



**Fernando Macías Romero**

Es profesor e investigador en el área de las matemáticas. Nació el 11 de noviembre de 1961 en Huauchinango, Puebla, México. Su pasión por las matemáticas lo llevó a estudiar la licenciatura, maestría y doctorado en esta noble área. Llegó a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP en el año 1979.

Además de contar con el reconocimiento y respeto de la comunidad de su facultad, recurrentemente es solicitado como árbitro de publicaciones y evaluador de proyectos, así como de programas como el ESDEPED y elaborador de programas de estudio. Como formador de nuevo talento matemático ha dirigido 34 tesis de licenciatura, 8 de maestría y 5 de doctorado, todas ellas concluidas con éxito, así como varias tesis en proceso. Actualmente es Investigador Nacional reconocido por el SNI.

Durante varios años ha sido el organizador de las International Conference on Mathematics and its Applications, que brindan un espacio de encuentro a un vasto número de expositores, asistentes y expertos internacionales de todas las áreas de la matemática y también es editor y autor de varios libros de matemáticas como los de *Matemáticas y sus aplicaciones*.



*Los capítulos del presente libro son creados por los autores en el marco de su participación en el International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA). Los CIMA emanan de la fortuna de contar con el mejor comité organizador que ha puesto la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. He aquí los resultados que promueven la riqueza matemática, trabajos tenaces que lograron sobreponerse a los inexorables jueces y fueron autorizados después de un arbitraje riguroso.*

**BUAP**

**FCFM**

**CIMA**

**BUAP**  
**ediciones**



**David Herrera Carrasco**

Nació en Tapanatepec, Oaxaca, el 21 de abril de 1955. Llegó a la ciudad de Puebla a los seis años junto con su familia en una situación precaria.

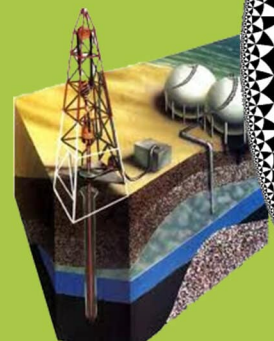
Es un prestigioso profesor e investigador que estudió la licenciatura en Matemáticas en la segunda generación de la refundación de la Escuela de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla (UAP). En 1975 inició su labor docente como profesor de matemáticas en la Preparatoria Alfonso Calderón (UAP).

Desde 1981 a la fecha es profesor de tiempo completo en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Ha sido miembro organizador de las International Conference on Mathematics and its Applications. Es miembro de Sistema Nacional de Investigadores. Ha publicado varios artículos, en revistas internacionales. Es autor de varios libros (como coautor, con otros profesores de la FCFM); es editor de algunos libros. Además, ha concluido la dirección de tesis: 4 de doctorado, 7 de maestría y más de 26 de Licenciatura; todas en matemáticas a excepción de una en electrónica, y actualmente tiene en proceso varias asesorías de tesis de licenciatura y del posgrado.

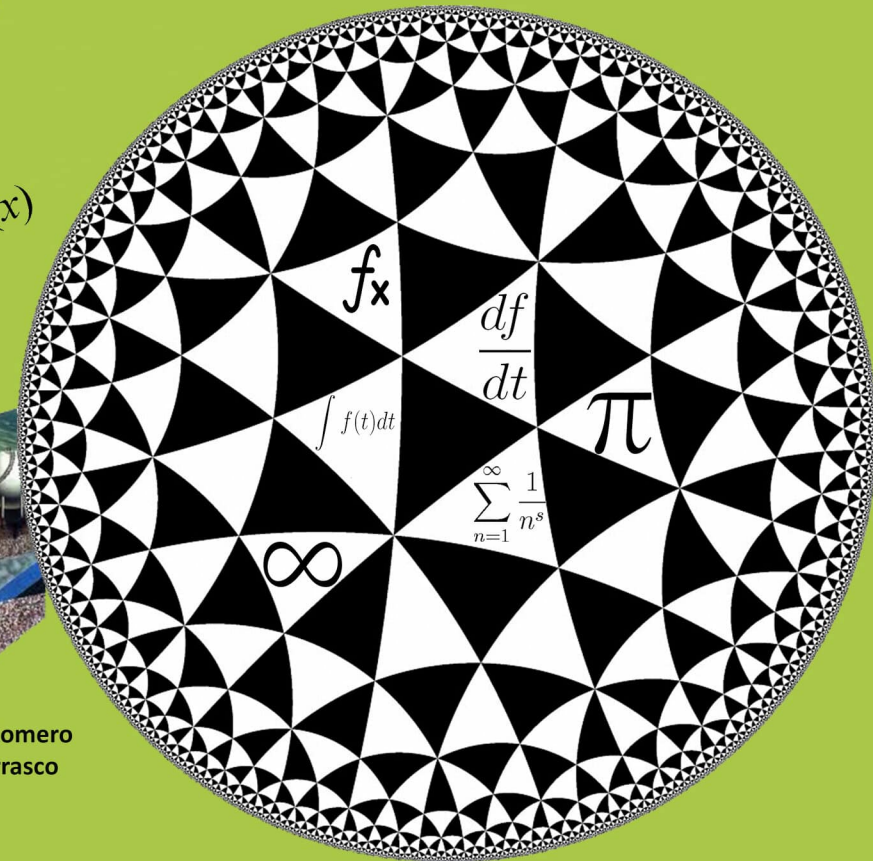


## Matemáticas y sus aplicaciones 14

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$



**Fernando Macías Romero**  
**David Herrera Carrasco**  
**Editores**



*Matemáticas y sus aplicaciones 14*





*Matemáticas y sus aplicaciones*  
*14*



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Fernando Macías Romero  
David Herrera Carrasco  
Editores

Primera edición: 2020

ISBN: 978-607-525-695-5

DR © Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
4 Sur 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000  
Teléfono: 01 (222) 2 29 55 00  
www.buap.mx

Dirección General de Publicaciones  
2 Norte 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000  
Teléfonos: 01 (222) 246 85 59 y 01 (222) 229 55 00 ext. 5768 y 5764  
www.dgp.buap.mx

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas  
Av. San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel, Edificio FM1-101B  
Ciudad Universitaria, Puebla, Pue. México. CP. 72570  
Teléfonos: 01 (222) 229 55 00 ext. 7552  
www.fcfm.buap.mx

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA • *Rector*: José Alfonso Esparza Ortiz • *Secretario General*: José Jaime Vázquez López • *Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura*: José Carlos Bernal Suárez • *Director General de Publicaciones*: Hugo Vargas Comsille • *Directora de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas*: Martha Alicia Palomino Ovando

Hecho en México  
Made in Mexico

# Matemáticas y sus aplicaciones 14

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de investigación presentados en el International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA), FCFM, BUAP.

## Editores

Fernando Macías Romero  
David Herrera Carrasco

## Comité científico internacional

Ermínia de Lourdes Campello Fanti (UNESP, BRA), Hugo Adán Cruz Suárez (BUAP), Luis Miguel de la Cruz Salas (UNAM), Antonio Díaz Ramos (UMA, ESP), Sina Greenwood (UA,NZ), Gerardo Hernández Valdez (BUAP), Miguel Antonio Jiménez Pozo (BUAP), Judy Kennedy (LU, USA), Christian Lehn (TUC, DE), Antonio de Jesús Libreros López (BUAP), Edgar Martínez Moro (UVA, ESP), Fernando Macías Romero (BUAP), Daria Michalik (UKSW, PL), Nayeli Berenice Quiñones Baldazo (BUAP), Abigail Rodríguez Nava (UAM), José Gregorio Rodríguez Nieto (UNC, CO), Saúl Alonso Zavala Ortiz (I.T. Ensenada).



# Contenido

<b>Presentación</b>	1
<b>Álgebra</b>	
<b>Capítulo 1. Algunos ideales de índice finito en el anillo de Burnside <math>B_p(C_{p^n})</math></b>	5
<i>Cristhian Vázquez Rosas, David Villa Hernández y Brenda Zavala López</i>	
<b>Capítulo 2. Extensiones <math>G</math>-fibrantes y productos torcidos</b>	27
<i>Alexander Bykov, Patricia Domínguez Soto y Jorge Alberto Sánchez Martínez</i>	
<b>Modelación matemática</b>	
<b>Capítulo 3. Simulación numérica del flujo bifásico para el problema de desprendimiento de finos por inyección de agua de baja salinidad en un yacimiento petrolero</b>	53
<i>Francisco Javier Martínez Deferia, María Luisa Sandoval Solís y Manuel Coronado Gallardo</i>	
<b>Capítulo 4. Diseño de un paracaídas para un pico-satélite CanSat</b>	87
<i>Fernando Sánchez Taxis, Iván Reyes Castillo, Mariana Natalia Ibarra Bonilla y Raúl Eusebio Grande</i>	
<b>Topología</b>	



<b>Capítulo 5. Funciones perfectas</b>	109
<i>Manuel Ibarra Contreras y Armando Martínez García</i>	
<b>Capítulo 6. Límites inversos y continuos indescomponibles</b>	135
<i>David Herrera Carrasco, Antonio de Jesús Libreros López y Fernando Macías Romero</i>	
<b>Capítulo 7. Continuidad de la función <math>\omega_f</math> en el intervalo <math>[0, 1]</math></b>	161
<i>Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero</i>	
<b>Índice de autores</b>	183

# Presentación

Tenemos la fortuna de hacer un recorrido hacia un proceso creativo sin precedentes. Ha llegado el momento de compartir esta sabiduría, de invitar a todo el mundo a embarcarse en el navío que nos conduce hacia la Fuente de todo lo creado. Esta es la razón por la cual editamos el libro que tienen en sus manos. La felicidad que propone este libro por su divulgación, investigación e intercambio de ideas se debe a la generosidad de muchísimos matemáticos que participaron en el denominado *Sixth International Conference on Mathematics and its Applications* (6CIMA, 2019), un esfuerzo profesional consolidado que ha permitido la participación de grandes personajes de diversas universidades, nacionales y extranjeras, tanto en el desarrollo del 6CIMA como en su memoria escrita, que es el presente libro. La base ha sido un comité organizador especializado, entusiasta y vigoroso emanado de la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. Este producto no es ni siquiera sietemesino, es normal, de por lo menos nueve meses de trabajo constante. Por el amor a la matemática es que ha nacido este ejemplar que nos brinda la sabiduría necesaria para mostrarles parte de nuestros quehaceres cotidianos.

Los capítulos de este libro están agrupados por secciones de acuerdo al área temática en el 6CIMA. Dichos capítulos fueron sometidos a arbitraje riguroso.

Agradecemos, con toda el alma, a todos los árbitros su amabilidad, gentileza, dedicación y trabajo científico. Un agradecimiento especial a Antonio de Jesús Libreros López por su apoyo en la edición de esta obra. Gracias por dejar huella.

*David Herrera Carrasco  
Fernando Macías Romero  
Editores*



---

# Álgebra

---



## Capítulo 1

# Algunos ideales de índice finito en el anillo de Burnside $B_p(C_{p^n})$

Cristhian Vázquez Rosas, David Villa Hernández y  
Brenda Zavala López  
FCFM, BUAP

### Resumen

En el presente trabajo de investigación, buscamos determinar de forma explícita las  $(n+1)!$  clases de isomorfismo de ideales fraccionales de índice finito del anillo de Burnside  $B_p(C_{p^n})$ , que se desprenden de su estructura de producto fibrado, de la clase de isomorfismo del ideal fraccional  $\mathbb{Z}_p^n$  de  $B_p(C_{p^{n-1}})$ .

## 1 Introducción

A lo largo de este trabajo consideramos  $G$  un grupo finito. El anillo de Burnside  $B(G)$  de un grupo  $G$  es uno de los anillos fundamentales de representación de  $G$ , el cual puede ser analizado desde diferentes puntos de vista. Es en muchos sentidos el objeto universal a examinar cuando se estudia la categoría de  $G$ -conjuntos. El anillo de Burnside es el marco natural para estudiar los invariantes asociados a la estructura de  $G$ -conjuntos tales como  $G$ -copos. Por otro lado, al considerar su espectro primo y sus idempotentes primitivos, se infieren varios teoremas de inducción.

A finales del siglo XIX, W. Burnside introdujo las ideas de lo que actualmente se conoce como el anillo de Burnside, pero fue Solomon en 1967 en su artículo "The Burnside algebra of a finite group" quien le da la estructura algebraica de anillo.

En 1977, L. Solomon introdujo una función Zeta para un orden; la cual requiere del conocimiento de todos sus ideales de índice finito, desde entonces

C.J. Bushnell e I. Reiner han desarrollado aún más esta función y algunas de sus generalizaciones.

En 2009, D. Villa Hernández obtuvo la función Zeta del anillo de Burnside para grupos cíclicos de orden un primo  $p$  y  $p^2$ .

En 2016, J. M. Ramírez Contreras y D. Villa Hernández obtuvieron la función Zeta del anillo de Burnside para grupos cíclicos de orden un primo  $p^3$ .

En 2018, C. Vázquez Rosas y D. Villa Hernández determinaron de forma explícita los ideales de índice finito del anillo de Burnside  $B_p(C_{p^4})$ , asociados a los ideales de índice finito en  $B_p(C_{p^3})$  de la forma  $(p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}, p^{m_4})\mathbb{Z}_p^4$  donde  $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3$  y  $m_4 \geq 3$ .

El propósito fundamental de este trabajo de investigación es estudiar los ideales de la forma  $(p^{m_1}, \dots, p^{m_n})\mathbb{Z}_p^n$  en  $B_p(C_{p^{n-1}})$  con el objetivo de determinar los ideales de índice finito en  $B_p(C_{p^n})$ , que se desprenden de su estructura de producto fibrado.

## 2 El anillo de Burnside

En esta sección usaremos el homomorfismo marca, mismo que nos ayudará a estudiar el anillo de Burnside y algunas de sus propiedades en los  $G$ -conjuntos; además, observaremos el papel que juega el anillo fantasma del anillo de Burnside y lo extenderemos a los enteros  $p$ -ádicos, para así poder verlo como un producto tensorial. Por último, daremos dos caracterizaciones del anillo de Burnside de un grupo cíclico de orden  $p^n$  con  $p$  un número primo, para expresarlo como las  $(n + 1)$ -adas, donde la primera caracterización depende de la diferencia entre las coordenadas consecutivas y la segunda caracterización depende de la diferencia entre la última coordenada y cada una de las anteriores.

Para un grupo finito  $G$ , el anillo de Burnside  $B(G)$  es definido como el anillo de Grothendieck de las clases de isomorfismo de  $G$ -conjuntos con la suma dada por la unión disjunta y la multiplicación por el producto cartesiano. El anillo de Burnside  $B(G)$  es libre como grupo abeliano, con base dada por las clases de isomorfismo de los  $G$ -conjuntos transitivos de la forma  $\frac{G}{H}$  para subgrupos  $H$  de  $G$ ; dos de los cuales se identifican si sus estabilizadores  $H$

son conjugados en  $G$ , es decir,

$$B(G) = \bigoplus_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z} \left( \frac{G}{H} \right)$$

donde  $\mathcal{C}(G)$  es la familia de las clases de conjugación de subgrupos de  $G$ . Para más información sobre el anillo de Burnside ver [1] y [2].

Con frecuencia, se estudia el anillo de Burnside de un grupo finito  $G$  usando el homomorfismo marca  $\varphi : B(G) \rightarrow \mathbb{Z}^{|\mathcal{C}(G)|}$ . Para  $K \leq G$ , la  $K$ -ésima coordenada de  $\varphi$  es definida como  $\varphi_K(X) = |X^K|$ , para  $X$  un  $G$ -conjunto, extendiendo linealmente  $\varphi$  a  $B(G)$ .

El anillo  $\widetilde{B}(G) := \mathbb{Z}^{|\mathcal{C}(G)|}$  es el anillo de las funciones de super clase  $f : \mathcal{C}(G) \rightarrow \mathbb{Z}$  con la multiplicación dada coordenada a coordenada; el cual es llamado el *anillo fantasma* de  $G$  y juega un importante papel para explicar  $G$ -conjuntos utilizando sus puntos fijos dados. En particular, se puede mostrar que el homomorfismo marca es inyectivo.

Sea  $p \in \mathbb{Z}$  un número primo y sea  $\mathbb{Z}_p$  el anillo de los enteros  $p$ -ádicos. Denotamos los siguientes productos tensoriales por

$$B_p(G) = \mathbb{Z}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}} B(G) = \bigoplus_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}_p \left( \frac{G}{H} \right)$$

y

$$\widetilde{B}_p(G) = \mathbb{Z}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{B}(G) = \prod_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}_p$$

donde tenemos que  $B_p(G)$  es un  $\mathbb{Z}_p$ -orden y  $\widetilde{B}_p(G)$  un  $\mathbb{Z}_p$ -orden máximo.

**Observación 2.1.** Sea  $q \in \mathbb{Z}$  un número primo. Notemos que  $B_q(G) \subseteq \widetilde{B}_q(G)$ . Sabemos que para todo  $x \in \widetilde{B}_q(G)$ , se tiene que  $|G|x \in B_q(G)$  por lo que si  $q$  no divide a  $|G|$ , entonces  $|G|$  es unidad en  $\mathbb{Z}_q$  y así tenemos que  $x \in B_q(G)$ , concluyendo que  $B_q(G) = \widetilde{B}_q(G)$ .

