces  $\varphi(A) \in C(p, X) \cap C(q, X)$ . Sea  $X$  un continuo tal que  $X = LUY \cup K$ ,

donde  $L$  y  $K$  son continuos tales que  $L \cap Y = \{p\}$ ,  $K \cap Y = \{q\}$  y  $L \cap K = \emptyset$ . Supongamos que existe un homeomorfismo  $f : C(p, L) \rightarrow C(q, K)$  tal que  $f(\{p\}) = \{q\}$  y  $f(L) = K$ . Entonces,  $C(p, X)$  es homeomorfo a  $C(q, X)$ .

*Demostración.* Definamos la función  $g : C(Y, X) \rightarrow C(p, L) \times C(q, K)$  por  $g(A) = (A \cap L, A \cap K)$ . Veamos que  $g$  es inyectiva. Para esto, tomemos  $A, B \in C(Y, X)$  tales que  $A \neq B$  y, supongamos que  $g(A) = g(B)$ . De esto que  $A \cap L = B \cap L$  y  $A \cap K = B \cap K$ . Como  $A \neq B$  supongamos, sin perder generalidad, que existe  $a \in A$  tal que  $a \notin B$ , esto implica que  $a \in L$  o  $a \in K$ . Si  $a \in L$ , entonces  $a \in B \cap L$  y si  $a \in K$ , entonces  $a \in B \cap K$ , en ambos casos se llega a una contradicción. Por lo tanto,  $g(A) \neq g(B)$ .

Para ver que  $g$  es sobreyectiva basta ver que, dado  $(A, B) \in C(p, L) \times C(q, K)$  se cumple que,  $g(Y \cup A \cup B) = (A, B)$ .

Veamos que  $g$  es continua. Para ello, consideremos las funciones  $g_1 : C(Y, X) \rightarrow C(p, L)$ ,  $g_2 : C(Y, X) \rightarrow C(q, K)$  definidas por  $g_1(A) = A \cap L$  y  $g_2(A) = A \cap K$ . Sean  $A \in C(Y, X)$  y  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en  $C(Y, X)$  que converge a  $A$ , es decir,  $A_n \rightarrow A$ . Veamos que  $(A_n \cap L) \rightarrow A \cap L$ , sea  $x \in \sup(A_n \cap L)$ , luego, para cada  $U$  abierto que contenga a  $x$  se cumple que,  $U \cap (A_n \cap L) \neq \emptyset$  para un número infinito de  $n$ 's. Esto implica que  $x \in \sup A_n = \inf A_n = A$  y  $x \in cl(L) = L$ , por ende  $x \in A \cap L$ . Si  $x = p$ , es claro que  $x \in \inf(A_n \cap L)$ , cuando  $x \neq p$  se puede tomar  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \cap Y = \emptyset$  y  $B(x, r) \cap K = \emptyset$ , es decir,  $B(x, r) \subset L$ .

Luego, dado  $U$  un abierto de  $x$  se cumple que, existe  $r > r_0 > 0$  tal que  $B(x, r_0) \subset U$  y, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para cada  $n \geq n_0$  ocurre que  $B(x, r_0) \cap A_n \neq \emptyset$ . Como  $B(x, r_0) \subset U \cap L$  se tiene que,  $U \cap L \cap A_n \neq \emptyset$  para toda  $n \geq n_0$ , esto implica que  $x \in \inf(A_n \cap L)$ , por lo tanto  $(A_n \cap L)$  existe y, además,  $(A_n \cap L) \subset A \cap L$ , la contención  $A \cap L \subset (A_n \cap L)$  se obtiene con pasos similares, por lo tanto  $(A_n \cap L) = A \cap L$ .

Así,  $g_1$  es continua, con argumentos análogos se prueba que  $g_2$  es continua. Observe que  $g(A) = (g_1(A), g_2(A))$ , por lo tanto  $g$  es continua. Por ser  $C(Y, X)$  compacto se cumple que,  $g$  es un homeomorfismo.

Como  $Y$  pseudo-simétrico con respecto a  $p$  y  $q$ , existe  $\varphi : C(p, Y) \rightarrow C(q, Y)$  tal que  $\varphi(\{p\}) = \{q\}$ ,  $\varphi(Y) = Y$  y, por hipótesis, para cada  $A \in C(p, X) \cap C(q, X)$  se cumple que  $\varphi(A) \in C(p, X) \cap C(q, X)$ . También, por hipótesis, existe un homeomorfismo  $f : C(p, L) \rightarrow C(q, K)$  tal que  $f(\{p\}) =$

$\{q\}$  y  $f(L) = K$ . Se define la función  $h : C(p, X) \rightarrow C(q, X)$  por:

$$h(A) = \begin{cases} \varphi(A \cap Y) \cup f(A \cap L) \cup f^{-1}(A \cap K), & \text{si } A \notin C(Y, X), \\ g^{-1}(f^{-1}(A \cap K), f(A \cap L)), & \text{si } A \in C(Y, X). \end{cases}$$

Por ser  $f, g, \varphi$  homeomorfismos se cumple que,  $h$  también es un homeomorfismo. Por lo tanto,  $C(p, X) \approx C(q, X)$  □

Con las hipótesis del teorema anterior, si añadimos que  $X$  es  $\frac{1}{n}$ -homogéneo y que,  $p, q$  pertenecen a diferentes órbitas en  $X/\cong$ , se tiene que el tamaño de  $K(X)$  es menor que  $n$ .

**Ejemplo 5.21.** Consideremos la siguiente gráfica finita  $X$ ,

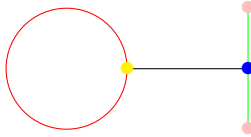


Figura 9: Gráfica de  $X$ .

Esta gráfica finita es  $\frac{1}{6}$ - homogénea. Sin embargo, veamos que  $K(X)$  tiene tamaño 5.

En  $X$  tenemos las siguientes órbitas:

- Los puntos sobre la circunferencia en color rojo, forman la órbita  $\mathcal{O}(x_1)$ .
- Los puntos sobre el segmento color negro, forman la órbita  $\mathcal{O}(x_2)$ .
- Los puntos sobre el segmento color verde, forman la órbita  $\mathcal{O}(x_3)$ .
- Los puntos en color rosa forman la órbita  $\mathcal{O}(x_4)$ . Los puntos en color amarillo y azul forman las órbitas  $\mathcal{O}(x_5)$  y  $\mathcal{O}(x_6)$  respectivamente.

El continuo  $X$  del Ejemplo 5.21, es pseudo-simétrico con respecto a los puntos extremos  $(1, 1)$  y  $(1, -1)$ .

Esta gráfica finita es  $\frac{1}{6}$ - homogénea. Por el Ejemplo 5.15,  $L$  es pseudo-simétrico con respecto a los puntos  $p = (-1, 0)$  y  $q = (1, 0)$ . Veamos que existe  $f : C(p, S) \rightarrow C(q, J)$  tal que  $f(\{p\}) = \{q\}$  y  $f(S) = J$ . De los Teoremas

?? y ??, se tiene, que existen dos homeomorfismos  $f_1 : C(p, S) \rightarrow [0, 1]^2$ ,  $f_2 : [0, 1]^2 \rightarrow C(q, J)$  tales que  $f_1(S) = [0, 1]^2$  y  $f_2([0, 1]^2) = J$ . Además,  $f_1(\{p\}) = (0, 0)$  y  $f_2(0, 0) = \{q\}$ . Considerando el homeomorfismo identidad  $id : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$  y  $f = f_2 \circ id \circ f_1$  se cumple lo deseado. Con esto, es claro que se cumplen todas la hipótesis del Teorema 5.20, por lo que  $C(p, X)$  es homeomorfo a  $C(q, X)$ . Aplicando los Teoremas 5.6, 5.8 y 5.11, se verifica que  $K(X)$  tiene tamaño 5.

Lo siguiente será construir una familia de gráficas finitas  $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$  tales que, el tamaño de  $K(Y_n)$  sea menor al grado de homogeneidad de  $Y_n$ . Consideremos las siguientes gráficas finitas.

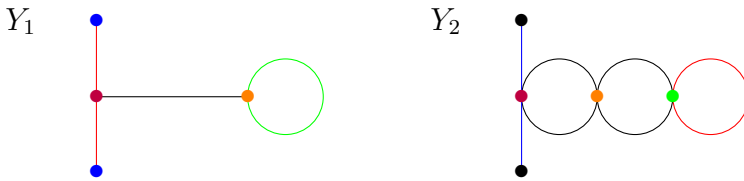


Figura 10:  $Y_1$  y  $Y_2$ .

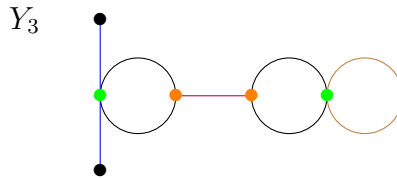


Figura 11:  $Y_3$ .

Note que  $Y_1$  es la gráfica finita presentada en el Ejemplo 5.21, por lo que  $Y_1$  es  $\frac{1}{6}$ -homogéneo y,  $K(Y_1)$  tiene tamaño 5.

Con argumentos similares al anterior, se puede ver que  $Y_2$  es  $\frac{1}{7}$ -homogéneo y,  $K(Y_2)$  tiene tamaño 6, a su vez  $Y_3$  será  $\frac{1}{8}$ -homogéneo y,  $K(Y_3)$  tiene tamaño 7.

La idea para construir las gráficas para  $n \geq 4$ , es usar el Teorema 5.20, "pegando" dos continuos ajenos  $L$  y  $K$ , en un continuo  $Y$ , que sea pseudo-simétrico con respecto a los puntos  $p$  y  $q$ , que satisfaga las hipótesis del

Teorema 5.20, tales que  $C(p, L)$  y  $C(q, K)$  son homeomorfos, pero de tal manera que no exista un homeomorfismo entre  $L$  y  $K$  que mande  $p$  en  $q$ , esto último para que el grado de homogeneidad de  $X = L \cup Y \cup K$  sea extrínsecamente mayor que el tamaño de  $K(X)$ .

Para ello, utilizaremos las gráficas finitas  $P_i$  previamente presentadas.

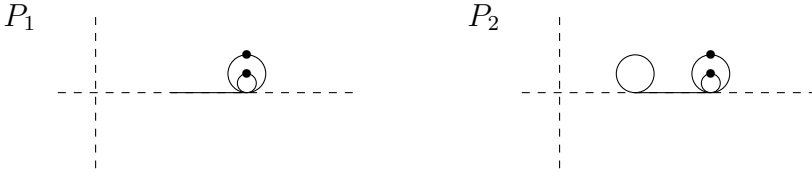


Figura 12:  $P_1 = I_2 \cup J_2 \cup J$  y  $P_2 = I_2 \cup J_1 \cup J_2 \cup J$ .

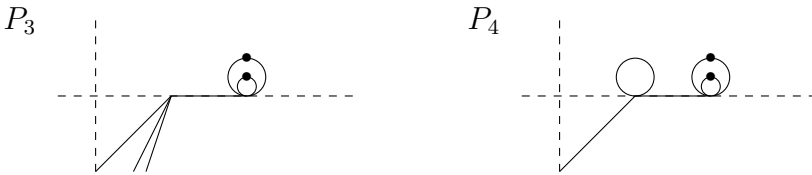


Figura 13:  $P_3 = P_1 \cup \bigcup_{i=1}^3 l_i^{(1)}$  y  $P_4 = P_2 \cup l_1^{(1)}$ .

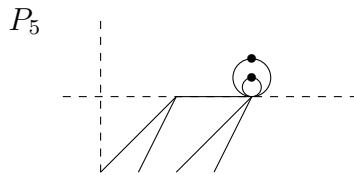


Figura 14:  $P_5 = P_1 \cup l_1^{(1)} \cup l_2^{(1)} \cup l_1^{(2)} \cup l_2^{(2)}$ .

Note que las gráficas finitas  $P_i$  son pseudo-simétricas respecto a  $p = (2, \frac{1}{2})$  y  $q = (2, \frac{1}{4})$ , además, cumplen con las hipótesis del Teorema 5.20.

Luego, unimos a cada  $P_i$  los continuos  $L = [1.8, 2.2] \times \{\frac{1}{4}\}$  en azul y,  $K$  en rojo, como el círculo con centro en  $(2, \frac{3}{4})$  y de radio  $\frac{1}{4}$ , obteniendo las gráficas finitas que se muestran a continuación.

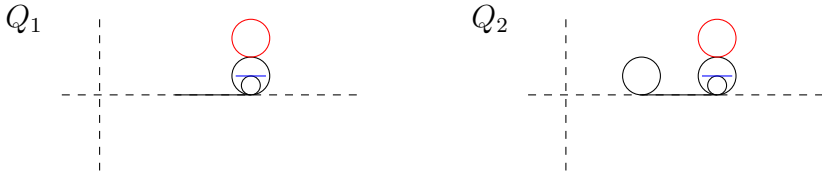


Figura 15:  $Q_1 = P_1 \cup L \cup K$  y  $Q_2 = P_2 \cup L \cup K$ .

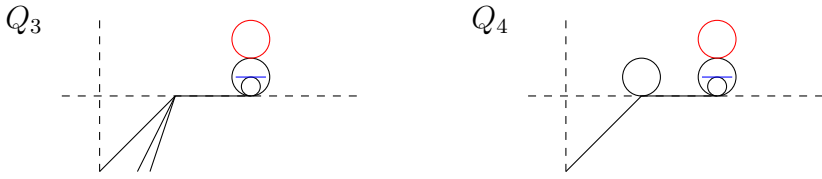


Figura 16:  $Q_3 = P_3 \cup L \cup K$  y  $Q_4 = P_4 \cup L \cup K$ .

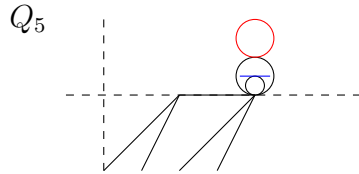


Figura 17:  $Q_5 = P_5 \cup L \cup K$ .

Por los Teoremas ?? y ??, existe  $f : C(p, L) \rightarrow C(q, K)$  un homeomorfismo tal que,  $f(\{p\}) = \{q\}$  y  $f(L) = K$ . Luego, por el Teorema 5.20,  $C(p, X)$  es homeomorfo a  $C(q, X)$ .

Haciendo uso de los Teoremas 5.6, 5.8, 5.11 y 5.20, se ve que  $Q_i$  es  $\frac{1}{i+8}$ -homogéneo y,  $K(Q_i)$  tiene tamaño  $i + 7$ .

Tomando como base estas gráficas finitas, se contruye de forma recursiva la familia  $Y_n$  para  $n \geq 4$ :

1. Para  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $Y_{i+3} = Q_i$ ,
2. Para cada  $n \geq 9$ , expresamos primero a  $n = 5(k + 1) + r$ , donde  $r \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ . Para después definir  $Y_n = Y_{5k+r} \cup S_{k+2}$ .



Las siguientes gráficas muestran las primeras cinco iteraciones del proceso de construcción:

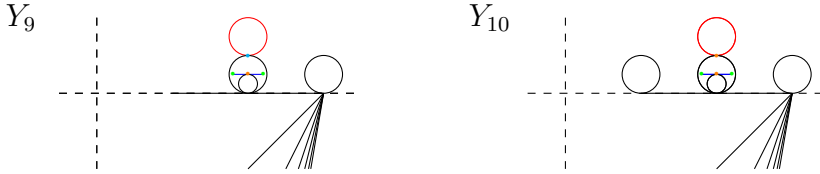


Figura 18:  $Y_9 = Q_1 \cup S_3$  y  $Y_{10} = Q_2 \cup S_3$ .

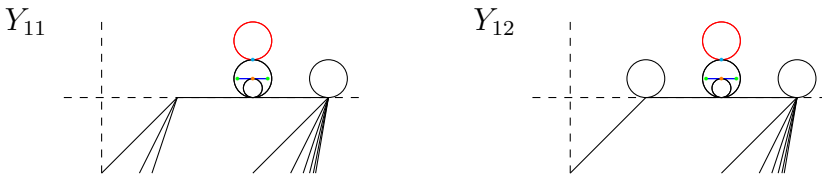


Figura 19:  $Y_{11} = Q_3 \cup S_3$  y  $Y_{12} = Q_4 \cup S_3$ .

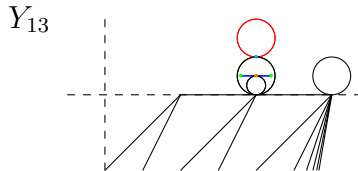


Figura 20:  $Y_{13} = Q_5 \cup S_3$ .

Las siguientes gráficas finitas muestran las 5 iteraciones posteriores de construcción:

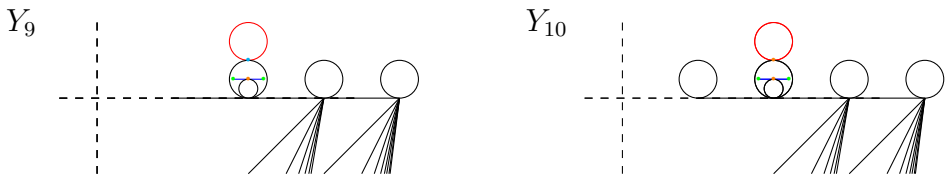


Figura 21:  $Y_9 = Q_1 \cup S_3$  y  $Y_{10} = Q_2 \cup S_3$ .

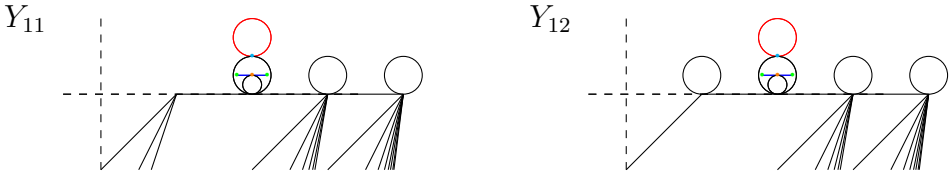


Figura 22:  $Y_{11} = Q_3 \cup S_3$  y  $Y_{12} = Q_4 \cup S_3$ .

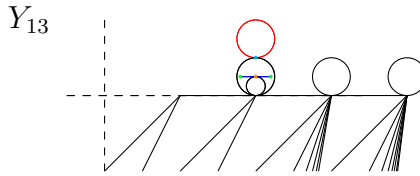


Figura 23:  $Y_{13} = Q_5 \cup S_3$ .

Las gráficas  $S_n$  aumentan en 5 el grado de homogeneidad y el tamaño. Por lo cual podemos enunciar el siguiente teorema:

**Teorema 5.22.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe una gráfica finita  $Y_n$  que es  $\frac{1}{n+5}$ -homogénea y  $K(Y_n)$  tiene tamaño  $n + 4$ .*

Recomendamos la lectura de las referencias [1] – [4] para conocimiento del lector y pueda ver la evolución de nuestras investigaciones las cuales tenemos plasmadas en este capítulo.

## 6 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar el capítulo.

## Bibliografía

- [1] Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Fernando Mauricio Rivera Vega «Progresiones aritméticas

- como base para algunos espacios topológicos (Capítulo 7)» Matemáticas y sus aplicaciones 11, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 135 – 148. Primera Edición 2019, ISBN: 978-607-525-615-3. Indautor: 03-2019-082010541400-01 Versión electrónica en <https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 26 de octubre de 2019.
- [2] Felipe de Jesús Aguilar Romero, *Dinámica en el intervalo y en su hiperespacio de compactos* (tesis de licenciatura FCFM). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México. (2019).
- [3] Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero, «Continuidad de la función wf en el intervalo  $[0,1]$  (Capítulo 7)» Matemáticas y sus aplicaciones 14, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 161 - 181. Primera Edición 2020, ISBN: 978-607-525-695-5. Versión electrónica en <https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 26 de octubre de 2020.
- [4] Felipe de Jesús Aguilar Romero, Patricia Dominguez Soto, David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero, *El hiperespacio  $K(X)$*  (Capítulo 7) Matemáticas y sus aplicaciones 16, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 147–171. Primera Edición 2021, ISBN: <https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 26 de octubre de 2021.
- [5] Florencio Corona Vázquez, Russel Arón Quiñones Estrella, Javier Sánchez Martínez, Hugo Villanueva, *Hyperspaces  $C(p,X)$  of finite graphs*, Topology and its Applications, 248 (2018), 44-49.
- [6] Alejandro Illanes y Sam B. Nadler Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker, New york, Basel (1999).
- [7] Sergio Macías, Topics on Continua, Second Edition, Springer, 2018, ISBN:978- 3-319-90901-1.

- [8] Sam B. Nadler Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, New York, Basel (1992).
- [9] Víctor Neumann Lara, Patricia Pellicer Covarrubias, Isabel Puga, *On  $\frac{1}{2}$ -homogeneous continua*, *Topology and its Applications*, 153 (2006) 2518-2527.
- [10] Patricia Pellicer Covarrubias, *The hyperspaces  $C(p, X)$* , *Topology and its Applications*, 27 (1) (2003) 259-285.
- [11] Patricia Pellicer Covarrubias, *The hyperspaces  $K(X)$* , *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 35 (2) (2005) 655-674.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

felipe.aguilarr@alumno.buap.mx

pdsoto@fcfm.buap.mx

dherrera@fcfm.buap.mx

fmacias@fcfm.buap.mx



## Capítulo 5

# La $\theta_m$ -gráfica tiene hiperespacio $n$ -ésimo producto simétrico suspensión único

David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz,  
Fernando Macías Romero, Germán Montero Rodríguez  
FCFM, BUAP

### Resumen

Un tema interesante en la teoría de los hiperespacios de continuos es la unicidad de hiperespacios de continuos. Sea  $m \in \mathbb{N}$  con  $m \geq 3$ . Una  $\theta_m$ -gráfica es la unión de  $m$  arcos  $E_1, \dots, E_m$  compartiendo los mismos puntos extremos  $u$  y  $v$  y que satisfacen que  $E_i \cap E_j = \{u, v\}$ , para cada  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ . En este trabajo se expone el resultado: sean  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 4$ . Si  $X$  es una  $\theta_m$ -gráfica, entonces  $X$  tiene hiperespacio  $n$ -ésimo producto simétrico suspensión único  $SF_n(X)$ .

## 1 Introducción

Uno de los temas que ha tomado auge en la rama de la Matemática conocida como Topología, específicamente en el área de Teoría de Continuos, es el de unicidad de hiperespacios de continuos.

Un *continuo* es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. El conjunto de los enteros positivos lo denotamos por  $\mathbb{N}$ .

Dado un continuo  $X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , los hiperespacios más conocidos de  $X$  son:

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : A \text{ es un subconjunto cerrado y no vacío de } X\}, \\ F_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\} \text{ y} \\ C_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}. \end{aligned}$$

Todos estos hiperespacios son considerados con la *métrica de Hausdorff*  $H$  [31, Teorema 2.2]. Note que  $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$ . El hiperespacio  $F_n(X)$

se llama *n-ésimo producto simétrico* de  $X$ .

En 1979 Sam B. Nadler, Jr. introdujo el *hiperespacio suspensión de un continuo*  $X$ ,  $HS_1^1(X)$  (véase [39]). Después en 2004, Sergio Macías introdujo el *n-ésimo hiperespacio suspensión de un continuo*  $X$ ,  $HS_n^n(X)$ , donde  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$  (véase [35]). Más aún, en 2008, Juan Carlos Macías introdujo el *n-ésimo pseudo-hiperespacio suspensión de un continuo*  $X$ ,  $HS_1^n(X)$  (véase [34]). El estudio del  $(n, m)$ -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo  $X$ ,  $HS_m^n(X)$ , donde  $n, m \in \mathbb{N}$ , y  $n \geq m$ , es una generalización y ha ganado interés recientemente (véase [5]).

El *n-ésimo producto simétrico suspensión de un continuo*  $X$  lo introdujo en el 2010 Franco Barragán Mendoza, considerado como el espacio cociente  $F_n(X)/F_1(X)$ , denotado por  $SF_n(X)$ , que se obtiene de  $F_n(X)$  al identificar a  $F_1(X)$  a un punto, con la topología cociente (véase [7]).

Para un continuo  $X$ , sea  $\mathcal{H}(X)$  cualquiera de los hiperespacios mencionados anteriormente. Decimos que  $X$  tiene *hiperespacio único*  $\mathcal{H}(X)$  si la siguiente implicación se cumple: si  $Y$  es un continuo y  $\mathcal{H}(X)$  es homeomorfo a  $\mathcal{H}(Y)$ , entonces  $X$  es homeomorfo a  $Y$ .

**Problema 1.1.** Encontrar condiciones para un continuo  $X$  que tenga hiperespacio único  $\mathcal{H}(X)$ .

El problema de encontrar condiciones para un continuo  $X$  que tenga hiperespacio único  $\mathcal{H}(X)$  ha sido ampliamente estudiado (véase [1]–[6], [8]–[30], [32], [35]–[38]).

En este trabajo nos vamos a centrar en un caso particular del Problema 1.1, para ser precisos:

**Problema 1.2.** Para  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$  encontrar condiciones para un continuo  $X$  que tenga hiperespacio único  $SF_n(X)$ .

Una *gráfica finita* es un continuo que se puede escribir como la unión finita de arcos de tal manera que sean ajenos o se intersectan en uno o en ambos puntos extremos.

En el caso particular de las gráficas finitas se conocen los siguientes resultados, todos estos teoremas tiene relación o responden al Problema 1.1:

- (a) Si  $X$  es una gráfica finita y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $F_n(X)$  (véase [8, Corolario 5.9]).

- (b) Si  $X$  es una gráfica finita distinto de un arco o de una curva cerrada simple, entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $C_1(X)$  (véase [1, Teorema 1] y [10, 9.1]).
- (c) Si  $X$  es una gráfica finita y  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$ , entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $C_n(X)$  (véase [27] y [28, Teorema 3.8]).
- (d) Si  $X$  es una gráfica finita y  $n, m \in \mathbb{N}$  con  $n \geq m$ , entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $HS_m^n(X)$  (véase [5, Teorema 3.6], [18, Teorema 3.2], y [38, Teorema 5.7]).

Sea  $m \in \mathbb{N}$  con  $m \geq 3$ . Una  $\theta_m$ -gráfica es la unión de  $m$  arcos  $E_1, \dots, E_m$  compartiendo los mismos puntos extremos  $u$  y  $v$  y que satisfacen que  $E_i \cap E_j = \{u, v\}$ , para cada  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ .

Con relación al Problema 1.2, el objetivo de este capítulo es exponer el resultado:

(e) Sean  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 4$ . Si  $X$  es una  $\theta_m$ -gráfica, entonces  $X$  tiene hiperespacio  $n$ -ésimo producto simétrico suspensión único (véase el Teorema 6.4).

Es de resaltar que el Teorema 6.4 es uno de los resultados importantes que contiene la tesis doctoral del cuarto autor Germán Montero Rodríguez [36] y, también plasmado en el artículo [37, Teorema 3.5].

## 2 Continuos e hiperespacios

A lo largo de este capítulo, si  $X$  es un espacio topológico y  $A$  un subconjunto de  $X$ , los símbolos  $\text{cl}_X(A)$ ,  $\text{bd}_X(A)$  e  $\text{int}_X(A)$  denotan la *cerradura* de  $A$ , la *frontera* de  $A$  y el *interior* de  $A$  en  $X$ , respectivamente. La cardinalidad de un conjunto  $A$  se representa por  $|A|$ . Como es usual, los símbolos  $\emptyset$ ,  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^2$ , representan el conjunto vacío, los números reales y el plano euclidiano, respectivamente.

Sean  $X$  un espacio topológico y  $p \in X$ ; un subconjunto  $V$  de  $X$  es una *vecindad* de  $p$  si existe un conjunto abierto  $U$  en  $X$  tal que  $p \in U \subset V$ .

Sean  $X$  un espacio métrico, con métrica  $d$ ,  $p \in X$ ,  $A \subset X$  y  $\varepsilon > 0$ . La *bola abierta* en  $X$  con centro en  $p$  y radio  $\varepsilon$  es el conjunto  $\{x \in X : d(p, x) < \varepsilon\}$ , se denota por  $B_X(p, \varepsilon)$  aunque escribimos  $B(p, \varepsilon)$  cuando no



podiera haber confusión. La *nube* de radio  $\varepsilon$  alrededor de  $A: \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon, \text{ para algún } a \in A\}$ , se denota por  $N_X(\varepsilon, A)$  aunque escribimos  $N(\varepsilon, A)$  cuando no pudiera haber confusión.

Sean  $X$  un espacio topológico y  $p \in X$ . El espacio  $X$  es *localmente conexo en  $p$*  si para cada conjunto abierto  $U$  en  $X$  tal que  $p \in U$ , existe un conjunto abierto y conexo  $V$  en  $X$  tal que  $p \in V \subset U$ . Si  $X$  es localmente conexo en cada uno de sus puntos decimos que  $X$  es *localmente conexo*.

Un *arco* es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado  $[0, 1]$ .

Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Consideramos que la métrica de  $\mathbb{R}^n$  es la euclídeana  $\|x\|_n$ . Una  *$n$ -celda* es un espacio topológico homeomorfo a la bola unitaria  $B_n(\mathbf{0}, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_n \leq 1\}$ . Una *curva cerrada simple* es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria  $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$ .

Un espacio topológico  $X$  es *arco-conexo*, si para cualesquiera  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ , existe un arco contenido en  $X$  que une a  $x$  y  $y$ . Sea  $X$  un espacio topológico. Si  $x \in X$ , el espacio  $X$  es *localmente arco-conexo en  $x$*  si para cualquier abierto  $U$  de  $X$  tal que  $x \in U$ , existe  $V$  abierto de  $X$  y arco-conexo tal que  $x \in V \subset U$ . El siguiente concepto se usará en el Teorema 4.8, el espacio  $X$  es *localmente arco-conexo* si es localmente arco-conexo en cada uno de sus puntos.

Dado un continuo  $X$ , los *hiperespacios* de un continuo  $X$  son clases de subconjuntos de  $X$  que cumplen cierta propiedad específica. Además de trabajar al hiperespacio de subconjuntos cerrados de  $X$ ,  $2^X$ , con la métrica de Hausdorff, se puede dotar de una topología.

Sean  $X$  un continuo,  $n, r \in \mathbb{N}$  y  $A_1, \dots, A_r$  subconjuntos no vacíos de  $X$ . El *vietórico* de  $A_1, \dots, A_r$ , denotado por  $\langle A_1, \dots, A_r \rangle$ , es el conjunto

$$\langle A_1, \dots, A_r \rangle_{2^X} \cap F_n(X),$$

donde  $\langle A_1, \dots, A_r \rangle_{2^X}$ , es el conjunto

$$\left\{ B \in 2^X : B \subset \bigcup_{i=1}^r A_i \text{ y } B \cap A_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \dots, r\} \right\}.$$

**Teorema 2.1.** [31, Teorema 1.2] *Si  $X$  es un continuo con una topología  $\tau$ , entonces la colección*

$$\{\langle S_1, \dots, S_r \rangle_{2^X} : S_i \in \tau \text{ para cada } i \in \{1, \dots, r\}, r \in \mathbb{N}\},$$

*es una base para la topología para  $2^X$ .*

La topología generada por la base mencionada en el Teorema 2.1 es conocida como la *topología de Vietoris*.

### 3 Resultados preliminares

En esta sección vamos a citar algunos resultados de continuos y sus hiperespacios que se han trabajado en este tema, con el fin de que los lectores jóvenes puedan tener una idea de las propiedades topológicas y sea de su interés la teoría de la unicidad de hiperespacios de continuos. Algunos de estos teoremas se encuentran demostrados en [23, Capítulo 1], también se le sugiere al lector ver la tesis doctoral de Montero Rodríguez [36].

Sean  $X$  un continuo,  $p \in X$  y  $\beta$  un número cardinal. Decimos que  $p$  tiene orden en  $X$  menor o igual a  $\beta$ , denotado por  $ord(p, X) \leq \beta$ , si  $p$  tiene una base de vecindades  $\mathfrak{B}$  en  $X$  tal que  $|bd_X(U)| \leq \beta$ , para cada  $U \in \mathfrak{B}$ . Decimos que  $p$  tiene orden en  $X$  igual a  $\beta$  ( $ord(p, X) = \beta$ ) si  $ord(p, X) \leq \beta$  y  $ord(p, X) \not\leq \alpha$  para todo número cardinal  $\alpha < \beta$ . Ahora, sean

$$E(X) = \{x \in X : ord(x, X) = 1\},$$

$$O(X) = \{x \in X : ord(x, X) = 2\} \text{ y}$$

$$R(X) = \{x \in X : ord(x, X) \geq 3\}.$$

Los elementos de  $E(X)$  (respectivamente,  $O(X)$  y  $R(X)$ ) son llamados *puntos extremos* (respectivamente, *puntos ordinarios* y *puntos de ramificación*) de  $X$ .

Sea  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n \geq 3$ . Un  $n$ -odo simple  $Y$  es la unión de  $n$  arcos  $L_1, \dots, L_n$  de  $Y$  tales que  $L_i \cap L_j = \{v\}$  si  $i \neq j$  y  $v$  es un punto extremo de los arcos  $L_i$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . El punto  $v$  es el *vértice* del  $n$ -odo simple  $Y$ . Un 3-odo simple es llamado *triado simple*.

Dada una gráfica finita  $X$ , un *ciclo* en  $X$  es una curva cerrada simple  $J$  en  $X$  tal que  $J - \{a\}$  es un subconjunto abierto de  $X$ , para algún  $a \in J$ . Un *arco libre* en  $X$  es un arco  $\alpha$  en  $X$  con puntos extremos  $p$  y  $q$  tales que  $\alpha - \{p, q\}$  es abierto en  $X$ . Un *arco libre maximal* en  $X$  es un arco libre en  $X$  que es maximal, con respecto a la inclusión. Consideremos las colecciones:

$$\mathcal{A}_R(X) = \{J \subset X : J \text{ es un ciclo en } X\},$$

$\mathcal{A}_E(X) = \{J \subset X : J \text{ es un arco libre maximal tal que } |J \cap R(X)| = 1\}$  y

$$\mathcal{A}_S(X) = \{J \subset X : J \text{ es un arco libre maximal en } X\} \cup \mathcal{A}_R(X).$$

Los elementos de  $\mathcal{A}_S(X)$  son las *aristas* de la gráfica finita  $X$ .

**Lema 3.1.** [23, Lema 3.1] Sean  $X$  una gráfica finita con  $R(X) \neq \emptyset$  y  $J, K \in \mathcal{A}_S(X)$ . Entonces

(a) si  $p \in \text{int}_X(J)$ , entonces  $p \notin R(X)$ ,

(b) si  $p \in \text{bd}_X(K)$ , entonces  $p \in R(X)$  y

(c) si  $J \neq K$ , entonces  $\text{int}_X(J) \cap K = \emptyset$ .

En [23, Teorema 4.4] se encuentra otra prueba del resultado que sigue:

**Teorema 3.2.** [8, Lema 3.2] Si  $X$  es un continuo localmente conexo el cual no es una gráfica finita, entonces para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $X$  contiene una gráfica finita con al menos  $k$  aristas.

**Lema 3.3.** [23, Lema 4.6] Si  $X$  es un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n \geq 2$ , entonces  $F_n(X) - F_{n-1}(X)$  es denso en  $F_n(X)$ .

Dado un continuo  $X$ , los conceptos que siguen fueron introducidos en [13, págs. 1583 y 1584]:

$$\mathcal{G}(X) = \{p \in X : \text{ existe una gráfica finita } G \text{ en } X \text{ tal que } p \in \text{int}_X(G)\},$$

$$\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X),$$

$X$  es *casi enrejado* si el conjunto  $\mathcal{G}(X)$  es denso en  $X$ .

**Lema 3.4.** [23, Lema 3.3] Si  $X$  es una gráfica finita, entonces  $\mathcal{G}(X) - R(X)$  es un subconjunto denso de  $X$ .

## 4 El producto simétrico suspensión de un continuo

Recordamos el hiperespacio que vamos trabajar en este trabajo. Sean  $X$  un continuo y  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$ . El  $n$ -ésimo producto simétrico suspensión de  $X$ , denotado por  $SF_n(X)$ , es el espacio cociente

$$SF_n(X) = F_n(X)/F_1(X).$$

que se obtiene de  $F_n(X)$  al identificar a  $F_1(X)$  a un punto, con la topología cociente, véase [7]. La función cociente  $q_X$  es la proyección natural  $q_X: F_n(X) \rightarrow SF_n(X)$  y  $F_X$  denota el elemento  $q_X(F_1(X))$ . Observamos un hecho importante en el desarrollo de nuestro trabajo: la función restricción de  $q_X$  al subespacio  $F_n(X) - F_1(X)$  es un homeomorfismo, es decir,

$$q_X|_{F_n(X)-F_1(X)}: F_n(X) - F_1(X) \longrightarrow SF_n(X) - \{F_X\}$$

es un homeomorfismo. De ahora en adelante, escribimos

$$q_X^* = q_X|_{F_n(X)-F_1(X)}.$$

A continuación presentamos algunos ejemplos del  $n$ -ésimo producto simétrico suspensión del arco y del triodo simple, en el caso cuando  $n = 2$ .