**Ejemplo 2.2.** (Caracterización de  $B_p(C_{p^n}) \subseteq \mathbb{Z}_p^{n+1}$ ). Consideremos a  $C_{p^n} = \langle a \rangle$  un grupo cíclico generado por  $a$  de orden  $p^n$ . Sea

$$\mathcal{C}(C_{p^n}) = \{H_0 = \langle a \rangle, H_1 = \langle a^p \rangle, H_2 = \langle a^{p^2} \rangle, \dots, H_n = \langle a^{p^n} \rangle\}$$



y sea  $a_i = \frac{C_{p^n}}{H_i}$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ , entonces

$$B_p(C_{p^n}) = \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z}_p a_i$$

luego, el homomorfismo marca  $\varphi$  induce la siguiente inclusión:

$$\begin{aligned} B_p(C_{p^n}) &\rightarrow \mathbb{Z}_p^{n+1} \\ X &\mapsto (\varphi_{H_0}(X), \varphi_{H_1}(X), \dots, \varphi_{H_n}(X)) \end{aligned}$$

puesto que  $C_{p^n}$  es abeliano, entonces

$$\varphi_H \left( \frac{C_{p^n}}{K} \right) = \begin{cases} \left| \frac{C_{p^n}}{K} \right| & \text{si } H \subseteq K \\ 0 & \text{si } H \not\subseteq K \end{cases}$$

luego

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{C_{p^n}}{H_0} &\mapsto (1, 1, \dots, 1) \\ a_1 = \frac{C_{p^n}}{H_1} &\mapsto (0, p, \dots, p) \\ a_2 = \frac{C_{p^n}}{H_2} &\mapsto (0, 0, p^2, \dots, p^2) \\ &\vdots \\ a_n = \frac{C_{p^n}}{H_n} &\mapsto (0, 0, \dots, p^n) \end{aligned}$$

**Definición 2.3.** Con base al ejemplo anterior, definimos y denotamos el anillo de Burnside de un grupo cíclico de orden  $p^n$  como sigue:

$$B_p(C_{p^n}) = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) : x_i - x_{i+1} \in p^{i+1}\mathbb{Z}_p \text{ con } i = 0, \dots, n-1\}$$

o equivalentemente

$$B_p(C_{p^n}) = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) : x_n - x_i \in p^{i+1}\mathbb{Z}_p \text{ con } i = 0, \dots, n-1\}.$$

donde  $B_p(C_{p^n}) \subseteq \mathbb{Z}_p^{n+1}$  como subanillo.

En este trabajo utilizaremos esta última caracterización por conveniencia.

### 3 Algunos ideales de índice finito en $B_p(C_{p^n})$

A lo largo de esta sección, se consideran únicamente ideales de índice finito a los cuales llamamos ideales. A continuación, damos la definición de un producto fibrado; el cual, usaremos para caracterizar los ideales del anillo de Burnside  $B_p(C_{p^n})$  en términos de los ideales de  $B_p(C_{p^{n-1}})$ .

**Definición 3.1.** Dados dos morfismos  $f : B \rightarrow A$  y  $g : C \rightarrow A$  en una categoría  $\mathcal{C}$ , una solución es una tripleta ordenada  $(D, \alpha, \beta)$  que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\alpha} & C \\ \beta \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

Un producto fibrado es una solución  $(D, \alpha, \beta)$  que es la mejor en el sentido que: para cada solución  $(X, \alpha', \beta')$  existe un único morfismo  $\theta : X \rightarrow D$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ & \searrow^{\alpha'} & & & \\ & \searrow^{\theta} & & & \\ & & D & \xrightarrow{\alpha} & C \\ & \searrow^{\beta'} & \downarrow \beta & & \downarrow g \\ & & B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

El producto fibrado cuando existe es único hasta isomorfismo.

**Observación 3.2.** Consideremos el siguiente diagrama de producto fibrado

$$\begin{array}{ccc}
 (a_1, a_2) & \dashrightarrow & a_2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A & \xrightarrow{f_2} & A_2 \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow g_2 \\
 A_1 & \xrightarrow{g_1} & \bar{A} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 a_1 & \dashrightarrow & g_1(a_1) = g_2(a_2)
 \end{array}$$

donde  $A, A_1, A_2, \bar{A}$  son anillos conmutativos con unidad y  $f_1, f_2, g_1, g_2$  son homomorfismos sobreyectivos de anillos, es decir ,

$$A = \{(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2 : g_1(a_1) = g_2(a_2)\}$$

Veamos como caracterizar los ideales de  $A$ , en el caso de que  $A_2$  es un D.I.P. Sea  $I \leq A$  un ideal e  $I_j = f_j(I)$  para  $j = 1, 2$ .

Es fácil ver que  $I_j \leq A_j$  para  $j = 1, 2$ . Ahora, como  $A_2$  es un D.I.P, entonces existe  $\beta \in A_2$  tal que  $I_2 = \beta A_2$ , luego, como  $f_2$  es sobreyectivo, existe  $\alpha \in A_1$  tal que  $(\alpha, \beta) \in I \leq A$  y  $f_2(\alpha, \beta) = \beta$ .

Dado que es un producto fibrado se cumple

$$g_1(\alpha) = g_2(\beta)$$

Ahora, sea  $(x, y) \in I$ , puesto que  $y = f_2(x, y) \in I_2$ , entonces existe  $b_2 \in A_2$  tal que  $y = \beta b_2$ , como  $f_2$  es sobreyectivo existe  $b_1 \in A_1$  tal que  $f_2(b_1, b_2) = b_2$ . Además,  $(\alpha, \beta)(b_1, b_2) = (\alpha b_1, \beta b_2) \in I$  y  $(x, y) = (x, \beta b_2) \in I$ , de donde  $(x - \alpha b_1, 0) \in I$ .

Definimos  $J = \{\gamma \in A_1 : (\gamma, 0) \in I\}$ . Es claro que  $J$  es un ideal en  $A_1$ .

Por lo anterior, tenemos que existe  $\gamma \in J$  tal que  $x - \alpha b_1 = \gamma$  entonces  $x = \alpha b_1 + \gamma$  con  $\gamma \in J$ . Por lo tanto,  $(x, y) = (\alpha b_1 + \gamma, \beta b_2) = (\alpha, \beta)(b_1, b_2) + (\gamma, 0)$ . Así,  $I \subseteq (\alpha, \beta)A + (J, 0) \subseteq I$ , de donde es claro que se da la igualdad,  $I = (\alpha, \beta)A + (J, 0)$ .

**Proposición 3.3.** (Caracterización) Con la notación de la Observación 3.2 si  $A_2$  es un D.I.P e  $I \leq A$  es un ideal, entonces

$$I = (\alpha, \beta)A + (J, 0)$$

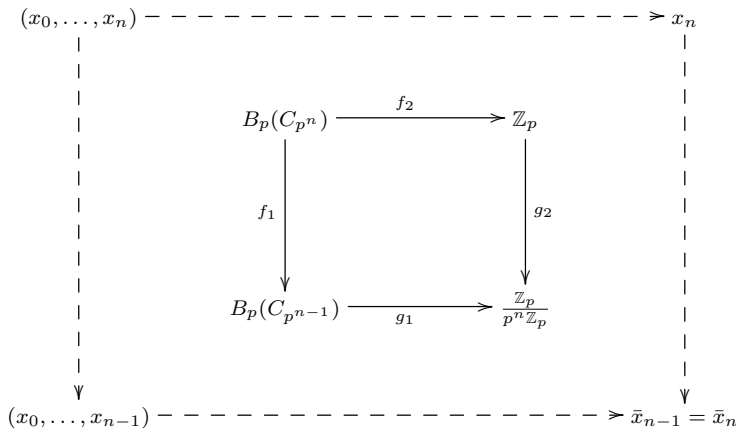
donde:

- i)  $J \leq A_1$  es un ideal tal que  $g_1(J) = \{0\}$
- ii)  $\beta \in A_2$  es el generador del ideal principal  $\beta A_2$
- iii)  $\alpha \in A_1$  es tal que  $g_1(\alpha) = g_2(\beta)$  y  $\alpha$  es único módulo  $J$
- iv) Si  $D = \{(a_1, a_2) \in A : a_2\beta = 0\}$ , entonces  $a_1\alpha \in J$  para todo  $(a_1, a_2) \in D$ , esto es,  $f_1(D)\alpha \subseteq J$ .

*Demostración.* (Unicidad de  $\alpha$ ) Sea  $(\alpha, \beta) \in I$  y supongamos que  $(\alpha', \beta) \in I$ , entonces  $(\alpha' - \alpha, 0) \in I$  luego  $\alpha' - \alpha \in J$  si y solo si  $\alpha' + J = \alpha + J$ . Así  $\alpha$  es único módulo  $J$ .

Para iv) observemos que si  $(a_1, a_2) \in D$  y  $(\alpha, \beta) \in I$ , entonces  $(a_1, a_2)(\alpha, \beta) \in I$ , i.e,  $(a_1\alpha, a_2\beta) = (a_1\alpha, 0)$ , entonces  $a_1\alpha \in J$ . Por lo tanto  $f_1(D)\alpha \subseteq J$ . Las demás implicaciones se tienen de la observación anterior.  $\square$

**Observación 3.4.** Con base a lo anterior, podemos dar la siguiente estructura de producto fibrado con  $f_1, f_2, g_1$  y  $g_2$  homomorfismos sobreyectivos de anillos, para saber el comportamiento de los ideales de  $B_p(C_{p^n})$  en términos de  $B_p(C_{p^{n-1}})$



Los ideales de  $\mathbb{Z}_p$  son principales, de la forma  $p^t\mathbb{Z}_p$ , con  $0 \leq t \in \mathbb{Z}$  por lo que si  $I \leq B_p(C_{p^n})$ , entonces

$$I = (\alpha, p^t)B_p(C_{p^n}) + (\mathcal{J}, 0)$$

donde

- I)  $\mathcal{J} \leq B_p(C_{p^{n-1}})$  tal que  $g_1(\mathcal{J}) = \bar{0}$ .
- II)  $(\alpha, p^t) \in B_p(C_{p^n})$ .
- III)  $\alpha$  es único módulo  $\mathcal{J}$ .
- IV) Se cumple que  $(p\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times \dots \times p^n\mathbb{Z}_p)\alpha \in \mathcal{J}$

de donde

$$\begin{aligned} (p, 0, 0, \dots, 0)\alpha &\in \mathcal{J} \\ (0, p^2, 0, \dots, 0)\alpha &\in \mathcal{J} \\ &\vdots \\ (0, 0, \dots, 0, p^n)\alpha &\in \mathcal{J}. \end{aligned}$$

## 4 Ejemplos

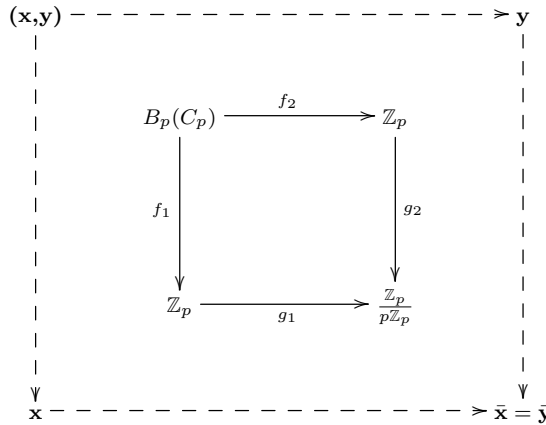
En este apartado, aplicaremos lo expuesto en la sección anterior y estudiaremos a detalle el caso cuando  $n = 1$  y daremos la lista de los ideales de manera explícita para  $n = 2, n = 3$ .

### Lista de ideales de $C_p$

Nuestro primer caso a analizar es:

$$B_p(C_p) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_p : x - y \in p\mathbb{Z}_p\}$$

de donde su diagrama de producto fibrado sería:



**Observación 4.1.** Los ideales de  $\mathbb{Z}_p$  son principales de la forma  $p^t\mathbb{Z}_p$  con  $0 \leq t \in \mathbb{Z}$ . Luego, los ideales de  $B_p(C_p)$  tienen la forma:

$$I = (x_0, p^t)B_p(C_p) + (p^m\mathbb{Z}_p, 0) \text{ con } 0 \leq m, t$$

Denotamos  $F_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$  y  $F_p^* = \{1, 2, \dots, p-1\}$ . De I) tenemos que  $p^m\mathbb{Z}_p \subset p\mathbb{Z}_p$  entonces  $m \geq 1$ . De IV) observemos que  $px_0 \in p^m\mathbb{Z}_p$  entonces  $x_0 = p^{m-1}x'_0$  con  $x'_0 \in \mathbb{Z}_p$ , notemos que  $x'_0 = s_0 + px''$  con  $s_0 \in F_p$ ,  $x'' \in \mathbb{Z}_p$ , entonces  $x_0 = p^{m-1}(s_0 + px'')$ , además de III)  $x_0$  es único módulo  $p^m\mathbb{Z}_p$ , se sigue sin pérdida de generalidad que  $x_0 = p^{m-1}s_0$  con  $s_0 \in F_p$ .

De II) se tiene que

$$p^{m-1}s_0 - p^t \in p\mathbb{Z}_p \tag{1}$$

donde  $0 \leq m-1$  y  $0 \leq t$ .

Por lo anterior,

$$I = \{(p^{m-1}(s_0x + pz), p^t y) \in \mathbb{Z}_p^2 : x, y, z, x - y \in p\mathbb{Z}_p\}$$

(\*) Si  $s_0 \neq 0$  obtenemos los ideales:

$$I = (p^{m-1}s_0, p^t)B_p(C_p)$$

Para los casos siguientes de acuerdo con (1)

- $m-1 \geq 1, t \geq 1, s_0 \in F_p^*$ .
- $m-1 = 0, t = 0, s_0 = 1$ .

(★★) Si  $s_0 = 0$ , entonces por (1)  $I = (p^m, p^t)\mathbb{Z}_p^2$  para  $m \geq 1, t \geq 1$ .

En resumen, los ideales de  $B_p(C_p)$  son de la forma:

$$(p^{m_1} s_0, p^{m_2})M_i \text{ con } i = 1, 2$$

donde

$$M_1 = \{(x_0, x_1) \in \mathbb{Z}_p^2 : x_0 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p\} = B_p(C_p)$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 1, s_0 \in \mathbb{F}_p^*$
- $m_1 = 0, m_2 = 0, s_0 = 1$

$$M_2 = \mathbb{Z}_p^2$$

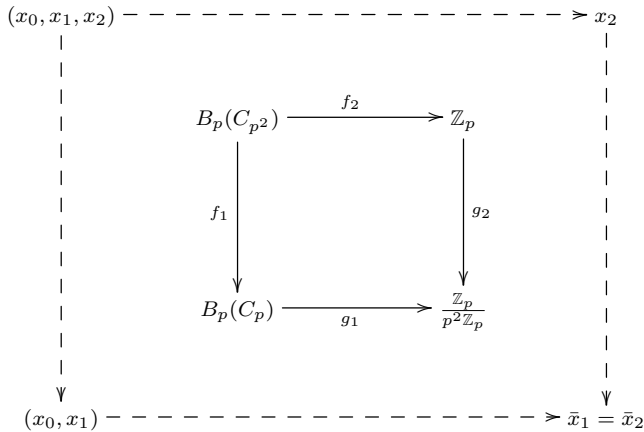
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 1, s_0 = 1$

### Lista de ideales de $C_{p^2}$

Sea

$$B_p(C_{p^2}) = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_p^3 : x_2 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_2 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

donde su diagrama de producto fibrado es como sigue:



Con base al diagrama anterior y de acuerdo con la Observación 3.4, para

$$\mathcal{J} = (p^{n_1}, p^{n_2})\mathbb{Z}_p^2 \leq B_p(C_p)$$

donde  $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1$ , tenemos que los ideales de  $B_p(C_{p^2})$  son de la forma

$$I = (p^{m_1} s_0, p^{m_2} (s_1 + p s_2), p^{m_3}) M_i$$

con  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  y donde

$$M_1 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_p^3 : x_0 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_1 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 2, s_0 \in \mathbb{F}_p^*, s_1 \in \mathbb{F}_p^*, s_2 \in \mathbb{F}_p$ .
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, s_0 \in \mathbb{F}_p^*, s_1 = 1, s_2 \in \mathbb{F}_p$ .
- $m_1 = 0, m_2 = 0, m_3 = 0, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0$ .

$$M_2 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_p^3 : x_1 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 2, s_0 = 1, s_1 \in \mathbb{F}_p^*, s_2 \in \mathbb{F}_p$ .
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 \in \mathbb{F}_p$ .

$$M_3 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_p^3 : x_0 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_1 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 2, s_0 \in \mathbb{F}_p^*, s_1 \in \mathbb{F}_p^*, s_2 = 0$ .
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, s_0 \in \mathbb{F}_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0$ .

$$M_4 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_p^3 : x_1 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 2, s_0 = 1, s_1 \in \mathbb{F}_p^*, s_2 = 0$ .
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0$ .

$$M_5 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_p^3 : x_0 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 2, s_0 \in \mathbb{F}_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0$ .

$$M_6 = \mathbb{Z}_p^3$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 2, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0$ .

Para más detalles ver [3].