**Ejemplo 4.1.** Sea  $X$  un arco. En [30, pág. 51] se demuestra que un modelo para el hiperespacio  $F_2(X)$  es el triángulo en el plano con vértices en  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 1)$ , es una 2-celda, donde  $F_1(X)$  es homeomorfo al segmento que une el punto  $(0, 0)$  con el punto  $(1, 1)$ . Si identificamos  $F_1(X)$  a un punto, obtenemos un espacio homeomorfo a este triángulo. Así, el hiperespacio  $SF_2(X)$ , también es una 2-celda.

**Ejemplo 4.2.** Sea  $T$  un triodo simple. En [30, pág. 55] se demuestra que un modelo para el hiperespacio  $F_2(T)$  es homeomorfo a una 2-celda,  $D_0$ , que contiene tres 2-celdas,  $D_1, D_2$  y  $D_3$ , pegadas de tal manera que  $D_0 \cap D_i$  es un arco para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$  y la intersección  $D_1 \cap D_2 \cap D_3$  es un punto  $p$ . Además  $F_1(T)$  está contenido en la frontera como variedad de  $D_1, D_2, D_3$  y  $F_1(T) \cap D_0 = \{p\}$ . Así, al identificar  $F_1(T)$  a un punto, obtenemos un espacio homeomorfo a  $F_2(T)$ . Por lo tanto,  $SF_2(T)$  es homeomorfo a  $F_2(T)$ .

Sean  $X$  un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ . Consideramos los siguientes subespacios de  $F_n(X)$ :

$$\mathcal{E}_n(X) = \{A \in F_n(X) : A \text{ tiene una vecindad en } F_n(X) \text{ la cual es una } n\text{-celda}\} \text{ y}$$

$$R_n(X) = \{A \in F_n(X) : A \cap R(X) \neq \emptyset\}.$$

En lo que sigue vamos a citar algunas propiedades de los conjuntos  $\mathcal{E}_n(X)$  y  $R_n(X)$ , con los cuales demostramos los resultados principales, las demostraciones de éstos se encuentran en la tesis doctoral de Montero Rodríguez [36] o bien en [23].

**Lema 4.3.** [23, Lema 4.2] *Si  $X$  es un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\mathcal{E}_n(X)$  es un subconjunto abierto de  $F_n(X)$ .*

En [23, Teorema 4.3] se encuentra otra prueba del resultado que sigue:

**Teorema 4.4.** [8, Lema 3.1] *Si  $X$  es un continuo localmente conexo y  $A \in \mathcal{E}_n(X)$ , entonces ningún punto de  $A$  es el vértice de un triodo simple de  $X$ .*

**Lema 4.5.** [8, Lema 5.1] *Si  $X$  es una gráfica finita,  $n \in \{2, 3\}$  y  $A \in F_n(X) - R_n(X)$ , entonces  $A \in \mathcal{E}_n(X)$ .*

Dada una gráfica finita  $X$  y  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$ , consideramos otro subespacio del  $n$ -ésimo producto simétrico de la gráfica  $X$ :

$$\mathcal{N}_n(X) = \{A \in F_n(X) - F_{n-1}(X) : A \cap R(X) = \emptyset\}.$$

**Lema 4.6.** [23, Lema 5.3] *Si  $X$  es una gráfica finita y  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n \geq 2$ , entonces  $\mathcal{N}_n(X)$  es un subconjunto denso de  $F_n(X)$ .*

**Lema 4.7.** [23, Lema 5.4] *Si  $X$  es una gráfica finita y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\mathcal{N}_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$ .*

El siguiente resultado es una caracterización de gráficas finitas, el cual nos ayuda en la prueba del resultado principal de este trabajo. Otra prueba la puede consultar en [23, Teorema 5.5].

**Teorema 4.8.** [8, Teorema 3.4] *Un continuo localmente conexo  $X$  es una gráfica finita si y solo si para algún (para cada)  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{E}_n(X)$  es un subconjunto abierto y denso de  $F_n(X)$  con un número finito de componentes.*

En los resultados que siguen mostramos explícitamente los conjuntos  $\mathcal{E}_n(Y)$  de los continuos arco y la curva cerrada simple.

**Lema 4.9.** *Sea  $Y$  un continuo localmente conexo.*

(a) *Si  $Y$  es homeomorfo a  $[0, 1]$  o a  $S^1$ , y  $n \in \{2, 3\}$ , entonces  $\mathcal{E}_n(Y) = F_n(Y)$ .*

(b) *Si  $R(Y) \neq \emptyset$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\mathcal{E}_n(Y) \subsetneq F_n(Y)$ .*

*Demostración.* (a) Note que el arco  $[0, 1]$  o  $S^1$  no tienen puntos de ramificación así,  $R(Y) = \emptyset$ . Por el Lema 4.5 se tiene que  $F_n(Y) \subset \mathcal{E}_n(Y)$ .

(b) Como  $R(Y) \neq \emptyset$ , por el Teorema 4.4 se obtiene que  $\mathcal{E}_n(Y) \subsetneq F_n(Y)$ . □

**Lema 4.10.** *Sean  $X$  una gráfica finita,  $E \in \mathcal{A}_S(X)$  y  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $m \leq n$ . Si  $A, B \in \langle \text{int}_X(E) \rangle$  tal que  $|A| = |B| = m$ , entonces existe un arco  $\mathcal{A}$  en  $\langle \text{int}_X(E) \rangle$  con puntos extremos  $A, B$  y si  $C \in \mathcal{A}$ , entonces  $|C| = m$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  y  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ . Consideramos un homeomorfismo  $\beta: (0, 1) \rightarrow \text{int}_X(E)$ . Para cada  $l \in \{1, \dots, m\}$ , sean  $r_{a_l}, r_{b_l} \in (0, 1)$  tal que  $\beta(r_{a_l}) = a_l$  y  $\beta(r_{b_l}) = b_l$ . Sea  $T_l$  el intervalo con puntos extremos  $r_{a_l}, r_{b_l}$  y definimos

$$\alpha_l: [0, 1] \rightarrow T_l \text{ tal que } \alpha_l(t) = r_{a_l} + t(r_{b_l} - r_{a_l}).$$

En caso de que  $r_{a_l} = r_{b_l}$ , entonces  $\alpha_l$  es una función constante. En cualquier caso,  $\alpha_l$  es una función continua. Note lo siguiente: si  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  y  $t \in (0, 1)$ , entonces  $\alpha_i(t) \neq \alpha_j(t)$ . Supongamos que  $\alpha_i(t) = \alpha_j(t)$  y que si  $j \geq i$ , entonces  $r_{a_j} \geq r_{a_i}$  y  $r_{b_j} \geq r_{b_i}$ . Así,  $r_{a_i} + t(r_{b_i} - r_{a_i}) = r_{a_j} + t(r_{b_j} - r_{a_j})$ . Luego,  $r_{a_i} - r_{a_j} = t(r_{b_j} - r_{b_i} + r_{a_i} - r_{a_j})$ . Como  $r_{a_i} \neq r_{a_j}$ , tenemos que

$$t = \frac{r_{a_i} - r_{a_j}}{(r_{b_j} - r_{b_i}) + (r_{a_i} - r_{a_j})}. \quad (1)$$

Como  $t \in (0, 1)$  y  $r_{a_i} - r_{a_j} < 0$ , tenemos que (1) implica que  $r_{a_i} - r_{a_j} > (r_{b_j} - r_{b_i}) + (r_{a_i} - r_{a_j})$ . Así,  $0 > r_{b_j} - r_{b_i}$ , lo cual es una contradicción. Por tanto,  $\alpha_i(t) \neq \alpha_j(t)$ . Así, para cada  $l \in \{1, \dots, m\}$ , la función  $\gamma_l = \beta \circ \alpha_l: [0, 1] \rightarrow \text{int}_X(E)$  es continua.

*Afirmación.* La función  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \langle \text{int}_X(E) \rangle$  definida para cada  $t \in [0, 1]$  como  $\alpha(t) = \{\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)\}$  es continua.

Prueba de la Afirmación. Notemos que  $\alpha(0) = \{\beta(\alpha_1(0)), \dots, \beta(\alpha_m(0))\} = \{a_1, \dots, a_m\} = A$ . Así,  $\alpha(0) = A$ . De manera similar  $\alpha(1) = B$  y  $|\alpha(t)| = m$ , para cada  $t \in \{1, \dots, m\}$ . Sean  $t_0 \in [0, 1]$  y  $\varepsilon_0 > 0$ . Como  $\beta \circ \alpha_l$  es continua en  $t_0$ , para cada  $l \in \{1, \dots, m\}$ , existe  $\delta_l > 0$ , tal que si  $t \in [0, 1]$  y  $|t_0 - t| < \delta_l$ , entonces  $d(\beta(\alpha_l(t_0)), \beta(\alpha_l(t))) < \varepsilon_0$ . Sea  $\delta_0 = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ . Si  $t \in [0, 1]$  y  $|t_0 - t| < \delta_0$ , entonces  $d(\beta(\alpha_l(t_0)), \beta(\alpha_l(t))) < \varepsilon_0$ , para cada  $l \in \{1, \dots, m\}$ . Así,  $\alpha(t_0) \subset N(\varepsilon_0, \alpha(t))$  y  $\alpha(t) \subset N(\varepsilon, \alpha(t_0))$ . Luego,  $H(\alpha(t_0), \alpha(t)) < \varepsilon_0$ . Por tanto,  $\alpha$  es continua. Así, la Afirmación es verdadera.

Como  $[0, 1]$  es localmente conexo, por [33, Teorema 5, pág 257], tenemos que  $\alpha([0, 1])$  es localmente conexo. En particular,  $\alpha([0, 1])$  es arco conexo. Así, existe un arco  $\mathcal{A}$  en  $\alpha([0, 1]) \subset \langle \text{int}_X(E) \rangle$  con puntos extremos  $A$  y  $B$ .  $\square$

## 5 $\theta_m$ -gráficas y propiedades

De ahora en adelante, cuando nos referimos a  $X$  como una gráfica finita significa que

$$X \text{ tiene } E_1, \dots, E_m \text{ aristas, con } m \in \mathbb{N}.$$

Sean  $X$  una gráfica finita y  $n \in \mathbb{N}$ . Dados  $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tales que  $i_1 + \dots + i_m = n$ , consideramos  $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$  como el subconjunto de  $F_n(X)$  tal que cada elemento de  $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$  tiene exactamente  $i_j$  puntos en el interior de la arista  $E_j$ , para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

Note que si  $A \in \mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$ , esto significa que

$$A \in F_n(X) \text{ y } i_j = |A \cap \text{int}_X(E_j)|, \text{ para cada } j \in \{1, \dots, m\}.$$

En lo que sigue utilizaremos la siguiente notación. Consideremos una gráfica finita  $X$  (con sus  $m \in \mathbb{N}$  aristas) y  $n \in \mathbb{N}$ , dados  $j, l \in \{1, \dots, m\}$  consideramos las colecciones:

$$\mathcal{K}_X^j = \mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m) \text{ si } i_j = n$$

y

$$\mathcal{K}_X(j, l) = \mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m) \text{ si } j \neq l \text{ y } i_j + i_l = n.$$

Note que  $\mathcal{K}_X^j \subset \langle \text{int}_X(E_j) \rangle$  y  $\text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X^j) = \langle E_j \rangle$ .

Las propiedades topológicas de los conjuntos  $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$  son parte esencial de las demostraciones de los resultados que se exponen en este capítulo. Para una demostración del resultado que sigue véase [36] o bien en [23, Lema 6.1].

**Lema 5.1.** *Si  $X$  es una gráfica finita entonces las siguientes propiedades se cumplen.*

- (a)  $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$  es arco conexo.
- (b)  $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m) \cap \mathcal{K}_X(l_1, \dots, l_m) = \emptyset$  si y solo si existe  $j \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $i_j \neq l_j$ .
- (c)  $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$  es un subconjunto abierto de  $\mathcal{E}_n(X)$ .

El siguiente resultado nos dice cómo son las componentes del subespacio  $\mathcal{E}_n(X)$ , para una gráfica finita  $X$ , una demostración la puede ver en [36] o bien en [23, Lema 6.6].

**Teorema 5.2.** *Sea  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 4$ . Si  $X$  es una gráfica finita, entonces las componentes de  $\mathcal{E}_n(X)$  son los conjuntos de la forma:*

$$\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m).$$

**Teorema 5.3.** [7, Teorema 5.2] *Sean  $X$  un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n \geq 2$ . Entonces  $X$  es localmente conexo si y solo si  $SF_n(X)$  es localmente conexo.*

El resultado que sigue es de suma importancia en el desarrollo de nuestro trabajo.

**Lema 5.4.** *Sean  $X$  una gráfica finita y  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 4$ .*

- (a) *Si  $A \in \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m))$ , entonces  $|A \cap \text{int}_X(E_j)| \leq i_j$ , para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ .*
- (b) *La única componente de  $\mathcal{E}_n(X)$  contenida en  $\text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m))$  es  $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$ .*



*Demostración.* (a) Sea  $A \in \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m))$ . Supongamos que existe  $j \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $|A \cap \text{int}_X(E_j)| > i_j$ . Sea  $\{A_k\}_{k=1}^\infty$  una sucesión en  $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$  que converge a  $A$ . Notemos que  $|A \cap E_j| \geq |A \cap \text{int}_X(E_j)| > i_j$ . Por otro lado, la sucesión  $\{A_k \cap E_j\}_{k=1}^\infty$  converge a  $A \cap E_j$  y  $|A_k \cap E_j| = i_j$  lo cual es una contradicción.

(b) Por Teorema 5.2,  $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$  es una componente de  $\mathcal{E}_n(X)$  contenida en  $\text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m))$ . Supongamos que existe  $\mathcal{K}_X(l_1, \dots, l_m)$  componente de  $\mathcal{E}_n(X)$  distinto de  $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$  contenida en  $\text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m))$ . Por Lema 5.1(b), existe  $j_0 \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $i_{j_0} \neq l_{j_0}$ .

**Caso 1.**  $i_{j_0} < l_{j_0}$ .

Sea  $A \in \mathcal{K}_X(l_1, \dots, l_m)$ . Esto implica que  $l_{j_0} = |A \cap \text{int}_X(E_{j_0})|$ . Como  $A \in \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m))$ , por (a),  $|A \cap \text{int}_X(E_{j_0})| \leq i_{j_0}$ . Así,  $l_{j_0} \leq i_{j_0}$  lo cual es una contradicción.

**Case 2.**  $i_{j_0} > l_{j_0}$ .

Esto implica que existe  $j_1 \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $i_{j_1} < l_{j_1}$ . De manera similar como en el Caso 1, tenemos una contradicción. □

Dado  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$  y un continuo  $Z$ , consideramos la siguiente notación.

$$\mathcal{SE}_n(Z) = \{A \in SF_n(Z) : A \text{ tiene una vecindad en } SF_n(Z) \text{ la cual es una } n\text{-celda}\}.$$

**Observación 5.5.** Sea  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 4$ .

(a) Si  $Z$  es un continuo, entonces  $\mathcal{SE}_n(Z)$  es un subconjunto abierto de  $SF_n(Z)$ .

(b) Si  $X$  es una gráfica finita, entonces las componentes de  $\mathcal{SE}_n(X)$  son los conjuntos de la forma:

$$q_X^*(\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)).$$

Para una demostración del resultado que sigue véase [36] o bien en [23, Teorema 6.10].

**Teorema 5.6.** Sean  $X$  y  $Y$  continuos localmente conexos casi enrejados y  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n \geq 4$ .

(a) Entonces  $q_Y^*(\mathcal{E}_n(Y)) = \mathcal{SE}_n(Y)$

(b) Si  $h: SF_n(X) \rightarrow SF_n(Y)$  es un homeomorfismo, entonces  $h(q_X^*(A)) \neq F_Y$ , para cada  $A \in \mathcal{E}_n(X)$ .

Para una demostración del resultado que sigue véase [36] o bien en [23, Lema 6.11].

**Lema 5.7.** *Sea  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 4$ . Si  $X$  y  $Y$  son gráficas finitas y  $h$  es un homeomorfismo entre los hiperespacios  $SF_n(X)$  y  $SF_n(Y)$ , entonces  $\mathcal{E}_n(X) = (q_X^*)^{-1}(h^{-1}(q_Y^*(\mathcal{E}_n(Y))))$ .*

Recordemos que, dado un  $m \in \mathbb{N}$  con  $m \geq 3$ , una  $\theta_m$ -gráfica es la unión de  $m$  arcos  $E_1, \dots, E_m$  compartiendo los mismos puntos extremos  $u$  y  $v$  y que satisfacen que  $E_i \cap E_j = \{u, v\}$ , para cada  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ . Así que por definición se sigue que una  $\theta_m$ -gráfica es una gráfica finita tal que sus puntos de ramificación son  $u$  y  $v$ .

**Teorema 5.8.** *Sean  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n \geq 2$ , y  $X$  una gráfica finita con  $R(X) \neq \emptyset$ . Si  $X$  no es una  $\theta_m$  gráfica, entonces*

$$\bigcap \{ \text{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X) \} = \{F_X\}.$$

*Si  $X$  es una  $\theta_m$  gráfica, entonces*

$$\bigcap \{ \text{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X) \} = \{F_X, q_X(\{u, v\})\}.$$

*Demostración.* Sean  $E_j \in \mathcal{A}_S(X)$  y  $p \in \text{int}_X(E_j)$ . Note que podemos considerar una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos en  $\text{int}_X(E_j)$  que converja al punto  $p$ . Luego, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $A_n = \{a_n\}$ . Se sigue que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|A_n \cap \text{int}_X(E_j)| = 1$ , así  $A_n \in \mathcal{K}_X^j$ , note que la sucesión  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge al punto  $\{p\}$ , esto es,  $\{p\}$  se puede aproximar por elementos de  $\mathcal{K}_X^j$ , de aquí se sigue que  $\{p\} \in \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X^j)$ . Así,  $F_X \in \text{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j))$ . Luego,  $F_X \in \bigcap \{ \text{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X) \}$ . Además, si  $X$  es una  $\theta_m$  gráfica, entonces  $u, v \in E_j$ , para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Como  $n \geq 2$ , podemos aproximarnos a  $\{u, v\}$  con elementos de  $\mathcal{K}_X^j$ . Esto implica que  $\{u, v\} \in \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X^j)$ . Así,  $q_X(\{u, v\}) \in \text{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j))$ . Por tanto,  $q_X(\{u, v\}) \in \bigcap \{ \text{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X) \}$ .

Supongamos que existe  $\chi \in \bigcap \{ \text{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X) \} - \{F_X\}$ . Sea  $A \in F_n(X) - F_1(X)$  tal que  $q_X(A) = \chi$ . Como  $X$  es una gráfica finita y  $R(X) \neq \emptyset$ , sabemos que  $|\mathcal{A}_S(X)| \geq 2$  y  $|\bigcap \mathcal{A}_S(X)| \leq 2$ . Dado  $E_j \in \mathcal{A}_S(X)$ , existe una sucesión  $\{A_i\}_{i=1}^\infty$  en  $\mathcal{K}_X^j$  tal que  $\{q_X(A_i)\}_{i=1}^\infty$  converge a  $\chi$ . Así, la sucesión  $\{A_i\}_{i=1}^\infty$  converge a  $A$ . Luego,  $A \subset E_j$ . Por tanto,

$$A \subset \bigcap \mathcal{A}_S(X). \tag{2}$$

Como  $|A| \geq 2$ , por (2), tenemos que  $|\bigcap \mathcal{A}_S(X)| = 2$ . Así,  $|A| = 2$ .

Si  $X$  no es una  $\theta_m$  gráfica, tenemos que  $|\bigcap \mathcal{A}_S(X)| < 2$ . Por (2), tenemos que  $|A| < 2$ , lo cual es una contradicción. Por tanto, tal  $\chi$  no existe. Por tanto,  $\bigcap \{\text{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X)\} = \{F_X\}$ .

Si  $X$  es una  $\theta_m$  gráfica, tenemos que  $\bigcap \mathcal{A}_S(X) = \{u, v\}$ . Como  $A \subset \bigcap \mathcal{A}_S(X)$  y  $A \notin F_1(X)$ , entonces  $A = \{u, v\}$ . Así, tenemos que  $\chi = q_X(\{u, v\})$ . Por tanto,  $\chi \in \{F_X, q_X(\{u, v\})\}$ . Así,  $\bigcap \{\text{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X)\} = \{F_X, q_X(\{u, v\})\}$ .  $\square$

## 6 Hiperespacio $n$ -ésimo producto simétrico suspensión único de una $\theta_m$ -gráfica

Iniciamos esta sección citando que la clase de las gráficas finitas tienen hiperespacio  $n$ -ésimo producto simétrico suspensión  $SF_n$ -cerrada, esto es, sea  $\lambda$  la clase de las gráficas finitas, si para cualesquiera  $X \in \lambda$  y  $Y$  un continuo tal que  $SF_n(X)$  es homeomorfo a  $SF_n(Y)$ , se cumple que  $Y \in \lambda$ . La prueba del resultado que sigue la puede ver en [36] o [23, Teorema 7.1].

**Teorema 6.1.** *Sea  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 4$ . Si  $X$  y  $Y$  son continuos tales que  $SF_n(X)$  es homeomorfo a  $SF_n(Y)$ , entonces  $X$  es gráfica finita si y solo si  $Y$  es gráfica finita.*

Como una aplicación del Teorema 6.1 mostramos que: (i) el arco tiene hiperespacio  $n$ -ésimo producto simétrico suspensión único y (ii) la curva cerrada simple tiene  $n$ -ésimo producto simétrico suspensión único.

Dada una variedad  $\mathcal{M}$ , la *frontera como variedad* de  $\mathcal{M}$  la denotamos por  $\partial\mathcal{M}$ .

**Teorema 6.2.** *Sean  $Y$  un continuo y  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$ .*

- (a) *Si  $SF_n(Y)$  es homeomorfo a  $SF_n([0, 1])$ , entonces  $Y$  es un arco.*
- (b) *Si  $SF_n(Y)$  es homeomorfo a  $SF_n(S^1)$ , entonces  $Y$  es una curva cerrada simple.*

*Demostración.* A lo largo de la prueba vamos a considerar a  $X$  como el espacio  $[0, 1]$  o el espacio  $S^1$ . Sea  $h : SF_n(X) \rightarrow SF_n(Y)$  un homeomorfismo. Note que  $X$  es un continuo localmente conexo, luego por el Teorema 5.3,  $SF_n(X)$

es localmente conexo. Se sigue que  $SF_n(Y)$  es localmente conexo, nuevamente por el Teorema 5.3 se tiene que  $Y$  es un continuo localmente conexo.

**Caso 1.**  $n \in \{2, 3\}$ .

Lo primero que haremos en este caso es demostrar que  $R(Y) = \emptyset$ . Para esto supongamos que existe un punto  $a_1 \in R(Y)$  y, sea  $a_2 \in Z - \{a_1\}$ . Si  $q_Y(\{a_1, a_2\}) = h(F_X)$ , entonces  $q_Y(\{a_1, a\}) \neq h(F_X)$ , para cada  $a \in Y - \{a_1, a_2\}$ . Por lo tanto, podemos suponer que  $q_Y(\{a_1, a_2\}) \neq h(F_X)$ . Sea  $A = \{a_1, a_2\}$ . Notemos que  $h^{-1}(q_Y(A)) \in SF_n(X) - \{F_X, h^{-1}(F_Y)\}$ . Así,  $(q_X^*)^{-1}(h^{-1}(q_Y(A))) \in F_n(X) - F_1(X)$ . Como  $R(X) = \emptyset$ , por [8, Lema 5.1] se obtiene que  $(q_X^*)^{-1}(h^{-1}(q_Y(A))) \in \mathcal{E}_n(X)$ . Así, existe una vecindad  $\mathcal{U}$  de  $(q_X^*)^{-1}(h^{-1}(q_Y(A)))$  en  $F_n(X) - F_1(X)$  la cual es una  $n$ -celda. Luego,  $q_X(\mathcal{U})$  es una  $n$ -celda y es vecindad de  $h^{-1}(q_Y(A))$  en  $SF_n(X) - \{F_X\}$ . Por tanto, existe una vecindad  $\mathcal{U}'$  de  $h^{-1}(q_Y(A))$  la cual es una  $n$ -celda tal que  $\mathcal{U}' \subset q_X(\mathcal{U}) \cap (SF_n(X) - \{F_X, h^{-1}(F_Y)\})$ . Así,  $h(\mathcal{U}')$  es una  $n$ -celda y es vecindad de  $q_Y(A)$  en  $SF_n(Y) - \{h(F_X), F_Y\}$ . Así,  $(q_Y^*)^{-1}(h(\mathcal{U}'))$  es una  $n$ -celda y es vecindad de  $A$  en  $F_n(Y) - F_1(Y)$ . Por lo tanto,  $A \in \mathcal{E}_n(Y)$ . Por [8, Lema 3.1],  $A \notin \mathcal{E}_n(Y)$ . Así, tenemos una contradicción. Por tanto,  $Y$  es un arco o una curva cerrada simple

(Caso  $n = 2$ ) Como  $SF_2(S^1)$  es homeomorfo al Plano Proyectivo Real  $\mathbb{R}P^2$  y  $SF_2([0, 1])$  es homeomorfo a  $[0, 1]^2$  ([7, Ejemplos 3.1 y 3.3]), tenemos que  $Y$  es homeomorfo a  $X$ .

(Caso  $n = 3$ ) Como  $SF_2(S^1)$  se puede encajar en  $SF_3(S^1)$ , entonces  $SF_3(S^1)$  no es encajable en  $\mathbb{R}^3$ . Por otro lado, un modelo para  $F_3([0, 1])$  es una esfera unitaria (véase [29, Sección 3]), donde  $F_1([0, 1])$  es un diámetro. Así,  $SF_3([0, 1])$  se puede encajar en  $\mathbb{R}^3$ . Por tanto,  $Y$  es homeomorfo a  $X$ .

**Caso 2.**  $n \geq 4$ .

Por el Teorema 6.1, tenemos que  $Y$  es una gráfica finita.

Como  $|\mathcal{A}_S(X)| = 1$ , por Teorema 5.2, tenemos que  $\mathcal{E}_n(X)$  tiene una única componente. Por Lema 5.7,  $\mathcal{E}_n(Y)$  es conexo. Así,  $|\mathcal{A}_S(Y)| = 1$ . Por lo tanto,  $Y$  es un arco o una curva cerrada simple.

**Afirmación 1.** Si  $B \in \mathcal{E}_n(S^1)$  y  $\mathcal{M}$  es una vecindad de  $B$  en  $F_n(S^1)$  la cual es una  $n$ -celda, entonces  $B$  está en el interior como variedad de  $\mathcal{M}$ .

*Prueba de la Afirmación 1.* Como  $R(S^1) = \emptyset$ , por [8, Corolario 4.4], tenemos que  $B \in F_n(S^1) - F_{n-1}(S^1)$ . Por [26, Teorema 2.5], existen subconjuntos abiertos y conexos ajenos por pares  $V_1, \dots, V_n$  de  $S^1$  tales que  $B \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle \subset \text{int}_{F_n(S^1)}(\mathcal{M})$ . Notemos que  $V_i$  es homeomorfo a  $(0, 1)$ ,

para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Así,  $\langle V_1, \dots, V_n \rangle$  es homeomorfo a  $(0, 1)^n$ . Luego,  $B$  está en el interior como variedad de  $\mathcal{M}$ .

**Afirmación 2.** Si  $A \in \mathcal{E}_n([0, 1])$  y  $A \cap \{0, 1\} \neq \emptyset$ , entonces existe una vecindad  $\mathcal{M}$  de  $A$  en  $F_n([0, 1])$  la cual es una  $n$ -celda tal que  $A \in \partial\mathcal{M}$ .

*Prueba de la Afirmación 2.* Supongamos que  $0 \in A$ . Como  $A \in \mathcal{E}_n([0, 1])$ , entonces  $A \in F_n([0, 1]) - F_{n-1}([0, 1])$ . Así,  $A = \{0, a_2, \dots, a_n\}$ , donde  $a_2, \dots, a_n$  son puntos distintos en  $[0, 1]$ . Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  en  $[0, 1]$  arcos ajenos por pares tales que  $0 \in \text{int}_{[0,1]}(\alpha_1)$ ,  $a_2 \in \text{int}_{[0,1]}(\alpha_2)$ ,  $\dots$ ,  $a_n \in \text{int}_{[0,1]}(\alpha_n)$ . Sea  $\mathcal{M} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ . Así,  $A \in \text{int}_{F_n([0,1])}(\mathcal{M})$ . Notemos que  $\mathcal{M}$  es una  $n$ -celda la cual es vecindad de  $A$  en  $F_n([0, 1])$ . Como  $0 \in \partial\alpha_1$ , tenemos que  $A \in \partial\mathcal{M}$ . Por lo tanto, se cumple la Afirmación 2.

Por la Afirmación 1 y la Afirmación 2, tenemos que  $\mathcal{E}_n(S^1)$  no es homeomorfo a  $\mathcal{E}_n([0, 1])$ . Por el Lema 5.7, se tiene que  $\mathcal{E}_n(X)$  es homeomorfo a  $\mathcal{E}_n(Y)$ . Como  $Y$  es un arco o una curva cerrada simple, se concluye que  $X$  es homeomorfo a  $Y$ . □

De ahora en adelante, cuando  $Y$  sea una gráfica finita, significa que

$$Y \text{ tiene } E'_1, \dots, E'_{m'} \text{ aristas, con } m' \in \mathbb{N}.$$

Ahora, el siguiente resultado nos muestra una fuerte relación entre los elementos de  $\mathcal{A}_S(X)$  con los elementos de  $\mathcal{A}_S(Y)$ , para dos gráficas finitas  $X$  y  $Y$ .

**Teorema 6.3.** Sean  $X, Y$  gráficas finitas,  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 4$  y  $h: SF_n(X) \rightarrow SF_n(Y)$  un homeomorfismo. Entonces se cumple lo siguiente:

- (a) Para cada  $E_j \in \mathcal{A}_S(X)$ , tenemos que  $h(q_X(\mathcal{K}_X^j)) = q_Y(\mathcal{K}_Y^{j_h})$ , para algún  $E'_{j_h} \in \mathcal{A}_S(Y)$ .
- (b) La relación  $E_j \mapsto E'_{j_h}$  es una biyección entre  $\mathcal{A}_S(X)$  y  $\mathcal{A}_S(Y)$ .

*Demostración.* (a) Sea  $E_j \in \mathcal{A}_S(X)$ . Por el Teorema 5.2 y el Lema 5.7, tenemos que  $h(q_X(\mathcal{K}_X^j)) = q_Y(\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}))$ , para alguna componente

$$\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}) \text{ de } \mathcal{E}_n(Y).$$

Vamos a considerar el conjunto  $M' = \{j \in \{1, \dots, m'\} : i_j \neq 0\}$  y sea  $r' = |M'|$ . Por conveniencia, supongamos que  $M' = \{j_1, \dots, j_{r'}\}$  y notemos que

$\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}) \subset \langle \text{int}_Y(E'_{j_1}), \dots, \text{int}_Y(E'_{j_{r'}}) \rangle$ . Vamos a demostrar que  $r' = 1$ . Para esto supongamos que  $r' \geq 2$ .

**Afirmación.**  $\text{int}_{F_n(Y)}(\text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}))) = \mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'})$ .

*Prueba de la afirmación.* Notemos que

$$\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}) \subset \text{int}_{F_n(Y)}(\text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}))).$$

Vamos a demostrar que  $\text{int}_{F_n(Y)}(\text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}))) \subset \mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'})$ . Para probar esto, sea  $A \in \text{int}_{F_n(Y)}(\text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'})))$ . Vamos a probar que (i)  $A \cap R(Y) = \emptyset$  y (ii)  $A \in F_n(Y) - F_{n-1}(Y)$ .

Demostremos (i). Supongamos que existe  $p \in A \cap R(Y)$ . Sea  $r > 0$ .

Como  $A \in \text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}))$ , existe  $B \in \mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'})$  de tal manera que  $H(A, B) < \frac{r}{4}$ . Así, existe un punto  $b \in B$  de tal manera que  $d_Y(p, b) < \frac{r}{4}$ . Como  $B \in \langle \text{int}_Y(E'_{j_1}), \dots, \text{int}_Y(E'_{j_{r'}}) \rangle$ , existe  $E'_s \in \{E'_{j_1}, \dots, E'_{j_{r'}}\}$  tal que  $b \in \text{int}_Y(E'_s)$ . Como  $p \in R(Y)$ , existe  $E'_t \in \mathcal{A}_S(Y) - \{E'_s\}$  tal que  $p \in E'_t$ . Sea  $c \in \text{int}_Y(E'_t) - B$  tal que  $d_Y(c, p) < \frac{r}{4}$  y sea  $C = (B - \{b\}) \cup \{c\}$ . Como  $d_Y(c, b) < \frac{r}{2}$ , tenemos que  $H(C, B) < \frac{r}{2}$ . Así,  $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C) < r$ . Más aún,  $|C \cap \text{int}_Y(E'_t)| = 1 + |B \cap \text{int}_Y(E'_t)|$ . Como  $B \in \mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'})$ , tenemos que  $|C \cap \text{int}_Y(E'_t)| = 1 + i_t$ . By Lema 5.4(a), tenemos que  $C \notin \text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}))$ .

Así,  $A \notin \text{int}_{F_n(Y)}(\text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'})))$ , lo cual es una contradicción. Por tanto,  $A \cap R(Y) = \emptyset$ . Luego, (i) se cumple.

Demostremos (ii). Supongamos que  $A \in F_{n-1}(Y)$ . Como  $A \cap R(Y) = \emptyset$ , tenemos que  $A \in \langle \text{int}_Y(E'_{j_1}), \dots, \text{int}_Y(E'_{j_{r'}}) \rangle \cap \text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}))$ . Por Lema 5.4(a), tenemos que  $|A \cap \text{int}_Y(E'_j)| \leq i_j$ , para cada  $j \in M'$ . Como  $A \in F_{n-1}(Y)$ , existe un elemento  $j_k \in M'$  tal que  $|A \cap \text{int}_Y(E'_{j_k})| < i_{j_k}$ . Como  $r' \geq 2$ , podemos tomar  $j_s \in M' - \{j_k\}$ . Sean  $l = n - |A|$  y  $r > 0$ . Eligiendo puntos distintos por pares  $b_1, \dots, b_l \in \text{int}_Y(E'_{j_s}) - A$  tales que  $H(A, B) < r$ , donde  $B = A \cup \{b_1, \dots, b_l\}$ . Notemos que  $|B \cap \text{int}_Y(E'_j)| = |A \cap \text{int}_Y(E'_j)|$ , para cada  $j \in M' - \{j_s\}$ .

Supongamos que  $|B \cap \text{int}_Y(E'_{j_s})| \leq i_{j_s}$ . Notemos que

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{j \in M'} |B \cap \text{int}_Y(E'_j)| \\ &= \sum_{j \in M' - \{j_k, j_s\}} |B \cap \text{int}_Y(E'_j)| + |B \cap \text{int}_Y(E'_{j_k})| + |B \cap \text{int}_Y(E'_{j_s})| \\ &= \sum_{j \in M' - \{j_k, j_s\}} |A \cap \text{int}_Y(E'_j)| + |A \cap \text{int}_Y(E'_{j_k})| + |B \cap \text{int}_Y(E'_{j_s})|. \end{aligned}$$

Por Lema 5.4(a) y como  $|A \cap \text{int}_Y(E'_{j_k})| < i_{j_k}$ , se sigue que

$$\begin{aligned} |B| &\leq \sum_{j \in M' - \{j_k, j_s\}} i_j + |A \cap \text{int}_Y(E'_{j_k})| + i_{j_s} \\ &< \sum_{j \in M' - \{j_k, j_s\}} i_j + i_{j_k} + i_{j_s}. \end{aligned}$$

Como  $\sum_{j \in M'} i_j = n$ , tenemos que  $|B| < n$  lo cual es una contradicción.

Esto implica que  $|B \cap \text{int}_Y(E'_{j_s})| > i_{j_s}$ . Luego, por el Lema 5.4 (a),  $B \notin \text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}))$ . Así, dado  $r > 0$ ,  $B(A, r) \not\subset \text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}))$ . Por tanto,  $A \notin \text{int}_{F_n(Y)}(\text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'})))$  lo cual es una contradicción. Por tanto,  $A \in F_n(Y) - F_{n-1}(Y)$ . Luego, (ii) se cumple.

De acuerdo con [8, Corolario 4.4],  $A \in \mathcal{E}_n(Y)$ . Sea  $\mathcal{C}$  la componente de  $\mathcal{E}_n(Y)$  que contiene a  $A$ . Por el Lema 4.3, tenemos que  $\mathcal{C}$  es un subconjunto abierto de  $F_n(Y)$ . Como  $A \in \text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}))$ , entonces  $\mathcal{C} \cap \mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}) \neq \emptyset$ . Por el Teorema 5.2, tenemos que  $\mathcal{C} = \mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'})$ . Así,  $A \in \mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'})$ . Por lo tanto,

$$\text{int}_{F_n(Y)}(\text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}))) \subset \mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}).$$

Esto completa la prueba de la Afirmación.