### Lista de ideales de $C_{p^3}$



Sea

$$B_p(C_{p^3}) = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^3 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

donde su diagrama de producto fibrado es como sigue:

$$\begin{array}{ccc}
 (x_0, x_1, x_2, x_3) & \text{---} & x_3 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B_p(C_{p^3}) & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{Z}_p \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow g_2 \\
 B_p(C_{p^2}) & \xrightarrow{g_1} & \frac{\mathbb{Z}_p}{p^3\mathbb{Z}_p} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (x_0, x_1, x_2) & \text{---} & \bar{x}_2 = \bar{x}_3
 \end{array}$$

Del diagrama anterior y de acuerdo a la Observación 3.4, para

$$\mathcal{J} = (p^{n_1}, p^{n_2}, p^{n_3})\mathbb{Z}_p^3 \leq B_p(C_{p^2})$$

donde  $n_1 \geq 1, n_2 \geq 2, n_3 \geq 2$ , tenemos que los ideales de  $B_p(C_{p^3})$  son de la forma:

$$(p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5), p^{m_4})M_i$$

con  $i = 1, 2, \dots, 24$  y donde

$$M_1 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 \in F_p.$
- $m_1 = 0, m_2 = 0, m_3 = 0, m_4 = 0, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0$

$$M_2 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 \in F_p.$

$$M_3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 \in F_p.$

$$M_4 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 \in F_p.$

$$M_5 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$$M_6 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$$M_7 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$$M_8 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$$M_9 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$

$$M_{10} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_2 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$

$$M_{11} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 = 0.$

$$M_{12} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 = 0.$

$$M_{13} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$$M_{14} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$$M_{15} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0.$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$$M_{16} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$$M_{17} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$$M_{18} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$$M_{19} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$$M_{20} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$$M_{21} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$$M_{22} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$$M_{23} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$$M_{24} = \mathbb{Z}_p^4$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

Para más detalles ver [4]

## 5 Caso General $C_{p^n}$

Por último, en esta sección daremos una expresión para los ideales en el caso general y todas las observaciones necesarias para cada una de las condiciones expuestas.

**Definición 5.1.** Sea  $R$  un dominio entero, llamamos a  $R$  dominio de Dedekind si  $R$  es un anillo hereditario, esto es, que todo ideal de  $R$  es un  $R$ -módulo proyectivo.

**Definición 5.2.** Sea  $R$  un dominio de Dedekind con campo de cocientes  $K$ . Un  $R$ -ideal fraccional en  $K$  es un  $R$ -submódulo finitamente generado  $M$  contenido en  $K$  tal que  $KM = K$ .

**Definición 5.3.** Sea  $M$  un ideal fraccional de  $B_p(C_{p^n})$ , definimos y denotamos al conductor de  $M$  en  $B_p(C_{p^n})$  como sigue:

$$\{M : B_p(C_{p^n})\} = \{\alpha \in \mathbb{Q}_p^{n+1} : \alpha M \subseteq B_p(C_{p^n})\}$$

**Observación 5.4.** Sea

$$B_p(C_{p^n}) = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_p^{n+1} : x_n - x_i \in p^{i+1}\mathbb{Z}_p, i = 0, \dots, n-1\}$$

de acuerdo con la Observación 3.4, los ideales de nuestro interés para este trabajo, son de la forma:

$$I = (\alpha, p^t)B_p(C_{p^n}) + (\mathcal{J}, 0)$$

con  $t \geq 0$  y donde

$$\mathcal{J} = (p^{m'_1}, p^{m'_2}, \dots, p^{m'_n})\mathbb{Z}_p^n \leq B_p(C_{p^{n-1}})$$

para  $m'_1 \geq 1, \dots, m'_{n-1} \geq n-1, m'_n \geq n-1$ . De I) tenemos que  $g_1(\mathcal{J}) = 0 + p^n\mathbb{Z}_p$ , entonces  $p^{m'_n} + p^n\mathbb{Z}_p = 0 + p^n\mathbb{Z}_p$ ; luego  $p^{m'_n} \in p^n\mathbb{Z}_p$  y así  $m'_n \geq n$ . De IV) tenemos:

$$\begin{aligned} (p, 0, 0, \dots, 0)\alpha &\in \mathcal{J} \\ (0, p^2, 0, \dots, 0)\alpha &\in \mathcal{J} \\ &\vdots \\ (0, 0, \dots, 0, p^n)\alpha &\in \mathcal{J}. \end{aligned}$$

Sea  $\alpha = (y_0, \dots, y_{n-1}) \in B_p(C_{p^{n-1}})$ , entonces

$$\begin{aligned} (py_0, 0, 0, \dots, 0) &\in \mathcal{J} \\ (0, p^2y_1, 0, \dots, 0) &\in \mathcal{J} \\ &\vdots \\ (0, 0, \dots, 0, p^ny_{n-1}) &\in \mathcal{J}. \end{aligned}$$

entonces  $py_0 \in p^{m'_1}\mathbb{Z}_p, p^2y_1 \in p^{m'_2}\mathbb{Z}_p, \dots, p^ny_{n-1} \in p^{m'_n}\mathbb{Z}_p$ , de aquí

$$y_0 = p^{m'_1-1}(s_{0,0} + py'_0) \text{ con } y'_0 \in \mathbb{Z}_p.$$

$$y_1 = p^{m'_2-2}(s_{1,0} + ps_{1,1} + p^2y'_1) \text{ con } y'_1 \in \mathbb{Z}_p.$$

$\vdots$

$$y_i = p^{m'_{i+1}-(i+1)}(s_{i,0} + ps_{i,1} + \dots + p^i s_{i,i} + p^{i+1}y'_i) \text{ con } y'_i \in \mathbb{Z}_p.$$

$\vdots$

$$y_{n-1} = p^{m'_n-n}(s_{n-1,0} + ps_{n-1,1} + \dots + p^{n-1}s_{n-1,n-1} + p^ny'_n) \text{ con } y'_n \in \mathbb{Z}_p.$$

De III), puesto que  $\alpha$  es único módulo  $\mathcal{J}$ , sin pérdida de generalidad, consideramos

$$\alpha = (p^{m'_1-1}s_{0,0}, p^{m'_2-2}(s_{1,0} + ps_{1,1}), \dots, p^{m'_n-n}(s_{n-1,0} + ps_{n-1,1} + \dots + p^{n-1}s_{n-1,n-1})).$$

con  $s_{i,j} \in F_p \quad i = 0, \dots, n-1$  y  $j = 0, \dots, i$ . De II) obtenemos

$$p^{m'_n-n}(s_{n-1,0} + ps_{n-1,1} + \dots + p^{n-1}s_{n-1,n-1}) + p^n\mathbb{Z}_p = p^t + p^n\mathbb{Z}_p.$$

por lo que para el caso  $t \geq n$  se tiene

$$p^{m'_n-n}(s_{n-1,0} + ps_{n-1,1} + \dots + p^{n-1}s_{n-1,n-1}) \in p^n\mathbb{Z}_p. \quad (2)$$

de donde obtenemos las siguientes  $(n+1)!$  clases de isomorfismo de ideales fraccionales de índice finito en  $B_p(C_{p^n})$ , a saber:

$$M_j =$$

$$\{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_p^{n+1} : x_n - x_0 \in p^{i_1}\mathbb{Z}_p, x_n - x_1 \in p^{i_2}\mathbb{Z}_p, \dots, x_n - x_{n-1} \in p^{i_n}\mathbb{Z}_p\}$$

donde  $i_1 = 0, 1; i_2 = 0, 1, 2; \dots; i_n = 0, 1, \dots, n$ . Observe que los valores de  $j$  van desde 1 hasta  $(n+1)!$  de acuerdo con los distintos valores de  $i_l$  para  $l = 1, \dots, n$ .

**Notación:** Denotemos por

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0 &= B_p(C_{p^n}) \\ \mathcal{M}_i &= \mathbb{Z}_p^i \times B_p(C_{p^{n-i}}) \text{ para } i = 1, \dots, n-1 \\ \mathcal{M}_n &= \mathbb{Z}_p^{n+1}.\end{aligned}$$

De acuerdo a [6] los únicos conductores de los ideales fraccionales de índice finito son:

- (1)  $\mathcal{N}_0 = \mathcal{M}_0 = \{\mathcal{M}_0 : B_p(C_{p^n})\}$ .
- (2)  $\mathcal{N}_1 = (p, p^2, \dots, p^{i-1}, p^i, \underbrace{p^i, \dots, p^i}_{(n-i+1)\text{-veces}}) \mathcal{M}_i = \{\mathcal{M}_i : B_p(C_{p^n})\}$   
para  $i = 1, \dots, n-1$
- (3)  $\mathcal{N}_n = (p, p^2, \dots, p^n, p^n) \mathcal{M}_n = \{\mathcal{M}_n : B_p(C_{p^n})\}$

### Conjetura 5.5.

Con base a la Observacion 3.4 y considerando el ideal

$$\mathcal{J} = (p^{m'_1}, p^{m'_2}, \dots, p^{m'_n}) \mathbb{Z}_p^n \leq B_p(C_{p^{n-1}})$$

con  $m'_1 \geq 1, \dots, m'_{n-1} \geq n-1, m'_n \geq n-1$  se obtienen los siguientes ideales de índice finito en  $B_p(C_{p^n})$ .

$$(p^{m_1} s_{0,0}, p^{m_2} (s_{1,0} + p s_{1,1}), \dots, p^{m_n} (s_{n-1,0} + p s_{n-1,1} + \dots + p^{n-1} s_{n-1,n-1}), p^{m_{n+1}}) M_j$$

a) En el caso  $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_n = n$ , es decir,  $M_j = B_p(C_{p^n})$  donde:

- $m_1 \geq 1, \dots, m_n \geq n, m_{n+1} \geq n$ .  
 $s_{l,0} \in F_p^* \quad l = 0, \dots, n-1; s_{k,t} \in F_p \quad k = 1, \dots, n-1 \text{ y } t = 1, \dots, k.$
- $m_1 \geq 1, \dots, m_{n-1} \geq n-1, m_n = m_{n+1} = n-1$ .  
 $s_{l,0} \in F_p^* \quad l = 0, \dots, n-2; s_{n-1,0} = 1; s_{k,t} \in F_p \quad k = 1, \dots, n-1 \text{ y } t = 1, \dots, k.$

- $m_1 \geq 1, \dots, m_{n-2} \geq n - 2, m_{n-1} = m_n = m_{n+1} = n - 2.$   
 $s_{l,0} \in F_p^* \quad l = 0, \dots, n - 3; s_{n-2,0} = s_{n-1,0} = 1;$   
 $s_{k,t} \in F_p \begin{cases} k = 1, \dots, n - 2 & \text{y } t = 1, \dots, k. \\ k = n - 1 & \text{y } t = 2, \dots, k; s_{n-1,1} = 0. \end{cases}$
- $m_1 \geq 1, \dots, m_{n-3} \geq n - 3, m_{n-2} = m_{n-1} = m_n = m_{n+1} = n - 3.$   
 $s_{l,0} \in F_p^* \quad l = 0, \dots, n - 4; s_{n-3,0} = s_{n-2,0} = s_{n-1,0} = 1;$   
 $s_{k,t} \in F_p \begin{cases} k = 1, \dots, n - 3 & \text{y } t = 1, \dots, k. \\ k = n - 2 & \text{y } t = 2, \dots, k; s_{n-2,1} = 0. \\ k = n - 1 & \text{y } t = 3, \dots, k; s_{n-1,1} = s_{n-1,2} = 0. \end{cases}$
- $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m_{n+1} = 0.$   
 $s_{l,0} = 1 \quad l = 0, \dots, n - 1; s_{k,t} = 0 \quad k = 1, \dots, n - 1 \text{ y } t = 1, \dots, k.$

b) En el caso  $i_1 = \dots = i_n = 0$ , es decir,  $M_j = \mathbb{Z}_p^{n+1}$  donde:

- $m_1 \geq 1, \dots, m_n \geq n, m_{n+1} \geq n.$   
 $s_{l,0} = 1 \quad l = 0, \dots, n - 1; s_{k,t} = 0 \quad k = 1, \dots, n - 1 \text{ y } t = 1, \dots, k.$

c) En el caso

$$M_j = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_p^{n+1} : x_n - x_{l-1} \in p^i \mathbb{Z}_p, l = 1, \dots, n\}$$

para  $0 \leq i_l \leq l$ , salvo los dos casos anteriores, si

$$\{M_j : B_p(C_p^n)\} = (p, p^2, \dots, p^{i-1}, p^i, \underbrace{p^i, \dots, p^i}_{(n-i+1)\text{-veces}})(\mathbb{Z}_p^i \times B_p(C_{p^{n-i}}))$$

entonces tenemos que :

- $m_1 \geq 1, \dots, m_n \geq n, m_{n+1} \geq n.$
- $m_1 \geq 1, \dots, m_{n-1} \geq n - 1, m_n = m_{n+1} = n - 1.$   
 $\vdots$
- $m_1 \geq 1, \dots, m_i \geq i, m_{i+1} = \dots = m_{n+1} = i.$



Además, se pueden calcular los  $s_{k,t}$  para  $k = 0, \dots, n-1$  y  $t = 0, \dots, k$  para los  $n+1-i$  puntos anteriores, de la siguiente manera:

Para cada  $l \in \{1, \dots, n\}$  consideramos los tres casos posibles:

- \* Si  $i_l = 0$ , entonces  $s_{l-1,0} = 1$  y  $s_{l-1,t} = 0$   $t = 1, \dots, l-1$ , en cada uno de los  $n+1-i$  puntos.
- \* Si  $i_l = l$ , entonces los  $s_{l-1,t}$  se comportan igual que en los primeros  $n+1-i$  puntos del caso a) para  $t = 0, \dots, n-1$ .
- \* Si  $0 < i_l < l$ , entonces los  $s_{l-1,t}$  se comportan igual que en los primeros  $n+1-i$  puntos del caso a) para  $t = 0, \dots, i_{l-1}$  y  $s_{l-1,t} = 0$  para  $t = i_l, \dots, l-1$ .

## Agradecimientos

A los árbitros que generosamente nos mandarnos sugerencias para mejorar la presentación de este capítulo de investigación en el área de Álgebra. A los Editores de Matemáticas y sus Aplicaciones, así como al Presidente y Comités del 6 CIMA por permitir la presentación de este trabajo

## Bibliografía

- [1] S. Bouc, *Burnside rings*, Handbook of algebra, North-Holland, Amsterdam, Vol 2, 2000, 739 – 804.
- [2] C. Cejudo Castilla, J. M. Ramírez Contreras, D. Villa Hernández, *El Anillo de Burnside*, Matemáticas y sus aplicaciones 7, 2016, 31-52.
- [3] D. Villa Hernández, *Zeta functions of Burnside rings of groups of order  $p$  and  $p^2$* , Communications in Algebra, 37 (2009), 1758-1786 .
- [4] J. M. Ramírez-Contreras and D. Villa-Hernández, *Solomon's Zeta function of  $B_p(C_{p^3})$* . Int. Electron. J. Algebra, 20 (2016), 1-27.
- [5] C. Vázquez Rosas, Tesis de Licenciatura, *Algunos ideales de índice finito en el anillo de Burnside  $B_p(C_{p^4})$ , un primer acercamiento a la función zeta  $\zeta_{B_p(C_{p^4})}(s)$* , 2018.

- [6] J. M. Ramírez Contreras, Tesis de Doctorado, *Función zeta, anillo de Burnside y sus generalizaciones*, 2018.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

crsthian\_vr16@hotmail.com

dvilla@fcfm.buap.mx

bzavala@fcfm.buap.mx



## Capítulo 2

# Extensiones $G$ -fibrantes y productos torcidos

Alexander Bykov, Patricia Domínguez Soto y  
Jorge Alberto Sánchez Martínez  
FCFM, BUAP

### Resumen

Sea  $H$  un grupo cerrado de un grupo compacto metrizable  $G$ . En este trabajo se prueba que cada  $G$ -espacio compacto metrizable sobre  $G/H$  admite una extensión  $G$ -fibrante sobre  $G/H$ . Esto implica que el funtor del producto torcido  $G \times_H -$  envíe extensiones  $H$ -fibrantes a extensiones  $G$ -fibrantes. En particular, el producto torcido  $G \times_H S$  es un espacio  $G$ -fibrante cuando  $S$  es un espacio  $H$ -fibrante compacto.

## 1 Introducción

Por una extensión  $G$ -fibrante, donde  $G$  es un grupo topológico, se entiende una versión equivariante de la noción correspondiente de una extensión fibrante introducida por F. Cathey en [10]; esta fue usada por él para definir la categoría de strong shape de compactos métricos. En [8] puede encontrarse una construcción análoga de la categoría equivariante de strong shape. Esta es una de las razones para estudiar extensiones fibrantes equivariantes así como las nociones relacionadas de un espacio  $G$ -fibrante y una  $G$ -fibración fuerte.

La noción de un espacio  $G$ -fibrante puede considerarse como una generalización del concepto de un  $G$ -ANR: cada  $G$ -ANR es  $G$ -fibrante y, más aún, el límite inverso de cualquier sucesión inversa de  $G$ -ANR's ligados por  $G$ -fibraciones es un  $G$ -fibrante también. Los espacios  $G$ -fibrantes así como los  $G$ -ANR's tienen la propiedad equivariante de extensión de homotopías con respecto a todos los  $G$ -pares  $(X, A)$  de espacios metrizable. De particular

interés para la teoría de  $G$ -espacios es el siguiente hecho probado en [1]: para cualquier subgrupo cerrado  $H$  de un grupo compacto metrizable  $G$  el espacio cociente  $G/H$  es  $G$ -fibrante. En el presente capítulo se prueba una afirmación más general: el producto torcido  $G \times_H S$  es un espacio  $G$ -fibrante dado que  $S$  es un espacio  $H$ -fibrante compacto (Corolario 5.6). Esta afirmación es un corolario del Teorema 5.5 sobre extensiones fibrantes de productos torcidos. El Teorema 5.5, a su vez, es una consecuencia del resultado principal, el Teorema 5.3, el cual puede formularse como sigue: cada  $G$ -espacio compacto metrizable sobre  $G/H$  admite una extensión  $G$ -fibrante sobre  $G/H$ . Por un  $G$ -espacio sobre  $G/H$  se entiende, por supuesto, cualquier  $G$ -función  $p : E \rightarrow G/H$ . Como una consecuencia del Teorema 5.3 se obtiene una condición bajo la cual  $p$  es una  $G$ -fibración fuerte (Corolario 5.4). Una de las herramientas usadas, de hecho, en la prueba del resultado principal es la construcción de una extensión fibrante aplicada en la categoría de  $G$ -funciones.

## 2 Preliminares

La letra  $G$  denotará un grupo compacto de Hausdorff, su elemento unitario se denota por  $e$ . Aunque, en general, se trabaja en la categoría  $G\text{-TOP}$  de  $G$ -espacios y  $G$ -funciones, en las Secciones 3 y 4 se trabaja con la categoría  $G\text{-M}$  de  $G$ -espacios metrizable y, más aún,  $G$  se supone también metrizable. Los hechos básicos de la teoría de  $G$ -espacios pueden encontrarse en [5], [11] y [5]. Por conveniencia del lector, se recuerdan algunas definiciones y hechos conocidos, así como algunos especiales.

Sea  $S$  un  $H$ -espacio donde  $H$  es un subgrupo cerrado de  $G$ . El *producto torcido*  $G \times_H S$  es el espacio  $H$ -orbital del producto  $G \times S$ , cuando  $G \times S$  se considera como un  $H$ -espacio con respecto a la acción  $h \cdot (g, s) = (gh^{-1}, hs)$ . La  $H$ -órbita de  $(g, s) \in G \times S$  se denota por  $[g, s]$ . Considerando  $G \times_H S$  como un  $G$ -espacio con la acción dada por  $g' \cdot [g, s] = [g'g, s]$ , se obtiene el *funtor del producto torcido*  $G \times_H - : H\text{-TOP} \rightarrow G\text{-TOP}$  que envía una  $H$ -función  $f : S \rightarrow S'$  a una  $G$ -función  $G \times_H f : G \times_H S \rightarrow G \times_H S'$ ,  $[g, s] \mapsto [g, f(s)]$ .

Para un subgrupo cerrado dado  $H$  de  $G$ , el *espacio cociente*  $G/H$ , esto es, el conjunto de clases laterales  $\{gH \mid g \in G\}$ , es un  $G$ -espacio con la acción  $g \cdot g'H = gg'H$ . Si  $p : E \rightarrow G/H$  es una  $G$ -función, entonces  $E$  tiene la estructura natural de producto torcido  $G \times_H S$ , donde  $S = p^{-1}(eH)$ , en vista

del  $G$ -homeomorfismo  $G \times_H S \rightarrow E$ ,  $[g, s] \rightarrow gs$  (véase, por ejemplo, [11, Chapter I, Proposition 4.4]).

Por una  $G$ -fibración se entiende una versión natural equivariante de una fibración de Hurewicz: una  $G$ -función  $p : E \rightarrow B$  se llama una  $G$ -fibración si tiene la propiedad equivariante de levantamiento de homotopías con respecto a cada  $G$ -espacio  $X$  (ver [11, p. 53]). En otras palabras,  $p$  es una  $G$ -fibración si y solo si tiene la propiedad de levantamiento derecho con respecto a todas las  $G$ -funciones de la forma  $\partial_X^0 : X \hookrightarrow X \times I$ ,  $x \mapsto (x, 0)$  (aquí, como es usual,  $I = [0, 1]$ ), esto es, para cualquier diagrama conmutativo de  $G$ -funciones

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & \xrightarrow{f} & E \\
 & & \downarrow \partial_X^0 & & \downarrow p \\
 x & & & & \\
 \downarrow & & & & \\
 (x, 0) & & X \times I & \xrightarrow{F} & B
 \end{array} \tag{1}$$

existe un relleno  $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E$  (es decir, una  $G$ -homotopía  $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E$  tal que  $p\tilde{F} = F$  y  $\tilde{F}\partial_X^0 = f$ ). Además  $p$  es una  $G$ -fibración regular si para cualquier diagrama conmutativo (1) existe un relleno  $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E$  que es, más aún, una  $G$ -homotopía relativa a  $A \subset X$  cuando  $F$  es una  $G$ -homotopía relativa a  $A$ . No es difícil mostrar que una  $G$ -fibración  $p : E \rightarrow B$  es regular si  $B$  admite una métrica  $G$ -invariante, en particular, si el grupo  $G$  es compacto y  $B$  es metrizable.

Por un  $G$ -ANR o  $G$ -ANR-espacio se entiende, por supuesto, un  $G$ -retracto absoluto de vecindades equivariante para la clase de todos los  $G$ -espacios metrizable (véase, por ejemplo, [5] para la teoría equivariante de retracts).

Una  $G$ -función  $s : A \hookrightarrow X$  de  $G$ -espacios metrizable se llama  $G$ -SSDR-mapeo si es un  $G$ -encaje cerrado tal que para cada  $G$ -fibración  $p : E \rightarrow B$  de  $G$ -ANR-espacios y para cada diagrama conmutativo de  $G$ -funciones

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & E \\
 \downarrow s & & \downarrow p \\
 X & \xrightarrow{F} & B
 \end{array} \tag{2}$$

existe un relleno  $\tilde{F} : X \rightarrow E$ .

Claramente, cada  $G$ - $SSDR$ -mapeo  $s : A \hookrightarrow X$  de  $G$ -espacios metrizablees (esto es, una  $G$ -función que encaja a  $A$  en  $X$  como un  $G$ -retracto por deformación fuerte) es un  $G$ - $SSDR$ -mapeo. La siguiente definición da un ejemplo mucho más general de un  $G$ - $SSDR$ -mapeo.

Sea  $A$  un subconjunto cerrado invariante de un  $G$ -espacio  $X$ . Una  $G$ -deformación infinita fuerte de  $X$  en  $A$  es una  $G$ -función  $D : X \times [0, \infty) \rightarrow X$  que satisface:

- (a)  $D(x, 0) = x$  para todo  $x \in X$ ,
- (b)  $D(a, t) = a$  para todo  $a \in A$  y  $t \in [0, \infty)$ ,
- (c) para cada vecindad invariante  $U$  de  $A$  en  $X$  existe un  $\lambda \in [0, \infty)$  tal que  $D(X \times [\lambda, \infty)) \subset U$ .

Un  $G$ -encaje cerrado  $s : A \hookrightarrow X$  se llama un  $G$ - $ISDR$ -mapeo si existe una  $G$ -deformación infinita fuerte de  $X$  en  $s(A)$ . Puede verse fácilmente que cada  $G$ - $ISDR$ -mapeo de  $G$ -espacios metrizablees es un  $G$ - $SSDR$ -mapeo.

Puntualicemos dos hechos simples acerca de  $G$ - $SSDR$ -mapeos (véase [10, Corollary 1.6]). Sea  $A$  un  $G$ -subconjunto cerrado de un  $G$ -espacio metrizable  $X$ . Entonces:

- (\*)  $X \times 0 \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$  es un  $G$ - $SSDR$ -map.
- (\*\*) si el encaje  $A \hookrightarrow X$  es un  $G$ - $SSDR$ -mapeo, entonces lo es el encaje  $X \times \{0, 1\} \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$  (para la prueba véase [7, Proposition A.3]).

Un  $G$ -espacio  $E$  se llama un espacio *fibrante equivariante* o un espacio  $G$ -fibrante si para cada  $G$ - $SSDR$ -mapeo  $s : A \hookrightarrow X$  y cada  $G$ -función  $f : A \rightarrow E$ , existe una  $G$ -función  $F : X \rightarrow E$  tal que  $F \circ s = f$ . Por ejemplo, cada  $G$ - $ANR$  es un espacio  $G$ -fibrante.

Si un  $G$ - $SSDR$ -mapeo  $s : E \hookrightarrow \widetilde{E}$  es tal que  $\widetilde{E}$  es un espacio  $G$ -fibrante, entonces se dice que  $s$  es una *extensión  $G$ -fibrante de  $E$* . Cada  $G$ -espacio compacto metrizable  $E$  admite una extensión  $G$ -fibrante. De hecho, puede encontrarse un  $G$ - $ISDR$ -mapeo  $i : E \hookrightarrow \widehat{E}$  dentro de algún espacio  $G$ -fibrante  $\widehat{E}$  (véase [8, Proposition 3.5]).

Es fácil dar un ejemplo de un  $G$ - $SSDR$ -mapeo el cual no es un  $G$ - $ISDR$ -mapeo. Sin embargo, si  $s : E \hookrightarrow \widetilde{E}$  es una extensión  $G$ -fibrante de un  $G$ -espacio compacto metrizable  $E$ , entonces  $s$  debe ser un  $G$ - $ISDR$ -mapeo. Para

probar esto se toma una extensión  $G$ -fibrante  $i : E \hookrightarrow \widehat{E}$  de  $E$  para la cual existe una  $G$ -deformación infinita fuerte  $D$  de  $\widehat{E}$  sobre  $E$ . Como  $\widehat{E}$  es  $G$ -fibrante y  $s$  es un  $G$ -SSDR-mapeo, podemos encontrar una  $G$ -función  $\varphi : \widetilde{E} \rightarrow \widehat{E}$  tal que  $\varphi \circ s = i$ . Similarmente,  $\psi \circ i = s$  para alguna  $G$ -función  $\psi : \widehat{E} \rightarrow \widetilde{E}$ . Por (\*\*) existe una  $G$ -homotopía  $H : id_{\widetilde{E}} \simeq \psi \circ \varphi$  rel.  $s(E)$  porque  $id_{\widetilde{E}}|_{s(E)} = \psi \circ \varphi|_{s(E)}$  mientras que  $s$  es un  $G$ -SSDR-mapeo y  $\widetilde{E}$  es  $G$ -fibrante (esto prueba, por cierto, que cualesquiera dos extensiones  $G$ -fibrantes son homotópicamente equivalentes). La  $G$ -deformación infinita fuerte requerida  $\widetilde{D} : \widetilde{E} \times [0, \infty) \rightarrow \widetilde{E}$  de  $\widetilde{E}$  sobre  $s(E)$  se define como sigue:  $\widetilde{D}(x, t) = H(x, t)$  para  $t \in [0, 1]$  y  $\widetilde{D}(x, t) = \psi \circ D(\varphi(x), t - 1)$  para  $t \in [1, \infty)$ .

Una  $G$ -función  $p : E \rightarrow B$  de  $G$ -espacios metrizablees se llama  $G$ -fibración fuerte si tiene la *propiedad de levantamiento derecho* con respecto a todos los  $G$ -SSDR-mapeos, esto es, si para cualquier diagrama (2) de  $G$ -funciones, donde  $s : A \hookrightarrow X$  es un  $G$ -SSDR-mapeo, existe una  $G$ -función  $\widetilde{F} : X \rightarrow E$  como un relleno.

Claramente, las  $G$ -fibraciones fuertes son  $G$ -fibraciones. Por otro lado, se sigue inmediatamente de la definición de  $G$ -SSDR-mapeos que cada  $G$ -fibración de  $G$ -ANR's es una  $G$ -fibración fuerte. Más aún, puede mostrarse que cada  $G$ -fibración de espacios  $G$ -fibrantes es una  $G$ -fibración fuerte [7, Proposition A.2]. Note que si  $p : E \rightarrow B$  es una  $G$ -fibración fuerte tal que  $B$  es un espacio  $G$ -fibrante, entonces  $E$  es un espacio  $G$ -fibrante también. Otros hechos acerca de  $G$ -fibraciones fuertes y espacios  $G$ -fibrantes pueden encontrarse en [7] y [9].

### 3 Algunos hechos acerca de la categoría $Map(G\text{-TOP})$

En esta sección y en el resto del capítulo tratamos con la categoría  $Map(G\text{-TOP})$  cuyos objetos son  $G$ -funciones de  $G$ -espacios y cuyos morfismos  $p' \rightarrow p$



son pares de  $(f', f)$  of  $G$ -funciones tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad (3)$$

conmuta. En esta categoría puede introducirse, en un modo obvio, conceptos análogos a las nociones  $G$ -homotopía,  $G$ -retracto por deformación fuerte,  $G$ -fibración, etc., conocidos para la categoría  $G\text{-TOP}$ . Nuestro propósito es mostrar el Teorema 3.7 el cual representa el análogo del hecho bien conocido de que cualquier función continua puede factorizarse en una composición de un  $SDR$ -mapeo y una fibración.

### 3.1. Fibraciones y deformaciones en la categoría $Map(G\text{-TOP})$

Sea  $\alpha = (f', f) : p' \rightarrow p$  un morfismo representado por el diagrama (3). Si  $A \subset B$  y  $F \subset E$  son  $G$ -subconjuntos tales que  $p(F) \subset A$ , entonces se puede considerar la restricción  $q : F \rightarrow A$  of  $p$ ; en este caso escribimos  $q \subset p$ . El símbolo  $\alpha^{-1}(q)$  denotará la restricción  $f'^{-1}(F) \rightarrow f^{-1}(A)$  de  $p'$ ,  $\alpha^{-1}(q) \subset p'$ . Similarmente, si  $q' \subset p'$ ,  $q' : F' \rightarrow A'$ , entonces  $\alpha(q')$  es la restricción  $f'(F') \rightarrow f(A')$  de  $p$ .

Sea  $q \subset p$ . Por una  $G$ -retracción por deformación fuerte de  $p$  sobre  $q$  entendemos un par de  $G$ -retracciones por deformación fuerte usuales  $D' : E \times I \rightarrow E$  y  $D : B \times I \rightarrow B$  de  $E$  y  $B$  sobre  $F$  y  $A$ , respectivamente, las cuales forman un morfismo  $p \times id_I \rightarrow p$  en  $Map(G\text{-TOP})$ , esto es, relacionadas por la igualdad  $p \circ D' = D \circ (p \times id_I)$  (donde  $p \times id_I : E \times I \rightarrow B \times I$  envía  $(x, t)$  a  $(p(x), t)$ ). Sea  $\sigma = (s', s) : q \rightarrow p$ , un morfismo tal que  $s$  y  $s'$  son  $G$ -encajes. Si existe una  $G$ -retracción por deformación fuerte de  $p$  sobre  $\sigma(q)$ , diremos que la inclusión  $\sigma : q \hookrightarrow p$  es un  $G$ - $SDR$ -morfismo.

**Definición 3.1.** Un morfismo  $\alpha : p' \rightarrow p$  se llama  $G$ -fibrado si, para cualquier  $G$ -función  $h : X \rightarrow Y$ ,  $\alpha$  tiene la propiedad de levantamiento derecho con respecto al morfismo  $(\partial_0^X, \partial_0^Y) : h \rightarrow h \times id_I$ . Similarmente,  $\alpha : p' \rightarrow p$  (en  $Map(G\text{-}\mathcal{M})$ ) se llama un morfismo  $G$ -fibrado fuertemente cuando tiene la propiedad de levantamiento derecho con respecto a todos los morfismos  $(s', s) : h' \rightarrow h$  tales que ambos  $s$  y  $s'$  son  $G$ - $SSDR$ -mapeos.

Sea  $id_*$  la función identidad de un conjunto puntual  $\{*\}$  sobre si mismo (con la acción trivial del grupo  $G$ ). Entonces puede verse fácilmente que:

(i)  $p \rightarrow id_*$  es un morfismo  $G$ -fibrado  $\Leftrightarrow p$  es una  $G$ -fibración.

(ii)  $p \rightarrow id_*$  es un morfismo  $G$ -fibrado fuertemente  $\Leftrightarrow p$  es una  $G$ -fibración fuerte de espacios  $G$ -fibrantes  $\Leftrightarrow p$  es una  $G$ -fibración de espacios  $G$ -fibrantes (recuérdese que el último “ $\Leftrightarrow$ ” está probado en [7, Proposition A.2]).

Algunos otros hechos simples acerca de morfismos  $G$ -fibrados se indican más adelante en las Proposiciones 3.2, 3.3 y 3.5, cuyas pruebas estándares se omiten.

**Proposición 3.2.** *Supongamos que  $\mathbf{p} = \{p_i, \beta_i^j\}_{i \geq 0}$  es una sucesión inversa en  $Map(G-TOP)$  y sea  $p$  su límite inverso con las proyecciones  $\beta_i : p \rightarrow p_i$ , esto es,  $(p, \{\beta_i\}) = \varprojlim \mathbf{p}$ . Si  $p_0$  es una  $G$ -fibración (fuerte) y  $\beta_i^{i+1}$  es un morfismo  $G$ -fibrado (fuertemente) para cada  $i$ , entonces  $p$  es una  $G$ -fibración (fuerte) y cada  $\beta_i$  es un morfismo  $G$ -fibrado (fuertemente).*

Note que para cualquier diagrama conmutativo (3) siempre se puede considerar el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 E' & & & & \\
 \searrow & & & & \\
 & P & \xrightarrow{\hat{f}} & E & \\
 \swarrow & \downarrow \hat{p} & & \downarrow p & \\
 & B' & \xrightarrow{f} & B & 
 \end{array} \tag{4}$$

donde el cuadrado interno es pull-back, esto es,  $P$  (junto con  $\hat{f}$  y  $\hat{p}$ ) es el pull-back de la tríada  $B' \xrightarrow{f} B \xleftarrow{p} E$ . Por supuesto, la  $G$ -función  $u$  está determinada de manera única por el diagrama (3).

**Proposición 3.3.** *Sea  $\alpha : p' \rightarrow p$  un morfismo dado por el diagrama (3). Entonces  $\alpha$  es un morfismo  $G$ -fibrado (fuertemente) si y sólo si las  $G$ -funciones  $f, f'$  y  $u$  en el diagrama (4) son  $G$ -fibraciones (fuertes).*

**Observación 3.4.** En [7] un morfismo  $\alpha : p' \rightarrow p$  dado por el diagrama (3) se llama un *cuadrado  $G$ -fibrado* si la  $G$ -función  $u$  en el diagrama (4) es

una  $G$ -fibración. Por lo tanto, podemos decir que  $\alpha = (f', f)$  es un morfismo  $G$ -fibrado sii es un cuadrado  $G$ -fibrado y ambas  $f$  y  $f'$  son  $G$ -fibraciones.