Consideremos  $A \in F_n(X)$  tal que  $h(q_X(A)) = F_Y$  y  $A' \in F_n(Y)$  tal que  $h^{-1}(q_Y(A')) = F_X$ . Sean  $\mathcal{F} = F_n(X) - (F_1(X) \cup \{A\})$ ,  $\mathcal{F}' = F_n(Y) - (F_1(Y) \cup \{A'\})$ , y  $g$  el homeomorfismo  $(q_Y|_{\mathcal{F}'})^{-1} \circ h \circ (q_X|_{\mathcal{F}})$  de  $\mathcal{F}$  en  $\mathcal{F}'$ . Notemos que  $\mathcal{K}_X^j \subset \mathcal{F}$ , por la parte (b) del Teorema 5.6. Así,  $\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}) \subset \mathcal{F}'$ . Como  $\text{cl}_{\mathcal{F}}(\mathcal{K}_X^j) = \langle E_j \rangle \cap \mathcal{F}$ , tenemos que  $\text{int}_{\mathcal{F}}(\text{cl}_{\mathcal{F}}(\mathcal{K}_X^j)) = \langle \text{int}_X(E_j) \rangle \cap \mathcal{F}$ . Por la Afirmación y como  $\mathcal{F}'$  es un subconjunto abierto de  $F_n(Y)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} & \text{int}_{\mathcal{F}'}(\text{cl}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}))) = \\ &= \text{int}_{\mathcal{F}'}(\text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'})) \cap \mathcal{F}') \\ &= \text{int}_{F_n(Y)}(\text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'})) \cap \mathcal{F}') \cap \mathcal{F}' \\ &= \text{int}_{F_n(Y)}(\text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}))) \cap \text{int}_{F_n(Y)}(\mathcal{F}') \cap \mathcal{F}' \\ &= \text{int}_{F_n(Y)}(\text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}))) \cap \mathcal{F}' \\ &= \mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}) \cap \mathcal{F}' \\ &= \mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'}). \end{aligned}$$

Notemos que:  $g(\text{int}_{\mathcal{F}}(\text{cl}_{\mathcal{F}}(\mathcal{K}_X^j))) = \text{int}_{\mathcal{F}'}(\text{cl}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'})))$ . Así, tenemos lo siguiente  $g(\langle \text{int}_X(E_j) \rangle \cap \mathcal{F}) = \mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'})$ , lo cual contradice al hecho de que  $g(\mathcal{K}_X^j) = \mathcal{K}_Y(i_1, \dots, i_{m'})$ , pues  $\text{int}_{\mathcal{F}}(\text{cl}_{\mathcal{F}}(\mathcal{K}_X^j)) \neq \mathcal{K}_X^j$ . Por tanto,  $r' = 1$ .

(b) Como  $\mathcal{K}_X^j$  es asociado a  $\mathcal{K}_Y^{j_h}$ , entonces  $E_j$  es asociado a  $E'_{j_h}$ . Supongamos que  $E_l$  es asociado a  $E'_{l_h}$  y que  $E'_{j_h} = E'_{l_h}$ . Esto implica que,  $\mathcal{K}_Y^{j_h} = \mathcal{K}_Y^{l_h}$ . Así,  $q_Y^*(\mathcal{K}_Y^{j_h}) = q_Y^*(\mathcal{K}_Y^{l_h})$ . Por la parte (a), tenemos que  $h(q_X^*(\mathcal{K}_X^j)) = h(q_X^*(\mathcal{K}_X^l))$ , y esto implica que  $q_X^*(\mathcal{K}_X^j) = q_X^*(\mathcal{K}_X^l)$ . Por tanto,  $\mathcal{K}_X^j = \mathcal{K}_X^l$ . Así, tenemos que  $E_j = E_l$ .  $\square$

El siguiente resultado muestra que las  $\theta_m$ -gráficas tienen hiperespacio  $n$ -ésimo producto simétrico suspensión único. Este teorema es una de las piedras angulares para probar que las gráficas finitas tienen hiperespacio  $n$ -ésimo producto simétrico suspensión único (véase [36] o bien [37, Teorema 3.5]).

**Teorema 6.4.** *Sean  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 4$ . Si  $X$  es una  $\theta_m$ -gráfica, entonces  $X$  tiene hiperespacio  $n$ -ésimo producto simétrico suspensión único.*

*Demostración.* Sea  $Y$  un continuo tal que los hiperespacios  $SF_n(Y)$  y  $SF_n(X)$  son homeomorfos. Así podemos considerar  $h: SF_n(X) \rightarrow SF_n(Y)$  un homeomorfismo. Como  $X$  es una  $\theta_m$ -gráfica entonces  $X$  es una gráfica finita luego, por el Teorema 6.1 tenemos que  $Y$  es una gráfica finita. Note que  $Y$  en particular es un continuo localmente conexo, supongamos que  $Y$  no tiene puntos de ramificación, se sigue de [40, Ejercicio 8.40] que  $Y$  es un arco o una curva cerrada simple. Ahora, aplicando el Teorema 6.2 tenemos que  $X$  es un arco o una curva cerrada simple, lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $R(Y) \neq \emptyset$ . Recordar que  $E'_1, \dots, E'_{m'}$  son las aristas de  $Y$ , para algún  $m' \in \mathbb{N}$ . Por la parte (b) del Teorema 6.3, tenemos que la asociación  $E_j \mapsto E'_j$  es una biyección entre los conjuntos de aristas  $\mathcal{A}_S(X)$  y  $\mathcal{A}_S(Y)$ , en otras palabras,  $m = m'$ . Más aún, por el Teorema 5.8 tenemos que  $\bigcap \{\text{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X)\} = \{F_X, q_X(\{u, v\})\}$ . Por la parte (a) del Teorema 6.3, esto es, para cada  $E_j \in \mathcal{A}_S(X)$ , tenemos que  $h(q_X(\mathcal{K}_X^j)) = q_Y(\mathcal{K}_Y^{j_h})$ , para algún  $E'_{j_h} \in \mathcal{A}_S(Y)$ . Luego, obtenemos:



$$\begin{aligned}
 2 &= |\{F_X, q_X(\{u, v\})\}| \\
 &= |h(\{F_X, q_X(\{u, v\})\})| \\
 &= |h(\bigcap \{\text{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X)\})| \\
 &= |\bigcap \{\text{cl}_{SF_n(Y)}(h(q_X(\mathcal{K}_X^j))) : E_j \in \mathcal{A}_S(X)\}| \\
 &= |\bigcap \{\text{cl}_{SF_n(Y)}(q_Y(\mathcal{K}_Y^{j_h})) : E'_{j_h} \in \mathcal{A}_S(Y)\}|.
 \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando el Teorema 5.8 a la gráfica finita  $Y$  se obtiene que  $Y$  es una  $\theta_{m'}$  gráfica. Por lo tanto,  $Y$  es homeomorfo a  $X$ . □

Finalizamos este capítulo mencionando que el Teorema 6.4 es uno de los resultados previos para probar que la clase de las gráficas finitas tiene hiperespacio  $n$ -ésimo producto simétrico suspensión único (véase [36] o [37, Teorema 3.8]).

## Agradecimientos

Es de suma importancia agradecer a los árbitros(as) el trabajo que realizaron con sus observaciones y tiempo dedicado a este trabajo, como resultado de todo ello se logró presentar este capítulo.

## Bibliografía

- [1] G. Acosta (2002), *Continua with unique hyperspace*, Continuum Theory, 33–49. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 130, New York and Basel: Marcel Dekker, Inc. 2002.
- [2] G. Acosta, R. Hernández-Gutiérrez, V. Martínez-de-la-Vega, *Dendrites and symmetric products*, Glas. Math. Ser. III 44 (1) (2009), 195–210.
- [3] G. Acosta, D. Herrera-Carrasco, *Dendrites without unique hyperspace*, Houst. J. Math. 35 (2) (2009), 451–467.
- [4] G. Acosta, D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Local dendrites with unique hyperspace  $C(X)$* , Topol. Appl. 157 (2010), 2069–2085.

- [5] J. G. Anaya, D. Maya, F. Vázquez-Juárez, *The hyperspace  $HS_m^n(X)$  for a finite graph  $X$  is unique*, *Topology Appl.* 157 (2018), 428–439.
- [6] J. G. Anaya, E. Castañeda-Alvarado, A. Illanes, *Continua with unique symmetric product*. *Comment. Math. Univ. Carolin.* 54 (2013), 397–406.
- [7] F. Barragán, *On the  $n$ -fold symmetric product suspensions of continuum*, *Topology Appl.* 157 (2010), 297–604.
- [8] E. Castañeda, A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, *Topol. Appl.* 153 (2006), 1434–1450.
- [9] V. Córdova-Salazar, D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique third symmetric product*, *Topology. Appl.* 268(1) (2019), doi:<https://doi.org/10.1016/j.topol.2019.106917>.
- [10] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph*, I, *Fund. Math.* 62 (1968) 265–286.
- [11] R. Escobedo, M. de J. López, S. Macías, *On the hyperspace suspension of a continuum*, *Topology Appl.* 138 (2004), 109–124.
- [12] L.A. Guerrero-Méndez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Meshed continua have unique second and third symmetric products*, *Topology Appl.* 191 (2015), 16–27.
- [13] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, *Rocky Mt. J. Math.* 43 (5) (2013), 1583–1624.
- [14] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez-de-la-Vega, *Rigidity of hyperspaces*, *Rocky Mt. J. Math.* 45 (1) (2015), 213–236.
- [15] R. Hernández-Gutiérrez, V. Martínez-de-la-Vega, *Rigidity of symmetric products*, *Topol. Appl.* 160 (2013), 1577–1587.
- [16] D. Herrera-Carrasco, *Dendrites with unique hyperspace*, *Houst. J. Math.* 33 (3) (2007), 795–805.

- [17] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Dendrites with unique hyperspace  $C_2(X)$* , Topol. Appl. 156 (2009), 549–557.
- [18] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Finite graphs have unique hyperspace  $HS_n(X)$* , Topol. Proc. 44 (2014), 75–95.
- [19] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Dendrites with unique symmetric products*, Topol. Proc. 34 (2009), 175–190.
- [20] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Framed continua have unique  $n$ -fold hyperspace suspension*, Topol. Appl. 196 (2015), 652–667.
- [21] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique second symmetric product*, Topol. Appl. 209 (2016), 1–13.
- [22] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua without unique  $n$ -fold hyperspace suspension*, Houston J. Math. 44 (4) (2018), 1335–1365.
- [23] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López Toriz, F. Macías-Romero, G. Montero-Rodríguez, *La clase de las gráficas finitas es  $SF_n$ -cerrada*, capítulo enviado a Matemáticas y sus aplicaciones.
- [24] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Dendrites with unique  $n$ -fold hyperspace*, Topol. Proc. 32 (2008), 321–337.
- [25] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Local dendrites with unique  $n$ -fold hyperspace*, Topol. Appl. 158 (2011), 244–251.
- [26] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Peano continua with unique symmetric products*, J. Math. Res. 4 (4) (2012), 1–9.
- [27] A. Illanes, *The hyperspace  $C_2(X)$  for a finite graph  $X$  is unique*, Glas. Mat. 37 (57) (2002) 347–363.
- [28] A. Illanes, *Finite graphs  $X$  have unique hyperspaces  $C_n(X)$* , Topol. Proc. 27 (2003) 179–188.

- [29] A. Illanes, *Uniqueness of Hyperspaces*, *Quest. Answ. Gen. Topol.* 30 (2012), 21–44.
- [30] A. Illanes, *Models of Hyperspaces*, *Topol. Proc.* 41 (2013), 39–64.
- [31] A. Illanes, S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math.*, Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [32] A. de Jesús Libreros López, *Rigidez del producto simétrico para continuos alambrados*, Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2018.
- [33] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Academic Press, New York, N.Y., 1968.
- [34] J. C. Macías, *On the  $n$ -fold pseudo-hyperspace suspensions of continua*, *Glas. Mat.* 43 (2008), 439–449.
- [35] S. Macías, *On the  $n$ -fold hyperspace suspension of continua*, *Topol. Appl.* 138 (2004) 125–138.
- [36] G. Montero Rodríguez, *Las gráficas finitas tienen  $n$ -ésimo producto simétrico suspensión único*, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, Tesis de Doctorado por presentarse.
- [37] G. Montero-Rodríguez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Finite graphs have unique  $n$ -fold symmetric product suspension*, por aparecer en *Houston J. Math.*
- [38] U. Morales-Fuentes, *Finite graphs have unique  $n$ -fold pseudo-hyperspace suspension*, *Topology Proc.* 52 (2018), 2019–233.
- [39] S. B. Nadler, Jr., *A fixed point theorem for hyperspace suspensions*, *Houston J. Math.* 5 (1) (1979), 125–132.
- [40] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory. An introduction*. *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx

mjlopez@fcfm.buap.mx

fmacias@fcfm.buap.mx

gmontero.fcfm.buap@gmail.com

## Capítulo 6

# Propiedades básicas de los continuos casi enrejados y enrejados

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero,  
Leonardo Ramírez Aparicio  
FCFM, BUAP

### Resumen

Un continuo es un espacio métrico con más de un punto que es compacto y conexo. Si  $X$  es un continuo y  $n$  un entero positivo, denotamos como  $C_n(X)$  la familia de subconjuntos cerrados no vacíos de  $X$  con a lo más  $n$  componentes y metrizado por la métrica de Hausdorff.

En este capítulo presentamos algunos resultados que caracterizan a los continuos casi enrejados como a su subclase de los continuos enrejados. Mostramos que los continuos enrejados poseen la propiedad de ser localmente conexos. Además de una caracterización para cuando  $X$  es enrejado que involucra dicha propiedad con una propiedad de uno de los hiperespacios de  $X$ .

Asimismo, se darán algunas caracterizaciones para los subconjuntos de  $C_n(X)$  que tienen dimensión finita cuando  $X$  es localmente conexo. Entre estas caracterizaciones distinguimos, a dichos subconjuntos como subcontinuos de  $X$  para los cuales existe una gráfica finita como vecindad de ellos, así como una caracterización cuando  $X$ , además de ser localmente conexo, es enrejado.

## 1 Preliminares

Un **continuo** es un espacio métrico  $X$  con más de un punto conexo y compacto. Un subconjunto  $Y$  de  $X$  es un **subcontinuo** de  $X$  si  $Y$  es un continuo o  $Y$  es un conjunto de un punto. Los **hiperespacios** de un continuo  $X$  son espacios cuyos elementos son subconjuntos de  $X$  que cumplen ciertas condiciones

específicas.

Dado un subconjunto  $A$  de un continuo  $X$ , el *interior*, la *cerradura* y la *frontera* de  $A$  en  $X$ , los denotamos por  $\text{int}_X(A)$ ,  $\text{cl}_X(A)$  y  $\text{Bd}_X(A)$ , respectivamente. También, denotamos por  $\mathbb{N}$  al conjunto de los números naturales.

Si  $X$  es un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ , algunos de los hiperespacios de  $X$  son:

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es cerrado en } X\}, \\ C(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\} \text{ y} \\ C_n(X) &= \{A \in 2^X : \text{Atiene a lo más } n \text{ componentes}\}. \end{aligned}$$

La clase  $2^X$  se le conoce como el **hiperespacio de los subconjuntos cerrados** de  $X$ , se acostumbra denotar a  $C_1(X)$  como  $C(X)$ , conocido como el **hiperespacio de los subcontinuos** del continuo  $X$ . Por otra parte,  $C_n(X)$  es conocido como el  **$n$ -ésimo hiperespacio** de  $X$ .

Sean  $X$  un continuo y  $A, B \subset X$ , la distancia entre  $A$  y  $B$  que denotamos como  $d(A, B)$ , está dada de la siguiente manera:

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Si  $p \in X$ , denotamos

$$d(p, A) = d(\{p\}, A).$$

Mientras no se diga lo contrario dado un continuo  $X$ , denotamos por  $d$  la métrica de  $X$ .

Sea  $X$  un espacio métrico con métrica acotada  $d$  y  $A \subset X$ , con  $A$  no vacío. La  $\epsilon$ -**nube** de  $A$  (o la **nube con centro en  $A$  y radio  $\epsilon > 0$** ), es:

$$N_d(\epsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(x, a) < \epsilon\}.$$

Si  $A, B \in 2^X$ , sea  $H_d: 2^X \times 2^X \rightarrow [0, \infty)$  definida para cada  $A, B \in 2^X$  por

$$H_d(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N_d(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\epsilon, A)\}.$$

**Teorema 1.1.** [9, Teorema 0.2] *Sea  $X$  un espacio métrico con métrica acotada  $d$ . La función  $H_d$  es una métrica para  $2^X$ .*

La métrica  $H_d$  se le conoce como la **métrica de Hausdorff inducida por  $d$**  o simplemente **métrica de Hausdorff**. De ahora en adelante, siempre que consideraremos a  $2^X$ , lo haremos con esta métrica.

Observemos que la restricción de la métrica de Hausdorff a  $C(X)$  y  $C_n(X)$  hace de cada uno de estos un espacio métrico.

Ahora presentamos algunos propiedades básicas de las nubes.

**Lema 1.2.** Sean  $X$  un continuo y  $A, B \in 2^X$  tales que  $A \cap B = \emptyset$ . Entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que  $N_d(\epsilon, A) \cap N_d(\epsilon, B) = \emptyset$ .

*Demostración.* Como  $A$  y  $B$  son compactos, entonces  $d(A, B) > 0$ . Sean  $\epsilon = \frac{d(A, B)}{2} > 0$  y supongamos que  $y \in N_d(\epsilon, A) \cap N_d(\epsilon, B)$ , entonces existen  $a \in A$  y  $b \in B$  tales que  $d(a, y) < \epsilon$  y  $d(b, y) < \epsilon$ . Luego,  $d(a, b) \leq d(a, y) + d(b, y) < 2\epsilon = d(A, B)$ , es decir,  $d(a, b) < d(A, B)$ , lo que es una contradicción.  $\square$

**Lema 1.3.** [2, Lema 2.1] Si  $X$  es un continuo,  $A \in 2^X$  y  $U$  es un subconjunto abierto de  $X$  tal que  $A \subset U$ , entonces existe  $\epsilon > 0$  que satisfice  $A \subset N_d(A, \epsilon) \subset U$ .

**Lema 1.4.** [2, Lema 2.8] Si  $X$  es un continuo,  $A, B \in 2^X$  y  $\epsilon > 0$ , entonces  $H_d(A, B) < \epsilon$  si y solo si  $A \subset N_d(B, \epsilon)$  y  $B \subset N_d(A, \epsilon)$ .

Si  $X$  es un continuo con métrica  $d$ ,  $\epsilon > 0$  y  $A \in 2^X$ , denotamos la bola abierta en  $2^X$ , con centro en  $A$  y radio  $\epsilon$  como

$$B_{H_d}(A, \epsilon) = \{B \in 2^X : H_d(A, B) < \epsilon\}.$$

**Definición 1.5.** Sean  $X$  un continuo y  $U_1, U_2, \dots, U_n \subset X$ . El **vietórico de  $U_1, U_2, \dots, U_n$  en  $2^X$** , se define y se denota de la siguiente manera:

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle = \left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i, A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para } i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

**Teorema 1.6.** [9, Teorema 0.13] Sea  $X$  un continuo. Una base de abiertos para la topología inducida por la métrica de Hausdorff de  $2^X$  viene dada por:

$$\left\{ \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle : U_i \text{ es un abierto en } X \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ con } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Sean  $X$  un continuo y  $n, k \in \mathbb{N}$ , el **vietórico de  $U_1, U_2, \dots, U_k$  en  $C_n(X)$** , denotado por  $\langle U_1, U_2, \dots, U_k \rangle_{C_n(X)}$ , es la intersección del vietórico  $\langle U_1, U_2, \dots, U_k \rangle$  y el hiperespacio  $C_n(X)$ , es decir,



$$\langle U_1, U_2, \dots, U_k \rangle_{C_n(X)} = \langle U_1, U_2, \dots, U_k \rangle \cap C_n(X).$$

## 2 Gráficas finitas

En esta sección presentamos algunas propiedades básicas sobre gráficas finitas, que serán de utilidad en algunas demostraciones de la sección 5.

**Definición 2.1.** Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado  $[0, 1]$  con la topología euclídeana. Sea  $h: [0, 1] \rightarrow \alpha$  un homeomorfismo, decimos que  $h(0)$  y  $h(1)$  son los puntos extremos del arco  $\alpha$ . El arco va de  $h(0)$  a  $h(1)$  cuando  $h(0)$  y  $h(1)$  son sus puntos extremos.

**Lema 2.2.** [1, Lema 2.4] Sean  $X$  un espacio topológico arco conexo y  $F_1, F_2$  dos subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de  $X$ . Entonces, existe un arco  $\alpha$  en  $X$  tal que,  $F_1 \cap \alpha = \{x\}$  y  $F_2 \cap \alpha = \{y\}$ , donde  $x, y$  son los puntos extremos de  $\alpha$ .

**Definición 2.3.** Una **curva cerrada simple** es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria con la topología euclídeana.

**Definición 2.4.** Una **gráfica finita** es un continuo que se puede escribir como la unión de un número finito de arcos tales que dos a dos son ajenos o se intersectan solamente en uno o en ambos puntos extremos.

**Teorema 2.5.** Toda gráfica finita es la unión de sus arcos libres.

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica finita. Entonces  $G = \bigcup_{i=1}^n \alpha_i$ , donde cada  $\alpha_i$  es un arco con puntos extremos  $a_i$  y  $b_i$ , y tal que, si  $i \neq j$ ,  $\alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset$  o se intersectan solamente en uno o ambos puntos extremos. Además, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , como  $a_i, b_i \in G$  y  $G$  es un espacio métrico, entonces  $\{a_i, b_i\}$  es cerrado en  $G$ , por lo tanto,  $G - \{a_i, b_i\}$  es abierto en  $G$ . Pero también, cada  $\alpha_j$  es compacto, luego cada  $\alpha_j$  es cerrado en  $G$ . De modo que  $\bigcup_{j \neq i} \alpha_j$  es cerrado en  $G$ . Así,  $(G - \{a_i, b_i\}) \cap (G - \bigcup_{j \neq i} \alpha_j) = \alpha_i - \{a_i, b_i\}$ , es un abierto en  $G$ , es decir,  $\alpha_i$  es un arco libre en  $G$ . Por lo tanto,  $G$  es la unión de sus arcos libres. □

**Teorema 2.6.** [10, Proposición 9.2] *Sean  $X$  y  $Y$  dos gráficas finitas, tales que su intersección es no vacía y finita. Entonces  $X \cup Y$  es una gráfica finita*

**Teorema 2.7.** [10, Corolario 9.10.1] *Todo subcontinuo de una gráfica finita es una gráfica finita.*

El siguiente resultado, es una caracterización para la clase de las gráficas finitas. En particular, este nos dice que el conjunto de puntos de ramificación de cualquier gráfica finita es finito.

**Teorema 2.8.** [10, Corolario 9.10] *Un continuo  $X$  es una gráfica finita si y solo si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

- (a)  $\text{ord}(x, X) < \aleph_0$ , para cada  $x \in X$ .
- (b)  $\text{ord}(x, X) \leq 2$  para todos, excepto un número finito de puntos  $x \in X$ .

Terminamos esta sección con el siguiente resultado que aparece en [1, Lema 4.3].

**Teorema 2.9.** *Si  $X$  es un continuo arco conexo y  $G_1, \dots, G_k$  una colección de gráficas finitas de  $X$  ajenas por pares, entonces existen un número finito de arcos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$  en  $X$  con  $k - 1 \in \mathbb{N}$  tales que  $G = \bigcup\{G_i: 1 \leq i \leq k\} \cup \bigcup\{\alpha_i: 1 \leq i \leq k - 1\}$  es una gráfica finita en  $X$ . En particular,*

$$\bigcup_{i=1}^k G_i \subset G.$$

### 3 Dimensión y orden de un continuo $X$ .

Definimos el concepto de dimensión para un espacio topológico. Entre algunos de los resultados importantes de este concepto está, que la dimensión es una propiedad topológica, es decir, es invariante bajo homeomorfismos.

**Definición 3.1.** Sean  $X$  un espacio topológico,  $x \in X$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos la dimensión de  $X$  recursivamente que denotamos como  $\dim(X) \in \{-1, 0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$ , de la siguiente manera:

- (a)  $\dim(X) = -1$  si y solo si,  $X = \emptyset$ .

- (b) Supongamos que hemos definido cuándo un espacio topológico  $Y$  tiene dimensión  $\dim(Y) \leq n - 1$ , para algún  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Entonces, decimos que la dimensión de  $X$  en  $x$  es menor o igual a  $n$ , denotada por  $\dim(x, X) \leq n$ , si y solo si  $X$  tiene una base local de vecindades de  $x$  cuyas fronteras tienen dimensión menor o igual a  $n - 1$ . Si para cada  $x \in X$ , se cumple que  $\dim(x, X) \leq n$ , entonces escribimos que  $\dim(X) \leq n$ .
- (c) La dimensión de  $X$  es igual a  $n$ , denotada por  $\dim(X) = n$ , si y solo si  $\dim(X) \leq n$  y es falso que  $\dim(X) \leq n - 1$ .
- (d) La dimensión de  $X$  en  $x$  es igual a  $n$ , denotada por  $\dim(x, X) = n$ , si y solo si  $\dim(x, X) \leq n$  y es falso que  $\dim(x, X) \leq n - 1$ .
- (e) Decimos que la dimensión de  $X$  es  $\infty$ , denotada por  $\dim(X) = \infty$ , si y solo si es falso que  $\dim(X) \leq n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .
- (f) Decimos que la dimensión de  $X$  en  $x$  es  $\infty$ , denotada por  $\dim(x, X) = \infty$ , si y solo si  $\dim(X) > n$ , para cada  $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$ .

Además, por convención, aceptamos que para cada  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , se cumple que  $n \leq \infty$ .

**Lema 3.2.** *Sea  $X$  un espacio topológico. Si  $Y$  y  $A$  son subconjuntos de  $X$ , entonces*

- (a)  $\text{Bd}_Y(A \cap Y) \subset \text{Bd}_X(A)$ .
- (b) Si  $\text{cl}_X(A) \subset \text{int}_X(Y)$ , entonces  $\text{Bd}_X(A) = \text{Bd}_Y(A)$ .

*Demostración.* Para probar (a) observemos que

$$\begin{aligned} \text{Bd}_Y(A \cap Y) &= \text{cl}_Y(A \cap Y) \cap \text{cl}_Y(Y - A), \\ &\subset \text{cl}_X(A) \cap \text{cl}_X(X - A) \\ &= \text{Bd}_X(A), \end{aligned}$$

es decir,  $\text{Bd}_Y(A \cap Y) \subset \text{Bd}_X(A)$ .

Ahora, para mostrar b) notemos primero que como  $A \subset Y$ , entonces  $X - A = (X - Y) \cup (Y - A)$ . Teniendo esto en cuenta, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \text{Bd}_X(A) &= \text{cl}_X(A) \cap \text{cl}_X(X - A) \\
 &= \text{cl}_X(A) \cap (\text{cl}_X(X - Y) \cup \text{cl}_X(Y - A)) \\
 &= (\text{cl}_X(A) \cap (X - \text{int}_X(Y))) \cup (\text{cl}_X(A) \cap \text{cl}_X(Y - A)) \\
 &= \text{cl}_X(A) \cap \text{cl}_X(Y - A) \\
 &= \text{cl}_X(A) \cap Y \cap \text{cl}_X(Y - A) \\
 &= \text{cl}_Y(A) \cap \text{cl}_Y(Y - A) \\
 &= \text{Bd}_Y(A),
 \end{aligned}$$

es decir,  $\text{Bd}_X(A) = \text{Bd}_Y(A)$ . □

Para una demostración del siguiente resultado referimos al lector a [1, Lema 5.2].

**Teorema 3.3.** *Sean  $X$  un espacio topológico,  $A$  un subespacio de  $X$  y  $x \in A$ . Entonces, se cumple lo siguiente:*

- (a)  $\dim(A) \leq \dim(X)$ .
- (b)  $\dim(x, A) \leq \dim(x, X)$ .
- (c) *Si  $X$  es un espacio topológico regular tal que  $x \in \text{int}_X(A)$ , entonces  $\dim(x, A) = \dim(x, X)$ .*

**Teorema 3.4.** *Sean  $X, Y$  dos espacios topológicos homeomorfos y  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $\dim(X) = n$ , entonces  $\dim(Y) = n$ .*

*Demostración.* La prueba se hace por inducción sobre la dimensión de  $X$ . Si  $\dim(X) = -1$ , entonces  $X = \emptyset$ . Como  $X$  es homeomorfo a  $Y$ , entonces  $Y = \emptyset$ . Así,  $\dim(Y) = -1$ . Supongamos que si  $\dim(X) = n - 1$ , entonces  $\dim(Y) = n - 1$ . Ahora veamos que si  $\dim(X) = n$ , entonces  $\dim(Y) = n$ . Para esto, demostremos que para cada  $x \in X$ , si  $\dim(x, X) = n$ , entonces  $\dim(h(x), Y) = n$ . Supongamos que  $\dim(x, X) = n$ . Sea  $U$  una vecindad de un punto  $h(x)$  en  $Y$ , entonces como  $h$  es continua en  $x$ , se tiene que  $h^{-1}(U)$  es una vecindad de  $x$  en  $X$ . Como  $\dim(x, X)$  es finita, existe  $W$  una vecindad de  $x$  en  $X$  tal que  $x \in W \subset h^{-1}(U)$  y

$\dim(\text{Bd}_X(W)) \leq n - 1$ . Como  $h$  es un homeomorfismo entre  $X$  e  $Y$ , entonces  $h \upharpoonright_{\text{Bd}_X(W)}: \text{Bd}_X(W) \rightarrow h(\text{Bd}_X(W))$  es también un homeomorfismo. Como los homeomorfismos preservan frontentas, es decir, si  $A \subset X$ , entonces  $h(\text{Bd}_X(A)) = \text{Bd}_Y(h(A))$ , por hipótesis de inducción, se cumple que  $\dim(\text{Bd}_X(W)) = \dim(h(\text{Bd}_X(W))) = \dim(\text{Bd}_Y(h(W))) \leq n - 1$ . De esto, se sigue que  $h(W)$  es una vecindad de  $h(x)$  contenida en  $U$  tal que,  $\dim(\text{Bd}_Y(h(W))) \leq n - 1$ . Así,  $\dim(h(x), Y) \leq n - 1$ .

Resta probar que  $\dim(h(x), Y) > n - 1$ . Supongamos que  $\dim(h(x), Y) \leq n - 1$ , luego, por hipótesis de inducción,  $\dim(x, X) \leq n - 1$ , lo que es una contradicción, ya que  $\dim(x, X) = n$ . Así,  $\dim(h(x), Y) > n - 1$  y por lo tanto,  $\dim(h(x), Y) = n$ . Así, como  $x$  fue elegida arbitrariamente en  $X$ , si  $\dim(X) = n$ , entonces  $\dim(Y) = n$ . □

**Lema 3.5.** Sean  $X, Y$  dos espacios topológicos y  $(x, y) \in X \times Y$ . Entonces,  $\dim(x, X) \leq \dim((x, y), X \times Y)$ .

*Demostración.* Notemos primero que la función  $h: X \rightarrow X \times \{y\}$  definida por  $h(x) = (x, y)$  es un homeomorfismo. Luego, como la noción de dimensión en un punto es una propiedad topológica, por el Teorema 3.4,  $\dim(x, X) = \dim((x, y), X \times \{y\})$ . Después, por el Teorema 3.3 a),  $\dim((x, y), X \times \{y\}) \leq \dim((x, y), X \times Y)$ . Por lo tanto,  $\dim(x, X) \leq \dim((x, y), X \times Y)$ . □

**Definición 3.6.** Sean  $X$  un continuo,  $A$  un subconjunto no vacío de  $X$  y  $\beta$  un número cardinal. Se dice que  $A$  es de **orden menor o igual** que  $\beta$  en  $X$ , denotado por  $\text{ord}(A, X) \leq \beta$ , si para cualquier conjunto abierto  $U$  de  $X$  con  $A \subset U$ , existe un conjunto abierto  $V$  de  $X$  tal que,  $A \subset V \subset U$  y  $|\text{Bd}_X(V)| \leq \beta$ . Si  $A = \{x\}$  se escribirá que  $\text{ord}(x, X) \leq \beta$  en lugar de escribir  $\text{ord}(\{x\}, X) \leq \beta$ . Se dice también que  $A$  es de **orden**  $\beta$  en  $X$ , denotado por  $\text{ord}(A, X) = \beta$ , si  $\text{ord}(A, X) \leq \beta$  y para cualquier número cardinal  $\alpha < \beta$ , se tiene que  $\text{ord}(A, X) \not\leq \alpha$ .

**Definición 3.7.** Sea  $X$  un continuo. Un punto  $x$  en  $X$  es un punto **extremo**, **ordinario** y de **ramificación** de  $X$  si,  $\text{ord}(x, X) = 1$ ,  $\text{ord}(x, X) = 2$  y  $\text{ord}(x, X) > 2$ , respectivamente.

Empleamos la siguiente notación para algunos subconjuntos de un continuo  $X$ :

(a)  $O(X) = \{x \in X : x \text{ es un punto ordinario}\}$ .

(b)  $R(X) = \{x \in X : x \text{ es un punto de ramificación}\}$ .

(c)  $E(X) = \{x \in X : x \text{ es un punto extremo}\}$ .

**Teorema 3.8.** *Si  $X$  es un continuo,  $A$  un subespacio de  $X$  y  $x \in A$ , entonces  $\text{ord}(x, A) \leq \text{ord}(x, X)$ . Además, si  $A$  es una vecindad de  $x$  en  $X$ , entonces  $\text{ord}(x, A) = \text{ord}(x, X)$ .*

*Demostración.* Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $A$  con  $x \in U$ , entonces existe  $V$  un subconjunto abierto de  $X$  tal que  $U = A \cap V$ . Como  $\text{ord}(x, X) \leq \text{ord}(x, X)$  y  $x \in V$ , por la Definición 3.6, existe un subconjunto abierto  $W$  de  $X$  tal que,  $x \in W \subset V$  y  $|\text{Bd}_X(W)| \leq \text{ord}(x, X)$ . Por el Lema 3.2 (a),  $\text{Bd}_A(A \cap W) \subset \text{Bd}_X(W)$ , luego,  $|\text{Bd}_A(A \cap W)| \leq \text{ord}(x, X)$ . Por lo tanto, como  $A \cap W$  es un abierto en  $A$  y  $x \in A \cap W \subset U$ , se sigue que,  $\text{ord}(x, A) \leq \text{ord}(x, X)$ .

Supongamos ahora que  $x \in \text{int}_X(A)$ , por el análisis anterior, es suficiente mostrar que  $\text{ord}(x, X) \leq \text{ord}(x, A)$ . Para esto, sea  $U$  un subconjunto abierto de  $X$  que contiene a  $x$ . Notemos que  $x \in \text{int}_X(A) \cap U$ , donde, en particular,  $\text{int}_X(A) \cap U$  es un subconjunto abierto de  $A$ , luego, existe un subconjunto abierto  $W$  de  $A$  tal que  $x \in W \subset \text{int}_X(A) \cap U$  y  $|\text{Bd}_A(W)| \leq \text{ord}(x, A)$ . Como  $x \in W \subset U$ , si demostramos que  $|\text{Bd}_X(W)| = |\text{Bd}_A(W)|$  habremos terminado. Para esto, notemos que, como  $W \subset \text{int}_X(A) \subset A$ , entonces  $W$  es abierto en  $\text{int}_X(A)$  y por ende, en  $X$ . Además, como  $X$  es regular y  $x \in \text{int}_X(A)$ , podemos suponer que  $\text{cl}_X(W) \subset \text{int}_X(A)$ , luego, por el Lema 3.2 (b), se obtiene lo requerido.  $\square$

## 4 Continuos localmente conexos.

Los continuos localmente conexos tienen una importancia vital en el desarrollo de esta sección, tanto que los principales resultados (Teorema 5.6 y Teorema 5.13) giran alrededor de estos.

**Definición 4.1.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $x \in X$ . Se dice que  $V$  es una **vecindad** de  $x$  en  $X$ , si  $V$  es un subconjunto de  $X$  para el cual existe un conjunto abierto  $U$  en  $X$  tal que  $x \in U \subset V$ .

**Definición 4.2.** Decimos que un continuo  $X$  es **localmente conexo en un punto**  $x \in X$  si para cada vecindad  $V$  de  $x$  existe un conjunto abierto conexo  $U$  de  $X$  tal que  $x \in U \subset V$ . Cuando  $X$  es **localmente conexo** en cada uno de sus puntos, decimos que es localmente conexo.

Una propiedad equivalente a la de ser localmente conexo, es la siguiente.

**Teorema 4.3.** *Un continuo  $X$  es localmente conexo si y solo si las componentes de cada subconjunto abierto de  $X$  son abiertas en  $X$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es localmente conexo. Sean  $U$  un abierto de  $X$  y  $C$  una componente de  $U$ . Sea  $x \in C \subset U$ . Como  $X$  es localmente conexo, existe  $V$  un abierto y conexo en  $X$  tal que  $x \in V \subset U$ . Luego, por la maximalidad de  $C$ ,  $x \in V \subset C$ . Por lo tanto,  $C$  es abierto en  $X$ . Ahora, supongamos que las componentes de cada subconjunto abierto de  $X$  son abiertas en  $X$ . Dados  $x \in X$  y  $U$  un abierto de  $X$  que contiene a  $x$ . Sea  $C$  la componente de  $U$  que contiene a  $x$ . Luego,  $C$  es abierto y conexo en  $X$  tal que  $x \in C \subset U$ . Por lo tanto,  $X$  es localmente conexo.  $\square$

**Definición 4.4.** Sea  $X$  un continuo. Se dice que  $X$  es **conexo en pequeño en un punto**  $x \in X$  si para cada vecindad  $V$  de  $x$  existe una vecindad conexa  $W$  de  $x$  tal que  $x \in \text{int}_X(W) \subset W \subset V$ . Además,  $X$  es **conexo en pequeño** cuando  $X$  es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.

**Teorema 4.5.** *Un espacio métrico  $X$  es localmente conexo si y solo si  $X$  es conexo en pequeño.*

*Demostración.* Sea  $X$  un espacio métrico localmente conexo. Es claro por definición que  $X$  es conexo en pequeño en cada punto  $x \in X$ . Recíprocamente, supongamos que  $X$  es conexo en pequeño. Por el Teorema 4.3, basta demostrar que cada componente de cualquier abierto de  $X$  es un abierto de  $X$ . Sean  $U$  un abierto de  $X$  y  $C$  una componente de  $U$ . Sea  $x \in C$ . Como  $x \in U$ , existe una vecindad conexa  $V$  de  $x$  tal que  $x \in \text{int}_X(V) \subset V \subset U$ , luego  $x \in \text{int}_X(V) \subset C$ , es decir  $C$  es abierto en  $X$ .  $\square$

**Definición 4.6.** Un continuo  $X$  se dice que es arco conexo, si para cualesquiera dos puntos  $x, y \in X$  tales que  $x \neq y$ , existe un arco  $\alpha$  en  $X$  con puntos extremos  $x$  y  $y$ .

**Teorema 4.7.** [10, Proposición 8.23] *Todo continuo localmente conexo es arco conexo.*

**Teorema 4.8.** [10, Teorema 8.26] *Sea  $X$  un continuo localmente conexo, entonces cualquier subconjunto abierto y conexo de  $X$  es arco conexo.*

El siguiente resultado acerca de conexidad, nos será de ayuda en la demostración del Teorema 4.10

**Teorema 4.9.** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{A}$  una familia de subconjuntos conexos de  $X$ . Si existe un subconjunto conexo  $A_0 \in \mathcal{A}$  tal que  $A_0 \subset \bigcup \mathcal{A}$  y para cada  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A \cap A_0 \neq \emptyset$ , entonces  $\bigcup \mathcal{A}$  es conexo.*

*Demostración.* Sean  $U$  y  $V$  abiertos de  $\bigcup \mathcal{A}$  tales que  $\bigcup \mathcal{A} = U \cup V$  y  $U \cap V = \emptyset$ . Notemos que  $U \cap A_0$  y  $V \cap A_0$  son subconjuntos ajenos y abiertos de  $A_0$  tales que  $(U \cap A_0) \cup (V \cap A_0) = (U \cup V) \cap A_0 = A_0$ . Luego, como  $A_0$  es conexo, se sigue que  $U \cap A_0 = \emptyset$  o  $V \cap A_0 = \emptyset$ . Por lo que,  $A_0 \subset V$  o  $A_0 \subset U$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $A_0 \subset V$ . Por otro lado, análogamente, se puede demostrar que para cada  $A \in \mathcal{A}$ , se cumple que  $A \subset V$  o  $A \subset U$ . Como  $A \cap A_0 \neq \emptyset$ , esto implica que  $A \subset V$ . Por lo tanto,  $\bigcup \mathcal{A} \subset V$ , es decir,  $(\bigcup \mathcal{A}) \cap U = \emptyset$ . Así,  $\bigcup \mathcal{A}$  es conexo.  $\square$

**Teorema 4.10.** *Sea  $X$  un continuo localmente conexo. Si  $Y$  es un subcontinuo de  $X$  y  $U$  es cualquier subconjunto abierto de  $X$  tal que  $Y \subset U$ , entonces existe un subcontinuo  $Z$  de  $X$  tal que  $Y \subset \text{int}_X(Z) \subset Z \subset U$ .*

*Demostración.* Como  $X$  es un continuo localmente conexo y  $Y \subset U$  es un subcontinuo de  $X$  con  $U$  abierto en  $X$ , entonces, para cada  $y \in Y$  existe un conjunto abierto y conexo  $C_y$  de  $X$  tal que  $y \in C_y \subset \text{cl}_X(C_y) \subset U$  donde  $\text{cl}_X(C_y)$  es conexo ya que  $C_y$  lo es. Como  $Y$  es compacto y  $Y \subset \bigcup \{C_y : y \in Y\}$ , existe  $I$  un subconjunto finito de  $Y$  tal que  $Y \subset \bigcup \{C_y : y \in I\}$ . Sean  $\mathcal{A} = \{\text{cl}_X(C_y) : y \in I\}$  y  $Z = \bigcup \mathcal{A}$ , entonces  $Z$  es un conjunto cerrado de  $X$  y como  $X$  es compacto, entonces  $Z$  es compacto, además  $Z \subset U$ . Notemos que  $Y \subset Z$ ,  $Y$  es conexo y para cada  $\text{cl}_X(C_y) \in \mathcal{A}$ ,  $\text{cl}_X(C_y) \cap Y \neq \emptyset$ , entonces, por el Teorema 4.9,  $Z$  es conexo. Así, como  $Z \subset X$  es compacto y conexo, entonces  $Z$  es un subcontinuo de  $X$ . Además, como  $\bigcup \{C_y : y \in I\} \subset Z$ , entonces  $Y \subset \bigcup \{C_y : y \in I\} \subset \text{int}_X(Z)$ , de donde,  $Y \subset \text{int}_X(Z) \subset Z \subset U$ . Concluyendo lo requerido.  $\square$

**Corolario 4.11.** *Si  $X$  es un continuo localmente conexo y  $Y_1, Y_2$  son subcontinuos de  $X$  ajenos, entonces, existen subcontinuos  $Z_1$  y  $Z_2$  de  $X$  ajenos tales que,  $Y_1 \subset \text{int}_X(Z_1)$  y  $Y_2 \subset \text{int}_X(Z_2)$ .*



*Demostración.* Como  $Y_1$  y  $Y_2$  son dos subcontinuos de  $X$  ajenos, entonces, en particular,  $Y_1$  y  $Y_2$  son subconjuntos cerrados de  $X$ . Luego, como  $X$  es un espacio métrico y por lo tanto, un espacio normal, existen,  $U_1, U_2$  subconjuntos abiertos de  $X$  ajenos, tales que  $Y_1 \subset U_1$  y  $Y_2 \subset U_2$ . Así, por el Teorema 4.10, existen subcontinuos  $Z_1$  y  $Z_2$  de  $X$ , tales que,  $Y_1 \subset \text{int}_X(Z_1) \subset Z_1 \subset U_1$  y  $Y_2 \subset \text{int}_X(Z_2) \subset Z_2 \subset U_2$ , de donde  $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$ .  $\square$

**Teorema 4.12.** Sean  $X$  y  $Y$  dos continuos métricos y  $f: X \rightarrow Y$  una función biyectiva y continua. Entonces  $f$  es un homeomorfismo.

*Demostración.* Como  $f$  es biyectiva, entonces existe su inversa  $f^{-1}$ . Para probar que  $f$  es un homeomorfismo, es suficiente mostrar  $f^{-1}$  es continua. Sea  $U$  un cerrado en  $X$ , como  $X$  es compacto, entonces  $U$  es compacto. Además, como  $f$  es continua, entonces,  $f(U)$  es compacto y por lo tanto, cerrado en  $Y$ . Así,  $f^{-1}$  es continua y por ende,  $f$  un homeomorfismo.  $\square$

**Teorema 4.13.** [1, Teorema 6.9] Si  $X$  es un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ , la función

$$\psi: (2^X)^n \rightarrow 2^X \text{ que está definida por } (A_1, A_2, \dots, A_n) \xrightarrow{\psi} \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ es continua.}$$

**Theorem 4.1.** Sean  $X$  un continuo y  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$  una familia de subcontinuos ajenos dos a dos en  $X$ . La función  $\varphi: \prod_{i=1}^n C(A_i) \rightarrow \langle A_1, \dots, A_n \rangle_{C_n(X)}$

$$\text{definida por } (B_1, B_2, \dots, B_n) \xrightarrow{\varphi} \bigcup_{i=1}^n B_i \text{ es un homeomorfismo.}$$

*Demostración.* Observemos primero que  $\varphi = \psi \upharpoonright_{C(A_1) \times C(A_2) \times \dots \times C(A_n)}$ , entonces por el Teorema 4.13, tenemos que  $\varphi$  es continua. Así, por el Teorema 4.12 es suficiente mostrar que  $\varphi$  es biyectiva.

Sean  $B_1, C_1 \in C(A_1)$ ,  $B_2, C_2 \in C(A_2)$ , ...,  $B_n, C_n \in C(A_n)$  tales que  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n C_i$ . Notemos que  $B_i, C_i \subset A_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , por lo que,  $B_i \cap C_j \subset B_i \cap A_j \subset A_i \cap A_j = \emptyset$ , para cada  $i \neq j$ , con  $j \in \{1, \dots, n\}$ , donde la igualdad es debido a que los elementos de  $\mathcal{A}$  son disjuntos dos a dos. Sea  $x \in B_i \subset \bigcup_{i=1}^n C_i$ , entonces, existe  $k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $x \in C_k$ . Luego, por lo escrito anteriormente,  $k = i$ , de donde  $x \in C_i$ . Como  $x$  es arbitrario en  $B_i$ , entonces  $B_i \subset C_i$ . Análogamente, obtenemos que  $C_i \subset B_i$ . Por lo tanto,  $B_i = C_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Así,  $\varphi$  es inyectiva.

Para mostrar que  $\varphi$  es suprayectiva, sea  $G \in \langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle_{C_n(X)}$ , entonces, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , se cumple que  $G \cap A_i \neq \emptyset$ , además que  $G \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$  y  $G$  tiene a lo más  $n$  componentes. Luego, observemos que como  $\mathcal{A}$  es una colección de conjuntos disjuntos dos a dos en  $X$ , se sigue que,  $G_1 = G \cap A_1, \dots, G_n = G \cap A_n$  son las  $n$  componentes distintas de  $G$ . Por otro lado, como  $G$  es cerrado en  $X$  pues  $G \in \langle A_1, \dots, A_n \rangle$  y además, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $G_i \subset A_i$ , entonces  $G_i$  es cerrada en  $A_i$ , es decir,  $G_i \in C(A_i)$ . Así, como  $G_1, \dots, G_n$  son las  $n$  componentes distintas de  $G$ , entonces  $\varphi(G_1, \dots, G_n) = \bigcup_{i=1}^n G_i = G$ . Así, concluimos que  $\varphi$  es suprayectiva. Por lo tanto, como  $\varphi$  es una función biyectiva, continua, con dominio compacto y codominio de Hausdorff, entonces  $\varphi$  es un homeomorfismo.  $\square$

## 5 Continuos enrejados y casi enrejados.

En 2013 Alejandro Illanes, Rodríguez Hernández Gutiérrez y Verónica de la Vega definieron nuevas clases de continuos en su artículo titulado **Unicidad de hiperespacios para continuos de Peano** (véase [3]), a saber; la clase de los continuos enrejados y casi enrejados. Para poder definir a estos, consideremos los siguientes subconjuntos de un continuo  $X$ .

Dado un continuo  $X$ , sean

$$\mathcal{G}(X) = \{x \in X : x \text{ tiene una vecindad } G \text{ en } X, \text{ tal que} \\ G \text{ es una gráfica finita } \}, \\ \mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X).$$

**Observación 5.1.** Dado un continuo  $X$ , el conjunto  $\mathcal{G}(X)$  es abierto en  $X$ , luego,  $\mathcal{P}(X)$  es cerrado en  $X$ .

**Definición 5.2.** Decimos que un continuo  $X$  es **casi enrejado** si y solo si el conjunto  $\mathcal{G}(X)$  es denso en  $X$ . Un continuo casi enrejado  $X$  es **enrejado** si,  $X$  tiene una base de vecindades  $\mathcal{B}$  tal que para cada elemento  $U \in \mathcal{B}$  se cumple que  $U - \mathcal{P}(X)$  es conexo.

Demostremos ahora el siguiente resultado, el cual nos será de utilidad más adelante.

**Lema 5.3.** Sean  $X$  un continuo casi enrejado y  $U$  un subconjunto de  $X$ . Entonces  $\text{int}_X(U) \subset \text{cl}_X(U - \mathcal{P}(X))$ .

*Demostración.* Cuando  $\text{int}_X(U) = \emptyset$ , el resultado es inmediato. Sean  $x \in X$  y  $V$  un subconjunto abierto no vacío de  $X$  tal que  $x \in \text{int}_X(U)$  y  $x \in V$ . Entonces  $V \cap \text{int}_X(U)$  es un subconjunto abierto no vacío de  $X$ . Como  $X$  es un continuo casi enrejado y además,  $\text{int}_X(\mathcal{P}(X)) = X - \text{cl}_X(\mathcal{G}(X))$ , se sigue que  $\text{int}_X(\mathcal{P}(X)) = \emptyset$ . Por lo que  $V \cap \text{int}_X(U) \not\subset \mathcal{P}(X)$ , así,  $V \cap (\text{int}_X(U) - \mathcal{P}(X)) = (V \cap \text{int}_X(U)) - \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$ . Como  $U - \mathcal{P}(X) \supset \text{int}_X(U) - \mathcal{P}(X)$ , se tiene que  $V \cap (U - \mathcal{P}(X)) \supset V \cap (\text{int}_X(U) - \mathcal{P}(X)) \neq \emptyset$ , es decir,  $x \in \text{cl}_X(U - \mathcal{P}(X))$ . Por lo tanto, como  $x$  es arbitrario,  $\text{int}_X(U) \subset \text{cl}_X(U - \mathcal{P}(X))$ .  $\square$

**Lema 5.4.** Si  $X$  es un continuo enrejado, entonces  $X$  es un continuo localmente conexo.

*Demostración.* Como  $X$  es un continuo enrejado,  $X$  tiene una base de vecindades  $\mathcal{B}$  tal que, para cada elemento  $U \in \mathcal{B}$ ,  $U - \mathcal{P}(X)$  es conexo. Sea  $x \in X$  y  $V$  un subconjunto abierto de  $X$ , tal que  $x \in V$ . Elijamos ahora,  $W$  un subconjunto abierto tal que,  $x \in W \subset \text{cl}_X(W) \subset V$ . Sea  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in \text{int}_X(U) \subset U \subset W$ . Por el Lema 5.3,  $\text{int}_X(U) \subset \text{cl}_X(U - \mathcal{P}(X)) \subset \text{cl}_X(U) \subset \text{cl}_X(W) \subset V$ . Esto nos dice que,  $x \in \text{int}_X(\text{cl}_X(U - \mathcal{P}(X))) \subset \text{cl}_X(U - \mathcal{P}(X)) \subset V$ . Además,  $U - \mathcal{P}(X)$  es conexo, entonces  $\text{cl}_X(U - \mathcal{P}(X))$  también es conexo. Por lo tanto, como  $x$  es arbitrario en  $X$ , se sigue que  $X$  es conexo en pequeño y por el Teorema 4.5, también localmente conexo.  $\square$

**Lema 5.5.** Sea  $X$  un continuo. Entonces  $X$  es enrejado si y solo si  $X$  es casi enrejado, y  $X$  tiene una base  $\mathcal{D}$  de subconjuntos abiertos conexos de  $X$  tal que, para cada elemento  $U \in \mathcal{D}$ ,  $U - \mathcal{P}(X)$  es conexo.

*Demostración.* La suficiencia es inmediata por la definición de continuo enrejado, y ya que todo elemento de  $U \in \mathcal{D}$ , en particular, es un conjunto abierto, y por lo tanto una vecindad de cada uno de sus puntos.

Para la necesidad, supongamos que  $X$  es enrejado. Sea  $\mathcal{B}$  una base de vecindades de  $X$  tal que, para cada elemento  $U \in \mathcal{B}$ ,  $U - \mathcal{P}(X)$  es conexo. Sea  $p \in X$  y  $W$  un subconjunto abierto no vacío de  $X$  tal que  $p \in W$ .

Sea  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $p \in \text{int}_X(U) \subset U \subset W$ . Por el Lema 5.4, como  $X$  es localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo  $Z$  de  $X$  tal que  $p \in Z \subset \text{int}_X(U)$ . Ya que  $\mathcal{G}(X)$  es abierto en  $X$ , entonces  $\mathcal{P}(X)$  es cerrado

en  $X$ . Luego, se tiene que  $W - \mathcal{P}(X)$  es un subconjunto abierto de  $X$ . Como  $U - \mathcal{P}(X) \subset W - \mathcal{P}(X)$ , para cada  $x \in U - \mathcal{P}(X)$ , existe un subconjunto abierto y conexo  $V_x$  de  $X$  tal que,  $x \in V_x \subset W - \mathcal{P}(X)$ .

Consideramos ahora,  $V = Z \cup (\bigcup \{V_x : x \in U - \mathcal{P}(X)\})$ . Notemos que  $V$  es un subconjunto abierto de  $X$  ya que es la unión de dos conjuntos abiertos de  $X$ . Sea  $S = \bigcup \{V_x : x \in U - \mathcal{P}(X)\}$ , entonces  $U - \mathcal{P}(X) \subset S \subset W - \mathcal{P}(X) \subset W$ . En particular,  $S \subset W$ . Luego, como  $Z \subset W$ , se tiene que,  $p \in Z \subset V \subset W$ , es decir,  $p \in V \subset W$ . Además, como  $V - \mathcal{P}(X) = (Z \cup S) - \mathcal{P}(X) = (Z - \mathcal{P}(X)) \cup (S - \mathcal{P}(X)) = (Z - \mathcal{P}(X)) \cup S$ , se sigue que  $S \subset V - \mathcal{P}(X)$ . Como  $Z - \mathcal{P}(X) \subset U - \mathcal{P}(X)$ , entonces  $V - \mathcal{P}(X) \subset (U - \mathcal{P}(X)) \cup S \subset S$  ya que  $U - \mathcal{P}(X) \subset S$ . Así, se obtiene que  $S = V - \mathcal{P}(X)$ .

Por otro lado, como  $V - \mathcal{P}(X) = V \cap \mathcal{G}(X)$ , se sigue que  $V - \mathcal{P}(X)$  es abierto en  $X$ . Más aun, como  $\{V_x : x \in U - \mathcal{P}(X)\}$  es una familia de subconjuntos conexos de  $X$  y  $U - \mathcal{P}(X)$  es un subconjunto conexo de  $X$  tal que,  $U - \mathcal{P}(X) \subset S$  y cada  $V_x \in \{V_x : x \in U - \mathcal{P}(X)\}$  cumple que,  $V_x \cap (U - \mathcal{P}(X)) \neq \emptyset$ , entonces, por el Lema 4.9,  $S$  es conexo, es decir,  $V - \mathcal{P}(X)$  es conexo. Por último, como  $V - \mathcal{P}(X) \subset V$ , por el Lema 5.3, se sigue que  $V - \mathcal{P}(X) \subset V \subset \text{cl}_X(V - \mathcal{P}(X))$ . Por lo tanto  $V$  es conexo y por lo mencionado más anteriormente, también es abierto.  $\square$

**Teorema 5.6.** Sean  $X$  un continuo localmente conexo,  $n \in \mathbb{N}$  y  $A \in C_n(X)$ . Los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a)  $\dim(A, C_n(X))$  es finita.
- (b) Existe una gráfica finita  $D$  contenida en  $X$ , tal que  $A \subset \text{int}_X(D)$ .
- (c)  $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$ .

*Demostración.* (a) $\Rightarrow$ (b) Sea  $k$  el número de componentes de  $A$ . Entonces,  $k \leq n$ .

Supongamos que  $k = 1$ , es decir,  $A \in C(X)$ . Como  $C(X) \subset C_n(X)$ , por el Teorema 3.3 (b), se tiene que  $\dim(A, C(X)) \leq \dim(A, C_n(X))$  y por lo tanto,  $\dim_A(C(X))$  es finita. Luego, por [5, Lema 2.2, Afirmación 1], existe una gráfica finita  $D$  contenida en  $X$  tal que,  $A \subset \text{int}_X(D)$ .

Supongamos ahora que  $k > 1$ . Sean  $A_1, \dots, A_k$  las componentes de  $A$ . Notemos que  $A_1, \dots, A_k$  son subcontinuos de  $X$  ajenos por pares. Así, por el

Corolario 4.11, existen subcontinuos  $Z_1, \dots, Z_k$  de  $X$  ajenos por pares, tales que,  $A_i \subset \text{int}_X(Z_i)$  para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

Dado  $i \in \{1, \dots, k\}$ , notemos que,  $A_i \in \langle \text{int}_X(Z_i) \rangle_{C(X)} \subset C(Z_i)$ , luego, se tiene que,  $C(Z_i)$  es una vecindad de  $A_i$  en  $C(X)$ , o sea,  $A_i \in \text{int}_{C(X)}(C(Z_i))$ . Así, por el Teorema 3.3 (c),  $\dim(A_i, C(X)) = \dim(A_i, C(Z_i))$ . Luego, por el Teorema 3.5 tenemos que,  $\dim(A_i, C(Z_i)) \leq \dim\left((A_1, \dots, A_k), \prod_{j=1}^k C(Z_j)\right)$ .

Por otro lado, por el Teorema 4.1, existe un homeomorfismo

$$\varphi: \prod_{j=1}^k C(Z_j) \rightarrow \langle Z_1, \dots, Z_k \rangle_{C_k(X)},$$

que está definido por  $(B_1, B_2, \dots, B_n) \xrightarrow{\varphi} \bigcup_{i=1}^n B_i$ . Luego, por el Teorema 3.4,

$$\dim\left((A_1, \dots, A_k), \prod_{j=1}^k C(Z_j)\right) = \dim\left(A, \langle Z_1, \dots, Z_k \rangle_{C_k(X)}\right),$$

como  $\langle Z_1, \dots, Z_k \rangle_{C_k(X)} \subset C_n(X)$ , por el Teorema 3.3 (b),  $\dim\left(A, \langle Z_1, \dots, Z_k \rangle_{C_k(X)}\right) \leq \dim(A, C_n(X))$ . Debido a esto y como  $\dim(A_i, C(X)) = \dim(A_i, C(Z_i))$ , se tiene que  $\dim(A_i, C(X)) \leq \dim(A, C_n(X))$ . Por lo tanto, la dimensión de  $C(X)$  en  $A_i$  es finita. Así, por [5, Lema 2.2, Afirmación 1], existe una gráfica finita  $G_i$  contenida en  $X$ , tal que,  $A_i \subset \text{int}_X(G_i)$ . Además, como cada  $A_i$  es conexo y  $A_i \subset \text{int}_X(G_i) \cap \text{int}_X(Z_i)$ , existe una componente  $C_i$  de  $\text{int}_X(G_i) \cap \text{int}_X(Z_i)$  tal que,  $A_i \subset C_i$ . Notemos que,  $\text{int}_X(G_i) \cap \text{int}_X(Z_i)$  es abierto en  $X$  y  $X$  es localmente conexo. Luego, por el Teorema 4.3,  $C_i$  es abierto en  $X$ . Tomando ahora,  $D_i = \text{cl}_X(C_i)$ , se sigue que,  $D_i$  es conexo y cerrado en  $X$ . Además, como  $G_i \cap Z_i \supset C_i$  es cerrado en  $X$ , se tiene que  $D_i \subset G_i \cap Z_i$ . Por lo tanto,  $D_i$  es un subcontinuo de  $G_i$  y  $Z_i$ . Así, por el Teorema 2.7,  $D_i$  es una gráfica finita, la cual, cumple que,  $A_i \subset C_i \subset \text{int}_X(D_i) \subset D_i \subset Z_i$ . Así, como  $D_i \subset Z_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$  y los  $Z_i$  son ajenos por pares, se sigue que,  $D_1, \dots, D_k$  es una colección de gráficas finitas contenidas en  $X$ , ajenas por pares. Luego, por el Teorema 2.9, existe una gráfica finita  $D$  contenida en  $X$  tal que  $\bigcup_{i=1}^k D_i \subset D$ . Así,  $\bigcup_{i=1}^k A_i \subset \bigcup_{i=1}^k \text{int}_X(D_i) \subset D$ . Por lo tanto, como

$A = \bigcup_{i=1}^k A_i$ , se sigue que,  $A \subset \text{int}_X(D)$ . Concluyendo lo requerido.

(b) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que  $A \subset \text{int}_X(D)$  para alguna gráfica finita  $D$  contenida en  $X$ . Notemos que  $A \in \langle \text{int}_X(D) \rangle_{C_n(X)} \subset C_n(D)$ , luego, se tiene que,  $C_n(D)$  es una vecindad de  $A$  en  $C_n(X)$ , es decir,  $A \in \text{int}_{C_n(X)}(C_n(D))$ . Así, por el Teorema 3.3 (b),  $\dim(A, C_n(X)) = \dim(A, C_n(D))$ . Luego, por [7, Teorema 2.4],

$$\begin{aligned} \dim(A, C_n(D)) &= 2n + \sum_{p \in A \cap R(D)} (\text{ord}(p, D) - 2) \\ &\leq 2n + \sum_{p \in R(D)} (\text{ord}(p, D) - 2), \end{aligned}$$

es decir,  $\dim(C_n(D)) \leq 2n + \sum_{p \in R(D)} (\text{ord}(p, D) - 2)$ . Por el Teorema 2.8,  $R(D)$  es finito, entonces  $\dim(C_n(D))$  es finita. Por lo tanto,  $\dim(A, C_n(D))$  y  $\dim(A, C_n(X))$  son finitas.

(b) $\Rightarrow$ (c) Esta demostración es clara, ya que cada punto de  $A$  tiene a  $D$  como vecindad, la cual, es una gráfica finita contenida en  $X$ . Por lo tanto,  $A \subset \mathcal{G}(X)$  y por ende,  $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$ .

(c) $\Rightarrow$ (b) Supongamos que  $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$ . Entonces para cada punto  $a \in A$ , existe una gráfica finita  $D_a$  en  $X$  tal que,  $a \in \text{int}_X(D_a)$ . Como  $X$  es localmente conexo, existe un conjunto abierto y conexo  $F_a$  de  $X$  tal que  $a \in F_a \subset \text{cl}_X(F_a) \subset \text{int}_X(D_a)$ .

Además, como  $A \subset \bigcup_{a \in A} F_a$  y  $A$  es compacto, existen  $a_1, a_2, \dots, a_r$ , con  $r \in \mathbb{N}$  tales que,  $A \subset \bigcup_{i=1}^r F_{a_i}$ . Sea  $F = \bigcup_{i=1}^r \text{cl}_X(F_{a_i})$ , entonces  $F$  tiene  $K$  componentes con  $K \leq r$ . Sean  $C_1, C_2, \dots, C_k$  dichas componentes. Notemos que para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $C_i$  es un continuo y además,  $C_i \subset F \subset \bigcup_{i=1}^r \text{int}_X(D_{a_i})$ . Así, dado  $a \in C_i$ , existe  $j \in \{1, 2, \dots, r\}$  tal que  $a \in \text{int}_X(D_{a_j})$ . Es decir,  $D_{a_j}$  es una vecindad de  $a$  en  $X$ . Luego, por el Teorema 3.8, se tiene que  $\text{ord}(a, C_i) \leq \text{ord}(a, X) = \text{ord}(a, D_{a_j})$ , es decir, para cada  $a \in C_i$ ,  $\text{ord}(a, C_i) \leq \text{ord}(a, D_{a_j})$ . Más aun, por el Teorema 2.8 cada punto de  $D_{a_j}$  es de orden finito y todos salvo una cantidad finita de puntos de  $D_{a_j}$  tienen orden menor o igual a dos en  $D_{a_j}$ . Como  $\{a_j : j \in \{1, 2, \dots, r\}\}$  es un conjunto finito, de lo anterior, se sigue que cada punto de  $C_i$  tiene orden finito y todos salvo una cantidad finita de sus puntos tienen orden menor o igual que dos en  $C_i$ .

Así, por el Teorema 2.8,  $C_i$  es una gráfica finita. De modo que  $C_1, C_2, \dots, C_n$  es una colección de gráficas finitas ajenas por pares y por el Teorema, 4.8,  $X$  es arco conexo. Aplicando el Teorema 2.9, obtenemos una gráfica finita  $D$  contenida en  $X$  tal que  $F = \bigcup_{i=1}^k C_i \subset D$ . Entonces,  $A \subset \bigcup_{i=1}^r F_{a_i} \subset F \subset D$  y por lo tanto,  $A \subset \text{int}_X(D)$  que es como se requería.  $\square$

Dado  $X$  un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ , sea

$$\mathfrak{F}_n(X) = \{A \in C_n(X) : \dim(A, C_n(X)) \text{ es finita} \},$$

se acostumbra denotar  $\mathfrak{F}_1(X)$  como  $\mathfrak{F}(X)$ . Sea  $2^{2^X}$  la familia de todos los subconjuntos no vacíos y cerrados de  $2^X$  con la métrica de Hausdorff  $H_{H_d}$  definida para toda  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in 2^{2^X}$  como

$$H_{H_d}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \{r > 0 : \mathcal{A}_1 \subset N_{H_d}(\mathcal{A}_2, r), \mathcal{A}_2 \subset N_{H_d}(\mathcal{A}_1, r)\}.$$

**Lema 5.7.** [9, Lema 1.48] *Sea  $X$  un continuo. Sea  $\rho: 2^{2^X} \rightarrow 2^X$  dada por  $\rho(\mathcal{A}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ . Entonces  $\rho$  está bien definida y para cada  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in 2^{2^X}$  se cumple que*

$$H_d(\rho(\mathcal{A}_1), \rho(\mathcal{A}_2)) \leq H_{H_d}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2).$$

*En particular,  $\rho$  es continua.*

**Definición 5.8.** Un continuo  $X$  se dice que es arco conexo, si para cualesquiera dos puntos  $x, y \in X$  tales que  $x \neq y$ , existe un arco  $\alpha$  en  $X$  con extremos  $x$  y  $y$ .

**Definición 5.9.** Un **árbol** es un continuo que es una gráfica finita y no contiene curvas cerradas simples.

**Lema 5.10.** *Si  $X$  es un espacio topológico arco conexo y  $K$  es un subconjunto finito de  $X$ , entonces existe un árbol  $T$  en  $X$  tal que  $K \subset T$ .*

*Demostración.* La demostración se hace por inducción sobre el número finito  $n$  de elementos de  $F$ . Si  $F = \{x, y\}$ , como  $X$  es arco conexo, existe un arco  $T$  en  $X$  que une  $x$  con  $y$ , como en particular  $T$  es homeomorfo a  $[0, 1]$  que no contiene una curva cerrada simple, entonces  $T$  es un árbol tal que  $F \subset T$ . Supongamos ahora que el resultado es cierto para cualquier subconjunto que tiene a lo más  $n - 1$  elementos y demostremos que el lema es cierto para todo subconjunto finito con  $n$  elementos. Para esto, sea  $F$  un subconjunto

de  $X$  con  $n - 1$  elementos y  $x \in X$ , por el paso inductivo, existe  $T$  un árbol contenido en  $X$  tal que  $F \subset T$ . Ahora notemos, si  $x \in T$ , entonces  $F \cup \{x\} \subset T$  y termina la demostración. En caso contrario, si  $x \notin T$ , dado  $y \in T$ , como  $x, y \in X$  y  $X$  es arco conexo, existe un arco  $\beta$  en  $X$  tal que va de  $x$  a  $y$ . Aplicando el Lema 1.17, existe un arco  $\alpha$  que está contenido en  $X$  tal que,  $T \cap \alpha = \{q\}$  con  $x$  y  $q$  los puntos extremos de  $\alpha$ . Notemos que  $q \neq x$ . Aplicando ahora el Teorema 1.4, se obtiene que  $T \cup \alpha$  es una gráfica finita. Si demostramos que  $T \cup \alpha$  no contiene una curva cerrada simple, entonces  $T \cup \alpha$  será un árbol y habremos terminado. Para esto, supongamos que  $C \subset T \cup \alpha$  es una curva cerrada simple. Como  $T$  es un árbol y  $\alpha$  es un arco,  $C$  no puede estar contenido en ninguno de los dos. Además, como  $T$  y  $\alpha$  son compactos,  $(T \cup \alpha) - \alpha = T - \alpha$  y  $(\alpha \cup T) - T = \alpha - T$  son subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de  $T \cup \alpha$  que además intersectan a  $C - \{q\}$  ya que, como  $C \not\subset T$ , y  $C \not\subset \alpha$ , existen  $c_1, c_2 \in C$  tales que  $c_1 \notin T$  y  $c_2 \notin \alpha$ . Luego, como  $C \subset T \cup \alpha$  entonces  $c_1 \in \alpha$  y  $c_2 \in T$ . Observe que  $c_1 \neq q$  y  $c_2 \neq q$ , entonces  $(T - \alpha) \cap (C - \{q\}) \neq \emptyset$  y  $(\alpha - T) \cap (C - \{q\}) \neq \emptyset$ . Luego, como  $C - \{q\} = C - (T \cap \alpha) = (C - T) \cup (C - \alpha) \subset (\alpha - T) \cup (T - \alpha)$ , entonces  $C - \{q\}$  es desconexo, lo que es una contradicción, ya que  $C$  es una curva cerrada simple y al quitarle uno de sus puntos no se hace desconexa. Por lo tanto,  $T \cup \alpha$  es un árbol.  $\square$

**Lema 5.11.** *Dados  $X$  un continuo,  $\epsilon > 0$ ,  $A, B \in 2^X$  y  $C \subset A$  no vacío, si  $H_d(A, B) < \epsilon$ , entonces  $B \cap N_d(C, \epsilon) \neq \emptyset$ .*

*Demostración.* Sea  $c \in C$ , por el Lema 1.4,  $A \subset N_d(B, \epsilon)$ , luego  $c \in C \subset A \subset N_d(B, \epsilon)$ , así, existe  $b \in B$  tal que  $d(b, c) < \epsilon$ , es decir,  $b \in B_d(c, \epsilon) \subset N_d(C, \epsilon)$ . Por lo tanto,  $B \cap N_d(C, \epsilon) \neq \emptyset$ .  $\square$

**Observación 5.12.** Si  $X$  es un espacio métrico y  $D \subset A \subset X$ , se dice que  $D$  es denso en  $A$  si  $D$  es denso en el subespacio métrico  $(A, d)$ . Esto quiere decir,  $D$  es denso en  $A$  si y solo si  $\text{cl}_X(D) \cap A = A$ , o equivalentemente si y solo si,  $A \subset \text{cl}_X(D)$ .

**Teorema 5.13.** *Sea  $X$  un continuo localmente conexo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (a)  $X$  es enrejado.
- (b) Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{F}_n(X)$  es denso en  $C_n(X)$ .



(c) Existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que,  $\mathfrak{F}_n(X)$  es denso en  $C_n(X)$ .

*Demostración.* Sea  $d$  una métrica para  $X$ .

(a) $\Rightarrow$ (b). Antes de comenzar la demostración, hacemos la siguiente aclaración. De acuerdo a la Observación 5.12 para mostrar que  $\mathfrak{F}_n(X)$  es denso en  $C_n(X)$ , es suficiente mostrar que  $C_n(X) \subset \text{cl}_{2^X}(\mathfrak{F}_n(X))$ . Supongamos que  $X$  es enrejado. Sean  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A \in C_n(X)$  y  $\epsilon > 0$ . Sean  $A_1, \dots, A_k$  cada una de las componentes de  $A$ . Luego, en particular,  $A_1, \dots, A_n$  son subconjuntos compactos y ajenos por pares en  $X$ . Así, por el Lema 1.2,  $N_d(\epsilon, A_1), N_d(\epsilon, A_2), \dots, N_d(\epsilon, A_k)$  son conjuntos disjuntos por pares. Por otro lado, por el Lema 5.5, existe una base de vecindades  $\mathcal{D}$  de  $X$  que está formada por subconjuntos abiertos conexos de  $X$  tal que, para cada  $\mathcal{U} \in \mathcal{D}$ ,  $\mathcal{U} - \mathcal{P}(X)$  es conexo.