Diremos también que un morfismo  $\alpha : p' \rightarrow p$  dado por el diagrama (3) es  $G$ -fibrado regular si las  $G$ -funciones  $u$  y  $f$  (y por lo tanto  $f'$ ) en el diagrama (4) son  $G$ -fibraciones regulares. Por ejemplo, el morfismo  $G$ -fibrado  $\alpha$  representado por el diagrama (3) es regular si los  $G$ -espacios  $E$ ,  $B$  y  $B'$  son metrizablees.

**Proposición 3.5.** *Sea  $\alpha = (f', f) : p' \rightarrow p$  un morfismo  $G$ -fibrado regular. Supongamos que para alguna restricción  $q \subset p$  existe una  $G$ -retracción por deformación fuerte de  $p$  sobre  $q$ . Entonces existe  $G$ -retracción por deformación fuerte  $p'$  sobre  $q' = \alpha^{-1}(q)$ .*

### 3.2. Cocilindros en la categoría $\text{Map}(G\text{-TOP})$

Para un  $G$ -espacio dado  $B$ , por  $B^I$  denotamos el espacio de todas las trayectorias continuas  $\omega : I \rightarrow B$  (con la topología compacto-abierta). Claramente  $B^I$  es un  $G$ -espacio con la acción  $\cdot$  dada por  $(g \cdot \omega)(t) = g\omega(t)$ ,  $t \in I$ . Note que las funciones  $\pi_B^0 : B^I \rightarrow B$  y  $\pi_B^1 : B^I \rightarrow B$ , definidas por  $\pi_B^0(\omega) = \omega(0)$  y  $\pi_B^1(\omega) = \omega(1)$  respectivamente, son  $G$ -funciones. Usaremos también el símbolo  $\pi_B$  para la  $G$ -función  $B^I \rightarrow B \times B$ ,  $\omega \mapsto (\omega(0), \omega(1))$ .

Ahora sea  $f : B' \rightarrow B$  una  $G$ -función. Recordemos que el cocilindro de  $f$ , denotado por  $\text{coCyl}(f)$ , se define como el pull-back de la triada  $B' \xrightarrow{f} B \xleftarrow{\pi_B^0} B^I$ . Por lo tanto, tenemos el diagrama pull-back

$$\begin{array}{ccc} \text{coCyl}(f) & \xrightarrow{\hat{f}} & B^I \\ \widehat{\pi_B^0} \downarrow & & \downarrow \pi_B^0 \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad (5)$$

Explícitamente,  $\text{coCyl}(f) = \{(b', \omega) \in B' \times B^I \mid f(b') = \omega(0)\}$  con las proyecciones  $\widehat{\pi_B^0} : \text{coCyl}(f) \rightarrow B'$ ,  $(b', \omega) \mapsto b'$  y  $\hat{f} : \text{coCyl}(f) \rightarrow B^I$ ,  $(b', \omega) \mapsto \omega$ .

La noción de cocilindro puede definirse en  $Map(G-TOP)$  de manera estándar: el cocilindro  $coCyl(\alpha)$  de un morfismo dado  $\alpha = (f', f) : p' \rightarrow p$  es la  $G$ -función

$$coCyl(\alpha) : coCyl(f') \rightarrow coCyl(f), \quad (e', \omega') \mapsto (p'(e'), p \circ \omega').$$

Es fácil ver que tenemos el siguiente diagrama pull-back en la categoría  $Map(G-TOP)$ :

$$\begin{array}{ccc} coCyl(\alpha) & \xrightarrow{\widehat{\alpha}} & p^I \\ \widehat{\pi}_p^0 \downarrow & & \downarrow \pi_p^0 = (\pi_E^0, \pi_B^0) \\ p' & \xrightarrow{\alpha} & p \end{array} \quad (6)$$

donde  $p^I : E^I \rightarrow B^I$  está dado por  $p^I(\omega') = p \circ \omega'$ ,  $\widehat{\alpha} = (\widehat{f'}, \widehat{f})$ ,  $\widehat{\pi}_p^0 = (\widehat{\pi}_E^0, \widehat{\pi}_B^0)$ .

Los cocilindros en  $Map(G-TOP)$  tienen propiedades que son análogas a las propiedades correspondientes en las categorías  $TOP$  y  $G-TOP$ . Consideraremos algunas de ellas.

**Lema 3.6.** *Sea  $p : E \rightarrow B$  una  $G$ -fibración. Entonces el morfismo  $(\pi_E, \pi_B) : p^I \rightarrow p \times p$  es  $G$ -fibrado. Si, más aún,  $E$  y  $B$  son espacios  $G$ -fibrantes, entonces  $(\pi_E, \pi_B)$  es un morfismo  $G$ -fibrado fuertemente.*

*Demostración.* Para aplicar la Proposición 3.3 consideremos el diagrama conmutativo de  $G$ -funciones

$$\begin{array}{ccccc} E^I & & & & \\ & \searrow^{p^I} & & & \\ & & W & \xrightarrow{\quad} & B^I \\ & \searrow^{\widehat{p}} & \downarrow & & \downarrow \pi_B \\ & & E \times E & \xrightarrow{p \times p} & B \times B \\ & \searrow^{\pi_E} & & & \end{array}$$

donde el cuadrado interno es pull-back, así que

$$W = \{(y_1, y_2, \omega) \in E \times E \times B^I \mid \omega(0) = p(y_1), \omega(1) = p(y_2)\}$$

y la  $G$ -función  $\bar{p} : E^I \rightarrow W$  se define por  $\bar{p}(\omega) = (\omega(0), \omega(1), p \circ \omega)$ .

Supongamos que  $A$  es un  $G$ -subconjunto cerrado de un  $G$ -espacio  $X$  y consideremos los diagramas conmutativos de  $G$ -funciones

$$\begin{array}{ccc}
 X \times \{0, 1\} \cup A \times I & \xrightarrow{h} & E \\
 \downarrow \bar{i} & & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{H} & B
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\tilde{h}} & E^I \\
 \downarrow i & & \downarrow \bar{p} \\
 X & \xrightarrow{\tilde{H}} & W
 \end{array}
 \quad (7)$$

mutuamente relacionados por las ecuaciones:  $\tilde{h}(a)(t) = h(a, t)$  y

$$\tilde{H}(x) = (h(x, 0), h(x, 1), H^*(x)),$$

donde  $H^*(x)(t) = H(x, t)$ , para  $x \in X$ ,  $a \in A$ ,  $t \in I$ . Observe que la existencia de un relleno  $F : X \times I \rightarrow E$  en el diagrama izquierdo (7) es equivalente a la existencia de un relleno  $F^* : X \rightarrow E^I$  en el diagrama derecho (7) ( $F$  y  $F^*$  están relacionadas por  $F^*(x)(t) = F(x, t)$ ).

Ahora sea  $Z$  un  $G$ -espacio arbitrario. Haciendo  $A = Z \times \{0\}$  y  $X = Z \times I$  en los diagramas (7), observamos que un relleno  $F : (Z \times I) \times I \rightarrow E$ , para el diagrama izquierdo, existe porque  $p$  es una  $G$ -fibración y la inclusión  $\bar{i} : Z \times (I \times \{0, 1\} \cup \{0\} \times I) \hookrightarrow Z \times I \times I$  puede considerarse como la inclusión  $(Z \times I) \times \{0\} \hookrightarrow (Z \times I) \times I$  debido al homeomorfismo

$$(I \times I, I \times \{0, 1\} \cup \{0\} \times I) \approx (I \times I, I \times \{0\}).$$

Por lo tanto, también existe un relleno  $F^* : Z \times I \rightarrow E$ , en el diagrama derecho. Esto prueba que  $\bar{p}$  es una  $G$ -fibración para cualquier  $G$ -fibración  $p : E \rightarrow B$ . En particular, tomando el caso trivial cuando  $B$  es un conjunto puntual  $\{*\}$ , tenemos  $\pi_E = \bar{p}$ , así que  $\pi_E$  es una  $G$ -fibración para cualquier  $G$ -espacio  $E$ . Por lo tanto, la primera parte del lema queda probada en vista de la Proposición 3.3.

Para probar la segunda parte, cuando se supone que  $E$  y  $B$  son espacios  $G$ -fibrantes, notemos primero que  $p$  es una  $G$ -fibración fuerte [7, Proposition A.2]. De modo que existe un relleno  $F : X \times I \rightarrow E$  en el diagrama izquierdo (7) para cada  $G$ -SSDR-mapeo  $i : A \hookrightarrow X$  (porque  $\bar{i}$  es un  $G$ -SSDR-mapeo

debido a la afirmación (\*\*) en la parte de Preliminares). Esto implica la existencia de un relleno  $F^* : X \rightarrow E^I$  en el diagrama derecho (7), esto es, esto muestra que  $\bar{p}$  es una  $G$ -fibración fuerte. Como en la parte de arriba, el caso  $B = \{*\}$  nos da  $\pi_E = \bar{p}$  y, como  $p : E \rightarrow \{*\}$  es una  $G$ -fibración fuerte (porque  $E$  es  $G$ -fibrante), concluimos que  $\pi_E$  es una  $G$ -fibración fuerte para cualquier espacio  $G$ -fibrante  $E$ .  $\square$

Recordemos que la  $G$ -fibración  $\pi_B^0 : B^I \rightarrow B$  tiene la sección  $s_B : B \rightarrow B^I$ ,  $b \mapsto c_b$ , donde  $c_b : I \rightarrow B$  es la función constante que envía  $t$  a  $b$ . Más aún, hay una  $G$ -retracción por deformación fuerte  $D : B^I \times I \rightarrow B^I$  de  $B^I$  sobre  $s_B(B)$  dada por  $D(\omega, t) = \omega_t$ , donde  $\omega_t : I \rightarrow B$  es tal que  $\omega_t(\tau) = \omega(\tau(1-t))$ . Desde que el diagrama (5) es pull-back, tenemos un hecho similar para  $\pi_B^0$ : la  $G$ -función  $s_f : B' \rightarrow coCyl(f)$ ,  $b' \mapsto (b', c_{f(b')})$ , es una sección para  $\pi_B^0$  mientras que la función

$$D_f : coCyl(f) \times I \rightarrow coCyl(f), \quad ((b', \omega), t) \mapsto (b', \omega_t),$$

es una  $G$ -retracción por deformación fuerte de  $coCyl(f)$  sobre  $s_f(B')$ . Pasando a  $coCyl(\alpha)$ , obtenemos los morfismos  $\sigma_\alpha = (s_{f'}, s_f)$  y  $\delta_\alpha = (D_{f'}, D_f)$  los cuales satisfacen condiciones análogas. En particular, el morfismo

$$\sigma_\alpha = (s_{f'}, s_f) : p' \rightarrow coCyl(\alpha), \quad (8)$$

dado por

$$s_f(b') = (b', c_{f(b')}), \quad b' \in B', \quad s_{f'}(y') = (y', c_{f'(y')}), \quad y' \in E', \quad (9)$$

es un  $G$ -SDR-morfismo.

Ahora podemos formular y probar el siguiente teorema que resume la discusión de arriba:

**Teorema 3.7.** *Cada morfismo  $\alpha = (f', f) : p' \rightarrow p$  en  $Map(G-TOP)$  puede factorizarse en una composición  $p' \xrightarrow{\sigma_\alpha} coCyl(\alpha) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} p$ , representada por el*

diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{coCyl}(f') & \\
 s_{f'} \nearrow & \downarrow & \searrow \tilde{f}' \\
 E' & \xrightarrow{f'} & E \\
 \downarrow p' & \downarrow \text{coCyl}(\alpha) & \downarrow p \\
 & \text{coCyl}(f) & \\
 s_f \nearrow & \downarrow & \searrow \tilde{f} \\
 B' & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

donde  $\sigma_\alpha = (s_{f'}, s_f)$  es un  $G$ -SDR-morfismo y  $\tilde{\alpha} = (\tilde{f}', \tilde{f})$ . Más aún,

- (i) si  $p$  y  $p'$  son  $G$ -fibraciones, entonces el morfismo  $\tilde{\alpha}$  es  $G$ -fibrado, y por lo tanto la  $G$ -función  $\text{coCyl}(\alpha)$  es una  $G$ -fibración;
- (ii) si  $p$  y  $p'$  son  $G$ -fibraciones de espacios  $G$ -fibrantes, entonces el morfismo  $\tilde{\alpha}$  es  $G$ -fibrado fuertemente, y por consiguiente la  $G$ -función  $\text{coCyl}(\alpha)$  es una  $G$ -fibración de espacios  $G$ -fibrantes.

*Demostración.* Definimos  $\tilde{\alpha} = (\tilde{f}', \tilde{f}) : \text{coCyl}(\alpha) \rightarrow p$  por  $\tilde{\alpha} = \pi_p^1 \circ \hat{\alpha}$ . Entonces para el  $G$ -SDR-morfismo  $\sigma_\alpha$ , dado por las fórmulas (8) y (9), tenemos  $\alpha = \tilde{\alpha} \circ \sigma_\alpha$ . En efecto,  $\tilde{f} \circ s_f = \pi_B^1 \circ \hat{f} \circ s_f = \pi_B^1 \circ s_B \circ f = f$  y, similarmente  $\tilde{f}' \circ s_{f'} = f'$ .

Probemos la afirmación (i). Supongamos que  $h : X \rightarrow Y$  es cualquier  $G$ -función. Debemos encontrar un relleno  $\tilde{\gamma} : h \times id_I \rightarrow \text{coCyl}(\alpha)$  para el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 h & \xrightarrow{\beta} & \text{coCyl}(\alpha) \\
 \downarrow \iota = (\partial_X^0, \partial_Y^0) & & \downarrow \tilde{\alpha} \\
 h \times id_I & \xrightarrow{\gamma} & p
 \end{array} \tag{10}$$

De los diagramas (6) y (10) obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 h & \xrightarrow{\widehat{\alpha} \circ \beta} & p^I \\
 \downarrow \widehat{\pi}_p^0 \circ \beta & & \downarrow \pi_p^0 \\
 \iota \swarrow & & \searrow \pi_p^1 \\
 h \times id_I & \xrightarrow{\gamma} & p \\
 & \nearrow \beta' & \\
 & p' & \xrightarrow{\alpha} & p
 \end{array} \tag{11}$$

donde el morfismo  $\beta'$  se ha añadido usando el hecho de que  $p'$  es una  $G$ -fibración. Ahora por el Lema 3.6, podemos encontrar un morfismo  $\widetilde{\beta} : h \times id_I \rightarrow p^I$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 h & \xrightarrow{\widehat{\alpha} \circ \beta} & p^I \\
 \downarrow \iota & \nearrow \widetilde{\beta} & \downarrow \pi_p = (\pi_p^0; \pi_p^1) = (\pi_E, \pi_B) \\
 h \times id_I & \xrightarrow{(\alpha \circ \beta'; \gamma)} & p \times p
 \end{array} \tag{12}$$

conmuta. Por la conmutatividad de este diagrama tenemos  $\pi_p^0 \circ \widetilde{\beta} = \alpha \circ \beta'$ , y por lo tanto  $\widetilde{\beta}$  y  $\beta'$  definen un morfismo único  $\widetilde{\gamma} : h \times id_I \rightarrow coCyl(\alpha)$  tal que  $\widehat{\alpha} \circ \widetilde{\gamma} = \widetilde{\beta}$  y  $\widehat{\pi}_p^0 \circ \widetilde{\gamma} = \beta'$  (véase el diagrama (6)). Puede verificarse fácilmente que  $\widetilde{\gamma}$  es el relleno del diagrama requerido (10). De verdad,  $\widehat{\pi}_p^0 \circ \widetilde{\gamma} \circ \iota = \beta' \circ \iota = \widehat{\pi}_p^0 \circ \beta$  y  $\widehat{\alpha} \circ \widetilde{\gamma} \circ \iota = \widetilde{\beta} \circ \iota = \widehat{\alpha} \circ \beta$ , así que  $\widetilde{\gamma} \circ \iota = \beta$ . Por otro lado,  $\widetilde{\alpha} \circ \widetilde{\gamma} = \pi_p^1 \circ \widehat{\alpha} \circ \widetilde{\gamma} = \pi_p^1 \circ \widetilde{\beta} = \gamma$ .

La prueba de la afirmación (ii) es bastante similar, solo hay que repetir el mismo argumento reemplazando el morfismo  $\iota : h \hookrightarrow h \times id_I$  en los diagramas (10), (11) y (12) por un par de  $G$ -SSDR-mapeos  $(s, s')$ . Note también que, para la existencia de un morfismo  $\beta'$  en el diagrama (11), se usa la condición “ $p'$  es una  $G$ -fibración fuerte de espacios  $G$ -fibrantes ”.  $\square$



## 4 Extensiones fibrantes en la categoría $Map(G-TOP)$

En este trabajo estamos interesados únicamente en  $G$ -ANR-resoluciones de  $G$ -espacios compactos metrizablees. Por lo tanto, la definición general de una  $G$ -resolución, dada en [4], puede reducirse a una más simple la cual se observa como sigue.

**Definición 4.1.** Sea  $E$  un  $G$ -espacio compacto y sea  $\mathbf{E} = \{E_i, q_i^j\}$  una sucesión inversa de  $G$ -espacios y  $G$ -funciones. Un mapeo  $\mathbf{q} = \{q_i\} : E \rightarrow \mathbf{E}$  (esto es, una familia de  $G$ -funciones  $\{q_i : E \rightarrow E_i\}$  tales que  $q_i^j \circ q_j = q_i$  para cada  $i \leq j$ ) se llama una  $G$ -resolución de  $E$  si:

$$(1) \quad (E, \mathbf{q}) = \varprojlim \mathbf{E},$$

(2) para cada  $i$  y cualquier vecindad abierta invariante  $U$  de  $q_i(E)$  en  $E_i$  existe  $j \geq i$  tal que  $q_i^j(E_j) \subset U$ .

Cuando todos los  $G$ -espacios  $E_i$  son  $G$ -ANR's, se dirá que  $\mathbf{q} : E \rightarrow \mathbf{E}$  es una  $G$ -ANR-resolución de  $E$ .

De manera obvia, esta definición puede extenderse a la categoría  $Map(G-TOP)$ .

**Definición 4.2.** Sea  $p : E \rightarrow B$  una  $G$ -función de  $G$ -espacios compactos. Sea  $\mathbf{p} = \{p_i, \beta_i^j\}$  una sucesión inversa de  $G$ -funciones y  $G$ -morfismos, donde  $\beta_i^j = (q_i^j, r_i^j)$  se representa por el diagrama conmutativo de  $G$ -funciones

$$\begin{array}{ccc} E_i & \xleftarrow{q_i^j} & E_j \\ p_i \downarrow & & \downarrow p_j \\ B_i & \xleftarrow{r_i^j} & B_j \end{array} \quad (13)$$

Un mapeo  $\{\beta_i\} = \{(q_i, r_i)\} : p \rightarrow \mathbf{p}$  (esto es, una familia de  $G$ -morfismos  $\{\beta_i = (q_i, r_i) : p \rightarrow p_i\}$  tales que  $\beta_i^j \circ \beta_j = \beta_i$  para todo  $i \leq j$ ) se llama una  $G$ -resolución de  $p$  si los mapeos  $\{q_i\} : E \rightarrow \{E_i, q_i^j\}$  y  $\{r_i\} : E \rightarrow \{B_i, r_i^j\}$  son  $G$ -resoluciones de  $E$  y  $B$ , respectivamente.

Sea  $\mathbf{p} = \{p_i, \beta_i^j\}$  una sucesión inversa de  $G$ -funciones y  $G$ -morfismos. En vista del Teorema 3.7, podemos construir inductivamente el siguiente diagrama conmutativo de  $G$ -morfismos

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \tilde{p}_0 & \xleftarrow{\tilde{\beta}_0^1} & \tilde{p}_1 & \xleftarrow{\tilde{\beta}_1^2} & \tilde{p}_2 & \xleftarrow{\dots} & \dots & \xleftarrow{\dots} & \tilde{p}_n & \xleftarrow{\tilde{\beta}_n^{n+1}} & \tilde{p}_{n+1} & \xleftarrow{\dots} & \dots \\
 \sigma_0=id \uparrow & & \uparrow \sigma_1 & & \uparrow \sigma_2 & & & & \uparrow \sigma_n & & \uparrow \sigma_{n+1} & & \\
 p_0 & \xleftarrow{\beta_0^1} & p_1 & \xleftarrow{\beta_1^2} & p_2 & \xleftarrow{\dots} & \dots & \xleftarrow{\dots} & p_n & \xleftarrow{\beta_n^{n+1}} & p_{n+1} & \xleftarrow{\dots} & \dots
 \end{array} \tag{14}$$

factorizando cada  $G$ -morfismo  $\sigma_n \circ \beta_n^{n+1} : p_{n+1} \rightarrow \tilde{p}_n$  en la composición

$$p_{n+1} \xrightarrow{\sigma_{n+1}} \tilde{p}_{n+1} \xrightarrow{\tilde{\beta}_n^{n+1}} \tilde{p}_n$$

donde  $\sigma_{n+1}$  es un  $G$ -SDR-morfismo y  $\tilde{p}_{n+1} = \text{coCyl}(\sigma_n \circ \beta_n^{n+1})$ .

Por lo tanto,  $\mathbf{p}$  produce la sucesión inversa  $\tilde{\mathbf{p}} = \{\tilde{p}_i, \tilde{\beta}_i^j\}$ . Denotaremos su límite inverso por  $\mathcal{F}(\mathbf{p})$ , esto es,  $(\mathcal{F}(\mathbf{p}), \{\tilde{\beta}_i^j\}) = \lim_{\leftarrow} \tilde{\mathbf{p}}$ . Ahora supongamos que  $(p, \{\beta_i^j\}) = \lim_{\leftarrow} \mathbf{p}$ . Entonces las inclusiones  $\{\sigma_i\}$  inducen una inclusión única  $\sigma : p \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{p})$  tal que  $\tilde{\beta}_i \circ \sigma = \sigma_i \circ \beta_i$  para todo  $i$ .

**Teorema 4.3.** *Sea  $p : E \rightarrow B$  una  $G$ -función de espacios compactos metrizables. Supongamos que  $p \rightarrow \mathbf{p} = \{p_i, \beta_i^j\}$  es una  $G$ -resolución de  $p$  tal que cada  $p_i$  es una  $G$ -fibración de  $G$ -espacios metrizables. Entonces la inclusión inducida  $\sigma : p \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{p})$  satisface las siguientes condiciones:*

- (1)  $\mathcal{F}(\mathbf{p})$  es una  $G$ -fibración,
- (2) existe una  $G$ -deformación infinita fuerte de  $\mathcal{F}(\mathbf{p})$  sobre  $\sigma(p)$ .

*Si, más aún, cada  $p_i$  es una  $G$ -fibración de espacios  $G$ -fibrantes (en particular, de  $G$ -ANR's), entonces  $\mathcal{F}(\mathbf{p})$  es una  $G$ -fibración de espacios  $G$ -fibrantes.*

*Demostración.* Como todas las  $G$ -funciones  $p_i$  son  $G$ -fibraciones, todas las  $G$ -funciones  $\tilde{p}_i$  en el diagrama (14) son  $G$ -fibraciones también y los enlaces  $\tilde{\beta}_i^{i+1}$  son  $G$ -fibrados por el Teorema 3.7(i). Esto implica que  $\mathcal{F}(\mathbf{p})$  es una  $G$ -fibración y cada proyección  $\tilde{\beta}_i : \mathcal{F}(\mathbf{p}) \rightarrow \tilde{p}_i$  es  $G$ -fibrado por la Proposición 3.2. Similarmente, si todas las  $p_i$  son  $G$ -fibraciones de espacios  $G$ -fibrantes entonces, usando el Teorema 3.7(ii) y la Proposición 3.2, concluimos que  $\mathcal{F}(\mathbf{p})$  es también una  $G$ -fibración de espacios  $G$ -fibrantes.

Para probar la afirmación (2) usamos la notación tomada en la Definición 4.2, en particular, los morfismos  $\beta_i^j$  están representados por el diagrama (13).

Supongamos también que las funciones y los morfismos en el diagrama (14) están dados por  $\tilde{p}_i : \tilde{E}_i \rightarrow \tilde{B}_i$ ,  $\tilde{\beta}_i^j = (\tilde{q}_i^j, \tilde{r}_i^j)$ ,  $\sigma_i = (s_i, u_i)$ . Sea  $\tilde{p} = \mathcal{F}(\mathbf{p}) : \tilde{E} \rightarrow \tilde{B}$  y sean  $\tilde{\beta}_i = (\tilde{q}_i, \tilde{r}_i) : \tilde{p} \rightarrow \tilde{p}_i$  las proyecciones. La inclusión  $\sigma = (s, u) : p \hookrightarrow \tilde{p}$  consiste de los siguientes encajes  $s : E \hookrightarrow \tilde{E}$  y  $u : B \hookrightarrow \tilde{B}$ .

Por la construcción del diagrama (14), para cada  $i$ ,  $\sigma_i$  es un  $G$ -SDR-morfismo, esto es, existe una  $G$ -retracción por deformación fuerte de  $\tilde{p}_i$  sobre  $\sigma_i(p_i)$  la cual por la Proposición 3.5, puede levantarse hacia alguna  $G$ -retracción por deformación fuerte  $(D_i, F_i)$ :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} \times I & \xrightarrow{D_i} & \tilde{E} \\ \tilde{p} \times id_I \downarrow & & \downarrow \tilde{p} \\ \tilde{B} \times I & \xrightarrow{F_i} & \tilde{B} \end{array} \quad (15)$$

de  $\tilde{p}$  sobre  $\tilde{\beta}_i^{-1}(\sigma_i(p_i))$  porque  $\beta_i$  es un morfismo  $G$ -fibrado *regular* (recordemos que todos los  $G$ -espacios se suponen metrizable). En particular,  $D_i$  es una  $G$ -retracción por deformación fuerte de  $\tilde{E}$  sobre  $X_i = \tilde{q}_i^{-1}(s_i(E_i))$ , esto es, tenemos que  $D_i(x, 0) = x$ ,  $D_i(x, 1) \in X_i$  para todo  $x \in \tilde{E}$  y  $D_i(x, t) = x$  para todo  $x \in X_i$  y  $t \in I$ . Note que

(a)  $\tilde{E} = X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_i \supset X_{i+1} \supset \dots$ ,

(b) para cada  $G$ -vecindad  $U$  de  $s(E)$  en  $\tilde{E}$  existe un  $j$  tal que  $X_j \subset U$ .

(a) Se sigue de la conmutatividad del diagrama (14). Para probar (b) primero, usando la compacidad de  $s(E)$ , encontramos un índice  $k$  y una  $G$ -vecindad  $V$  de  $\tilde{q}_k(s(E))$  en  $\tilde{E}_k$  tal que  $\tilde{q}_k^{-1}(V) \subset U$ . Entonces  $s_k^{-1}(V)$  es una  $G$ -vecindad de  $q_k(E)$  en  $E_k$  y, como  $\{q_i\} : E \rightarrow \{E_i, q_i^j\}$  es una  $G$ -resolución, tenemos que  $q_k^j(E_j) \subset s_k^{-1}(V)$  para algún  $j \geq k$ . De modo que

$$X_j = \tilde{q}_j^{-1}(s_j(E_j)) \subset \tilde{q}_k^{-1}(\tilde{q}_k^j s_j(E_j)) = \tilde{q}_k^{-1}(s_k q_k^j(E_j)) \subset \tilde{q}_k^{-1}(V) \subset U.$$

Sea  $\tilde{D} : \tilde{E} \times [0, \infty) \rightarrow \tilde{E}$  una función definida como sigue:

$$\tilde{D}(x, t) = D_i(D_{i+1}(x, t - i), 1), \quad \text{cuando } t \in [i, i + 1].$$

Es fácil checar que  $\widetilde{D}$  es una función continua bien definida. Claramente es  $G$ -equivariante. Más aún,  $\widetilde{D}(x, 0) = D_0(D_1(x, 0), 1) = D_0(x, 1) = D_0(x, 0) = x$  para todo  $x \in \widetilde{E}$  (recordemos que  $X_0 = \widetilde{E}$ ). Como cada  $D_i$  es una  $G$ -homotopía relativa a  $s(E) \subset X_i$ , tenemos que  $\widetilde{D}(x, t) = x$  para todo  $x \in s(E)$  y  $t \in [0, \infty)$ . Finalmente,  $\widetilde{D}(\widetilde{E} \times ([i, \infty))) = X_i$  porque  $D_j(\widetilde{E} \times 1) = X_j \subset X_i$  para  $j \geq i$ . Por lo tanto, en virtud de (b), concluimos que  $\widetilde{D}$  es una  $G$ -deformación infinita fuerte de  $\widetilde{E}$  sobre  $s(E)$ .

Similarmente, definimos  $\widetilde{F} : \widetilde{B} \times [0, \infty) \rightarrow \widetilde{B}$  por

$$\widetilde{F}(x, t) = F_i(F_{i+1}(x, t - i), 1), \quad \text{cuando } t \in [i, i + 1],$$

y obtenemos una  $G$ -deformación infinita fuerte de  $\widetilde{B}$  sobre  $u(B)$ . Es fácil ver que  $\widetilde{p} \circ \widetilde{D} = \widetilde{F} \circ (\widetilde{p} \times id_{[0, \infty)})$  debido a la conmutatividad del diagrama (15) para cada  $i$ . En consecuencia  $(\widetilde{D}, \widetilde{F})$  es la  $G$ -deformación infinita fuerte requerida de  $\widetilde{p}$  sobre  $\sigma(p)$ .  $\square$

## 5 Extensiones fibrantes del producto torcido $G \times_H S$

**Definición 5.1.** Una *sucesión pro-Lie* de subgrupos de un grupo dado  $G$  compacto y metrizable es una sucesión decreciente  $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de subgrupos normales cerrados de  $G$  tales que  $G/N_i$  es un grupo de Lie para cada  $i$  y  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} N_i = \{e\}$

(y por lo tanto

$$G = \varprojlim \{G/N_i, \pi_i^j\},$$

donde  $\pi_i^j : G/N_j \rightarrow G/N_i$ ,  $j \geq i$ , son las proyecciones naturales).

Se sabe que para todo grupo compacto metrizable  $G$  existe una sucesión pro-Lie (véase, por ejemplo, [13, §46]).

**Proposición 5.2.** *Sea  $p : E \rightarrow G/H$  una  $G$ -función, donde  $G$  es un grupo compacto metrizable y  $H$  es su subgrupo cerrado. Si  $E$  es un  $G$ -espacio compacto metrizable, entonces para cualquier sucesión pro-Lie  $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de subgrupos de  $G$  existe una  $G$ -ANR-resolución  $p \rightarrow \mathbf{p} = \{p_i, \alpha_i^j\}$  de  $p$  que consiste de las  $G$ -fibraciones  $p_i : E_i \rightarrow G/HN_i$ .*

*Demostración.* Sea  $S = p^{-1}(eH)$ . Entonces  $E$  puede identificarse con el producto torcido  $G \times_H S$  por medio del  $G$ -homeomorfismo canónico  $G \times_H S \rightarrow E$ , dado por  $[g, s] \mapsto gs$ .

Podemos considerar el  $H$ -espacio  $S$  como un subconjunto invariante cerrado de algún  $H$ - $AR$ -espacio  $M$  (véase, por ejemplo, [1]). Desde que  $S$  es compacto tiene una base de vecindades numerable  $\{W_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  en  $M$  que consiste de  $H$ -subconjuntos abiertos  $W_i$  tales que  $W_{i+1} \subset W_i$  para cada  $i$ . Para una sucesión pro-Lie dada  $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de subgrupos de  $G$  sea  $V_i = G \times_H W_i$  y definamos  $E_i$  como el espacio  $N_i$ -orbital de  $V_i$ , esto es,  $E_i = V_i/N_i$  para cada  $i$ . Note que debido a la elección de  $\{W_i\}$  tenemos una sucesión decreciente de  $G$ -espacios abiertos  $\{V_i\}$  en  $G \times_H M$  los cuales forman una base de vecindades de  $G \times_H S$  en  $G \times_H M$ . Definimos, para  $j \geq i$ , la  $G$ -función  $q_i^j : E_j \rightarrow E_i$  por medio de  $q_i^j(N_j(v_j)) = N_i(v_j)$ , así obtenemos la sucesión inversa  $\mathbf{E} = \{E_i, q_i^j\}$ . No es difícil ver que

$$E = G \times_H S = \lim_{\leftarrow} \mathbf{E}$$

con las proyecciones naturales  $q_i : E \rightarrow E_i$  dadas por  $q_i([g, s]) = N_i([g, s])$ . Más aún, el mapeo  $\{q_i\} : E \rightarrow \mathbf{E}$  es una  $G$ -resolución. Para ver esto, observe que para un  $i$  dado, la familia  $\{V_j/N_i\}_{j \geq i}$  es una base de vecindades abiertas de  $q_i(E) = (G \times_H S)/N_i$  en  $E_i = V_i/N_i$ . Pero  $V_j/N_i = q_i^j(E_j)$  para  $j \geq i$ . Esto prueba que la condición (2) de la Definición 4.1 se cumple para  $\{q_i\}$ .

Como existe un  $G$ -homeomorfismo natural (véase, por ejemplo, [2, Proposition 2])

$$(G \times_H W_i)/N_i \rightarrow G/N_i \times_{HN_i/N_i} W_i/(N_i \cap H), \quad (16)$$

el cual envía  $N_i([g, w])$  a  $[gN_i, (N_i \cap H)(w)]$ , podemos establecer que cada  $E_i$  es un  $G$ - $ANR$ . En efecto, cada  $W_i/(N_i \cap H)$  es un  $H/(N_i \cap H)$ - $ANR$  por [3, Theorem 1.1], debido a que  $W_i$  es un  $H$ - $ANR$  como  $H$ -subconjunto abierto del  $H$ - $AR$ -espacio  $M$ . Claramente,  $W_i/(N_i \cap H)$  también puede considerarse como un  $HN_i/N_i$ -espacio porque el grupo  $H/(N_i \cap H)$  es isomorfo al subgrupo  $HN_i/N_i$  de  $G/N_i$  (por medio de la correspondencia  $h(N_i \cap H) \mapsto hN_i$ ). De modo que  $W_i/(N_i \cap H)$  es un  $HN_i/N_i$ - $ANR$  y, como  $G/N_i$  es un grupo de Lie, el producto torcido en (16), el cual puede ser identificado con  $E_i = (G \times_H W_i)/N_i$ , es un  $G/N_i$ - $ANR$  por [2, Proposition 8] y por tanto es un  $G$ - $ANR$ .