Así, dado  $a \in A$  y  $B_d(a, \epsilon)$ , existe un subconjunto abierto conexo  $U_a$  de  $X$  tal que  $a \in U_a \subset B_d(a, \epsilon)$  y además,  $V_a = U_a - \mathcal{P}(X)$  es un conjunto conexo y abierto de  $X$ . De hecho,  $V_a \neq \emptyset$  ya que como  $X$  es enrejado,  $\text{int}_X(\mathcal{P}(X)) = \emptyset$ , por lo que  $U_a \not\subset \mathcal{P}(X)$ . Ahora, sea  $b(a) \in V_a$ . Dado  $i \in \{1, \dots, k\}$ , por la compacidad de  $A_i$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  y  $a_1, \dots, a_m \in A_i$  tales que  $A_i \subset \bigcup_{j=1}^m U_{a_j} \subset \bigcup_{j=1}^m B_d(a_j, \epsilon) \subset N_d(A_i, \epsilon)$ . Sea  $U = \bigcup_{j=1}^m U_{a_j}$  y  $V = \bigcup_{j=1}^m V_{a_j}$ . Notemos que  $U$  y  $V$  son subconjuntos abiertos de  $X$ . Además, como  $\mathcal{A} = \{U_{a_1}, \dots, U_{a_m}\}$  es una familia de subconjuntos conexos,  $A_i \subset \bigcup \mathcal{A}$  y para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $a_j \in A_i \cap U_{a_j}$ , por el Teorema 4.9, se tiene que  $U = A_i \cup \left(\bigcup_{j=1}^m U_{a_j}\right)$  es conexo. Mostremos que  $V$  también es conexo, para esto, supongamos que es desconexo, es decir, existen  $V_1$  y  $V_2$  subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de  $V$  tales que  $V = V_1 \cup V_2$ . Como para cada  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $V_{a_j}$  es conexo, entonces  $V_{a_j} \subset V_1$  o  $V_{a_j} \subset V_2$ , así, podemos asumir que existe  $r \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  tal que  $\left(\bigcup_{j=1}^r V_{a_j}\right) \subset V_1$  y  $\left(\bigcup_{j=r+1}^m V_{a_j}\right) \subset V_2$ , por lo que  $\left(\bigcup_{j=1}^r U_{a_j}\right) \cap \left(\bigcup_{j=r+1}^m U_{a_j}\right) = \emptyset$ . Notemos que como  $U$  es conexo,  $W = \left(\bigcup_{j=1}^r U_{a_j}\right) \cap \left(\bigcup_{j=r+1}^m U_{a_j}\right)$  es un subconjunto abierto y no vacío de  $X$ . Además, como  $\text{int}_X(\mathcal{P}(X)) = \emptyset$ ,  $W - \mathcal{P}(X) = \left(\left(\bigcup_{j=1}^r U_{a_j}\right) \cap \left(\bigcup_{j=r+1}^m U_{a_j}\right)\right) - \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$  ya que si fuera vacío,  $\left(\bigcup_{j=1}^r U_{a_j}\right) \cap \left(\bigcup_{j=r+1}^m U_{a_j}\right) \subset \mathcal{P}(X)$ . De donde  $\left(\bigcup_{j=1}^r U_{a_j}\right) \cap \left(\bigcup_{j=r+1}^m U_{a_j}\right) \subset \text{int}_X(\mathcal{P}(X)) = \emptyset$ , lo que es una contradicción. Sin embargo, si  $W - \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$ , entonces  $W - \mathcal{P}(X) = \left(\bigcup_{j=1}^r V_{a_j}\right) \cap \left(\bigcup_{j=r+1}^m V_{a_j}\right) \neq \emptyset$ , lo que también es una contradicción. Como en ambos casos obtenemos una contradicción,  $V$  tiene que ser conexo. Luego, por el Teorema 4.8,  $V$  es arco conexo. Así, por el Lema

5.10, existe un árbol  $T_i$  contenido en  $V$  tal que  $\{b(a_1), \dots, b(a_m)\} \subset T_i$ . Como  $b(a_j) \in V_{a_j} \subset U_{a_j} \subset B_d(a_j, \epsilon)$ , entonces  $d(a_j, b(a_j)) < \epsilon$ . Sea  $x \in B_d(a_j, \epsilon)$ , entonces  $d(a_j, x) < \epsilon$ . Como  $d(b(a_j), x) \leq d(b(a_j), a_j) + d(a_j, x) < 2\epsilon$ , entonces  $B_d(a_j, \epsilon) \subset B_d(b(a_j), 2\epsilon)$  para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Por lo que,  $A_i \subset \bigcup_{j=1}^m U_{a_j} \subset \bigcup_{j=1}^m B_d(a_j, \epsilon) \subset \bigcup_{j=1}^m B_d(b(a_j), 2\epsilon) \subset N_d(T_i, 2\epsilon)$ . Como también,  $T_i \subset V \subset U \subset N_d(A_i, \epsilon) \subset N_d(A_i, 2\epsilon)$ , por el Lema 1.4,  $H_d(A_i, T_i) < 2\epsilon$ . Además,  $T_i \subset V - \mathcal{P}(X)$ , de donde  $T_i \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$ . Notemos que  $H_{H_d}(\{A_i : i \leq m\}, \{T_i : i \leq m\}) < 2\epsilon$ . Sea  $T = \bigcup_{j=1}^m T_i \in C_n(X)$ , entonces  $T \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$ . Por el Lema 5.7,  $H_d(A, T) < 2\epsilon$ , es decir,  $T \in B_{H_d}(A, 2\epsilon)$ . Además, por el Teorema 5.6 (c), se obtiene que  $\dim(T, C_n(X))$  es finita. Por lo tanto,  $T \in \mathfrak{F}_n(X)$  y  $B_{H_d}(A, 2\epsilon) \cap \mathfrak{F}_n(X) \neq \emptyset$ . Así concluye la demostración.

(b) $\Rightarrow$ (c) Es claro, ya que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{F}_n(X)$  es denso en  $C_n(X)$ , en particular, para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

(c) $\Rightarrow$ (a) Mostremos primero que  $X$  es casi enrejado. Para esto, es suficiente mostrar que  $X \subset \text{cl}_X(\mathcal{G}(X))$ . Sean  $x \in X$  y  $\epsilon > 0$ . Como  $\{x\} \in C_n(X)$  y  $\mathfrak{F}_n(X)$  es denso en  $C_n(X)$ , entonces  $B_{H_d}(\{x\}, \epsilon) \cap \mathfrak{F}_n(X) \neq \emptyset$ , es decir, existe  $A \in \mathfrak{F}_n(X)$  tal que  $H_d(\{x\}, A) < \epsilon$ . Como  $\dim(A, C_n(X))$  es finita, por el Teorema 5.6, existe una gráfica finita  $G$  contenida en  $X$  tal que  $A \subset \text{int}_X(G)$ . Dado  $a \in A$  por Lema 1.4,  $A \subset N_d(\{x\}, \epsilon)$ , luego  $a \in B_d(x, \epsilon)$ . Como también,  $G$  es una gráfica finita que es una vecindad de  $a$  en  $X$ , entonces  $a \in B_d(x, \epsilon) \cap \mathcal{G}(X)$ . Así,  $\mathcal{G}(X)$  es denso en  $X$  y por ende,  $X$  es casi enrejado.

Supongamos ahora que  $X$  no es enrejado, entonces existen  $x \in X$  y  $W$  una vecindad de  $x$  en  $X$  tal que para cada vecindad  $U$  de  $x$  con  $x \in U \subset W$ ,  $U - \mathcal{P}(X)$  es desconexo. Como  $X$  es localmente conexo, existe un conjunto abierto conexo  $V$  tal que  $x \in V \subset W$ . Luego,  $V - \mathcal{P}(X)$  es desconexo, es decir,  $V - \mathcal{P}(X) = S \cup T$  con  $S$  y  $T$  subconjuntos abiertos de  $V - \mathcal{P}(X)$  no vacíos y disjuntos. Notemos que  $S$  y  $T$  son abiertos también en  $X$ . Sean  $x \in T$  y  $p_1, \dots, p_n \in S$ ,  $n$  puntos de  $S$  distintos por pares. Como  $V$  es abierto y conexo en  $X$ , por el Teorema 4.8,  $V$  es arco conexo. Además, ya que  $\{x\}$  y  $\{p_1, \dots, p_n\}$  son subconjuntos cerrados no vacíos y ajenos de  $V$ , por el Lema 2.2, existe un arco  $\alpha \subset V$  que va de  $x$  a algún punto  $p_i \in \{p_1, \dots, p_n\}$  y  $\alpha \cap \{p_1, \dots, p_n\} = \{p_i\}$ . Supongamos que es  $p_i = p_n$ . Sea  $A = \{p_1, \dots, p_{n-1}\} \cup \alpha \in C_n(X)$ . Como  $\alpha, \{p_1\}, \dots, \{p_{n-1}\} \in 2^X$  y son disjuntos por pares, por el Lema 1.2, existe  $\epsilon > 0$  tal que,  $B_d(\epsilon, p_j), N_d(\alpha, \epsilon)$ , con  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ , son disjuntos pares. Además, ya que  $V, T$  y  $S$  son abiertos en  $X$  con  $\alpha \subset V, \{x\} \subset T$  y  $\{p_k\} \subset S$ , para  $k \in \{1, \dots, n\}$ , por el Lema 1.3, podemos suponer que  $N_d(\alpha, \epsilon) \subset V,$

$B_d(x, \epsilon) \subset T$  y  $B_d(p_k, \epsilon) \subset S$ . Por otro lado, como  $\mathfrak{F}_n(X)$  es denso en  $C_n(X)$ , existe  $B \in \mathfrak{F}_n(X)$  tal que  $H_d(A, B) < \epsilon$ . Luego, por el Lema 1.4,  $B \subset N_d(A, \epsilon) = \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} B_d(p_j, \epsilon)\right) \cup N_d(\alpha, \epsilon)$ , con cada uno abierto en  $X$  y disjuntos por pares. Además, por el Lema 5.11,  $B$  intersecta a cada uno de estos uniendo. Así, las componentes de  $B$  son  $B_1 = B \cap B_d(p_1, \epsilon)$ ,  $B_2 = B \cap B_d(p_2, \epsilon)$ , ...,  $B_{n-1} = B \cap B_d(p_{n-1}, \epsilon)$  y  $B_n = B \cap N_d(\alpha, \epsilon)$ . Notemos que por el Lema 5.11,  $B \cap B_d(p_n, \epsilon) \neq \emptyset$  y  $B \cap B_d(x, \epsilon) \neq \emptyset$ . Así,  $B_n \cap S = B \cap N_d(\alpha, \epsilon) \cap S \supset B \cap B_d(p_n, \epsilon) \cap S = B \cap B_d(p_n, \epsilon)$  y  $B_n \cap T = B \cap N_d(\alpha, \epsilon) \cap T \supset B \cap B_d(x, \epsilon) \cap T = B \cap B_d(x, \epsilon)$  son conjuntos no vacíos. Como  $B_n$  es conexo,  $B_n \not\subset S \cup T = V - \mathcal{P}(X)$ , además,  $B_n \subset N_d(\alpha, \epsilon) \subset V$ , entonces  $B_n \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$ . Así,  $B \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$ . Luego, como  $B \in C_n(X)$ , por el Teorema 5.6,  $B \notin \mathfrak{F}_n(X)$ , lo que es una contradicción. Esto prueba que  $X$  es enrejado y concluye la demostración.  $\square$

## 6 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo.

## Bibliografía

- [1] J. G. Ahuatzí Reyes, D. Herrera-Carrasco y F. Macías-Romero, *Dimensión finita en el  $n$ -ésimo hiperespacio de continuos localmente conexos*, Capítulo 6, *Matemáticas y sus aplicaciones 5*, Fomento editorial BUAP, primera edición, 2015.
- [2] V. Córdova Salazar, D. Herrera-Carrasco y F. Macías-Romero, *La topología de los hiperespacios*, Capítulo 26, *Matemáticas y sus aplicaciones 1*, Fomento editorial BUAP, primera edición, 2011.
- [3] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes y V. Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, *Rocky Mountain Journal Of Mathematics*, 43, (2013), 1583-16323.
- [4] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory*, volume 4 of Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 1941.

- [5] A. Illanes, *Dendrites with unique hyperspace  $C_2(X)$  II*, *Topology Proceedings*, 34 (2009), 77-96.
- [6] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Polish Scientific Publishers and Academic Press, Inc. New York, 1968.
- [7] V. Martínez-de-la-Vega, *Dimension of the  $n$ -fold hyperspaces of graphs*, *Houston Journal of Mathematics*, 32 (2006), 783-799.
- [8] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, volume 158 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. New York: Marcel Dekker Inc., 1992.
- [9] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math.*, Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx

fmacias@fcfm.buap.mx

leonardo.ramireza@alumno.buap.mx



## Capítulo 7

# Una breve introducción a las propiedades de hiperespacios de un espacio métrico

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero y  
Esaú Alejandro Pérez Rosales

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE  
PUEBLA

### Resumen

Dado un espacio métrico  $X$ , un hiperespacio de  $X$  es una colección de subconjuntos de  $X$  con alguna propiedad particular. En el presente trabajo, se estudian algunas propiedades en los hiperespacios  $CL(X)$ ,  $2^X$ ,  $C(X)$  y  $CLC(X)$  tales como la separabilidad, compacidad, arco conexidad, conexidad, arco conexidad local, conexidad local y homogeneidad, cuando son considerados con la métrica de Hausdorff o la topología de Vietoris.

## 1 Introducción

El presente capítulo consiste en una exposición de algunas propiedades de ciertos hiperespacios de un espacio métrico, la mayoría de los cuales son recopilados por el tercer autor en [12, Capítulo 1]. El propósito de este escrito es enunciar y desarrollar de manera profunda estas propiedades, a fin de facilitar la consulta a futuros lectores, así como ser fuente de inspiración para posibles futuros trabajos relacionados a la teoría de los continuos y sus hiperespacios.

## 2 Preliminares

En esta sección, presentaremos algunas definiciones y resultados útiles que se necesitarán en las secciones siguientes. A lo largo del presente trabajo,

usaremos la letra  $X$  para denotar un espacio métrico con métrica  $d$ . A la topología generada por la métrica  $d$  se le denotará por  $\tau_d$ . Dado  $x \in X$  y  $r > 0$ , se denotará por  $B_d(x, r) = \{y \in X : d(y, x) < r\}$  a la bola con centro en  $x$  y radio  $r$ , omitiendo la referencia a la métrica cuando esto no provoque confusión. Dado  $A \subseteq X$ , los símbolos  $\text{Fr}_X(A)$  y  $\overline{A}$  denotarán la frontera y la cerradura de  $A$  en  $X$ , respectivamente. Salvo cuando sea necesario, se omitirá la referencia al espacio  $X$ . Por otro lado, se usarán los símbolos  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{R}$  para denotar el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números reales, respectivamente. Todo subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  se considerará con la métrica euclidiana y la topología inducida por ésta.

**Definición 2.1.** Un **arco** es un espacio métrico que es homeomorfo al intervalo cerrado  $[0, 1]$  con la métrica usual de  $\mathbb{R}$ .

**Definición 2.2.** Un espacio métrico  $X$  es **arco conexo** si dados cualesquiera dos puntos distintos  $x, y \in X$  existe un arco en  $X$  cuyos puntos extremos son  $x$  y  $y$ .

**Observación 2.3.** Todo espacio métrico arco conexo es conexo.

El siguiente lema nos mostrará que para verificar la arco conexidad de un espacio métrico, es suficiente fijar un punto y construir arcos entre este punto fijo y los demás puntos.

**Lema 2.4.** Sean  $X$  un espacio métrico y  $p \in X$ . Si para cualquier  $x \in X \setminus \{p\}$ , existe un arco con puntos extremos  $x$  y  $p$ , entonces  $X$  es arco conexo.

*Demostración.* Sean  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ . Si  $x = p$  o  $y = p$ , por hipótesis, existe un arco con puntos extremos  $x$  y  $y$ , y termina la prueba, así que supongamos que  $x \neq p \neq y$ . Entonces existen arcos  $A_1$  y  $A_2$  tales que  $A_1$  tiene puntos extremos  $x$  y  $p$ , y  $A_2$  tiene puntos extremos  $y$  y  $p$ . Sean  $\alpha_1 : [0, 1] \rightarrow A_1$  y  $\alpha_2 : [0, 1] \rightarrow A_2$  homeomorfismos tales que  $\alpha_1(0) = x, \alpha_1(1) = p, \alpha_2(0) = y$  y  $\alpha_2(1) = p$ . Definamos  $A = \{t \in [0, 1] : \alpha_1(t) = \alpha_2(t)\}$ . Observemos que  $A \neq \emptyset$  (ya que  $1 \in A$ ) y  $A$  está acotado inferiormente. Sea  $m = \inf A$ . Por [7, Lema 1, pág 161],  $A$  es cerrado en  $\mathbb{R}$ , lo que implica que  $m \in A$ , con lo cual  $\alpha_1(m) = \alpha_2(m)$ . Definamos  $\beta : [0, 1] \rightarrow A_1 \cup A_2$  como

$$\beta(t) = \begin{cases} \alpha_1(t) & \text{si } t \in [0, m] \\ \alpha_2\left(\frac{1-t}{1-m}m\right) & \text{si } t \in [m, 1] \end{cases}$$

Observemos que

- $\beta$  está bien definida, ya que  $\alpha_1(m) = \alpha_2(m)$ .
- $\beta(0) = \alpha_1(0) = x$  y  $\beta(1) = \alpha_2(0) = y$ .
- $\beta$  es continua por el Lema del Pegado, ya que  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son continuas.
- $\beta$  es inyectiva, ya que  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  lo son, y  $\beta([0, m]) \cap \beta([m, 1]) = \alpha_1([0, m]) \cap \alpha_2([0, m]) = \{\alpha_1(m)\} = \{\alpha_2(m)\}$ .

Por lo tanto,  $\beta([0, 1])$  es un arco en  $X$  con puntos extremos  $x$  y  $y$ . Se concluye que  $X$  es arco conexo.  $\square$

**Definición 2.5.** Un **continuo** es un espacio métrico compacto, conexo y con más de un punto. Dados un continuo  $X$  y  $Y \subseteq X$ , diremos que  $Y$  es un **subcontinuo** de  $X$  si  $Y$  es un continuo como subespacio de  $X$  o bien, si  $Y$  tiene exactamente un punto.

Ejemplos de continuos son los siguientes:

- (a) Cualquier intervalo cerrado  $[a, b]$  en  $\mathbb{R}$ , con  $a < b$ .
- (b) La circunferencia unitaria  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ . Más aún, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , definimos y denotamos la esfera  $n$ -dimensional por

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\},$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma euclidiana en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Se puede verificar que  $S^n$  es un continuo, para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Cualquier continuo homeomorfo a  $S^1$  se llama una curva cerrada simple.

- (c) Cualquier bola cerrada en  $\mathbb{R}^n$ ,  $D(x, r)$ , con  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $r > 0$ .
- (d) El conjunto  $\{(x, \sin(\frac{1}{x})) : 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$ , conocido como seno del topólogo.
- (e) El conjunto  $I^n = \prod_{k=1}^n [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^n$  es un continuo. Cualquier continuo homeomorfo a  $I^n$  se llama una  $n$ -celda.
- (f) El conjunto

$$I^\infty = \prod_{n=1}^{\infty} [0, 1]$$

es un continuo dotado con la topología producto. Cualquier continuo homeomorfo a  $I^\infty$  es llamado cubo de Hilbert.



### 3 Hiperespacios y métrica de Hausdorff

Si  $X$  es un espacio métrico, entenderemos por un **hiperespacio** de  $X$  a una colección de subconjuntos de  $X$  con alguna propiedad en particular. Por ejemplo, podemos considerar

$$CL(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\}.$$

Otros hiperespacios que se consideran en este trabajo son:

- $CLC(X) = \{A \in CL(X) : A \text{ es conexo}\}$
- $2^X = \{A \in CL(X) : A \text{ es compacto}\}$ , conocido como el hiperespacio de compactos de  $X$ .
- $C(X) = \{A \in CL(X) : A \text{ es compacto y conexo}\}$ , que se conoce como el hiperespacio de subcontinuos de  $X$ .
- $F_1(X) = \{A \in CL(X) : |A| = 1\}$ , que se conoce como el espacio de singulares de  $X$ .

**Observación 3.1.** En el caso de que  $X$  sea compacto, los hiperespacios  $CL(X)$  y  $2^X$  coinciden, esto es,  $CL(X) = 2^X$ .

Es posible dotar a  $CL(X)$  de una métrica específica, llamada la métrica de Hausdorff, para la cual necesitaremos del siguiente concepto.

**Definición 3.2.** Sea  $X$  un espacio métrico. Si  $x \in X$  y  $A \in CL(X)$ , definimos y denotamos la distancia del punto  $x$  al conjunto  $A$  como

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Para cualquier  $r > 0$  y  $A \in CL(X)$ , denotamos la **nube** alrededor de  $A$  y radio  $r$  como

$$N(r, A) = \{x \in X : d(x, A) < r\}.$$

La siguiente proposición enlista algunas propiedades útiles de la distancia de un punto a un conjunto y de las nubes alrededor de un subconjunto de un espacio métrico.

**Proposición 3.3.** Sean  $X$  un espacio métrico,  $A, B \in CL(X)$  y  $x, y \in X$ , entonces se cumplen las siguientes condiciones:

- (1)  $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ .
- (2)  $x \in A$  si y solo si  $d(x, A) = 0$ .
- (3) Si  $r_1 < r_2$ , entonces  $N(r_1, A) \subseteq N(r_2, A)$ .
- (4) Si  $A \subseteq B$ , entonces  $d(x, B) \leq d(x, A)$ .
- (5)  $N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) = N(\varepsilon, A \cup B)$ .
- (6) La función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = d(x, A)$ , es continua.

*Demostración.* (1) Sea  $a \in A$ . Dado que  $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ , se tiene que  $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$ . Como  $a \in A$  es arbitrario, se sigue que  $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$ , de donde  $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ . Análogamente se prueba que  $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$ , concluyéndose que  $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ .

(2) Supongamos que  $x \in A$ ; luego,  $d(x, A) \leq d(x, x) = 0$ . Por otro lado, como  $d(x, a) \geq 0$  para todo  $a \in A$ , se cumple que  $d(x, A) \geq 0$ . Así,  $d(x, A) = 0$ . Recíprocamente, supongamos que  $d(x, A) = 0$ . Veamos que  $x \in \bar{A}$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $0 = \inf\{d(x, a) : a \in A\} < \varepsilon$ , existe  $a \in A$  tal que  $d(x, a) < \varepsilon$ ; dado que  $a \in B(x, \varepsilon) \cap A$ , se tiene que  $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ . Luego,  $x \in \bar{A} = A$ .

(3) Sea  $z \in N(r_1, A)$ , entonces  $d(z, A) < r_1 < r_2$ , de donde  $z \in N(r_2, A)$ . Por consiguiente,  $N(r_1, A) \subseteq N(r_2, A)$ .

(4) Supongamos que  $A \subseteq B$ , entonces  $\{d(x, a) : a \in A\} \subseteq \{d(x, a) : a \in B\}$ , de donde  $\inf\{d(x, a) : a \in B\} \leq \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ , esto es,  $d(x, B) \leq d(x, A)$ .

(5) Sea  $x \in N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B)$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $x \in N(\varepsilon, A)$ . Por el inciso (4), se tiene que  $d(x, A \cup B) \leq d(x, A) < \varepsilon$ , con lo cual  $x \in N(\varepsilon, A \cup B)$ . Por lo tanto,  $N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) \subseteq N(\varepsilon, A \cup B)$ . Recíprocamente, sea  $x \in N(\varepsilon, A \cup B)$ , entonces existe  $z \in A \cup B$  tal que  $d(x, z) < \varepsilon$ . Si  $z \in A$ , entonces  $x \in N(\varepsilon, A)$ ; y si  $z \in B$ , entonces  $x \in N(\varepsilon, B)$ . En cualquier caso,  $x \in N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B)$ , lo que prueba que  $N(\varepsilon, A \cup B) \subseteq N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B)$ . Por lo tanto,  $N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) = N(\varepsilon, A \cup B)$ .

(6) Sea  $x_0 \in X$ . Veamos que  $f$  es continua en  $x_0$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Por el inciso (1) se cumple que  $|d(x, A) - d(x_0, A)| \leq d(x, x_0)$ , así que tomando  $\delta = \varepsilon$ , se cumple que si  $d(x, x_0) < \delta$ , entonces  $|f(x) - f(x_0)| = |d(x, A) - d(x_0, A)| < \varepsilon$ .  $\square$

A continuación definiremos la métrica de Hausdorff.

**Definición 3.4.** Si  $X$  es un espacio métrico con métrica acotada  $d$ , la **métrica de Hausdorff** para  $CL(X)$  inducida por  $d$ , denotada por  $H_d$ , para cada  $A, B \in CL(X)$  es

$$H_d(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subseteq N(r, B) \text{ y } B \subseteq N(r, A)\}.$$

**Observación 3.5.** (1) La condición de que la métrica  $d$  sea acotada nos asegura que el conjunto que define a  $H_d(A, B)$  no es vacío (si  $k > 0$  es una cota superior para  $d$ , entonces  $A \subseteq N(k + 1, B)$  y  $B \subseteq N(k + 1, A)$ ) y por ende su ínfimo existe, con lo cual  $H_d(A, B)$  siempre está definida.

(2) Si  $H_d(A, B) < \varepsilon$ , entonces  $A \subseteq N(\varepsilon, B)$  y  $B \subseteq N(\varepsilon, A)$ . En efecto, si  $H_d(A, B) < \varepsilon$ , entonces  $\varepsilon$  no es cota inferior del conjunto  $\{r > 0 : A \subseteq N(r, B) \text{ y } B \subseteq N(r, A)\}$ , por lo que existe  $\delta > 0$  tal que  $A \subseteq N(\delta, B)$ ,  $B \subseteq N(\delta, A)$  y  $\delta < \varepsilon$ . Respectivamente, por la Proposición 3.3 (3), se tiene que  $A \subseteq N(\varepsilon, B)$  y  $B \subseteq N(\varepsilon, A)$ .

(3) El recíproco del inciso anterior se cumple cuando  $A$  y  $B$  son compactos. En efecto, supongamos que  $A \subseteq N(\varepsilon, B)$  y  $B \subseteq N(\varepsilon, A)$ . Entonces  $d(a, B) < \varepsilon$  para cada  $a \in A$ , y  $d(b, A) < \varepsilon$  para cada  $b \in B$ . Sean  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f(x) = d(x, B)$  y  $g(x) = d(x, A)$ . Como  $f$  y  $g$  son continuas (por la Proposición 3.3 (6)) y  $A$  y  $B$  son compactos, entonces  $f$  y  $g$  alcanzan su máximo, es decir, existen puntos  $a_0 \in A$  y  $b_0 \in B$  tales que  $d(a_0, B) = \max\{d(a, B) : a \in A\} < \varepsilon$  y  $d(b_0, A) = \max\{d(b, A) : b \in B\} < \varepsilon$ . Sea  $\delta > 0$  tal que  $\max\{d(a_0, B), d(b_0, A)\} < \delta < \varepsilon$ , entonces  $A \subseteq N(\delta, B)$  y  $B \subseteq N(\delta, A)$ , con lo cual  $H_d(A, B) \leq \delta < \varepsilon$ .

(4) Se sigue del inciso (2) que si  $A, B \in CL(X)$  y  $\delta > 0$ , entonces  $A \subseteq N(H_d(A, B) + \delta, B)$  y  $B \subseteq N(H_d(A, B) + \delta, A)$ .

Verifiquemos que  $H_d$  es, en efecto, una métrica en  $CL(X)$ . Para ello, será conveniente usar la notación

$$M(A, B) = \{r > 0 : A \subseteq N(r, B) \text{ y } B \subseteq N(r, A)\}$$

para cada  $A, B \in CL(X)$ .

**Teorema 3.6.** Si  $X$  es un espacio métrico acotado, entonces  $H_d$  es una métrica en  $CL(X)$ .

*Demostración.* Se tiene de la definición que  $H_d(A, B) \geq 0$  y que  $H_d(A, B) = H_d(B, A)$  para cualesquiera  $A, B \in CL(X)$ .

Supongamos que  $H_d(A, B) = 0$  y veamos que  $A = B$ . Como  $\inf M(A, B) = 0$ , existe una sucesión decreciente  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $M(A, B)$  tal que  $r_n \rightarrow 0$  y  $A \subseteq N(r_n, B)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $a \in A$ , entonces para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $d(a, B) < r_n$ , luego existe  $b_n \in B$  tal que  $d(a, b_n) < r_n$ . Por tanto, la sucesión  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en  $B$  y converge al punto  $a$ . Por ser  $B$  cerrado, se concluye que  $a \in B$ . Esto prueba que  $A \subseteq B$ . Análogamente,  $B \subseteq A$ , concluyéndose que  $A = B$ .

Ahora veamos que  $H_d(A, A) = 0$  para todo  $A \in CL(X)$ . Observar que  $A \subseteq N(r, A)$  para todo  $r > 0$ . Así,  $H_d(A, A) = \inf M(A, A) = \inf \mathbb{R}^+ = 0$ .

Finalmente verifiquemos la desigualdad del triángulo, es decir, hay que probar que si  $A, B, C \in CL(X)$ , se cumple  $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C)$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Por (4) de la Observación 3.5, se tiene que

$$A \subseteq N\left(H_d(A, B) + \frac{\varepsilon}{2}, B\right). \quad (1)$$

y

$$B \subseteq N\left(H_d(B, C) + \frac{\varepsilon}{2}, C\right). \quad (2)$$

Sea  $a \in A$ . Por (1), se tiene que  $d(a, B) < H_d(A, B) + \frac{\varepsilon}{2}$ , de donde existe  $b \in B$  tal que

$$d(a, b) < H_d(A, B) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

Por (2), se tiene que  $d(b, C) < H_d(B, C) + \frac{\varepsilon}{2}$ , con lo cual existe  $c \in C$  tal que

$$d(b, c) < H_d(B, C) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d(a, c) &\leq d(a, b) + d(b, c) \\ &< H_d(A, B) + \frac{\varepsilon}{2} + H_d(B, C) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= H_d(A, B) + H_d(B, C) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Como  $a$  es un punto arbitrario de  $A$ , hemos probado que

$$A \subseteq N(H_d(A, B) + H_d(B, C) + \varepsilon, C). \quad (5)$$

Por un argumento similar, se cumple también que

$$C \subseteq N(H_d(A, B) + H_d(B, C) + \varepsilon, A). \quad (6)$$

Así,  $H_d(A, B) + H_d(B, C) + \varepsilon \in M(A, C)$ , con lo cual  $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C) + \varepsilon$ . Como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, se cumple la desigualdad  $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C)$ , lo que concluye la demostración.  $\square$

Los hiperespacios  $CLC(X)$ ,  $2^X$ ,  $C(X)$ ,  $F_n(X)$  y  $F(X)$  adquirirán la métrica de subespacio de  $CL(X)$ .

La colección  $CL(X)$  también puede dotarse de una topología específica, denominada la topología de Vietoris, que mencionamos a continuación:

**Definición 3.7.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. La **topología de Vietoris**  $T_V$  para  $CL(X)$  es la topología más pequeña con las siguientes propiedades:

- (1) Si  $U$  es un abierto de  $(X, \tau)$ , entonces  $\{A \in CL(X) : A \subseteq U\}$  es un abierto de  $(CL(X), T_V)$ .
- (2) Si  $B$  un es cerrado de  $(X, \tau)$ , entonces  $\{A \in CL(X) : A \subseteq B\}$  es un cerrado de  $(CL(X), T_V)$ .

Nuevamente, los hiperespacios  $CLC(X)$ ,  $2^X$ ,  $C(X)$ ,  $F_n(X)$  y  $F(X)$  tendrán la topología de subespacio heredada por la topología de Vietoris en  $CL(X)$ .

Así pues, resulta natural preguntarse si la métrica de Hausdorff en  $CL(X)$  induce la topología de Vietoris. La respuesta es afirmativa cuando y solo cuando  $X$  es un espacio métrico compacto, como se verá más adelante.

Si  $S_1, \dots, S_n$  son subconjuntos de  $X$ , usaremos la siguiente notación:

$$\langle S_1, \dots, S_n \rangle = \left\{ A \in CL(X) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^n S_i \text{ y } A \cap S_i \neq \emptyset \text{ para cada } 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Al conjunto  $\langle S_1, \dots, S_n \rangle$  le llamaremos vietórico. Los vietóricos nos proporcionan una base para la topología de Vietoris, tal como lo muestra la siguiente proposición.

**Proposición 3.8.** [6, Teorema 1.2] *Si  $(X, \tau)$  es un espacio topológico, entonces*

$$\mathcal{B}_V = \{ \langle U_1, \dots, U_n \rangle : n \in \mathbb{N} \text{ y } U_i \in \tau \text{ para cada } 1 \leq i \leq n \}$$

*es una base para  $T_V$ .*

**Proposición 3.9.** *Si  $A_1, \dots, A_n$  son subconjuntos abiertos de un espacio métrico  $X$ , entonces  $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$  es un abierto de  $(CL(X), T_V)$ . Asimismo, si  $A_1, \dots, A_n$  son subconjuntos cerrados de  $X$ , entonces  $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$  es un cerrado de  $(CL(X), T_V)$ .*

*Demostración.* Si  $A_1, \dots, A_n$  son abiertos de  $X$ , por la Proposición 3.8, se tiene que  $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$  es un básico de la topología de Vietoris para  $CL(X)$ . En particular,  $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$  es abierto de  $CL(X)$ .

Ahora observemos lo siguiente: si  $K$  es un subconjunto cerrado de  $X$ , entonces:

- (1) Por la Definición 3.7 (2),  $\langle K \rangle = \{ A \in CL(X) : A \subseteq K \}$  es un cerrado de  $CL(X)$ .
- (2)  $\langle X, K \rangle = \{ A \in CL(X) : A \cap K \neq \emptyset \} = CL(X) \setminus \{ A \in CL(X) : A \subseteq X \setminus K \}$  es un abierto de  $CL(X)$ , ya que  $\{ A \in CL(X) : A \subseteq X \setminus K \}$  es un cerrado de  $CL(X)$  por la Definición 3.7 (1).

Supongamos que  $A_1, \dots, A_n$  son cerrados en  $X$ . Observemos que

$$\begin{aligned} & \langle A_1, \dots, A_n \rangle \\ &= \left\{ A \in CL(X) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ y } A \cap A_i \neq \emptyset \text{ para cada } 1 \leq i \leq n \right\} \\ &= \left\{ A \in CL(X) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i \right\} \\ & \quad \cap \{ A \in CL(X) : A \cap A_i \neq \emptyset \text{ para cada } 1 \leq i \leq n \} \\ &= \left\langle \bigcup_{i=1}^n A_i \right\rangle \cap \left( \bigcap_{i=1}^n \langle X, A_i \rangle \right). \end{aligned}$$

Como  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  es un cerrado de  $X$ , por (1) se sigue que  $\langle \bigcup_{i=1}^n A_i \rangle$  es un cerrado de  $CL(X)$ . Asimismo, (2) implica que  $\langle X, A_i \rangle$  es un cerrado de  $CL(X)$  para

cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , con lo cual  $\bigcap_{i=1}^n \langle X, A_i \rangle$  es un cerrado de  $CL(X)$ . Así, se concluye que  $\langle A_1, \dots, A_n \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^n A_i \rangle \cap (\bigcap_{i=1}^n \langle X, A_i \rangle)$  es un cerrado de  $CL(X)$ . □

**Lema 3.10.** *Sea  $X$  un espacio métrico.*

(a) *Si  $D$  es un conjunto denso en  $X$ , entonces*

$$[D] = \{A \subseteq D : A \text{ es finito y no vacío}\}$$

*es denso en  $(CL(X), T_V)$ .*

(b)  *$(CL(X), T_V)$  es separable si y solo si  $X$  es separable.*

*Demostración.* (a) Sea  $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$  un abierto básico de  $(CL(X), T_V)$ . Entonces  $U_1, \dots, U_n$  son abiertos en  $X$ . Como  $D$  es denso en  $X$ , se tiene que  $U_i \cap D \neq \emptyset$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Elijamos  $x_i \in U_i \cap D$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , entonces  $\{x_1, \dots, x_n\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap [D]$ , de donde  $[D]$  es denso en  $(CL(X), T_V)$ .

(b) Supongamos que  $(CL(X), T_V)$  es separable y sea  $\mathcal{D}$  un subconjunto denso y numerable de  $CL(X)$ . Para cada  $F \in \mathcal{D}$  sea  $p_F \in F$ , y defínase  $D = \{p_F : F \in \mathcal{D}\}$ . Se tiene que  $D$  es numerable. Para ver que es denso en  $X$ , sea  $U \subseteq X$  abierto y no vacío, entonces  $\langle U \rangle$  es un abierto no vacío de  $CL(X)$ , de donde existe  $F \in \langle U \rangle \cap \mathcal{D}$ . Luego,  $F \subseteq U$ , con lo cual  $p_F \in U \cap D$ , teniéndose que  $U \cap D \neq \emptyset$ . Por lo tanto,  $D$  es denso en  $X$  y así  $X$  es separable. Recíprocamente, supongamos que  $X$  es separable y sea  $D$  un subconjunto denso y numerable de  $X$ . Sea  $[D] = \{A \subseteq D : A \text{ es finito y no vacío}\} \subseteq CL(X)$ . Entonces  $[D]$  es numerable y por (a), es denso en  $(CL(X), T_V)$ . Por lo tanto,  $(CL(X), T_V)$  es separable. □

**Teorema 3.11.** *Sea  $X$  un espacio métrico. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a)  *$X$  es compacto.*

(b) *La topología de Vietoris  $T_V$  y la topología inducida por la métrica de Hausdorff  $\tau_{H_d}$  en  $CL(X)$  coinciden.*

*Demostración.* [(a) $\Rightarrow$ (b)] Supongamos que  $X$  es compacto. Por la Observación 3.1,  $CL(X) = 2^X$ . Probaremos que  $T_V = \tau_{H_d}$ . Veamos primero que  $T_V \subseteq \tau_{H_d}$ . Sea  $\langle A_1, \dots, A_n \rangle \in T_V$ . Dado que  $\langle A_1, \dots, A_n \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^n A_i \rangle \cap (\bigcap_{i=1}^n \langle X, A_i \rangle)$ , será suficiente probar que  $\langle U \rangle \in \tau_d$  y  $\langle X, U \rangle \in \tau_d$  para cada  $U \in \tau_d$ . Para ello, sea  $U \in \tau_d$  y veamos que  $\langle U \rangle \in \tau_d$ . Si  $U = X$ , entonces  $\langle U \rangle = \{A \in CL(X) : A \subseteq X\} = CL(X) \in \tau_{H_d}$ , así que supongamos que  $U \neq X$ . Sean  $A \in \langle U \rangle$  y  $\varepsilon = d(A, X \setminus U) = \inf\{d(a, X \setminus U) : a \in A\}$ . Observemos que  $\varepsilon > 0$ , ya que  $A$  y  $X \setminus U$  son compactos. Veamos que  $B_{H_d}(A, \varepsilon) \subseteq \langle U \rangle$ . Sea  $B \in B_{H_d}(A, \varepsilon)$ , entonces  $H_d(A, B) < \varepsilon$ . Luego,  $B \subseteq N(\varepsilon, A)$ . Pero por la elección de  $\varepsilon$ , se cumple que  $N(\varepsilon, A) \subseteq U$ . Así que  $B \subseteq U$ , con lo cual  $B \in \langle U \rangle$ . Hemos probado que para cada  $A \in \langle U \rangle$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_{H_d}(A, \varepsilon) \subseteq \langle U \rangle$ . Esto prueba que  $\langle U \rangle \in \tau_{H_d}$ . Ahora veamos que  $\langle X, U \rangle \in \tau_{H_d}$ . Sea  $A \in \langle X, U \rangle$ . Entonces  $A \cap U \neq \emptyset$ . Sea  $p \in A \cap U$ . Como  $p \in U$  y  $U \in \tau_d$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $N(\delta, \{p\}) = B(p, \delta) \subseteq U$ . Probaremos que  $B_{H_d}(A, \delta) \subseteq \langle X, U \rangle$ . Para ello, sea  $B \in B_{H_d}(A, \delta)$ . Luego,  $H_d(A, B) < \delta$ . Se sigue que  $A \subseteq N(\delta, B)$ . Dado que  $p \in A$ , existe  $b \in B$  tal que  $d(b, p) < \delta$ . Como  $N(\delta, \{p\}) = B(p, \delta) \subseteq U$ , entonces  $b \in U$ . Luego,  $B \cap U \neq \emptyset$ , lo que muestra que  $B \in \langle X, U \rangle$ . Así, se concluye que  $\langle X, U \rangle \in \tau_{H_d}$ . Por lo tanto,  $T_V \subseteq \tau_{H_d}$ .

Probaremos ahora que  $\tau_{H_d} \subseteq T_V$ . Sea  $A \in CL(X) = 2^X$  y  $r > 0$ . Como  $A$  es compacto y  $A \subseteq \bigcup_{a \in A} B_d(a, \frac{r}{2})$ , entonces existen  $a_1, \dots, a_n \in A$  tales que  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_d(a_i, \frac{r}{2})$ . Luego,  $A \in \langle B_d(a_1, \frac{r}{2}), \dots, B_d(a_n, \frac{r}{2}) \rangle$ . Veamos que  $\langle B_d(a_1, \frac{r}{2}), \dots, B_d(a_n, \frac{r}{2}) \rangle \subseteq B_{H_d}(A, r)$ . Sea  $K \in \langle B_d(a_1, \frac{r}{2}), \dots, B_d(a_n, \frac{r}{2}) \rangle$ . Veamos que  $K \subseteq N(r, A)$ . Sea  $x \in K$ . Dado que  $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_d(a_i, \frac{r}{2})$ , existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $x \in B_d(a_j, \frac{r}{2})$ , luego,  $d(x, A) < \frac{r}{2} < r$ , esto es,  $x \in N(r, A)$ . Así,

$$K \subseteq N(r, A). \tag{7}$$

Ahora veamos que  $A \subseteq N(r, K)$ . Sea  $x \in A$ . Dado que  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_d(a_i, \frac{r}{2})$ , existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $x \in B_d(a_j, \frac{r}{2})$ . Como  $K \cap B_d(a_j, \frac{r}{2}) \neq \emptyset$ , sea  $y \in K \cap B_d(a_j, \frac{r}{2})$ . Se sigue que  $d(x, y) \leq d(x, a_j) + d(a_j, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$ , con lo cual  $d(x, K) < r$ , esto es,  $x \in N(r, K)$ . Así,

$$A \subseteq N(r, K). \tag{8}$$

De (7), (8) y la Observación 3.5 (3) se sigue que  $H_d(A, K) < r$ , es decir,  $K \in B_{H_d}(A, r)$ . Hemos probado que para todo  $A \in CL(X)$  y todo  $r > 0$ , existe un vietórico  $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$  tal que  $A \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \subseteq B_{H_d}(A, r)$ . Esto prueba que  $\tau_{H_d} \subseteq T_V$ .



[(b) $\Rightarrow$ (a)] Supongamos que  $T_V = \tau_{H_d}$ . Esto implica que  $T_V$  es metrizable. Para probar que  $X$  es compacto veremos que todo subconjunto infinito numerable de  $X$  admite un punto de acumulación. Sea  $A \subseteq X$  infinito numerable. Luego,  $\overline{A}$  es separable. Por el Lema 3.10,  $CL(\overline{A})$  es separable. Como  $CL(\overline{A})$  es un subespacio de  $CL(X)$  se sigue que  $CL(\overline{A})$  es metrizable, y por ser separable, es segundo numerable. Luego, por [4, Proposición 3.6],  $\overline{A}$  no es un espacio discreto, con lo cual  $\overline{A}$  tiene un punto de acumulación, el cual es también un punto de acumulación de  $A$  en  $X$ . Por lo tanto,  $X$  es compacto.  $\square$

## 4 Convergencia en hiperespacios

Habiendo definido una métrica en  $CL(X)$  (a saber, la métrica de Hausdorff), es posible hablar de sucesiones en  $CL(X)$ . Más aún, una sucesión  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a un elemento  $A \in CL(X)$  si para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $H_d(A_n, A) < \varepsilon$  para cada  $n \geq N$ . Sin embargo, la definición que daremos a continuación resultará útil en los capítulos posteriores. En la Proposición 4.4, veremos que ambas definiciones son equivalentes cuando el espacio métrico  $X$  es compacto.

**Definición 4.1.** Sean  $X$  un espacio métrico y  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $CL(X)$ . Se define el **límite inferior** y el **límite superior** de la sucesión  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , respectivamente, como

$$\liminf A_n = \{x \in X : \text{si } U \text{ es un entorno de } x, \text{ entonces } U \cap A_n \neq \emptyset \\ \text{para cada } n \in \mathbb{N} \text{ salvo para un número finito}\}$$

y

$$\limsup A_n = \{x \in X : \text{si } U \text{ es un entorno de } x, \text{ entonces } U \cap A_n \neq \emptyset \\ \text{para una cantidad infinita de } n's, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}.$$

Si  $\liminf A_n = A = \limsup A_n$ , decimos que la sucesión  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $A$  y este hecho se denotará por  $\lim A_n = A$ .

**Observación 4.2.** Si  $X$  es un espacio métrico,  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en  $CL(X)$  y  $x \in X$ , se cumplen:

- (1)  $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$ . Como consecuencia, la sucesión converge a  $A$  si y solo si  $A \subseteq \liminf A_n$  y  $\limsup A_n \subseteq A$ .

- (2)  $x \in \liminf A_n$  si y solo si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $B(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$  para cada  $n \geq N$ .
- (3)  $x \in \limsup A_n$  si y solo si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $J \subseteq \mathbb{N}$  infinito tal que  $B(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$  para cada  $n \in J$ .
- (4)  $\limsup A_n$  puede escribirse como

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i}.$$

Como consecuencia,  $\limsup A_n$  es un cerrado de  $X$ , ya que es intersección de conjuntos cerrados.

**Lema 4.3.** *Si  $X$  es un espacio métrico compacto y  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $CL(X)$ , entonces  $\limsup A_n \neq \emptyset$ .*

*Demostración.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $x_n \in A_n$  (ya que  $A_n \neq \emptyset$ ) y consideremos la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Como  $X$  es compacto, existe  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  una subsucesión de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a algún  $z \in X$ . Veamos que  $z \in \limsup A_n$ . Sea  $U$  un entorno de  $z$ . Como  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $z$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x_{n_k} \in U$  para cada  $k \geq N$ . Dado que  $x_{n_k} \in A_{n_k}$ , se tiene que  $A_{n_k} \cap U \neq \emptyset$  para cada  $k \geq N$ . Esto implica que  $z \in \limsup A_n$ . Por lo tanto,  $\limsup A_n \neq \emptyset$ .  $\square$

**Proposición 4.4.** *Sean  $X$  un espacio métrico compacto y  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $CL(X)$ . Si  $\lim A_n = A$ , entonces  $A \in CL(X)$  y  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $A$  en  $CL(X)$  con respecto a la métrica de Hausdorff. Recíprocamente, si  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $A$  en  $CL(X)$  con respecto a la métrica de Hausdorff, entonces  $\lim A_n = A$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\lim A_n = A$ . Por la Observación 4.2 (4) y el Lema 4.3, se tiene que  $A = \limsup A_n \in CL(X) = 2^X$ . Veamos que  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $A$  en  $CL(X)$  con respecto a la métrica de Hausdorff. Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $A \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A) = \bigcup_{a \in A} B(a, \frac{\varepsilon}{2})$ , entonces  $\{B(a, \frac{\varepsilon}{2}) : a \in A\}$  es una cubierta abierta de  $A$  en  $X$ . Como  $A$  es compacto, existen  $a_1, \dots, a_k \in A$  tales que  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(a_i, \frac{\varepsilon}{2})$ . Como  $a_1, \dots, a_k \in A = \liminf A_n$ , por la Observación

4.2 (2), existen  $M_1, \dots, M_k$  tales que

$$\begin{aligned} A_n \cap B\left(a_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) &\neq \emptyset \text{ siempre que } n \geq M_1, \\ A_n \cap B\left(a_2, \frac{\varepsilon}{2}\right) &\neq \emptyset \text{ siempre que } n \geq M_2, \\ &\vdots \\ A_n \cap B\left(a_k, \frac{\varepsilon}{2}\right) &\neq \emptyset \text{ siempre que } n \geq M_k. \end{aligned}$$

Sea  $N_1 = \max\{M_1, \dots, M_k\}$  y consideremos  $n \geq N_1$ . Veamos que  $A \subseteq N(\varepsilon, A_n)$ . Sea  $a \in A \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(a_i, \frac{\varepsilon}{2})$ , entonces existe  $j \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $a \in B(a_j, \frac{\varepsilon}{2})$ . Como  $A_n \cap B(a_j, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$ , sea  $b \in A_n \cap B(a_j, \frac{\varepsilon}{2})$ ; observemos que  $d(a, b) \leq d(a, a_j) + d(a_j, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ , con lo cual  $d(a, A_n) < \varepsilon$ , es decir,  $a \in N(\varepsilon, A_n)$ . Esto prueba que

$$A \subseteq N(\varepsilon, A_n) \text{ para todo } n \geq N_1. \tag{9}$$

**Afirmación:** Existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq N_2$ , entonces  $A_n \subseteq N(\varepsilon, A)$ . En efecto, supongamos lo contrario. Entonces existe  $J \subseteq \mathbb{N}$  infinito tal que para cada  $n \in J$ ,  $A_n \not\subseteq N(\varepsilon, A)$ . Para cada  $n \in J$ , sea  $x_n \in A_n \cap (X \setminus N(\varepsilon, A))$ . Entonces  $\{x_n\}_{n \in J}$  es una sucesión en  $X \setminus N(\varepsilon, A)$ . Como  $X \setminus N(\varepsilon, A)$  es un cerrado del compacto  $X$ , entonces también  $X \setminus N(\varepsilon, A)$  es compacto, así que existe  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  subsucesión de  $\{x_n\}_{n \in J}$  convergente a algún punto  $z \in X \setminus N(\varepsilon, A)$ . Veamos que  $z \in \limsup A_n$ . Sea  $U$  un entorno de  $z$ . Como  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $z$ , existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $x_{n_k} \in U$  para cada  $k \geq M$ . Dado que  $x_{n_k} \in A_{n_k}$ , se tiene que  $A_{n_k} \cap U \neq \emptyset$  para cada  $k \geq M$ . Esto implica que  $z \in \limsup A_n$ . Pero  $\limsup A_n = A \subseteq N(\varepsilon, A)$ , con lo cual  $z \in N(\varepsilon, A)$ , lo que es una contradicción. Esto prueba la afirmación.

Finalmente, sea  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , por (9) y la afirmación anterior, se tiene que  $H_d(A_n, A) < \varepsilon$  para todo  $n \geq N$ . Esto nos permite concluir que  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $A$  en  $CL(X)$  respecto a la métrica de Hausdorff.

Supongamos ahora que  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $A$  respecto a la métrica de Hausdorff.

Probaremos primero que  $\limsup A_n \subseteq A$ . Sea  $x \in \limsup A_n$  y sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $A$  respecto a la métrica de Hausdorff, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $H_d(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $n \geq N$ . Esto implica que  $A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$  para todo  $n \geq N$ . Como  $x \in \limsup A_n$ , existe  $J \subseteq \mathbb{N}$  infinito tal que  $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A_n \neq \emptyset$

$\emptyset$  para cada  $n \in J$ . Sea  $m \in J$  tal que  $m \geq N$ . Luego,  $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A_m \neq \emptyset$ . Sea  $y \in B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A_m$ . Como  $A_m \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$ , se sigue que  $d(y, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Por (1) de la Proposición 3.3, se tiene que  $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . Como  $\varepsilon > 0$  fue arbitrario, se concluye que  $d(x, A) = 0$ , es decir,  $x \in A$ .

Ahora probaremos que  $A \subseteq \liminf A_n$ . Sean  $x \in A$  y  $\varepsilon > 0$ . Como  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $A$  respecto a la métrica de Hausdorff, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $H_d(A_n, A) < \varepsilon$  para todo  $n \geq N$ . Esto implica que  $A \subseteq N(\varepsilon, A_n)$  para todo  $n \geq N$ . Sea  $n \geq N$ . Como  $x \in A \subseteq N(\varepsilon, A_n)$ , se tiene que  $d(x, A_n) < \varepsilon$ . Entonces existe  $a_n \in A_n$  tal que  $d(x, a_n) < \varepsilon$ , con lo cual  $a_n \in B(x, \varepsilon) \cap A_n$ . Hemos probado que  $B(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$  para cada  $n \geq N$ . Esto implica que  $x \in \liminf A_n$ .

De lo anterior, se sigue que  $A \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n \subseteq A$ . Por la Observación 4.2 (1), se concluye que  $\lim A_n = A$ .  $\square$

## 5 Algunas propiedades de los hiperespacios

Nuestro interés ahora es probar que  $CL(X)$  con la métrica de Hausdorff es compacto cuando  $X$  es un compacto. Para ello necesitaremos los siguientes lemas.

Recordemos que un espacio métrico  $X$  es totalmente acotado (o precompacto) si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un número finito de puntos  $x_1, \dots, x_n$  en  $X$  tales que  $X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$ .

**Lema 5.1.** *Sea  $X$  un espacio métrico acotado. Entonces  $X$  es totalmente acotado si y solo si  $(CL(X), H_d)$  es totalmente acotado.*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es totalmente acotado y veamos que  $CL(X)$  también lo es. Sea  $\varepsilon > 0$ . Entonces existen  $x_1, \dots, x_n \in X$  tales que  $X = \bigcup_{i=1}^n B_d(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ . Definamos  $\mathcal{A} = \wp(\{x_1, \dots, x_n\}) \setminus \{\emptyset\}$ . Observemos que  $\mathcal{A}$  es finito y  $\mathcal{A} \subseteq CL(X)$ . Probaremos que  $CL(X) \subseteq \bigcup \{B_{H_d}(D, \varepsilon) : D \in \mathcal{A}\}$ . Sea  $A \in CL(X)$ . Definamos  $J = \{i \in \{1, \dots, n\} : B_d(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset\}$ . Observemos que  $J \neq \emptyset$  (ya que  $A$  es no vacío) y que  $J$  es finito. Definamos  $D = \{x_i : i \in J\}$  y notemos que  $D \in \mathcal{A}$ . Veamos que  $H_d(A, D) < \varepsilon$ . Sea  $a \in A$ . Como  $A \subseteq X = \bigcup_{i=1}^n B_d(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ , existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $a \in B_d(x_j, \frac{\varepsilon}{2})$ . Luego,  $x_j \in D$ , con lo cual  $d(a, D) \leq d(a, x_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Como  $a$  es un punto arbitrario de  $A$ , se tiene que  $A \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, D)$ . Ahora veamos que  $D \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$ .

Sea  $x_i \in D$ . Luego,  $B_d(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset$ , lo que implica que  $x_i \in N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$ . Esto prueba que  $D \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$ . Por lo tanto,  $\frac{\varepsilon}{2} \in M(A, D)$  y en consecuencia,  $H_d(A, D) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ . Se concluye que  $A \in \bigcup\{B_{H_d}(D, \varepsilon) : D \in \mathcal{A}\}$ . Por lo tanto,  $CL(X) \subseteq \bigcup\{B_{H_d}(D, \varepsilon) : D \in \mathcal{A}\}$  y así  $CL(X)$  es totalmente acotado.

Ahora supongamos que  $CL(X)$  es totalmente acotado. Para probar que  $X$  también lo es, sea  $\varepsilon > 0$ . Entonces existen  $A_1, \dots, A_n \in CL(X)$  tales que  $CL(X) = \bigcup_{i=1}^n B_{H_d}(A_i, \varepsilon)$ . Para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , sea  $a_i \in A_i$ . Veamos que  $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_d(a_i, \varepsilon)$ . Sea  $x \in X$ . Luego,  $\{x\} \in CL(X) = \bigcup_{i=1}^n B_{H_d}(A_i, \varepsilon)$ , por lo que existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\{x\} \in B_{H_d}(A_j, \varepsilon)$ . Se sigue que  $H_d(\{x\}, A_j) < \varepsilon$ , y el inciso (3) la Observación 3.5 implica que  $A_j \subseteq N(\varepsilon, \{x\})$ . Como  $a_j \in A_j$ , entonces  $d(a_j, x) < \varepsilon$ , es decir,  $x \in B_d(a_j, \varepsilon)$ . Esto implica que  $x \in \bigcup_{i=1}^n B_d(a_i, \varepsilon)$ . Así,  $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_d(a_i, \varepsilon)$ . Se concluye que  $X$  es totalmente acotado.  $\square$

**Lema 5.2.** [1, Lema 4.2] *Sean  $X$  un espacio métrico,  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy en  $CL(X)$  y  $\varepsilon > 0$ . Entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $m \geq N$ , entonces existe una sucesión de números naturales  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $m = n_1$  y para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,*

$$n_k < n_{k+1} \text{ y } H_d(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

**Lema 5.3.** *El hiperespacio  $F_1(X)$  es cerrado en  $CL(X)$ .*

*Demostración.* Sea  $C \in \overline{F_1(X)}$ . Entonces existe una sucesión  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $F_1(X)$  que converge a  $C$  con respecto a la métrica de Hausdorff. Supongamos que  $C \notin F_1(X)$ . Sean  $x_1, x_2 \in C$  con  $x_1 \neq x_2$ , y  $r = d(x_1, x_2) > 0$ . Como  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $C$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $H_d(C_n, C) < \frac{r}{2}$  para cada  $n \geq N$ . Sea  $n \geq N$ . Como  $C_n \in F_1(X)$ , pongamos  $C_n = \{c\}$ . Dado que  $H_d(C_n, C) < \frac{r}{2}$ , entonces  $C \subseteq N(\frac{r}{2}, C_n) = B_d(c, \frac{r}{2})$ . Por lo tanto,

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, c) + d(c, x_2) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto,  $C \in F_1(X)$ , de donde  $\overline{F_1(X)} \subseteq F_1(X)$ , concluyéndose que  $F_1(X)$  es un cerrado de  $CL(X)$ .  $\square$

También recordemos que un espacio métrico  $X$  es completo si toda sucesión de Cauchy en  $X$  es convergente en  $X$ .

**Lema 5.4.** *Sea  $X$  un espacio métrico acotado. Se cumple que  $X$  es completo si y solo si  $(CL(X), H_d)$  es completo.*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es completo. Para ver que  $CL(X)$  también lo es, sea  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy en  $CL(X)$ . Demostraremos que  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\limsup A_n$  en  $CL(X)$  respecto a la métrica de Hausdorff, así que la prueba se hará en dos partes. Primero veamos que  $\limsup A_n \in CL(X)$ . Por la Observación 4.2 (4), se tiene que  $\limsup A_n$  es un cerrado de  $X$ , así que para ver que  $\limsup \in CL(X)$ , solo resta verificar que  $\limsup A_n \neq \emptyset$ . Por el Lema 5.2, existe una sucesión de números naturales  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$n_k < n_{k+1} \text{ y } H_d(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}.$$

Por la Observación 3.5 (2), para cada  $k \in \mathbb{N}$ , se cumple que

$$A_{n_k} \subseteq N\left(\frac{1}{2^k}, A_{n_{k+1}}\right).$$

Sea  $x_{n_1} \in A_{n_1}$ , entonces existe  $x_{n_2} \in A_{n_2}$  tal que  $d(x_{n_1}, x_{n_2}) < \frac{1}{2}$ . Luego, existe  $x_{n_3} \in A_{n_3}$  tal que  $d(x_{n_2}, x_{n_3}) < \frac{1}{2^2}$ . Continuando recursivamente este proceso, obtenemos la sucesión  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  en  $X$  tal que para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}$ . Veamos que esta sucesión es una sucesión de Cauchy en  $X$ . Para ello, sea  $\varepsilon > 0$ . Observemos que si  $j, l \in \mathbb{N}$  con  $j < l$ , entonces

$$\begin{aligned} d(x_{n_j}, x_{n_l}) &\leq d(x_{n_j}, x_{n_{j+1}}) + d(x_{n_{j+1}}, x_{n_{j+2}}) + \cdots + d(x_{n_{l-1}}, x_{n_l}) \\ &< \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{l-1}}. \end{aligned}$$

Como la sucesión  $\{\frac{1}{2^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a 0, es posible elegir  $M_1 \in \mathbb{N}$  tal que si  $j, l \geq M_1$  con  $j < l$ , entonces  $d(x_{n_j}, x_{n_l}) < \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{l-1}} < \varepsilon$ . Esto implica que  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $X$ . Por ser  $X$  completo, existe  $x \in X$  tal que  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $x$ . Veamos que  $x \in \limsup A_n$ . Sea  $r > 0$ . Como  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $x$ , existe  $M_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_{n_k} \in B_d(x, r)$  para cada  $k \geq M_2$ . Así,  $x_{n_k} \in B_d(x, r) \cap A_{n_k}$  para todo  $k \geq M_2$ . Esto implica que  $x \in \limsup A_n$  y así  $\limsup A_n \neq \emptyset$ . Por lo tanto,  $\limsup A_n \in CL(X)$ .

La segunda parte de la prueba consiste en verificar que  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\limsup A_n$  respecto a la métrica de Hausdorff. Para ello, sean  $\varepsilon > 0$  y  $r = \frac{\varepsilon}{4}$ .

Como  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $CL(X)$ , existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $n \geq N_1$ , se tiene que  $H_d(A_{N_1}, A_n) < \frac{r}{4}$ . Por otro lado, el Lema 5.2 garantiza la existencia de  $N_2 \in \mathbb{N}$  tal que si  $m \geq N_2$ , entonces existe una sucesión de números naturales  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $m = n_1$  y para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$n_k < n_{k+1} \text{ y } H_d(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}) < \frac{r}{2^k}.$$

Sea  $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ . Veamos que para cada  $m \geq N$  se cumple que  $H_d(A_m, \limsup A_n) < \varepsilon$ . Sea  $m \geq N$ . Notar que si  $n \geq m$ , se sigue que  $H_d(A_m, A_n) \leq H_d(A_m, A_N) + H_d(A_N, A_n) < \frac{r}{4} + \frac{r}{4} = \frac{r}{2}$ . Esto implica que para cada  $n \geq m$ ,  $A_n \subseteq N(\frac{r}{2}, A_m)$ .

**Afirmación 1:**  $\overline{N(\frac{r}{2}, A_m)} \subseteq N(r, A_m)$ . En efecto, sea  $y \in \overline{N(\frac{r}{2}, A_m)}$ . Luego,  $B_d(y, \frac{r}{2}) \cap N(\frac{r}{2}, A_m) \neq \emptyset$ . Sea  $z \in B_d(y, \frac{r}{2}) \cap N(\frac{r}{2}, A_m)$ . Entonces existe  $a \in A_m$  tal que  $d(z, a) < \frac{r}{2}$ . Luego,  $d(y, a) \leq d(y, z) + d(z, a) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$ , lo que implica que  $y \in N(r, A_m)$ . Por lo tanto,  $\overline{N(\frac{r}{2}, A_m)} \subseteq N(r, A_m)$ .

**Afirmación 2:**  $\limsup A_n \subseteq N(r, A_m)$ . En efecto, dado que  $A_n \subseteq N(\frac{r}{2}, A_m)$  para cada  $n \geq m$ , se tiene que  $\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \subseteq N(\frac{r}{2}, A_m)$ , de modo que  $\overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n} \subseteq \overline{N(\frac{r}{2}, A_m)}$ . Por la Afirmación 1, se sigue que  $\overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n} \subseteq N(r, A_m)$ , así que será suficiente probar que  $\limsup A_n \subseteq \overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n}$ . Para ello, sea  $y \in \limsup A_n$  y supongamos que  $y \notin \overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n}$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $B_d(y, \delta) \cap (\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n) = \emptyset$ . Esto implica que para todo  $n \geq m$ ,  $B_d(y, \delta) \cap A_n = \emptyset$ . Se sigue que  $B_d(y, \delta)$  interseca a lo más a una cantidad finita de términos de la sucesión  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , lo que contradice que  $y \in \limsup A_n$ . Por lo tanto,  $\limsup A_n \subseteq \overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n}$  y así  $\limsup A_n \subseteq N(r, A_m)$ .

La Afirmación 2 implica que

$$\limsup A_n \subseteq N\left(\frac{\varepsilon}{2}, A_m\right). \quad (10)$$

Veamos ahora que  $A_m \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, \limsup A_n)$ . Por la elección de  $m$ , existe una sucesión de números naturales  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $m = n_1$  y para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$n_k < n_{k+1} \text{ y } H_d(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}) < \frac{r}{2^k}.$$

Por la Observación 3.5 (2), para cada  $k \in \mathbb{N}$ , se cumple que

$$A_{n_k} \subseteq N\left(\frac{r}{2^k}, A_{n_{k+1}}\right).$$

Sea  $x_{n_1} \in A_{n_1}$ , entonces existe  $x_{n_2} \in A_{n_2}$  tal que  $d(x_{n_1}, x_{n_2}) < \frac{r}{2}$ . Luego, existe  $x_{n_3} \in A_{n_3}$  tal que  $d(x_{n_2}, x_{n_3}) < \frac{r}{2^2}$ . Continuando recursivamente este proceso, obtenemos la sucesión  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  en  $X$  tal que para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{r}{2^k}$ . Veamos que  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $X$ . Para ello, sea  $s > 0$ . Observemos que si  $j, l \in \mathbb{N}$  con  $j < l$ , entonces

$$\begin{aligned} d(x_{n_j}, x_{n_l}) &\leq d(x_{n_j}, x_{n_{j+1}}) + d(x_{n_{j+1}}, x_{n_{j+2}}) + \cdots + d(x_{n_{l-1}}, x_{n_l}) \\ &< \frac{r}{2^j} + \frac{r}{2^{j+1}} + \cdots + \frac{r}{2^{l-1}}. \end{aligned}$$

Como la sucesión  $\{\frac{1}{2^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a 0, es posible elegir  $M_3 \in \mathbb{N}$  tal que si  $j, l \geq M_3$  con  $j < l$ , entonces  $\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{l-1}} < \frac{s}{r}$ , con lo cual  $d(x_{n_j}, x_{n_l}) < \frac{r}{2^j} + \frac{r}{2^{j+1}} + \cdots + \frac{r}{2^{l-1}} < s$ . Esto prueba que  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $X$ . Por ser  $X$  completo, existe  $y \in X$  tal que  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $y$ . Observemos que  $y \in \limsup A_n$  y que  $d(x_{n_1}, x_{n_k}) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2^2} + \cdots + \frac{r}{2^{k-1}} < r$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Como  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $y$ , existe  $M_4 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $k \geq M_4$ ,  $d(x_{n_k}, y) < r$ . Sea  $k \geq M_4$ . Se sigue que  $d(x_{n_1}, y) \leq d(x_{n_1}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) < r + r = \frac{\varepsilon}{2}$ , con lo cual  $x_{n_1} \in N(\frac{\varepsilon}{2}, \limsup A_n)$ . Por ser  $x_{n_1} \in A_{n_1}$  arbitrario, se concluye que

$$A_m = A_{n_1} \subseteq N\left(\frac{\varepsilon}{2}, \limsup A_n\right). \quad (11)$$

En resumen, de (10) y (11) se tiene que  $\limsup A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A_m)$  y  $A_m \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, \limsup A_n)$  para cada  $m \geq N$ . Luego,

$$H_d(A_m, \limsup A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

siempre que  $m \geq N$ . Esto prueba que  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\limsup A_n$  en  $CL(X)$ , concluyéndose que  $CL(X)$  es completo.

Recíprocamente, supongamos que  $CL(X)$  es completo. Por el Lema 5.3,  $F_1(X)$  es un cerrado de  $CL(X)$ , y como  $CL(X)$  es completo, por [7, Teorema 3, pág 118],  $F_1(X)$  es completo. Pero  $F_1(X)$  es homeomorfo a  $X$  (ya que  $h : X \rightarrow F_1(X)$  dado por  $h(x) = \{x\}$  es un homeomorfismo). Por lo tanto,  $X$  es completo.  $\square$



**Teorema 5.5.** *Si  $X$  es un espacio métrico, se cumple que  $X$  es compacto si y solo si  $(CL(X), H_d)$  es compacto.*

*Demostración.* Como  $X$  es compacto si y solo si  $X$  es totalmente acotado y completo, por los lemas 5.1 y 5.4, esto es equivalente a que  $(CL(X), H_d)$  es totalmente acotado y completo, es decir, equivale a que  $(CL(X), H_d)$  es compacto.  $\square$

**Corolario 5.6.** *Si  $X$  es un espacio métrico compacto, entonces  $(2^X, H_d)$  es compacto.*

*Demostración.* Si  $X$  es compacto, por la Observación 3.1,  $2^X = CL(X)$ . En virtud del Teorema 5.5, se concluye que  $(2^X, H_d)$  es compacto.  $\square$

También  $CLC(X)$  con la métrica de Hausdorff es un hiperespacio compacto, como se verá en el siguiente teorema:

**Teorema 5.7.** *Si  $X$  es un espacio métrico compacto, entonces el hiperespacio  $(CLC(X), H_d)$  también es compacto.*

*Demostración.* Como  $CLC(X) \subseteq CL(X)$  y  $CL(X)$  es compacto (por el Teorema 5.5), bastará demostrar que  $CLC(X)$  es un cerrado de  $CL(X)$ . Para ello, sea  $A \in CLC(X)$ . Entonces existe una sucesión  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $CLC(X)$  que converge a  $A$ . Notemos que  $A \in CL(X)$ , así que para ver que  $A \in CLC(X)$ , solo resta verificar que  $A$  es conexo. Supongamos por contradicción que  $A$  es disconexo, entonces existen  $U$  y  $V$  subconjuntos no vacíos de  $X$ , ajenos, cerrados en  $A$  y tales que  $A = U \cup V$ . Notemos que  $U$  y  $V$  son cerrados en  $X$ ; luego,  $U$  y  $V$  son compactos. Como  $U \cap V = \emptyset$ , entonces  $d(U, V) = \inf\{d(u, V) : u \in U\} > 0$ . Sea  $\varepsilon = d(U, V)$ . Dado que  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $A$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $H_d(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$  para cada  $n \geq N$ . Sea  $n \geq N$ . Por (2) de la Observación 3.5, se tiene que  $A \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n)$  y  $A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$ . Pero  $A = U \cup V$ ; luego,  $N(\frac{\varepsilon}{2}, A) = N(\frac{\varepsilon}{2}, U) \cup N(\frac{\varepsilon}{2}, V)$ , con lo cual  $A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, U) \cup N(\frac{\varepsilon}{2}, V)$ . Observemos que  $N(\frac{\varepsilon}{2}, U)$  y  $N(\frac{\varepsilon}{2}, V)$  son subconjuntos abiertos de  $X$ . Veamos que  $N(\frac{\varepsilon}{2}, U) \cap N(\frac{\varepsilon}{2}, V) = \emptyset$ . Supongamos que existe  $x \in N(\frac{\varepsilon}{2}, U) \cap N(\frac{\varepsilon}{2}, V)$ , se sigue que  $d(x, U) < \frac{\varepsilon}{2}$  y  $d(x, V) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Entonces existe  $u \in U$  tal que  $d(x, u) < \frac{\varepsilon}{2}$ ; luego,

$$\varepsilon = d(U, V) \leq d(u, V) \leq d(u, x) + d(x, V) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto,  $N(\frac{\varepsilon}{2}, U) \cap N(\frac{\varepsilon}{2}, V) = \emptyset$ . Así,  $N(\frac{\varepsilon}{2}, U)$  y  $N(\frac{\varepsilon}{2}, V)$  son abiertos ajenos tales que  $A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, U) \cup N(\frac{\varepsilon}{2}, V)$ . Por ser  $A_n$  conexo,  $A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, U)$  o  $A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, V)$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, U)$ . Afirmamos que  $N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n) \subseteq N(\varepsilon, U)$ . En efecto, sea  $z \in N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n)$ , entonces existe  $a \in A_n$  tal que  $d(z, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Pero  $A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, U)$ , así que existe  $u \in U$  tal que  $d(a, u) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Luego,  $d(z, u) \leq d(z, a) + d(a, u) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ , es decir,  $z \in N(\varepsilon, U)$ . Observemos que  $\varepsilon = \inf\{d(u, V) : u \in U\}$  implica que  $V \cap N(\varepsilon, U) = \emptyset$ . En efecto, si existiese  $z \in V \cap N(\varepsilon, U)$ , entonces  $d(z, U) < \varepsilon$ , por lo que existe  $u \in U$  tal que  $d(z, u) < \varepsilon$ , de donde  $d(u, V) < \varepsilon$ , lo que es una contradicción. Así,  $V \cap N(\varepsilon, U) = \emptyset$ .

Como  $V \subseteq A \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n) \subseteq N(\varepsilon, U)$ , se tiene que  $V = V \cap N(\varepsilon, U) = \emptyset$ , lo que es una contradicción. Por lo tanto, se concluye que  $A$  es conexo. Así,  $CLC(X)$  es un cerrado de  $CL(X)$  y, por ende, es compacto.  $\square$

**Corolario 5.8.** *Si  $X$  es un espacio métrico compacto, entonces  $(C(X), H_d)$  es compacto.*

*Demostración.* Si  $X$  es compacto, por la Observación 3.1, se tiene que  $C(X) = 2^X \cap CLC(X) = CL(X) \cap CLC(X) = CLC(X)$ . En virtud del Teorema 5.7, se concluye que  $(C(X), H_d)$  es compacto.  $\square$

## 6 Funciones de Whitney

Nombradas en honor al matemático estadounidense Hassler Whitney, las funciones de Whitney están estrechamente relacionadas con la estructura de arco en los hiperespacios, y su importancia radica en que siempre es posible construir una de estas funciones en cualquier hiperespacio de un compacto. Por otro lado, las funciones de Whitney conservan cierto parecido con el concepto de medida de un conjunto.

**Definición 6.1.** Sean  $X$  un espacio métrico compacto y  $\mathcal{H} \subseteq 2^X$ . Una **función de Whitney** para  $\mathcal{H}$  es una función continua  $\omega : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty)$  que satisface las siguientes condiciones:

- (1) Para cualesquiera  $A, B \in \mathcal{H}$  con  $A \subseteq B$  y  $A \neq B$ , se tiene que  $\omega(A) < \omega(B)$ .
- (2)  $\omega(A) = 0$  si y solo si  $A \in \mathcal{H} \cap F_1(X)$ .