Ahora definimos  $p_i : E_i \rightarrow G/(HN_i)$  por medio de  $p_i(N_i([g, w_i])) = gHN_i$ . En otras palabras,  $p_i$  es la función de los espacios  $N_i$ -orbitales inducida por la

función natural  $G \times_H W_i \rightarrow G/H$ ,  $[g, w_i] \rightarrow gH$ . Obviamente  $p_i$  es una  $G/N_i$ -función (y por tanto una  $G$ -función) tal que  $p_i \circ q_i = \bar{\pi}_i \circ p$  y  $p_i \circ q_i^j = \bar{\pi}_i^j \circ p_j$  para  $j \geq i$ , donde  $\bar{\pi}_i : G/H \rightarrow G/(HN_i)$  y  $\bar{\pi}_i^j : G/(HN_j) \rightarrow G/(HN_i)$  son proyecciones. En consecuencia tenemos los morfismos  $\alpha_i = (q_i, \bar{\pi}_i) : p \rightarrow p_i$  y  $\alpha_i^j = (q_i^j, \bar{\pi}_i^j) : p_j \rightarrow p_i$ . Es fácil ver que

$$(G/H, \{\bar{\pi}_i\}) = \varprojlim \{G/(HN_i), \bar{\pi}_i^j\}$$

y por lo tanto  $\{\bar{\pi}_i\} : G/H \rightarrow \{G/(HN_i), \bar{\pi}_i^j\}$  es una  $G$ -resolución (porque las proyecciones  $\bar{\pi}_i$  son sobreyectivas). Como  $G/N_i$  es un grupo de Lie para cada  $i$ , todos los espacios cociente  $G/(HN_i)$  son  $G$ -ANR's debido a, por ejemplo, [3, Proposition 2.2]. Por lo tanto, concluimos que  $\{\alpha_i\} : p \rightarrow \{p_i, \alpha_i^j\}$  es una  $G$ -ANR-resolución.

Finalmente, cada función  $p_i$  puede considerarse como una  $G/N_i$ -función

$$E_i \rightarrow (G/N_i)/(HN_i/N_i),$$

y por lo tanto es una  $G/N_i$ -fibración, ya que  $G/N_i$  es un grupo compacto de Lie (véase, por ejemplo, [7, Proposition 3.1]). Así,  $p_i$  es también una  $G$ -fibración por [9, Proposition 2.1].  $\square$

**Teorema 5.3.** *Sea  $H$  un subgrupo cerrado de un grupo compacto metrizable  $G$ . Sea  $p : E \rightarrow G/H$  una  $G$ -función, donde  $E$  es un  $G$ -espacio metrizable. Entonces  $E$  admite una extensión  $G$ -fibrante  $i : E \hookrightarrow \widehat{E}$  junto con el diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & \widehat{E} \\ & \searrow p & \swarrow \widehat{p} \\ & & G/H \end{array} \tag{17}$$

donde  $\widehat{p}$  es una  $G$ -fibración fuerte para la cual existe una  $G$ -deformación infinita fuerte  $\widehat{D} : \widehat{E} \times [0, \infty) \rightarrow \widehat{E}$  de  $\widehat{E}$  en  $i(E)$  sobre  $G/H$ , esto es, que satisface la igualdad  $\widehat{p} \circ \widehat{D}(y, t) = \widehat{p}(y)$  para todo  $(y, t) \in \widehat{E} \times [0, \infty)$ .

Si  $S = p^{-1}(eH)$  y  $\widehat{S} = \widehat{p}^{-1}(eH)$ , entonces la restricción  $\widehat{i} : S \hookrightarrow \widehat{S}$  del encaje  $i$  es una extensión  $H$ -fibrante de  $S$ .

*Demostración.* Por la Proposición 5.2 podemos encontrar una  $G$ -ANR-resolución  $\mathbf{p} = \{p_i, \alpha_i^j\}$  de  $p$  tal que cada  $p_i$  es una  $G$ -fibración de  $G$ -ANR's. Ahora aplicando el Teorema 4.3 tenemos una  $G$ -extensión  $\widehat{p}$  de  $p$  representada por el diagrama conmutativo de  $G$ -funciones

$$\begin{array}{ccc}
 E \hookrightarrow \widetilde{E} & & \\
 \downarrow p & & \downarrow \tilde{p} \\
 G/H \hookrightarrow \widetilde{B} & & 
 \end{array} \quad (18)$$

donde  $\tilde{p}$  es una  $G$ -fibración fuerte. Más aún, existe una  $G$ -deformación infinita fuerte  $(\widetilde{D}, D) : \tilde{p} \times id_{[0, \infty)} \rightarrow \tilde{p}$  de  $\tilde{p}$  en  $p$ . Haciendo  $\widehat{E} = \tilde{p}^{-1}(G/H)$  y  $\widehat{p} = \tilde{p}|_{\widehat{E}}$ , obtenemos el diagrama (17) como una restricción de (18). Como  $D(b, t) = b$  para todo  $b \in G/H$  y  $t \in [0, \infty)$ , tenemos  $\tilde{p}\widehat{D}(y, t) = D(\tilde{p}(y)) = \tilde{p}(y)$  para todo  $y \in \widehat{E}$  y  $t \in [0, \infty)$ . Por lo tanto,  $\widehat{D}(\widehat{E} \times [0, \infty)) \subset \widehat{E}$ , y podemos definir la  $G$ -deformación infinita fuerte deseada  $\widehat{D}$  como una restricción de  $\widetilde{D}$ .

Para probar la última afirmación del teorema, primero note que  $\widehat{S}$  es  $H$ -fibrante debido a que la función constante  $\widehat{S} \rightarrow \{eH\}$ , como una restricción de  $\widehat{p}$  es una  $H$ -fibración fuerte, ( $\widehat{p}$  como  $G$ -fibración fuerte, es también una  $H$ -fibración fuerte por [1, Proposition 4.1(d)]). Más aún, tenemos  $\widehat{D}(\widehat{S} \times [0, \infty)) \subset \widehat{S}$  y por lo tanto la restricción de  $\widehat{D}$  a  $\widehat{S} \times [0, \infty)$  nos da una  $H$ -deformación infinita fuerte de  $\widehat{S}$  sobre  $i(p^{-1}(eH)) = i(S)$ . De modo que  $\widehat{i} : S \hookrightarrow \widehat{S}$  es un  $H$ -SSDR-mapeo y por tanto una extensión  $H$ -fibrante.  $\square$

**Corolario 5.4.** *Sea  $H$  un subgrupo cerrado de un grupo  $G$  y sea  $E$  un  $G$ -espacio compacto metrizable. Entonces una  $G$ -función  $p : E \rightarrow G/H$  es una  $G$ -fibración fuerte si y solo si  $p^{-1}(eH)$  es un espacio  $H$ -fibrante.*

*Demostración.* La parte “solo si” es obvia (solo hay que repetir el argumento de la prueba del Teorema 5.3 lo que muestra que  $\widehat{S}$  es  $H$ -fibrante).

Ahora supongamos que  $S = p^{-1}(eH)$  es un espacio  $H$ -fibrante. Por el Teorema 5.3 (y en sus términos), tenemos la extensión  $H$ -fibrante  $\widehat{i} : S \hookrightarrow \widehat{S}$ . Para la función  $id_S : S \rightarrow S$ , como  $S$  es  $H$ -fibrante y  $\widehat{i}$  es un  $H$ -SSDR-mapeo, existe una  $H$ -función  $\widehat{r} : \widehat{S} \rightarrow S$  tal que  $\widehat{r} \circ \widehat{i} = id_S$ . Identificando, como es usual,  $E$  y  $\widehat{E}$  con los productos torcidos  $G \times_H S$  y  $G \times_H \widehat{S}$ , respectivamente, tenemos  $i = G \times_H \widehat{i}$  (de verdad,  $i([g, s]) = i(gs) = g\widehat{i}(s) = [g, \widehat{i}(s)]$ ). Entonces para la función  $r : \widehat{E} \rightarrow E$ , dada por  $r = G \times_H \widehat{r}$ , tenemos  $r \circ i = id_E$  y, más aún,  $p \circ r = \widehat{p}$  (porque  $p \circ r(g\widehat{s}) = p(g\widehat{r}(\widehat{s})) = gH = \widehat{p}(g\widehat{s})$ ), es decir,  $r$  es una  $G$ -retracción de  $\widehat{E}$  en  $E$  sobre  $G/H$ . Esto implica fácilmente que  $p$  es una  $G$ -fibración fuerte al igual que  $\widehat{p}$ .  $\square$

**Teorema 5.5.** *Sea  $H$  un subgrupo cerrado de un grupo compacto metrizable  $G$ . Si  $j : S \hookrightarrow \tilde{S}$  es una extensión  $H$ -fibrante de un  $H$ -espacio compacto metrizable  $S$ , entonces  $G \times_H j : G \times_H S \hookrightarrow G \times_H \tilde{S}$  es una extensión  $G$ -fibrante de  $G \times_H S$ .*

*Demostración.* Primero tomaremos una extensión  $H$ -fibrante de  $S$  para la cual la afirmación del teorema se cumple a priori. Sea  $E = G \times_H S$ . Claramente, podemos asumir que  $S$  es un  $H$ -subconjunto de  $E$  (por la identificación  $s \equiv [e, s] \in E$ ), así que  $E = GS$ . Entonces por la proyección natural  $p : E \rightarrow G/H$ ,  $gs \mapsto gH$ , tenemos  $S = p^{-1}(eH)$ . Aplicando el Teorema 5.3 a  $p$  obtenemos la extensión  $H$ -fibrante deseada  $\hat{i} : S \hookrightarrow \hat{S}$ , debido a que la  $G$ -función  $G \times_H \hat{i}$  puede identificarse con la extensión  $G$ -fibrante  $i : E \hookrightarrow \hat{E}$  dada por este teorema.

Ahora sea  $j : S \hookrightarrow \tilde{S}$  cualquier extensión  $H$ -fibrante. Por [1, Proposition 4.1(c)],  $G \times_H j$  es un  $G$ -SSDR-mapeo. Por lo tanto, necesitamos solo mostrar que  $G \times_H \tilde{S}$  es un espacio  $G$ -fibrante. Para esto usaremos la existencia de las  $H$ -funciones  $\varphi : \tilde{S} \rightarrow \hat{S}$  y  $\psi : \hat{S} \rightarrow \tilde{S}$  tales que  $\psi \circ \varphi \simeq id_{\tilde{S}}$  (ver Preliminaries).

Sea  $s : A \hookrightarrow X$  un  $G$ -SSDR-mapeo y sea  $f : A \rightarrow G \times_H \tilde{S}$  una  $G$ -función. Por supuesto, debemos asumir  $A \subset X$ . Para completar la prueba debemos encontrar una  $G$ -función  $\tilde{f} : X \rightarrow G \times_H \tilde{S}$  para la cual  $\tilde{f} \circ s = f$ . Como  $\hat{E} = G \times_H \hat{S}$  es  $G$ -fibrante, hay una  $G$ -función  $F : X \rightarrow G \times_H \hat{S}$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & G \times_H \tilde{S} & \xrightarrow{G \times_H \varphi} & G \times_H \hat{S} \\
 \downarrow s & & & \nearrow F & \\
 X & & & & 
 \end{array}$$

conmuta. Haciendo  $A' = f^{-1}(\tilde{S})$  y  $X' = F^{-1}(\hat{S})$  obtenemos el diagrama conmutativo de  $H$ -funciones

$$\begin{array}{ccccc}
 A' & \xrightarrow{f'} & \tilde{S} & \xrightarrow{\varphi} & \hat{S} \\
 \downarrow s' & & & \nearrow F' & \\
 X' & & & & 
 \end{array}$$

donde  $f'$  y  $s'$  son las restricciones de  $f$  y  $s$  en  $A'$  y  $F'$  es la restricción de  $F$



en  $X'$ . Para la  $H$ -función  $\psi \circ F' : X' \rightarrow \widehat{S}$  tenemos

$$(\psi \circ F')|_{A'} = \psi \circ F' \circ s' = \psi \circ \varphi \circ f' \simeq f'.$$

Como  $\widetilde{S}$  es un espacio  $H$ -fibrante, el  $H$ -par  $(X', A')$  tiene la propiedad de extensión de homotopías con respecto a  $\widetilde{S}$  y por lo tanto  $f'$  puede extenderse a alguna  $H$ -función  $\widetilde{f}' : X' \rightarrow \widetilde{S}$ , así que  $\widetilde{f}' \circ s' = f'$ . Entonces la función  $\widetilde{f} = G \times_H \widetilde{f}'$  es la extensión deseada de  $f$ .  $\square$

**Corolario 5.6.** *Sea  $H$  un subgrupo cerrado de un grupo compacto metrizable  $G$ . Sea  $S$  un  $H$ -espacio compacto metrizable. Si  $S$  es un espacio  $H$ -fibrante, entonces  $G \times_H S$  es un espacio  $G$ -fibrante.*

*Demostración.* Como  $S$  es un espacio  $H$ -fibrante space, la función identidad  $id_S$  es trivialmente una extensión  $H$ -fibrante de  $S$ . Por el Teorema 5.5,  $G \times id_S = id_{G \times_H S} : G \times_H S \rightarrow G \times_H S$  es una extensión  $G$ -fibrante. En particular,  $G \times_H S$  es un espacio  $G$ -fibrante.  $\square$

## Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por haber dedicado su valioso tiempo para la revisión del trabajo, sus comentarios y sugerencias permitieron mejorar sustancialmente el texto del capítulo.

## Bibliografía

- [1] S. A. Antonyan, *Equivariant embeddings into  $G$ -AR's*, Glasnik Mat. 22(42) (1987) 503-533.
- [2] S. A. Antonyan, *Extensorial properties of orbit spaces of proper group actions*, Topology Appl. 98 (1999) 35-46.
- [3] S. A. Antonyan, *Compact group actions on equivariant absolute neighborhood retracts and their orbit spaces*, Topology Appl. 158 (2011) 141-151.
- [4] S. A. Antonyan, S.Mardešić, *Equivariant shape*, Fund.Math. 127 (1987) 213-224.

- [5] G. E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, New York, 1972.
- [6] A. Bykov, *The homogeneous space  $G/H$  as an equivariant fibrant space*, Topology Appl. 157 (2010) 2604-2612.
- [7] A. Bykov, A. L. Kantún Montiel, *Strong  $G$ -fibrations and orbit projections*, Topology Appl. 163 (2014) 46-65.
- [8] A. Bykov, M. Taxis, *Equivariant strong shape*, Topology Appl. 154 (2007) 2026-2039.
- [9] A. Bykov, A. Torres Juan, *Fibrant extensions of free  $G$ -spaces*, Topology Appl. 159 (2012) 1179-1186.
- [10] F. Cathey, *Strong shape theory*, in: Shape Theory and Geometric Topology, Lecture Notes Math., Springer, Berlin, 1981, pp. 216-239.
- [11] T. tom Dieck, *Transformation groups*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1987.
- [12] R. S. Palais, *The classification of  $G$ -spaces*, Mem. Amer.Math. Soc. 36, 1960.
- [13] L. S. Pontrjagin, *Topological groups*, Princeton Univ. Press, 1939.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

abykov@fcfm.buap.mx

pdsoto@fcfm.buap.mx

jorgealberto.sanchez@uptlax.edu.mx



---

# Modelación matemática

---



## Capítulo 3

# Simulación numérica del flujo bifásico para el problema de desprendimiento de finos por inyección de agua de baja salinidad en un yacimiento petrolero

Francisco Javier Martínez Deferia<sup>1</sup>, María Luisa Sandoval Solís<sup>1</sup> y Manuel Coronado Gallardo<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Departamento de Matemáticas, UAM Iztapalapa  
<sup>2</sup>Instituto Mexicano del Petróleo

### Resumen

La inyección de agua de baja salinidad busca modificar la interacción de la roca con los fluidos del yacimiento, con el fin de conseguir una cantidad adicional del aceite atrapado en los poros de la roca. En un yacimiento de arenisca el desprendimiento y movilización de finos es uno de los mecanismos sugeridos, ya que los finos desprendidos pueden bloquear gargantas de poro, reduciendo la permeabilidad localmente y forzando al fluido inyectado a invadir y barrer zonas previamente no activas. Una parte importante del modelo matemático asociado a este fenómeno es resolver numéricamente, de manera eficiente, las ecuaciones asociadas a flujo bifásico. El propósito de este trabajo, es modelar numéricamente el problema de flujo en dos fases en un medio poroso heterogéneo, con la presencia indeseada de una falla conductiva de alta permeabilidad, incluyendo el comportamiento cercano al pozo y considerando una discontinuidad en la saturación inicial del pozo inyector. Se muestra que la aproximación numérica de la ecuación de saturación afecta directamente a dicha solución, por tanto, tener una aproximación precisa es un factor importante. Se implementa la técnica de Elemento Finito (FE) para resolver presión-velocidad y la saturación se aproxima con el método de Galerkin Discontinuo (DG). Para el esquema DG se presenta un estudio de limitadores de pendiente usando elementos lineales y bilineales con la finalidad de describir adecuadamente la discontinuidad inicial de la saturación.

# 1 Introducción

Por su impacto en la economía mundial, la extracción de hidrocarburos de yacimientos petroleros es actualmente un tema altamente relevante para la sociedad. El uso de la inyección de agua de baja salinidad como mecanismo de recuperación adicional de aceite es reciente y está en etapa de pruebas en yacimientos de rocas areniscas y en etapa de laboratorio en rocas de carbonatos, véase [1]. La mayoría de los resultados experimentales muestran que una alta recuperación de aceite se obtiene cuando la salinidad del agua de inyección es mucho más baja que el agua de la formación, véase [15]. En [8] se plantea un modelo monofásico del desprendimiento y movilización de finos de la superficie de la roca, debido a una reducción de salinidad y el posterior bloqueo de las gargantas de poros, lo que da lugar al deterioro de la permeabilidad local, y obliga al fluido de inyección a redirigirse a zonas previamente no barridas y con ello arrastrar aceite adicional a los pozos de producción. En este trabajo, nos basamos en el modelo propuesto en [8], ampliándolo a un flujo en dos fases (agua-aceite) y su aplicación en la recuperación secundaria de aceite. Lo anterior considerando una sección de yacimiento con un pozo inyector y cuatro productores vecinos con la presencia de una falla conductiva. En general, la simulación numérica de un modelo de finos en flujo bifásico es compleja. En este trabajo sólo nos enfocamos en aproximar numéricamente la parte asociada al flujo bifásico. Esto implica resolver numéricamente ecuaciones de balance de masa asociadas a presión y saturación de las fases (agua y aceite), las cuales son no-lineales debido a la permeabilidad relativa y presión capilar presentes. En la sección 2 se presenta el modelo matemático asociado al flujo en dos fases.