**Observación 6.2.** (1) El primer inciso de la definición anterior es equivalente a que  $\omega : (\mathcal{H}, \subseteq) \rightarrow ([0, \infty), \leq)$  como función entre conjuntos parcialmente ordenados sea estrictamente creciente.

(2) Si  $\omega : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty)$  es una función de Whitney para  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{H}$ , entonces  $\omega \upharpoonright_{\mathcal{N}}$  es una función de Whitney para  $\mathcal{N}$ .

**Definición 6.3.** Sea  $X$  un espacio métrico compacto. Definimos la función **diámetro** como la función  $\text{diám} : 2^X \rightarrow [0, \infty)$  dada por

$$\text{diám}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

**Ejemplo 6.4.** En  $\mathbb{R}$  con la métrica usual, dado  $A \subseteq \mathbb{R}$  acotado y no vacío, el diámetro de  $A$  es  $\text{diám}(A) = \sup A - \inf A$ .

**Lema 6.5.** Si  $X$  es un compacto, entonces la función diámetro  $\text{diám} : 2^X \rightarrow [0, \infty)$  es continua.

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ . Sean  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$  y  $A, B \in 2^X$  tales que  $H_d(A, B) < \delta$ . Veamos que  $|\text{diám}(A) - \text{diám}(B)| < \varepsilon$ . Como  $A$  es compacto, existen  $a_1, a_2 \in A$  tales que  $\text{diám}(A) = d(a_1, a_2)$ . Por (2) de la Observación 3.5, se tiene que  $A \subseteq N(\delta, B)$ , así que  $a_1, a_2 \in N(\delta, B)$ , es decir,  $d(a_1, B) < \delta$  y  $d(a_2, B) < \delta$ , por lo que existen  $b_1, b_2 \in B$  tales que  $d(a_1, b_1) < \delta$  y  $d(a_2, b_2) < \delta$ . Luego,

$$\begin{aligned} \text{diám}(A) = d(a_1, a_2) &\leq d(a_1, b_1) + d(b_1, b_2) + d(b_2, a_2) \\ &< \delta + d(b_1, b_2) + \delta = d(b_1, b_2) + \varepsilon \\ &\leq \text{diám}(B) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\text{diám}(A) - \text{diám}(B) < \varepsilon$ . Análogamente, se prueba que  $\text{diám}(B) - \text{diám}(A) < \varepsilon$ . Por lo tanto,  $|\text{diám}(A) - \text{diám}(B)| < \varepsilon$ , lo que concluye la demostración.  $\square$

Recordemos que un espacio topológico  $X$  es separable si contiene un subconjunto  $A$  numerable y denso en  $X$ .

**Lema 6.6.** Todo espacio métrico compacto es separable.

*Demostración.* Sea  $X$  un espacio métrico compacto.

**Afirmación:** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $A_n \subseteq X$  finito tal que  $X \subseteq \bigcup_{x \in A_n} B(x, \frac{1}{n})$ .

En efecto, sea  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $X$  es compacto y  $X \subseteq \bigcup_{x \in X} B(x, \frac{1}{n})$ , entonces existen  $x_1, \dots, x_n \in X$  tales que  $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{1}{n})$ . Definiendo  $A_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ , se prueba la afirmación.

Sea  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Observemos que  $A$  es numerable. Veamos ahora que  $A$  es denso en  $X$ , es decir, que  $\bar{A} = X$ . Sean  $p \in X$  y  $\varepsilon > 0$ . Entonces existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{m} < \varepsilon$ . Por la afirmación, existe  $A_m \subseteq X$  finito tal que  $p \in X \subseteq \bigcup_{x \in A_m} B(x, \frac{1}{m})$ . Luego, existe  $a \in A_m$  tal que  $p \in B(a, \frac{1}{m})$ . Como  $d(p, a) < \frac{1}{m} < \varepsilon$ , se sigue que  $a \in B(p, \varepsilon)$ . Además,  $a \in A_m \subseteq A$ , con lo cual  $B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ . Como  $\varepsilon > 0$  fue arbitrario, se concluye que  $p \in \bar{A}$ . Esto prueba que  $A$  es denso en  $X$ , concluyéndose que  $X$  es separable.  $\square$

**Teorema 6.7.** *Si  $X$  es un espacio métrico compacto, entonces cualquier hiperespacio de  $X$  tiene una función de Whitney.*

*Demostración.* Si  $\omega$  es una función de Whitney para  $CL(X)$  y  $\mathcal{H} \subseteq CL(X)$ , por (2) de la Observación 6.2,  $\omega \upharpoonright_{\mathcal{H}}$  será una función de Whitney para  $\mathcal{H}$ . Así que bastará probar que existe una función de Whitney para  $CL(X)$ . Para ello, observemos que  $X$  es separable (por el Lema 6.6), así que tomemos  $Z = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$  un subconjunto denso numerable de  $X$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definamos  $f_n : X \rightarrow [0, 1]$  como  $f_n(x) = \frac{1}{1+d(z_n, x)}$ . Ahora defínase para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la función  $\omega_n : CL(X) \rightarrow [0, 1]$  como  $\omega_n(A) = \text{diám}(f_n(A))$ . Finalmente, definamos  $\omega : CL(X) \rightarrow [0, 1]$  como

$$\omega(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \omega_n(A).$$

Observemos que para todo  $A \in CL(X)$ ,  $0 \leq \omega_n(A) \leq 1$ , con lo cual

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \omega_n(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \omega_n(A)$  converge por el criterio de comparación, por lo que  $\omega$  está bien definida.

Veamos que  $\omega$  es una función de Whitney para  $CL(X)$ . Observemos que  $\omega_n = \text{diám} \circ f_n^*$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , así que los lemas 6.5 y [12, Lema 1.32] implican que  $\omega_n$  es continua para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por el Criterio M de Weierstrass, se tiene que  $\omega$  es continua.

Ahora sean  $A, B \in CL(X)$  con  $A \subseteq B$  y  $A \neq B$ . Como  $A \subseteq B$ , se tiene que  $f_n(A) \subseteq f_n(B)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , con lo cual  $\omega_n(A) = \text{diám } f_n(A) \leq \text{diám } f_n(B) = \omega_n(B)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Para comprobar que  $\omega(A) < \omega(B)$ , será suficiente probar que existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\omega_m(A) < \omega_m(B)$ . Para ello, sean  $p \in B \setminus A$  y  $r = \frac{1}{2}d(p, A)$ . Notemos que  $r > 0$ , ya que  $A$  es cerrado y  $p \notin A$ . Como  $p \in X = \bar{Z}$ , entonces  $B(p, r) \cap Z \neq \emptyset$ . Sea  $z_m \in B(p, r) \cap Z$ . Dado que  $d(z_m, p) < r$ , se tiene que

$$f_m(p) = \frac{1}{1 + d(z_m, p)} > \frac{1}{1 + r}. \quad (12)$$

Ahora, como  $d(p, A) - d(z_m, A) \leq d(p, z_m) < r$ , se tiene que  $r + d(z_m, A) > d(p, A) = 2r$ , lo que implica que  $d(z_m, A) > r$ , con lo cual

$$f_m(a) = \frac{1}{1 + d(z_m, a)} < \frac{1}{1 + r}. \quad (13)$$

para todo  $a \in A$ . Combinando (12) y (13), se tiene que

$$\sup f_m(A) \leq \frac{1}{1 + r} < f_m(p). \quad (14)$$

Pero como  $p \in B$ , se deduce que

$$\sup f_m(A) < \sup f_m(B). \quad (15)$$

Por otro lado, como  $A \subseteq B$ , se cumple que  $f_m(A) \subseteq f_m(B)$ , con lo cual

$$\inf f_m(B) \leq \inf f_m(A). \quad (16)$$

Se sigue de (15), (16) y del Ejemplo 6.4 que

$$\omega_m(A) = \text{diám } f_m(A) < \text{diám } f_m(B) = \omega_m(B)$$

esto prueba que  $\omega(A) < \omega(B)$ .

Finalmente, veamos que  $\omega$  satisface que  $\omega(A) = 0$  si y solo si  $A \in F_1(X)$ . Así pues, sea  $A \in CL(X)$ . Supongamos que  $A \in F_1(X)$ , digamos,  $A = \{x\}$ . Luego,  $\omega_n(A) = \text{diám } f_n(A) = \text{diám}\{f_n(x)\} = 0$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , por lo que  $\omega(A) = 0$ . Ahora supongamos que  $A \notin F_1(X)$ . Sean  $x, y \in A$  con  $x \neq y$ , y sea  $r = \frac{1}{2}d(x, y) > 0$ . Como  $Z$  es denso en  $X$ , existe  $z_m \in B(x, r) \cap Z$ . Notemos que  $z_m \notin B(y, r)$  (de lo contrario,  $d(x, y) < 2r$ , lo que es una contradicción), lo que implica que  $f_m(x) \neq f_m(y)$ . Con esto,  $\omega_m(A) = \text{diám } f_m(A) > 0$ , luego,  $\omega(A) > 0$ .

De todo lo anterior, se concluye que  $\omega$  es una función de Whitney, lo que prueba el teorema.  $\square$

## 7 Arco conexidad de $2^X$ y $C(X)$

En esta sección estudiaremos la arco conexidad de los hiperespacios  $2^X$  y  $C(X)$  cuando  $X$  es un continuo, utilizando el concepto de arco ordenado en un hiperespacio. En particular, se demostrará que si  $X$  es un continuo, entonces  $2^X$  y  $C(X)$  también lo son.

**Definición 7.1.** Una colección  $\mathcal{N}$  de conjuntos es una **red** o nido si para cualesquiera  $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$  se cumple que  $N_1 \subseteq N_2$  o bien  $N_2 \subseteq N_1$ .

Una red desde  $A_0$  hasta  $A_1$  es una red  $\mathcal{N}$  tal que  $A_0, A_1 \in \mathcal{N}$  y  $A_0 \subseteq N \subseteq A_1$  para cualquier  $N \in \mathcal{N}$ .

**Definición 7.2.** Sean  $X$  un espacio métrico compacto y  $\mathcal{H} \subseteq 2^X$ . Un **arco ordenado** en  $\mathcal{H}$  es un arco en  $\mathcal{H}$  que es también una red.

Una red compacta  $\mathcal{N} \subseteq 2^X$  es una red que es también un subconjunto compacto de  $2^X$ .

**Lema 7.3.** Sean  $X$  un espacio métrico compacto,  $\mathcal{H} \subseteq 2^X$  y  $\omega$  una función de Whitney para  $\mathcal{H}$ . Si  $\mathcal{N}$  es una red compacta en  $\mathcal{H}$ , entonces  $\omega \upharpoonright_{\mathcal{N}}$  es un homeomorfismo.

*Demostración.* Veamos que  $\omega \upharpoonright_{\mathcal{N}}$  es inyectiva: sean  $F, G \in \mathcal{N}$  con  $F \neq G$ . Por ser  $\mathcal{N}$  una red, se tiene que  $F \subseteq G$  o bien  $G \subseteq F$ , lo que implica que  $\omega(F) < \omega(G)$  o bien  $\omega(G) < \omega(F)$ . En cualquier caso,  $\omega(F) \neq \omega(G)$ . Así,  $\omega \upharpoonright_{\mathcal{N}}$  es inyectiva. Luego, es posible restringir el codominio de  $\omega \upharpoonright_{\mathcal{N}}$  a  $\omega(\mathcal{N})$  para tener una función biyectiva. Además,  $\omega \upharpoonright_{\mathcal{N}}$  es continua, ya que  $\omega$  lo es, y como  $\mathcal{N}$  es compacto, concluimos que  $\omega \upharpoonright_{\mathcal{N}}$  es un homeomorfismo.  $\square$

**Lema 7.4.** Sea  $X$  un espacio métrico compacto y  $\mathcal{A}$  un subcontinuo de  $2^X$  con más de un punto. Si  $\mathcal{A}$  es una red, entonces  $\mathcal{A}$  es también un arco ordenado.

*Demostración.* Sea  $\omega$  una función de Whitney para  $2^X$  (la cual existe por el Teorema 6.7). Como  $\mathcal{A}$  es una red compacta en  $2^X$ , por el Lema 7.3, se tiene que  $\omega \upharpoonright_{\mathcal{A}}$  es un homeomorfismo. Así,  $\omega(\mathcal{A})$  es un continuo, que resulta ser un intervalo cerrado y acotado de  $\mathbb{R}$  con más de un punto. Por consiguiente,  $\mathcal{A}$  es un arco, y por ser  $\mathcal{A}$  una red, se concluye que  $\mathcal{A}$  es un arco ordenado.  $\square$

En [12] se muestran condiciones para asegurar la existencia de arcos ordenados en los hiperespacios  $C(X)$  y  $2^X$ . Particularmente, se tiene el siguiente teorema:

**Teorema 7.5.** [12, Teorema 2.7] *Sea  $X$  un espacio métrico compacto y  $A_0, A_1 \in C(X)$  tales que  $A_0 \subseteq A_1$  y  $A_0 \neq A_1$ . Entonces existe un arco ordenado en  $C(X)$  desde  $A_0$  hasta  $A_1$ .*

Como consecuencia, los hiperespacios  $2^X$  y  $C(X)$  son arco conexos cuando  $X$  es un continuo, lo cual se enuncia y demuestra a continuación.

**Teorema 7.6.** *Si  $X$  es un continuo, entonces  $2^X$  y  $C(X)$  son arco conexos.*

*Demostración.* Primero probaremos la arco conexidad de  $2^X$ : sea  $K \in 2^X$  con  $K \neq X$  y sea  $A_0$  una componente de  $K$ . Como  $A_0, X \in C(X)$  y  $A_0 \neq X$ , el Teorema 7.5 nos asegura la existencia de un arco ordenado  $\alpha$  en  $C(X)$  desde  $A_0$  hasta  $X$ . Sea  $h$  un homeomorfismo de  $[0, 1]$  sobre  $\alpha$  tal que  $h(0) = A_0$  y  $h(1) = X$ . Definamos  $f : [0, 1] \rightarrow 2^X$  como  $f(t) = K \cup h(t)$ . Se tiene que  $f$  es continua por [12, Proposición 1.24]. Además,  $f(0) = K$  y  $f(1) = X$ . Luego,  $f([0, 1])$  es un subcontinuo de  $2^X$  con más de un punto. Más aún, el hecho de que  $\alpha$  sea un arco ordenado implica que  $f([0, 1])$  es una red desde  $K$  hasta  $X$ . Así, por el Lema 7.4,  $f([0, 1])$  es un arco ordenado en  $2^X$  desde  $K$  hasta  $X$ .

Hemos probado que para cualquier  $K \in 2^X$  con  $K \neq X$ , existe un arco en  $2^X$  entre  $K$  y  $X$ . Por el Lema 2.4, se concluye que  $2^X$  es arco conexo.

Finalmente, probaremos que  $C(X)$  es arco conexo. Si  $A_0 \in C(X)$  con  $A_0 \neq X$ , por el Teorema 7.5, existe un arco en  $C(X)$  desde  $A_0$  hasta  $X$ . Nuevamente, el Lema 2.4 nos permite concluir que  $C(X)$  es arco conexo.  $\square$

**Corolario 7.7.** *Si  $X$  es un continuo, entonces  $2^X$  y  $C(X)$  son continuos arco conexos.*

*Demostración.* Como  $X$  es compacto, por los corolarios 5.6 y 5.8, se tiene que  $2^X$  y  $C(X)$  son compactos. Por el Teorema 7.6, también son arco conexos, lo que implica, en virtud de la Observación 2.3, que son conexos. Por lo tanto,  $2^X$  y  $C(X)$  son continuos arco conexos.  $\square$

## 8 Arco conexidad local de $2^X$ y $C(X)$

Finalmente, estudiaremos la arco conexidad local y la conexidad local de los hiperespacios  $2^X$  y  $C(X)$  y veremos algunas condiciones equivalentes a ser un continuo de Peano, involucrando el concepto de homogeneidad.

**Definición 8.1.** Un espacio topológico  $Y$  es **localmente arco conexo en un punto**  $p \in Y$  si para todo entorno  $U$  de  $p$  existe  $V$  un subconjunto abierto arco conexo de  $Y$  tal que  $p \in V \subseteq U$ . Decimos que un espacio topológico es **localmente arco conexo** si es localmente arco conexo en cada uno de sus puntos.

**Definición 8.2.** Un espacio topológico  $Y$  es **localmente conexo en un punto**  $p \in Y$  si para todo entorno  $U$  de  $p$ , existe  $V \subseteq Y$  abierto y conexo tal que  $p \in V \subseteq U$ . Decimos que  $Y$  es **localmente conexo** si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Un continuo localmente conexo es llamado un **continuo de Peano**.

**Observación 8.3.** Si un espacio topológico  $Y$  es localmente arco conexo en un punto  $p \in Y$ , entonces  $Y$  es localmente conexo en  $p$ . Como consecuencia,  $Y$  es localmente conexo siempre que  $Y$  sea localmente arco conexo.

**Observación 8.4.** La arco conexidad local y la conexidad local son propiedades topológicas.

**Teorema 8.5.** [12, Teorema 3.2] *Sean  $X$  un espacio métrico compacto y  $A_0, A_1 \in 2^X$  con  $A_0 \neq A_1$ . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) *Existe un arco ordenado en  $2^X$  desde  $A_0$  hasta  $A_1$ .*
- (b)  *$A_0 \subseteq A_1$  y cada componente de  $A_1$  intersecta a  $A_0$ .*

Si  $\alpha$  es un arco ordenado en  $2^X$  desde  $A_0$  hasta  $A_1$  y  $\mathcal{H} \subseteq 2^X$ , diremos que  $\alpha$  empieza en  $\mathcal{H}$  si  $A_0 \in \mathcal{H}$ . Cuando esto ocurra, diremos que  $\alpha$  se queda en  $\mathcal{H}$  si  $\alpha \subseteq \mathcal{H}$ .

**Corolario 8.6.** *Sean  $X$  un espacio métrico compacto y  $\alpha$  un arco ordenado en  $2^X$ . Si  $\alpha$  empieza en  $C(X)$ , entonces  $\alpha$  se queda en  $C(X)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\alpha$  es un arco ordenado en  $2^X$  desde  $A_0$  hasta  $A_1$ , donde  $A_0 \in C(X)$ . Veamos que  $\alpha \subseteq C(X)$ . Para ello, sea  $B \in \alpha$  con  $B \neq A_0$ . Notemos que  $A_0 \subseteq B$ . Sea  $\beta$  el subarco de  $\alpha$  desde  $A_0$  hasta  $B$ . Como  $\beta \subseteq \alpha$ , entonces  $\beta$  es una red, es decir,  $\beta$  es un arco ordenado en  $2^X$  desde  $A_0$  hasta  $B$ . Por el Teorema 8.5, cada componente de  $B$  intersecta a  $A_0$ . Pero  $A_0$  es un subconjunto conexo de  $B$ , con lo cual  $B$  tiene solo una componente. Esto quiere decir que  $B$  es conexo, es decir,  $B \in C(X)$ . Esto prueba que  $\alpha \subseteq C(X)$ , como queríamos.  $\square$



**Corolario 8.7.** *Si  $X$  es un continuo, los hiperespacios  $2^X$  y  $C(X)$  son localmente arco conexos en  $X$ .*

*Demostración.* Verifiquemos primero la arco conexidad local de  $2^X$  en  $X$ . Sea  $U \subseteq 2^X$  un entorno de  $X$ . Entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $X \in B_{H_d}(X, \varepsilon) \subseteq U$ . Veamos que  $B_{H_d}(X, \varepsilon)$  es un subespacio arco conexo de  $2^X$ . Para ello, sea  $A_0 \in B_{H_d}(X, \varepsilon)$  con  $A_0 \neq X$ . Por ser  $X$  conexo, se satisface (b) del Teorema 8.5 (con  $A_1 = X$ ); luego, existe  $\alpha$  un arco ordenado en  $2^X$  desde  $A_0$  hasta  $X$ . Veamos que  $\alpha \subseteq B_{H_d}(X, \varepsilon)$ . Sea  $A \in \alpha$ , entonces  $A_0 \subseteq A$ . Como  $H_d(A_0, X) < \varepsilon$ , se sigue que  $X \subseteq N(A_0, \varepsilon) \subseteq N(A, \varepsilon)$ . Por otro lado,  $A \subseteq X \subseteq N(X, \varepsilon)$ . Por (3) de la Observación 3.5, se tiene que  $H_d(A, X) < \varepsilon$ , es decir,  $A \in B_{H_d}(X, \varepsilon)$ .

Hemos probado que para todo  $A_0 \in B_{H_d}(X, \varepsilon) \setminus \{X\}$  existe un arco en  $B_{H_d}(X, \varepsilon)$  con puntos extremos  $A_0$  y  $X$ . Por el Lema 2.4, se concluye que  $B_{H_d}(X, \varepsilon)$  es arco conexas. Esto prueba la arco conexidad local de  $2^X$  en  $X$ .

La prueba de la arco conexidad local de  $C(X)$  en  $X$  se realiza de manera análoga al caso anterior, observando que ahora  $A_0 \in C(X)$  y el Corolario 8.6 nos asegura que  $\alpha \subseteq C(X)$ . □

**Corolario 8.8.** *Si  $X$  es un continuo, los hiperespacios  $2^X$  y  $C(X)$  son localmente conexos en  $X$ .*

*Demostración.* Es consecuencia del Corolario 8.7 y la Observación 8.3. □

**Definición 8.9.** Un espacio topológico  $X$  es **homogéneo** si para cualesquiera  $p, q \in X$ , existe un homeomorfismo  $h : X \rightarrow X$  tal que  $h(p) = q$ .

De manera intuitiva, un espacio topológico es homogéneo si su estructura topológica es la misma en cada uno de sus puntos.

**Ejemplo 8.10.** (1) Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la esfera  $n$ -dimensional  $S^n$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  es homogénea, ya que para cada par de sus puntos existe una rotación de  $S^n$ , la cual es un homeomorfismo, que lleva uno de estos puntos en el otro.

(2) El intervalo cerrado  $[0, 1]$  no es homogéneo. En efecto, supongamos que existe  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  homeomorfismo tal que  $f(1) = \frac{1}{2}$ . Como  $[0, 1] \setminus \{1\}$  es conexo, se tiene que  $f([0, 1] \setminus \{1\})$  es conexo. Pero  $f([0, 1] \setminus \{1\}) = f([0, 1]) \setminus \{f(1)\} = [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ , el cual es disconexo, teniéndose una contradicción. Con esto, se asegura que  $[0, 1]$  no es homogéneo.

**Lema 8.11.** [8, Teorema 2.67] *Sea  $X$  un continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a)  $X$  es un continuo de Peano.
- (b)  $2^X$  es un continuo de Peano.
- (c)  $C(X)$  es un continuo de Peano.

Los siguientes dos teoremas caracterizan la homogeneidad de  $2^X$  y de  $C(X)$ .

**Teorema 8.12.** *Sea  $X$  un continuo. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- (a)  $X$  es un continuo de Peano.
- (b)  $2^X$  es un continuo de Peano.
- (c)  $2^X$  es homogéneo.

*Demostración.* [(a) $\Rightarrow$ (c)] Véase [12, Teorema 3.11].

[(c) $\Rightarrow$ (b)] Supongamos que  $2^X$  es homogéneo. Como  $X$  es un continuo, por el Corolario 7.6,  $2^X$  es un continuo. Además, por el Corolario 8.8,  $2^X$  es localmente conexo en  $X$ . Como  $2^X$  es homogéneo, para cada  $A \in 2^X$  existe un homeomorfismo que envía  $X$  en  $A$ . Luego,  $2^X$  es localmente conexo en cada uno de sus puntos, es decir,  $2^X$  es localmente conexo y, por ende, es un continuo de Peano.

[(b) $\Rightarrow$ (a)] Es consecuencia del Lema 8.11. □

Para el siguiente teorema, diremos que un arco  $A$  contenido en  $X$  es un arco libre si  $A \setminus \{p, q\}$  es abierto de  $X$ , donde  $p$  y  $q$  son los puntos extremos de  $A$ .

**Teorema 8.13.** *Sea  $X$  un continuo sin arcos libres. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- (a)  $X$  es un continuo de Peano.
- (b)  $C(X)$  es un continuo de Peano.
- (c)  $C(X)$  es homogéneo.

*Demostración.* [(a) $\Rightarrow$ (c)] Véase [12, Teorema 3.14].

[(c) $\Rightarrow$ (b)] Supongamos que  $C(X)$  es homogéneo. Como  $X$  es un continuo, por el Corolario 7.6,  $C(X)$  es un continuo. Además, por el Corolario 8.8,  $C(X)$  es localmente conexo en  $X$ . Como  $C(X)$  es homogéneo, para cada  $A \in C(X)$  existe un homeomorfismo que envía  $X$  en  $A$ . Luego,  $C(X)$  es localmente conexo en cada uno de sus puntos, es decir,  $C(X)$  es localmente conexo y, por ende, es un continuo de Peano.

[(b) $\Rightarrow$ (a)] Es consecuencia del Lema 8.11. □

## 9 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo, sus observaciones hicieron que este trabajo tuviera una mejor presentación.

## Bibliografía

- [1] Barragán, Franco; Romero, Armando; Sánchez, Salvador; Grijalva, Víctor, *Breve introducción a la métrica de Hausdorff*, Capítulo 3 en *Topología y sus aplicaciones 3* (Editores: Angoa, J.J., Escobedo, R., Ibarra, M.). Dirección de Fomento Editorial, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014.
- [2] Chaves, Levent Arturo, *Estudio del  $n$ -ésimo hiperespacio de un continuo*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, presentada el 2 de febrero de 2018.
- [3] Córdova, Vianey, *Elementos Básicos de Hiperespacios de Continuos*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, presentada el 26 de agosto de 2011.
- [4] Escobedo, Raúl; López, María de Jesús; Serapio, Iván, *Una breve introducción a los hiperespacios de conjuntos*, Capítulo 8 en *Topología y sus aplicaciones 3* (Editores: Angoa, J.J., Escobedo, R., Ibarra, M.). Dirección de Fomento Editorial, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014.

- [5] Grijalva, Víctor, *Métrica de Hausdorff*, tesis de licenciatura en matemáticas aplicadas, Universidad Tecnológica de la Mixteca, presentada en diciembre de 2013.
- [6] Illanes, Alejandro; Nadler, Sam B. Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.
- [7] Iribarren, Ignacio, *Topología de espacios métricos*, Limusa, México, 2008.
- [8] Márquez, Nancy, *Introducción a los continuos de Peano*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, presentada en julio de 2017.
- [9] Maya, David; van Mill, Jan, *Continuos homogéneos*, Capítulo 10 en *Topología y sus aplicaciones 4* (Editores: Angoa, J.J., Escobedo, R., Ibarra, M.). Dirección de Fomento Editorial, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2016.
- [10] Nadler, Sam B. Jr., *Continuum Theory. An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.
- [11] Nadler, Sam B. Jr., *Hyperspaces of sets*, Monographs and Textbooks in pure and Applied Math, Vol.49, Marcel Dekker, New York, Basel, 1978.
- [12] Pérez, Esaú Alejandro, *Existencia de arcos ordenados en los hiperespacios  $C(X)$  y  $2^X$* , tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas BUAP, presentada el 24 de junio de 2022.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcm.buap.mx

fmacias@fcm.buap.mx

esau.perez@alumno.buap.mx



## Capítulo 8

# Una introducción a la dinámica de la familia senoidal y dos perturbaciones de ella

Laura Cano Cordero, Patricia Domínguez Soto, Gabriel  
Martínez Ramos, María de Jesús López Toriz  
FCFM, BUAP

### Resumen

En este capítulo definimos la función senoidal de variable compleja y enunciamos algunas propiedades interesantes de ella. Estudiamos propiedades de la familia de funciones enteras trascendentes  $f_\lambda = \lambda \operatorname{sen}(z)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , y definimos los conjuntos de Fatou y Julia. Se dan algunos resultados importantes relacionados con la dinámica de la familia  $f_\lambda$  y se enuncian algunas preguntas abiertas. Se dan dos ejemplos de perturbaciones de la familia senoidal y resultados relacionados con la dinámica de esas perturbaciones, con el objetivo de observar algunas diferencias entre la dinámicas de la función senoidal y la dinámica de sus perturbaciones.

## 1 Introducción a la función senoidal

Estudiar e investigar en el área de la variable compleja es ir de una variable  $x$  a dos variables  $x, y$ . En particular, la geometría de funciones de una variable real, es muy diferente a la geometría de una función de variable compleja. El tema en este capítulo es de divulgación para estudiantes que se inician en los menesteres de la geometría de funciones de la variable compleja y su dinámica. En esta sección se define la función senoidal y se muestran algunas propiedades importantes estudiadas en el curso de variable compleja.

Como es usual en el área de variable compleja, denotamos a  $\mathbb{C}$  como el plano complejo y a  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$  un número complejo. La función

senoidal compleja se define como sigue:

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

donde  $e^{iz} = e^{i(x+iy)}$ . Observemos que  $\operatorname{sen}(z) = 0$  si, y sólo si  $z = n\pi$  para  $n \in \mathbb{N}$ . La demostración es muy sencilla: veamos que  $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$  para  $n \in \mathbb{N}$ , por lo tanto si  $\operatorname{sen}(z) = 0$ , entonces  $z = n\pi$ .

Ahora, si  $\operatorname{sen}(z) = 0$ , entonces  $e^{iz} = e^{-iz}$  y multiplicando ambos lados de la igualdad por  $e^{iz}$  y usando la propiedad de la función exponencial tenemos que  $e^{i2z} = 1$ . Ahora por la periodicidad de la función exponencial, existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $2z = 2\pi n$ , es decir  $z = \pi n$ .

Otro resultado que tiene en la función senoidal es el siguiente: si para algún  $\alpha$  número complejo, se tiene que

$$\operatorname{sen}(z + \alpha) = \operatorname{sen}(z), \tag{1}$$

entonces  $\alpha = 2\pi n$  para  $n \in \mathbb{N}$ .

La demostración de la propiedad arriba descrita es la siguiente: Supongamos que se cumple la igualdad anterior para algún  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Entonces si  $z = 0$  tenemos que  $\operatorname{sen}(\alpha) = 0$ , por lo tanto (de la univalencia de la función exponencial)  $\alpha$  es un entero múltiplo de  $\pi$ . Solo queda demostrar que el entero es par. Sustituyendo  $z = \frac{\pi}{2}$  en la igualdad (1), tenemos  $\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ , así  $\alpha + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$  para algún entero positivo  $n$ . Por lo tanto  $\alpha = 2\pi n$  para  $n \in \mathbb{N}$ .

El siguiente teorema establece la univalencia de la función  $\operatorname{sen}(z)$ .

**Teorema 1.1.** *La función compleja  $\operatorname{sen}(z)$  es univalente sobre la parte vertical  $V = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < \frac{\pi}{2}\}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $z, w \in V$  y  $\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(w)$ . De la definición del seno complejo observemos que:

$$e^{iz} - e^{i(-z)} = e^{iw} - e^{i(-w)},$$

realizando algunas operaciones obtenemos:

$$e^{iz} - e^{iw} = e^{i(-z)} - e^{i(-w)} \tag{2}$$

$$= e^{i(-z)}e^{i(-w)}(e^{iw} - e^{iz}). \tag{3}$$

Así, tenemos

$$e^{iz} - e^{iw} = 0 \tag{4}$$

Supongamos que la Ecuación (4) es cierta. Entonces  $e^{iz} = e^{iw}$ , así (por propiedades de la función exponencial)  $z = w + 2\pi n$  para algún  $n$ , es decir,  $|Re(z) - Re(w)| = 2\pi |n|$ . Pero  $|Re(z) - Re(w)| < \pi$ , así  $n = 0$ , por lo tanto  $z = w$ .

Si se cumple la Ecuación (3) tenemos que  $e^{i\pi} = -1 = e^{-i(z+w)}$ , así  $1 = e^{-i(z+w+\pi)}$ , por propiedades de la exponencial  $z + w + \pi = 2\pi n$  para algún  $n$ , es decir,  $z + w$  debe ser múltiplo impar de  $\pi$ . Por lo tanto pasaría lo mismo  $Re(z) + Re(w)$ : sería un múltiplo impar de  $\pi$ . Pero  $z, w \in V$  así  $0 < Re(z) + Re(w) < \pi$ , por lo tanto concluimos que el múltiplo impar no puede existir.  $\square$

La función  $\text{sen}(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , es simétrica respecto del origen. Ahora, si tomamos  $c + it$ , con  $c, t \in \mathbb{R}$ , su imagen bajo la función senoidal es una hipérbola con focos  $\pm 1$  y centro en  $(0, 0)$ . Por otro lado, la imagen de la recta  $t + ic$ , con  $c, t \in \mathbb{R}$ , bajo  $\text{sen}(z)$  es una elipse con centro en el origen y focos  $\pm 1$ , véase Figuras 1 y 2. En conclusión, la transformación  $\text{sen}(z)$  hace corresponder la red ortogonal que se forma con las rectas paralelas y los ejes de coordenadas a la red de elipses e hipérbolas con focos comunes  $\pm 1$  y centro en el origen, véase Figura 2.

**Definición 1.2.** Decimos que una función analítica tiene un valor asintótico en  $a$  si existe una curva continua  $\gamma(t) \subset \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$  tal que  $f(\gamma(t)) \rightarrow a$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Teorema 1.3.** La familia  $f_\lambda(z) = \lambda \text{sen } z$  no tiene un valor finito asintótico.

*Demostración.* Es suficiente demostrar que la función  $\text{senz}$  no puede tener un valor asintótico finito.

Supongamos que  $\text{sen}(z)$  tiene un valor asintótico  $\beta$ , entonces por definición existe una curva continua  $\gamma(t) \subset \mathbb{C}$ ,  $0 \leq t < \infty$  tal que  $\gamma(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $\text{sen}(\gamma(t)) \rightarrow \beta$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Sea  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ .



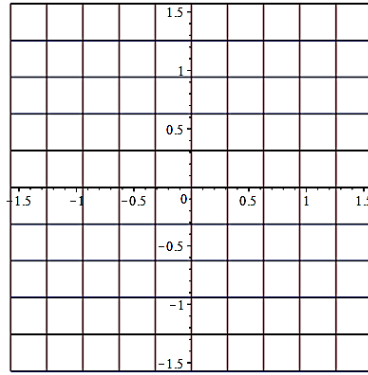


Figura 1: Rectas verticales y horizontales en el plano complejo

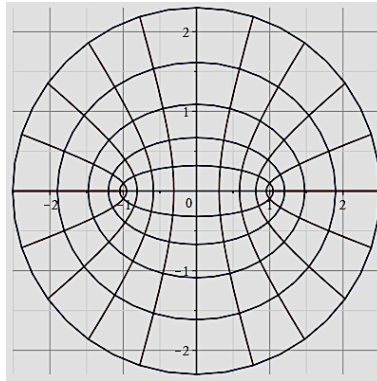


Figura 2: Imagen de rectas verticales y horizontales.

Observemos que  $\text{sen}(\gamma(t)) = \text{sen}(x(t) + iy(t)) = \text{sen}(x(t)) \left( \frac{e^{-y(t)} + e^{-y(t)}}{2} \right) + i \cos(x(t)) \left( \frac{e^{y(t)} - e^{-y(t)}}{2} \right)$ . Como  $x(t) \rightarrow \infty$  existe una sucesión  $t_k \rightarrow \infty$  tal que  $x(t_k) = k\pi$ , se sigue que  $\text{Re}(\gamma) = 0$ . Por otro lado, existe una sucesión  $t_{k'} \rightarrow \infty$  tal que  $x(t_{k'}) = 2k'\pi + \frac{\pi}{2}$ . De  $\text{Re}(\text{sen}(\gamma(t_{k'}))) = \frac{e^{y(t_{k'})} + e^{-y(t_{k'})}}{2} > 1$  se sigue que  $\text{Re}(\beta) \geq 1$  lo que es una contradicción.  $\square$

Los *puntos críticos* de  $f_\lambda(z) = \lambda \text{sen}(z)$  son los puntos que cumplen  $f'(z) = 0$ . Esto es,  $\lambda \cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto, los puntos críticos de  $f_\lambda$  son de la forma  $z = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Al evaluar los puntos críticos en  $f_\lambda$  obtenemos los *valores críticos*, esto es,

$$f_\lambda(2k+1)\frac{\pi}{2} = \{\lambda, -\lambda\}.$$

Por lo tanto, la función  $f_\lambda$  tiene valores críticos  $\lambda$  y  $-\lambda$ .

**Definición 1.4.** El conjunto de valores singulares de una función analítica  $f$  son los valores asintóticos y los valores críticos de  $f$  y se denota por  $SV(f)$ .

Por lo comentando anteriormente vemos que los valores singulares de  $f_\lambda = \lambda \text{sen}(z)$  son  $SV(f) = \{\lambda, -\lambda\}$ .

Un conjunto importante a considerar en el estudio de funciones analíticas es el siguiente conjunto.

**Definición 1.5.** Decimos que una función analítica está en la clase  $\mathcal{S}$ , si el conjunto de valores singulares es finito.

Observemos que el conjunto de valores singulares  $SV(f_\lambda)$  es finito, porque  $\lambda$  y  $-\lambda$  son los únicos valores críticos de  $f_\lambda$ , por lo tanto  $f_\lambda \in \mathcal{S}$ .

En lo que sigue definimos los puntos fijos de cualquier función analítica  $f$ .

Decimos que  $z_0$  es un *punto fijo* de  $f$  si  $f(z_0) = z_0$ . Si para algún  $n \neq 0$  se cumple que  $f^n(z_0) = z_0$ , decimos que  $z_0$  es un *punto periódico*. Cuando  $n$  es el menor natural que satisface esta igualdad, decimos que  $z_0$  es de periodo  $n$ .

La clasificación de puntos fijos se enuncia a continuación: Sea  $f$  una función analítica y  $z_0$  un punto fijo de  $f$ :

1. Si  $|f'(z_0)| = 0$ , entonces  $z_0$  es un *punto fijo superatractor*.
2. Si  $|f'(z_0)| < 1$ , entonces  $z_0$  es un *punto fijo atractor*.
3. Si  $|f'(z_0)| > 1$ , entonces  $z_0$  es un *punto fijo repulsor*.
4. Si  $|f'(z_0)| = 1$  y es una raíz de la unidad, entonces  $z_0$  es un *punto fijo indiferente racional*.

5. Si  $|f'(z_0)| = 1$  pero  $f'(z_0)$  no es una raíz de la unidad, entonces  $z_0$  es un *punto fijo indiferente irracional*.

En este trabajo estaremos interesados en encontrar los puntos fijos de la familia  $f_\lambda = \lambda \operatorname{sen}(z)$  y ver la naturaleza de esos puntos, esto es, queremos resolver la ecuación

$$f_\lambda = \lambda \operatorname{sen}(z),$$

para  $\lambda$  real o complejo y ver si los puntos que solucionan la ecuación son puntos fijos atractores, repulsores o indiferentes.

## 2 Los conjuntos de Fatou y Julia

En el marco teórico del análisis complejo y las funciones de variable compleja, el matemático francés Paul Montel introdujo la teoría de familias normales en sus trabajos [21] y [22]. Recordemos que una familia  $\mathcal{F}$  de funciones holomorfas definidas sobre un abierto  $U \subset \mathbb{C}$  es normal si cada sucesión de funciones  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$  tiene una subsucesión uniformemente convergente en  $U$  hacia una función holomorfa o a infinito.

El estudio del comportamiento dinámico de funciones racionales sobre la esfera de Riemann comenzó en el siglo XX por los matemáticos franceses Pierre Fatou y Gaston Julia (véase [14] y [19]), que definieron dos conjuntos que hoy llevan sus nombres. El principal objeto de estudio de estos dos matemáticos fue la iteración de funciones racionales sobre la esfera de Riemann. Un resultado de Montel les permitió descomponer a la esfera en el conjunto *estable* (Fatou) que consiste de los puntos del plano complejo tales que su sucesión de iteraciones está bien definida y es normal en alguna vecindad de cada uno de los puntos, y el conjunto *inestable o caótico* (Julia) que el complemento del conjunto de Fatou.

La investigación sobre la iteración de las funciones enteras trascendentes tuvo su inicio con el trabajo de Pierre Fatou en el año 1926, véase [15], y su continuación con los trabajos de I. N. Baker en el año 1968 [1]. El propósito de esta sección es introducir las definiciones de el conjunto de Fatou y el conjunto de Julia, para funciones enteras trascendentes. Para un estudio más profundo se puede consultar la bibliografía [5], [12] y [13].

**Definición 2.1.** A las funciones definidas y holomorfas en todo  $\mathbb{C}$  que no son polinomios se les llama *funciones enteras trascendentes*.

Observe que cada función en la familia  $\lambda \text{sen}(z)$  es entera trascendente.

La  $n$ -ésima iterada de una función entera trascendente  $f$  es la composición de  $f$  con ella misma  $n$  veces y se denota por  $f^n$ .

**Definición 2.2.** Sea  $f$  una función entera trascendente, el *conjunto de Fatou* de  $f$  (o conjunto Estable), denotado por  $F(f)$ , está formado por todos los puntos  $z \in \mathbb{C}$  tales que la sucesión de iteradas de  $f$  está bien definida y forma una familia normal en una vecindad de  $z$ .

El *conjunto de Julia* de  $f$  (o conjunto Caótico), denotado por  $J(f)$ , es el complemento del conjunto de Fatou, es decir,

$$J(f) = (F(f))^c = \mathbb{C} \setminus F(f).$$

Algunas propiedades de los conjuntos de Julia y Fatou para funciones enteras trascendentes son las siguientes, véase [17] para su demostración.

- (a)  $F(f)$  es abierto y  $J(f)$  es cerrado.
- (b)  $J(f)$  es perfecto.
- (c)  $F(f)$  y  $J(f)$  son completamente invariantes, es decir,  $z \in F(f)$  si, y sólo si  $f(z) \in F(f)$  y  $z \in J(f)$  si, y sólo si  $f(z) \in J(f)$ .
- (d)  $F(f^n) = F(f)$  y  $J(f^n) = J(f)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Si  $f$  es trascendente entera y  $U$  una componente de  $F(f)$ . El comportamiento de la órbita de  $U$  bajo  $f$  tiene tres posibilidades:

- (i) Si  $f^n(U) \subset U$  para algún  $n \geq 1$ ,  $U$  es llamada una componente periódica de  $F(f)$ . El mínimo  $n$  es el período de la componente  $U$ . En particular, si  $n = 1$ , se dice que la componente  $U$  es invariante.
- (ii) Si  $f^m$  es periódica para algún entero  $m \geq 1$ , llamamos a  $U$  una componente pre-periódica. En particular, si  $U$  es pre-periódica pero no periódica, entonces llamamos a  $U$  una componente pre-periódica propia.

(iii) Si  $U$  no es periódica o pre-periódica, llamamos a  $U$  una componente errante.

La clasificación de una componente periódica  $U$  en el conjunto de Fatou es la siguiente:

- (i) Existe  $z_0 \in U$  con  $f^p(z_0) = z_0$  y  $|f'(z_0)| < 1$ . Entonces cada punto  $z \in U$  satisface  $f^{np}(z) \rightarrow z_0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Si  $z_0$  es super-atractor, entonces  $U$  es llamado *dominio de Böttcher*. De otro modo  $U$  es llamada *dominio atractor*.
- (ii) Existe  $z_0 \in \partial U$ ,  $z_0 \neq \infty$  con  $f^p(z_0) = z_0$  y  $|f'(z_0)| = 1$ . Cada punto  $z \in U$  satisface  $f^{np}(z) \rightarrow z_0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .  $U$  es un *dominio de Leau* en  $z_0$ , o de otra forma *dominio parabólico*.
- (iii) Existe un homeomorfismo analítico  $\psi : U \rightarrow D$ , donde  $D$  es el disco unitario tal que  $\psi \circ f \circ \psi^{-1}(z) = e^{2\pi i\theta}$  para algún  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . En este caso,  $U$  es llamado un *disco de Siegel*.
- (iv) Existe un homeomorfismo analítico  $\psi : U \rightarrow A$ , donde  $A$  es un anillo  $A = \{z : 1 < |z| < r\}$ , tal que  $\psi \circ f \circ \psi^{-1}(z) = e^{2\pi i\theta}$  para algún  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . En este caso,  $U$  es un *disco de Herman*.
- (v) Para cada  $z \in U$ ,  $f^n(z) \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . En este caso el dominio  $U$  es no acotado y simplemente conexo y, en algunas veces es llamado *dominio de Baker*.

Para una función entera trascendente que tiene conjunto de valores singulares finito se tienen lo siguientes resultados, véase [6] y [13] para su demostración.

**Teorema 2.3.** *Supongamos que  $f$  es entera trascendente, y el conjunto de puntos singulares es finito. Si  $z \in F(f)$ , entonces la órbita  $\{f^n(z)\}_{n=0}^\infty$  no puede tender a infinito, es decir, no existen los dominios errantes en el conjunto de Fatou.*

**Teorema 2.4.** *Si  $f$  es entera trascendente y su conjunto de puntos singulares es finito, entonces el conjunto de Fatou no contiene dominios de Baker.*

Con los teoremas anteriores, estamos en posición de enunciar las siguientes propiedades de la familia  $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ .

1. *La familia  $f_\lambda$  pertenece a la clase  $\mathcal{S}$ .*

En la sección anterior se encontró que los valores singulares  $SV(f_\lambda)$  son  $\lambda$  y  $-\lambda$  y que son los únicos valores críticos de  $f_\lambda$ , por lo tanto  $f_\lambda \in \mathcal{S}$ .

2. *La familia  $f_\lambda$  no tiene componentes errantes, anillos de Herman ni dominios de Baker.*

*Demostración.* Supongamos que existe  $H$  un anillo de Herman en el conjunto de Fatou, entonces los puntos de la componente interna del anillo  $\partial H$  tienen que estar en el conjunto de Julia  $J(f)$ . Ahora, si  $\gamma$  es una curva de Jordan invariante en  $H$ , todas las iteradas de  $f$  están uniformemente acotadas sobre la curva  $\gamma$  y por el Principio del Módulo Máximo, también en la componente acotada del complemento de  $H$ , esto implica que las iteradas de  $f$  forman una familia uniformemente acotada, así por el teorema de Montel tenemos que es una familia normal en la unión de  $H$  con la componente acotada del complemento de  $H$ . Por lo tanto este conjunto debe estar en el conjunto de Fatou  $F(f)$  y no puede interceptar  $J(f)$ , lo cual es una contradicción con el hecho que  $\partial H$  contiene puntos de  $J(f)$ .

La no existencia de dominios errantes y de Baker se tiene inmediato por 1 (arriba), porque el conjunto de valores singulares de  $f_\lambda$ , es decir,  $SV = \{\lambda, -\lambda\}$  es finito y por los Teoremas 2.3 y 2.4 se tiene la no existencia de dominios errantes ni de Baker.  $\square$

Una descripción completa de la dinámica del conjunto de Fatou de una función entera transcendente, donde el conjunto de valores singulares es finito, es decir, está en la clase  $\mathcal{S}$ , se enuncia en el siguiente teorema.

**Teorema 2.5.** *Si  $f$  una función entera transcendente en  $\mathcal{S}$ , entonces cada órbita en el conjunto de Fatou es absorbida por uno de los ciclos de los dominios atractores, dominios parabólicos o discos de Siegel.*

**Observación 1.** Aunque la función  $\sin(z)$  se puede reescribir en términos de exponencial, esto es,

$$f(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2i},$$

se podría pensar que añadiendo un parámetro  $\lambda$  a las funciones, las familias resultantes tienen dinámicas similares, sin embargo McMullen en [20] prueba que la medida de Lebesgue del conjunto de Julia de la familia  $g_\lambda(z) = \lambda e^z$  es igual a cero, pero no lo es para la familia  $f_\lambda(z) = \lambda \sin(z)$ , por lo tanto las familias tienen diámicas diferentes.

### 3 Dinámica de la familia $\lambda \operatorname{sen}(z)$

En lo que sigue se enunciarán algunos resultados relacionados con la dinámica de la familia  $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$ , para después enunciar algunas preguntas abiertas relacionadas con la dinámica de la familia. De ahora y en adelante usaremos la notación  $f_\lambda$  para referirnos a la familia  $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$ .

**Teorema 3.1.** [6] *Para cualquier función entera trascendente  $f$  en  $\mathcal{S}$  el conjunto de Julia de  $f$  es conexo en  $\mathbb{C}$ .*

En particular, la familia  $f_\lambda$  es conexa en  $\mathbb{C}$ , por el Teorema 3.1.

**Teorema 3.2.** [7] *El conjunto de Julia de  $f_\lambda(z)$  es localmente conexo en cero.*

Tomemos la familia de funciones  $f_\lambda$  y un punto crítico cualquiera, en este caso tomaremos el punto  $\frac{\pi}{2}$ , si seguimos la órbita del punto crítico bajo iteración podemos definir el plano de parámetros de la familia  $f_\lambda$  como sigue:

$$\mathcal{P} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| f^n \left( \frac{\pi}{2} \right) \right| \text{ est acotado} \right\}.$$

En el plano de parámetros  $\mathcal{P}$  de  $f_\lambda$  se puede observar, véase la Figura 3 una componente  $D_0$  que contiene al cero y del lado izquierdo y del lado derecho de  $D_0$  dos componentes, que llamaremos  $D_i$  y  $D_d$ , que interceptan el eje real. También se puede observar que hay más componentes que están unidas a  $D_i$  y  $D_d$ , pero estamos interesados sólo en la componente  $D_d$ , dado que la componente  $D_i$  es simétrica a  $D_d$  por la naturaleza de la función

senoidal.

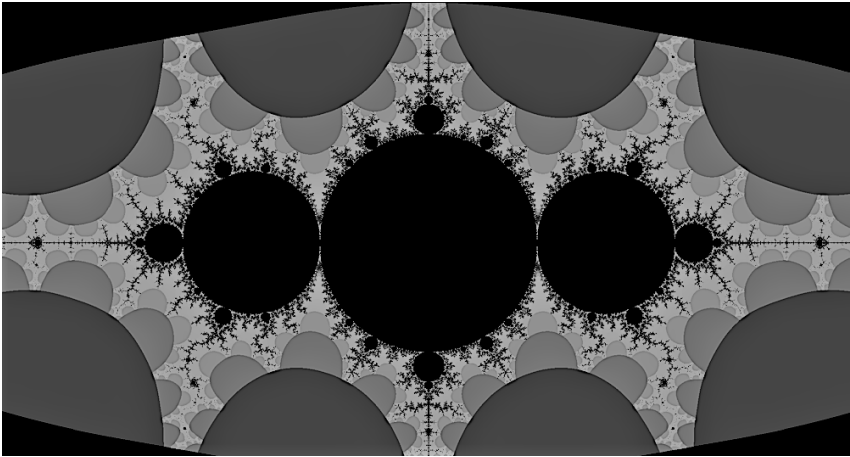


Figura 3: Plano de parámetros de  $f_\lambda$ .

Por el Teorema 2.5 el conjunto de Fatou de la familia  $f_\lambda$  sólo puede contener componentes atractoras, parabólicas y discos de Siegel. En [9], Domínguez y Sienna investigan la dinámica de la familia  $f_\lambda$  y prueban los siguientes dos resultados.

**Teorema 3.3.** *Sea  $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ , donde  $0 < |\lambda| < 1$ . El conjunto de Fatou consiste de una componente  $U$  atractora completamente invariante simplemente conexa.*

**Teorema 3.4.** *Sea  $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ ,  $\lambda = e^{2\pi i \theta}$ ,  $\theta = p/q$ , con  $(p, q) = 1$ . Si  $q$  es par, existe un ciclo con  $q$  componentes de Fatou atraídas a 0. Si  $q$  es impar, existen dos ciclos con  $q$  componentes de Fatou cada uno. Estas son las únicas componentes periódicas de Fatou. Más aún, tales componentes son acotadas.*

G. Zhang [24] demuestra el siguiente teorema relacionado con los discos de Siegel.

**Teorema 3.5.** *Sea  $0 < \theta < 1$  un número irracional de tipo acotado. Entonces la frontera del disco de Siegel de la función entera  $f_\theta(z) = e^{2\pi i \theta} \operatorname{sen}(z)$  es un casi-círculo que pasa exactamente a través de dos puntos críticos  $\pi/2$  y  $-\pi/2$ .*



Dando valores al parámetro  $\lambda$ , se obtienen los planos dinámicos de la familia  $f_\lambda$ , véase Figuras 4 y 5 para valores de  $\lambda = 1/2$  y  $\lambda = 1$  respectivamente. Observe que en la Figura 4 sólo existe una componente completamente invariante, donde el punto fijo atractor es el cero, es decir, cualquier punto en el conjunto de Fatou bajo iteración converge al cero, que es un punto fijo atractor en el conjunto de Fatou. En la Figura 5 cualquier punto en el conjunto de Fatou (flor de dos hojas con sus pre-imagenes) converge al cero, que es un punto fijo repulsor, es decir, está en el conjunto de Julia.

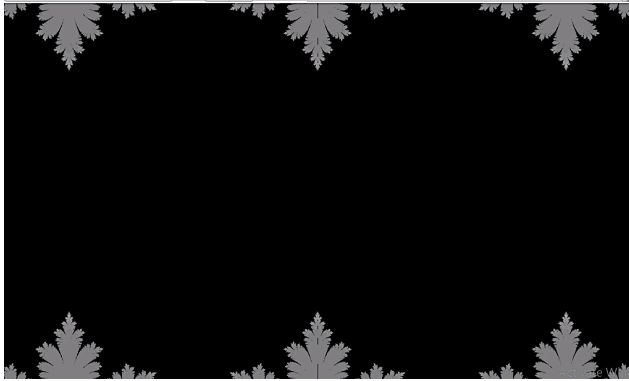


Figura 4: Plano dinámico de  $f_\lambda$ , para  $\lambda = 1/2$ . La órbita de un punto, en negro, converge a cero (punto fijo atractor).

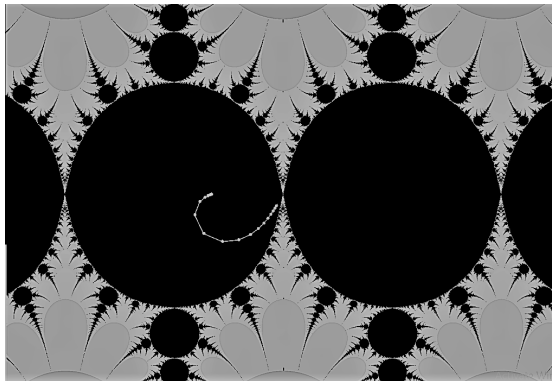


Figura 5: Plano dinámico de  $f_\lambda$ , para  $\lambda = 1$ . La órbita de un punto, en negro, converge al cero (punto fijo repulsor).

## Preguntas abiertas

Las preguntas que surgen de observar el plano de parámetros son las siguientes:

1. ¿Cómo son los puntos fijos y las componentes de Fatou para valores reales de  $\lambda > 1$  que se encuentran en la componente  $D_d$  en el plano de parámetros?

2. ¿Cómo son los conjuntos de Fatou y Julia en el plano dinámico?

Algunas conjeturas a las Preguntas 1 y 2 se encuentran en la tesis de maestría de Lizzeth Trujillo Santamaría [23] que a continuación se enuncian.

**Conjeturas con respecto a la Pregunta 1.** Sea  $f_\lambda$ .

**I.** (a) Para  $1 < \lambda < \frac{\pi}{2} + 0.57$  el conjunto de Fatou tiene dos componentes atractoras simplemente conexas. Similar para  $-\frac{\pi}{2} + 0.57 < \lambda < -1$ .

(b) En una vecindad de  $\frac{\pi}{2}$  con radio  $\epsilon = 0.4$  el conjunto de Fatou tiene dos componentes atractoras simplemente conexas.

**II.** Para  $\lambda = \lambda_n$ , con  $n \geq 1$  y  $\lambda_n = \frac{\pi(4n+1)}{2}$ , la familia  $f_\lambda$  tiene  $2n + 1$  puntos fijos (incluyendo el cero), para estos puntos fijos sólo se toman en cuenta aquellos que se encuentran en la porción positiva de  $f_{\lambda_n}(x)$ ,  $x \in$ .

**III.** Tomemos  $z = it$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . Hay dos puntos fijos sobre el eje imaginario, localizados en  $i\rho_\pm(\lambda)$ , donde  $\rho_+ > 0$  y  $\rho_- = -\rho_+$ . Estos puntos son puntos fijos repulsores, y la porción positiva del eje imaginario que conecta  $i\rho_+(\lambda)$  con  $\infty$  consiste de puntos que tienden a infinito bajo iteración. Similar para  $i\rho_-(\lambda)$  en la porción negativa del eje imaginario.

Con respecto a la Pregunta 2, Trujillo Santamaría en [23] obtuvo los siguientes planos dinámicos. Las conjeturas están basadas en aproximaciones usando el método de Newton y la graficación de los planos dinámicos usando el programa FractalStream. A continuación se muestran algunos planos dinámicos (conjuntos de Fatou y Julia) para algunos valores de  $\lambda$ .

(i) En la Figura 6 se muestra el conjunto de Fatou (dos pétalos con sus pre-imagenes) para  $\lambda = 1.6$ . Se observa que los pétalos son atractores, porque al tomar la órbita de un punto, en el pétalo izquierdo, converge a un punto fijo (en el conjunto de Fatou) dentro del pétalo izquierdo. La función  $f_\lambda$  es simétrica, así debe suceder lo mismo en el pétalo derecho.

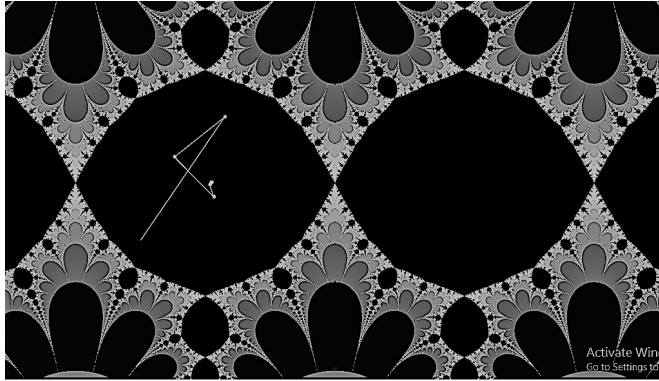


Figura 6: Conjuntos de Fatou y Julia de  $f_\lambda$  con  $\lambda = 1.6$ .

(ii) La Figura 7 muestra el conjunto de Fatou (dos pétalos con sus pre-imagenes) para  $\lambda = 1.8$ . Se observa que los pétalos son atractores porque al tomar la órbita de un punto, en el pétalo derecho, converge a un punto fijo (en el conjunto de Fatou) dentro del pétalo derecho. La función  $f_\lambda$  es simétrica, así debe suceder lo mismo en el pétalo izquierdo.

Se puede observar, que la diferencia entre las Figuras 6 y 7 es la siguiente: la Figura 7 es un poco más plana que la Figura 6, pero la dinámica parece ser la misma; es decir, el conjunto de Fatou tiene dos componentes invariantes atractoras simplemente conexas. Si se siguen variando los valores de  $\lambda$  entre  $1 < \lambda < \frac{\pi}{2} + 0.57$  se tienen similares figuras, sólo que se van haciendo más planas. Similar para valores de  $\lambda$  entre  $-\frac{\pi}{2} + 0.57 < \lambda < -1$ . Observe que los valores de  $\lambda$  son reales en las conjeturas. Para obtener resultados para  $\lambda$  complejo sé tendrían que utilizar otros métodos, porque la aproximación de Newton no ayuda.

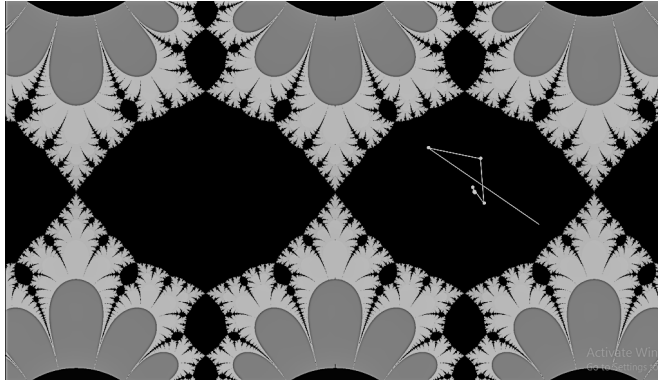


Figura 7: Conjuntos de Fatou y Julia de  $f_\lambda$  con  $\lambda = 1.8$ .

## 4 Perturbaciones de la familia $\lambda \text{sen}(z)$

Si perturbamos la familia  $f_\lambda$  con un polo, la nueva familia no es una familia de funciones enteras trascendentes. Al añadir un polo se cambia la naturaleza de la familia y trabajamos con una nueva familia, que tiene una singularidad esencial en infinito, es decir, el polo bajo cada la función de la familia va a infinito. Por ejemplo, tomemos la siguiente perturbación de la familia  $f_\lambda$ :

$$f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z - k\pi}, \quad (5)$$

donde  $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ; es decir, se perturba la familia  $\lambda \sin(z)$  añadiendo un polo en  $z = k\pi$ . La familia  $f_{\lambda,\mu}(z)$  fue investigada en [10] por Domínguez, Montes y Vázquez. Posteriormente Domínguez y Vázquez en 2018 y 2020 generalizan algunos resultados en [10], cuando  $z_0$  es un número real que cumple ciertas condiciones.

$$f_{\lambda,\mu,z_0} = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z - z_0}. \quad (6)$$

Recordar que la  $n$ -iterada de  $f$  está definida por la composición de  $f$  con ella misma, esto es,  $\underbrace{f \circ f \dots \circ f}_n = f^n$ , para  $n \in \mathbb{N}$  y  $f^0 = Id$ .

Las funciones con un polo no son cerradas bajo la composición. Por ejemplo, tomemos la familia en (6) cuando  $z_0 = 0$ .

$$f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z}, \text{ donde } \lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

La segunda iterada de  $f_{\lambda,\mu}$  está dada por:

$$f_{\lambda,\mu}^2(z) = f_{\lambda,\mu} \circ f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \sin \left( \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z} \right) + \frac{\mu}{\lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z}}.$$

Observe que  $f_{\lambda,\mu}^2$  es analítica en  $\mathbb{C}$  excepto en cero y en el conjunto de soluciones de la ecuación  $\lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z} = 0$ , que es un conjunto contable de singularidades esenciales. Así,  $\infty$  no es la única singularidad esencial de  $f_{\lambda,\mu}^2$ . Por lo tanto,  $f_{\lambda,\mu}^2$  no es meromorfa en el sentido que la familia en (6) lo era.

Para tratar este tipo de funciones debemos restringir el dominio de la familia y de los dominios de la composición de ellas, para poder trabajar con iteradas bien definidas y que sólo tengan una singularidad esencial en infinito. Aunque la familia en (6) es una perturbación de la familia  $f_\lambda$ , no es una familia de funciones enteras trascendentes, de hecho es una familia de funciones meromorfas; es decir, funciones que son analíticas de la esfera de Riemann a la esfera de Riemann, por lo tanto su dinámica es diferente a la familia senoidal  $f_\lambda : \rightarrow$ .

Tomamos la perturbación de la familia  $f_\lambda$  añadiendo un polo en  $z_0 = k\pi$ , es decir, es la familia en (5). En [11] se prueba el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.** *Si  $\lambda, \mu$  y  $z_0$  son parámetros reales tal que  $0 < \lambda < 1$ ,  $\mu > 0$  suficientemente pequeño y  $|z_0| \geq |\lambda| + \pi/2$ , entonces el conjunto de Fatou de la familia  $f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z-k\pi}$ , tiene una componente completamente invariante la cual es múltiplemente conexa.*

El plano dinámico (conjuntos de Fatou y Julia) para los parámetros  $\lambda = 1/2$ ,  $\mu = 0.3$  y  $z_0 = 3.2$  se muestra en la Figura 8.

En los Teoremas 3.3 y 4.1 se obtiene que el conjunto de Fatou tiene una componente completamente invariante, pero en el Teorema 3.3 la componente es simplemente conexa y en el Teorema 4.1 la componente es múltiplemente conexa, lo cual tiene sentido, porque la familia tiene un polo en  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  y ese punto no está en el dominio de la familia. En la Figura 8 se observan puntos grises, que son las pre-imagenes del polo, y la órbita de un punto

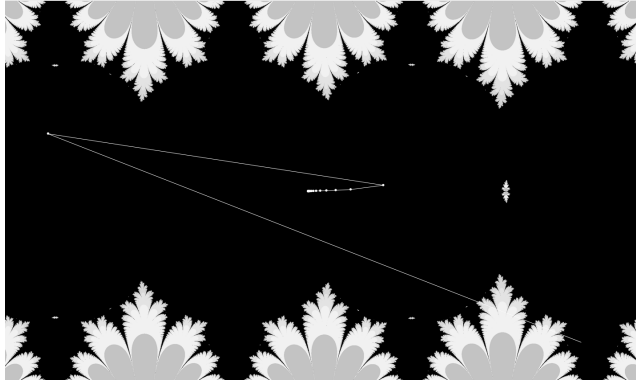


Figura 8: Conjuntos de Fatou y Julia, con  $\lambda = 1/2$  ,  $\mu = 0.3$  y  $z_0 = 3.2$ .

(blanco) en el conjunto de Fatou que converge al punto fijo atractor.

Si se perturba la familia senoidal  $f_\lambda$  se pueden obtener otros ejemplos de componentes atractoras en el conjunto de Fatou para la familia  $f_{\lambda,\mu}$  en (6), es decir, tomemos  $z_0 = 0$  con los siguientes parámetros como se muestra a continuación.

Tomemos  $\lambda = -1$ ,  $\mu = \pi^2$  y  $z_0 = 0$  en (6). Observemos que la función  $f_{-1,\pi^2}(z) = -\sin(z) + \frac{\pi^2}{z}$  tiene dos puntos fijos en  $\zeta_1 = \pi$  y  $-\zeta_1 = -\pi$ . Efectivamente, evaluando  $z = \pi$  en la función  $f_{-1,\pi^2}(z) = -\sin(z) + \frac{\pi^2}{z}$ , obtenemos:

$$f_{-1,\pi^2}(\pi) = -\sin(\pi) + \frac{\pi^2}{\pi} = \pi.$$

Análogamente  $-\zeta_1 = -\pi$ . Para determinar la naturaleza de los puntos fijos  $\zeta_1$  y  $-\zeta_1$ ; se evalúa en la derivada de  $f_{-1,\pi^2,0}$  en  $\zeta_1 = \pi$ , obteniendo:

$$\left| f'_{-1,\pi^2}(\pi) \right| = \left| -\cos(\pi) - \frac{\pi^2}{\pi^2} \right| = 0 < 1.$$

Así,  $\zeta_1 = \pi$  es un punto fijo super atractor de  $f_{-1,\pi^2}$ . Por la simetría tenemos que  $-\zeta_1 = -\pi$  es otro punto fijo super atractor de  $f_{-1,\pi^2}$ . Usando Fractal Stream el plano dinámico se muestra en la Figura 9, donde conjunto de Fatou (en negro) contiene dos componentes atractoras y sus preimágenes,

el polo es el cero, que está en el conjunto de Julia. Si tomamos la órbita de un punto(en blanco) en una de las componentes se observa la convergencia al punto fijo.

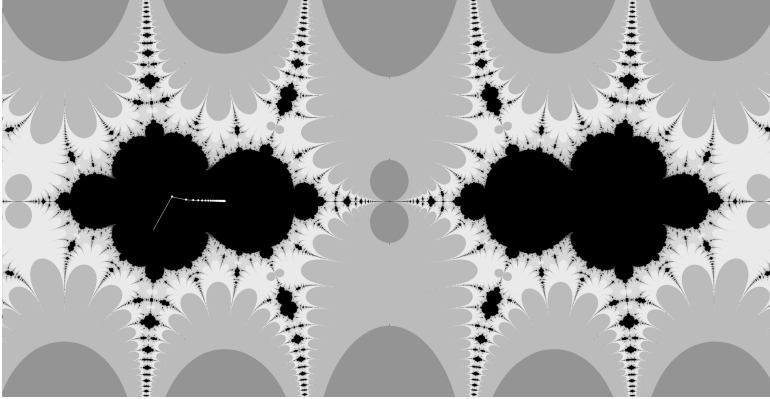


Figura 9: Los conjuntos de Fatou y Julia con parámetros  $\lambda = -1$  y  $\mu = \pi^2$ .

El capítulo es un tema de divulgación relacionado con el área de dinámica holomorfa, el objetivo es que el estudiante se interese en estudiar la dinámica de diversas funciones y sus posibles perturbaciones. Se sugiere revisar para una introducción a la iteración de funciones meromorfas el artículo [4]. La perturbación de la familia senoidal, con un polo, arroja claramente diferentes resultados en el plano dinámico de la nueva familia a los obtenidos en el plano dinámico de la familia  $\lambda \sin z$ .

## Bibliografía

- [1] Baker, Irving N. *Repulsive Fixpoints of Entire Fuctions*. Math. Zeitschr., (1968), 252-256.
- [2] Baker, Irving N. *Completely invariant domains of entire functions*. Math. essays dedicated to A. J. MacIntyre, Ohio Univ. Press, Athens, Ohio. (1970).
- [3] Baker, Irving N. *The domains of normality of an entire function*. Ann. Academy Society, Fenn Ser, (1975), 277-283.

- [4] Bergweiler, Walter. *An Introduction to Complex Dynamics*. Textos de Matemática. Universidad de Coimbra, Série B, No. 6, (1995).
- [5] Bergweiler, Walter. *Iteration of entire functions*. Notes November 13, 2014.
- [6] Domínguez, Patricia. *Connectedness properties of Julia sets of transcendental entire functions*. Complex Variables, Vol. 32 (1997), 199-215.
- [7] Domínguez, Patricia. *Some connectedness properties of Julia sets*. Complex Variables, Vol. 41 (2000), 371-389.
- [8] Domínguez, Patricia y Contreras, V. J. E. *Dinámica Holomorfa, Los conjuntos de Fatou y Julia y algunas de sus propiedades de tres clases de funciones meromorfas*. Monografía, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Editorial BUAP, (2014).
- [9] Domínguez, Patricia y Sienna, Guillermo. *A study of the dynamics of  $f_\lambda(z) = \lambda \sin(z)$* . International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 12, No. 12 (2012), 2869-2883.
- [10] Domínguez P. Montes M. and Vázquez J. A. *Study of the Dynamics of the Family  $f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \sin z + \frac{\mu}{z+k\pi}$  where  $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  and  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*, 5(4) (2016), 407-414.
- [11] Domínguez, Patricia y Vázquez Josué. *A study of a meromorphic perturbation of the sine family*. Demonstratio Mathematica , 55 (2022), 8-27.
- [12] Eremenko A. E. *On the iteration of entire functions*. Dynamical systems and ergodic theory Banach Center publications, Vol. 23, (1989).
- [13] Eremenko A. E., Lyubich M. Yu. *The dynamics of analytic transformations*. Leningrad Math. J., Vol. 1, No. 3, (1990).
- [14] Fatou, Pierre. *Sur les équations fonctionnelles*. Bulletin de la Société Mathématique de France. Vol. 47, (1919), 161-271.
- [15] Fatou, Pierre. *Sur l'itération des fonctions transcendentes entières*. Bulletin de la Société Mathématique de France. Vol. 47, (1926), 337-370.



- [16] Francis, Ivan Wilde. *Lecture Notes on Complex Analysis*. Imperial College Press. World Scientific Publishing. British Lybrary, (2006).
- [17] Hua, Xin-Hou and Yang, Chung-Chung. *Dynamics of Transcendental Functions*. Asian Mathematics Series, Gordon and Breach Science Publishers, (1998).
- [18] Ivorra, Carlos C. *Funciones de Variable Compleja con Aplicaciones a la Teoría de Números*. Universidad de Valencia, (2008).
- [19] Julia, Gaston. *Mémoire sur litération des fonctions rationnelles*. J. Math. Pure Appl., (1918), 61-64.
- [20] McMullen, Curtis. *Area and Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 300, No. 1. (1987).
- [21] Montel, Paul, Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 29 (1912), 487-535.
- [22] Montel, Paul, Sur les familles normales de fonctions analytiques, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 33 (1916), 223-302.
- [23] Trujillo Santamaría, Lizzeth. *Un estudio de la dinámica de la familia  $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$* . Tesis Maestría en Ciencias Matemáticas, FCFM, BUAP (2017).
- [24] Zhang, Gaofei. *On the Dynamics of  $e^{2\pi i\theta} \sin(z)$* . Illinois Journal of Mathematics, Vol 49, (2005), 1171-1179.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

lcano@fcfm.buap.mx  
pdsoto@fcfm.buap.mx  
gabriel.martinezramos@viep.com.mx  
mjlopez@fcfm.buap.mx

# Índice de autores

Ambrosio Ortiz Ramírez, 77

Ana Lorena Jiménez Preciado, 77

Carlos Alberto López Andrade, 5

Carlos Guillén Galván, 5

David Herrera Carrasco, 109, 133, 157, 181

Esaú Alejandro Pérez Rosales, 181

Felipe de Jesús Aguilar Romero, 109

Fernando Macías Romero, 109, 133, 157, 181

Gabriel Martínez Ramos, 213

Germán Montero Rodríguez, 133

Héctor Noé Flores Meza, 43

José Margarito Hernández Morales, 43

Laura Cano Cordero, 213

Leonardo Ramírez Aparicio, 157

Luz del Carmen Álvarez Marín, 43

María de Jesús López Toriz, 133, 213

María Teresa Verónica Martínez Palacios, 77

Mireya Díaz López, 5

Patricia Domínguez Soto, 109, 213

Matemáticas y sus aplicaciones 18

Editado por Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco está a  
disposición en pdf en la página

de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

<https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>

a partir del 26 de octubre de 2022

peso del archivo: 6 MB

El apoyo de la edición es de Felipe de Jesús Aguilar Romero y Gerardo  
Hernández Valdez.