Uno de los métodos más populares en la industria petrolera para simular flujo bifásico (particularmente para fluidos incompresibles o ligeramente incompresibles) es el método de presión implícita y saturación explícita (IMPES por sus siglas en inglés). Este algoritmo secuencial, propuesto en [14] y [16], tiene la ventaja de reducir el sistema de ecuaciones lineales a resolver, puesto que se tiene un esquema implícito sólo para la presión. Sin embargo, para que sea estable se requiere tamaños de paso muy pequeños en la saturación que lo hace computacionalmente costoso, principalmente para problemas a tiempos muy grandes. Por otro lado, en [5] se propone un esquema IMPES mejorado, que adapta el paso de tiempo en la saturación y toma pasos de tiempo más

grandes para la presión, debido a que la presión cambia más lentamente que la saturación. A lo anterior se suma la aparición de inestabilidades numéricas causadas por efectos no-lineales de la interacción entre fluidos y que se manifiesta a través de la presión capilar y las permeabilidades relativas.

El método de Galerkin Discontinuo (DG por sus siglas en inglés) es un método atractivo debido a que es flexible en dominios no estructurados usando funciones de aproximación de orden alto y permite soluciones discontinuas a través de las fronteras de los elementos, conservando masa localmente, que lo hace ideal para problemas que incluyan discontinuidades. En [7] se introduce el método de Runge-Kutta DG (RKDG) que es una extensión del método de DG con esquemas de orden alto en el tiempo, ideal para problemas hiperbólicos.

La aproximación numérica del modelo de flujo toma ideas del trabajo realizado en [11], donde implementamos un esquema IMPES mejorado basado en [5]. Las ecuaciones asociadas a la presión y velocidad se aproximan a través de la técnica de elemento finito [3] y se implementa el método RKDG para aproximar la ecuación de saturación. Además, se utilizan limitadores de pendiente (véase [2], [10] y [13]) para evitar que el método DG genere oscilaciones espurias en la saturación. Se implementan elementos lineales y bilineales.

En la sección 3 se presenta el método numérico para realizar las simulaciones. La validación de los resultados se realiza a través de la conservación de masa, calculando el gasto volumétrico y volumen acumulado de salida sobre los pozos de producción, ver sección 4. Finalmente, los resultados numéricos y las conclusiones se presentan en las secciones 5 y 6, respectivamente.

## 2 Modelo Matemático

El modelo matemático está asociado al flujo en dos fases, incompresible, en un medio poroso heterogéneo, saturado de agua y aceite, véase [6] y [8]. La zona de estudio considera un esquema de cinco pozos de una sección de un yacimiento, un pozo inyector y cuatro productores equidistantes con la presencia de una falla conductiva de alta permeabilidad que une el pozo inyector con dos productores, ver Figura 1a.



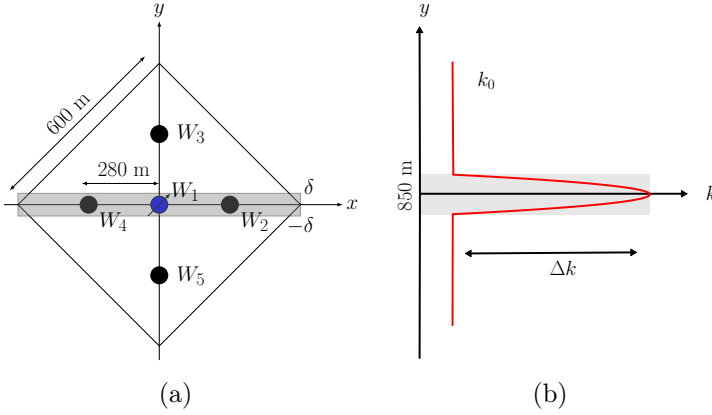


Figura 1: (a) Modelo de 5 pozos, un inyector y cuatro productores con una falla conductiva de alta permeabilidad, (b) perfil de permeabilidad en dirección del eje  $y$  sobre la falla conductiva.

## Ecuaciones Gobernantes

La ecuación de conservación de masa es

$$\frac{\partial(\Phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{U}_\alpha) = 0, \quad \alpha = \{w, o\}, \quad (1)$$

donde  $\Phi$  denota la porosidad,  $\rho_\alpha$  la densidad,  $S_\alpha$  la saturación y  $\alpha$  la fase agua o aceite. Aquí,  $\mathbf{U}_\alpha$  es la velocidad de Darcy dada por

$$\mathbf{U}_\alpha = -\frac{k k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \nabla p_\alpha, \quad \alpha = \{w, o\}, \quad (2)$$

con,  $k$  la permeabilidad absoluta,  $\mu_\alpha$  la viscosidad,  $p_\alpha$  la presión y  $k_{r\alpha} = k_{r\alpha}(S_w)$  la permeabilidad relativa que depende de la saturación de agua  $S_w$ . Se considera el modelo propuesto en [4],

$$k_{rw} = k_{rw}^0 S_{nw}^{n_w}, \quad k_{ro} = k_{ro}^0 (1 - S_{nw})^{n_o}, \quad (3)$$

donde  $n_w$  y  $n_o$  son números positivos comúnmente con valores 1 ó 2. Se observa que  $k_{rw}^0 = k_{rw}(S_{nw} = 1)$  es la permeabilidad relativa en el punto final de la fase de agua y  $k_{ro}^0 = k_{ro}(S_{nw} = 0)$  es la permeabilidad relativa en el punto

final de la fase de aceite.  $S_{nw} = S_{nw}(S_w)$  es la saturación de agua normalizada definida por

$$S_{nw} = \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{or} - S_{wc}}, \quad 0 \leq S_{nw} \leq 1, \quad (4)$$

en el cual,  $S_{wc}$  es la saturación de agua crítica y  $S_{or}$  la saturación residual de aceite. La permeabilidad absoluta del sistema se escribe como, véase [9],

$$k(x, y) = \begin{cases} k_0, & \text{si } |y| > \delta, \\ k_0 + \frac{\Delta k}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi y}{\delta}\right)\right), & \text{si } |y| \leq \delta, \end{cases} \quad (5)$$

donde  $k_0$  es la permeabilidad fuera de la falla conductiva y es constante,  $\Delta k$  es la permeabilidad máxima dentro la falla conductiva y  $2\delta$  denota el grosor de la falla, cuando  $\Delta k$  es cero se tiene el caso homogéneo, ver Figura 1b.

Se define la presión capilar como

$$p_c := p_c(S_w) = p_o - p_w. \quad (6)$$

El hecho de que el medio poroso esté completamente saturado de agua y aceite da la relación

$$S_w + S_o = 1. \quad (7)$$

La velocidad total se calcula a través de (véase [6]),

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_w + \mathbf{U}_o. \quad (8)$$

Al sustituir la velocidad de Darcy de cada fase en la ecuación (8) junto con la relación (6), se deduce la *ecuación de velocidad*

$$\mathbf{U} = -k\lambda\nabla p_o + k\lambda_w\nabla p_c, \quad (9)$$

donde

$$\lambda := \lambda(S_w) = \lambda_w + \lambda_o, \quad (\text{Movilidad total}) \text{ y} \quad (10)$$

$$\lambda_\alpha := \lambda_\alpha(S_w) = \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha}, \quad \alpha = \{w, o\}, \quad (\text{Movilidad fase}). \quad (11)$$

Más aún, las velocidades  $\mathbf{U}_w$  y  $\mathbf{U}_o$  están relacionadas con la velocidad total  $\mathbf{U}$  a través de

$$\mathbf{U}_w = f_w\mathbf{U} + kf_w\lambda_o\nabla p_c, \quad (12)$$

$$\mathbf{U}_o = f_o\mathbf{U} - kf_o\lambda_w\nabla p_c, \quad (13)$$

con

$$f_\alpha := f_\alpha(S_w) = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda}, \quad \alpha = \{w, o\}, \quad (\text{Flujo fraccional}). \quad (14)$$

Suponemos que la densidad  $\rho_\alpha$  y porosidad  $\Phi$  son constantes, por tanto, al sumar las ecuaciones en (1) asociadas a la saturación de agua o aceite, se obtiene la ecuación

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (15)$$

Al sustituir la relación (9) en (15) se llega a la *ecuación de presión*

$$\nabla(k\lambda\nabla p_o) - \nabla(k\lambda_w\nabla p_c) = 0. \quad (16)$$

La *ecuación de saturación*

$$\Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \left( f_w \mathbf{U} + k f_w \lambda_o \frac{dp_c}{dS_w} \nabla S_w \right) = 0, \quad (17)$$

se obtiene de sustituir la identidad (12) en la ecuación de conservación de masa para la saturación de agua (1). Se tiene entonces un sistema de dos ecuaciones (16) y (17) y dos incógnitas  $p_o$  y  $S_w$ .

## Modelo de flujo bifásico

En este trabajo despreciamos el efecto de la presión capilar y hacemos  $S = S_w$  y  $p_o = p$  nuestras variables primarias, por tanto, las ecuaciones de flujo se reescriben como

$$\nabla(k\lambda\nabla p) = 0, \quad (\text{ecuación de presión}), \quad (18)$$

$$\mathbf{U} = -k\lambda\nabla p, \quad (\text{ecuación de velocidad}), \quad (19)$$

$$\Phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla(f_w \mathbf{U}) = 0, \quad (\text{ecuación de saturación}), \quad (20)$$

sujetas a las condiciones de frontera e inicial definidas por

$$\begin{aligned} \nabla p \cdot \boldsymbol{\nu} &= \frac{Q_{iny}}{2\pi r_w h k \lambda_w}, & S &= 1 - S_{or}, & \text{sobre } \Gamma_1, \\ p &= p_{out}, & \nabla S \cdot \boldsymbol{\nu} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_i, \quad i = 2, \dots, 5, \\ \nabla p \cdot \boldsymbol{\nu} &= 0, & \nabla S \cdot \boldsymbol{\nu} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_i, \quad i = 6, \dots, 9, \\ S(x, y, 0) &= S_{w0}, & & & (21) \end{aligned}$$

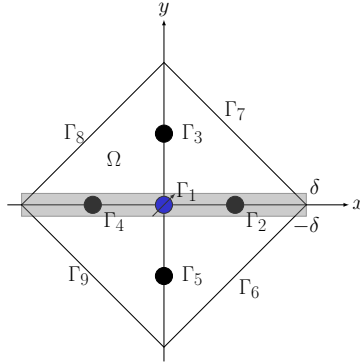


Figura 2: Zona de estudio en 2D

donde  $\nu$  es el vector normal unitario en la frontera del pozo inyector,  $Q_{iny}$  es el gasto volumétrico de inyección en el pozo inyector  $\left[\frac{m^3}{d}\right]$ ,  $p_{out}$  denota presión constante en los pozos productores  $[psi]$ ,  $r_w$  es el radio del pozo  $[cm]$ ,  $h$  es la zona de disparo y  $S_{w0}$  es la condición inicial discontinua para la saturación de agua. En la Figura 2 se muestra la zona de estudio en 2D.

Por otra parte, se introducen las nuevas variables adimensionales

$$t \rightarrow \frac{t^*}{t_R}, \quad x \rightarrow \frac{x^*}{L_R}, \quad y \rightarrow \frac{y^*}{L_R}, \quad p \rightarrow \frac{p^*}{p_R},$$

donde

$$t_R = \frac{L_R}{U_R}, \quad U_R = \frac{k_R p_R}{\mu_R L_R},$$

y se definen las siguientes cantidades adimensionales:

$$r_w \rightarrow \frac{r_w^*}{L_R}, \quad h \rightarrow \frac{h^*}{L_R}, \quad Q_{iny} \rightarrow \frac{Q_{iny}^*}{L_R^2 U_R}, \quad k \rightarrow \frac{k^*}{k_R}, \quad U_w \rightarrow \frac{U_w^*}{U_R}, \quad \mu_\alpha \rightarrow \frac{\mu_\alpha^*}{\mu_R}.$$

Aquí las variables con (\*) son aquellas que tienen dimensiones y el subíndice  $R$  denota las variables de referencia. El modelo adimensional asociado al modelo de flujo bifásico coincide con el dado en las ecuaciones (18)-(20).

### 3 Método numérico

En esta sección se presenta un esquema IMPES mejorado basado en [6], donde la ecuación de presión y velocidad son aproximadas con la técnica de Elemen-

to Finito y la saturación a través del método de Galerkin Discontinuo con limitadores de pendiente.

## Discretización espacial

Sea  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  un dominio acotado con frontera Lipschitz continua subdividida en elementos finitos, donde  $\Omega_e$  es un elemento triangular o cuadrangular en 2D. Sea  $\bar{\Omega}_h = \bigcup_{e=1}^{ne} \Omega_e$  una partición de  $\bar{\Omega}$  donde  $ne$  es el número de elementos en la malla,  $h = \max_{\Omega_e \in \Omega_h} \text{diam}(\Omega_e)$  y  $\overset{\circ}{\Omega}_e \cap \overset{\circ}{\Omega}_f = \emptyset$ ,  $\forall e, f = 1, \dots, ne$ , donde  $\overset{\circ}{\Omega}_e$  es el interior no vacío de  $\Omega_e$ . Definimos los siguientes espacios,

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\Omega_h) : v_h|_{\Omega_e} \in \mathbb{P}_m \forall \Omega_e \in \Omega_h \text{ y } v_h = g_i \text{ en } \Gamma_i, i = 2, \dots, 5\},$$

$$V_{0,h} = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\Omega_h) : v_h|_{\Omega_e} \in \mathbb{P}_m \forall \Omega_e \in \Omega_h \text{ y } v_h|_{\Gamma_i} = 0, i = 6, \dots, 9\},$$

donde,  $\mathcal{C}^0(\Omega_h)$  es el conjunto de funciones continuas en  $\Omega_h$  y  $\mathbb{P}_m$  denota el conjunto de polinomios de grado menor o igual que  $m$ . Para este trabajo se considera  $m = 1$ , es decir, tenemos aproximaciones sobre elementos lineales (triángulos) y bilineales (cuadrados). Definimos como  $nnt$  el número de nodos o grados de libertad totales y  $\phi_j$  a las funciones base de los espacios  $V_h$  y  $V_{0,h}$  tales que,

$$\phi_j(\mathbf{n}_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

donde  $\mathbf{n}_i = (x_i, y_i)$  son las coordenadas del nodo  $i$ -ésimo para  $i = 1, \dots, nnt$ .

## Aproximación de la presión

Expresamos la presión ( $p_h$ ), saturación ( $S_h$ ) y función de prueba ( $v_h$ ) discretas a través de las funciones base  $\phi_j$  como

$$p_h = \sum_{j=1}^{nnt} p_j \phi_j, \quad S_h = \sum_{m=1}^{nnt} S_m \phi_m, \quad v_h = \phi_i. \quad (22)$$

Luego, la forma discreta de la formulación variacional para la ecuación de presión (18) en el tiempo  $t^n$  es

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_h} k(x, y) \{a(S_h^n - S_{wc})^{n_w} + b(1 - S_{or} - S_h^n)^{n_o}\} \nabla p_h^n \cdot \nabla v_h \, d\Omega \\ &= c \int_{\Gamma_1} \frac{(a(S_h^n - S_{wc})^{n_w} + b(1 - S_{or} - S_h^n)^{n_o})}{a(S_h^n - S_{wc})^{n_w}} v_h \, d\Gamma, \quad \forall v_h \in V_{0,h} \end{aligned} \quad (23)$$

donde,  $a = \frac{k_{rw}^0}{\mu_w(1 - S_{wc} - S_{or})^{n_w}}$ ,  $b = \frac{k_{ro}^0}{\mu_o(1 - S_{wc} - S_{or})^{n_o}}$ ,  $c = \frac{Q_{iny}}{2\pi r_w h}$ .

### Aproximación de la velocidad total

La ecuación de velocidad (19) es aproximada componente por componente a través de las relaciones

$$\zeta^n U_{1,h}^n = -\frac{\partial p_h^n}{\partial x}, \quad \zeta^n U_{2,h}^n = -\frac{\partial p_h^n}{\partial y}, \quad (24)$$

donde,  $\zeta = \frac{1}{k\lambda}$  con  $k \neq 0$ ,  $\lambda \neq 0$ .

Se construye la formulación variacional de las relaciones (24) fijando el nodo  $\mathbf{n}_i$  y para el término de la presión se aplica el Teorema de Green junto con las expresiones (22), en consecuencia se obtiene

$$U_{1,i}^n = \frac{\int_{sop(\phi_i)} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} p_h^n \, d\Omega - \int_{\Gamma_{sop(\phi_i)}} \phi_i (p_h^n \nu_1) \, d\Gamma}{\int_{sop(\phi_i)} \zeta^n \phi_i \, d\Omega}, \quad \forall i = 1, \dots, nnt, \quad (25)$$

$$U_{2,i}^n = \frac{\int_{sop(\phi_i)} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} p_h^n \, d\Omega - \int_{\Gamma_{sop(\phi_i)}} \phi_i (p_h^n \nu_2) \, d\Gamma}{\int_{sop(\phi_i)} \zeta^n \phi_i \, d\Omega}, \quad \forall i = 1, \dots, nnt, \quad (26)$$

donde,  $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$  es la normal exterior unitaria y  $sop(\phi_i)$  denota el soporte de la función base  $\phi_i$  en el nodo  $\mathbf{n}_i$  que está formado por los elementos  $\Omega_e$  conectados con  $\mathbf{n}_i$  (ver Figura 3a).

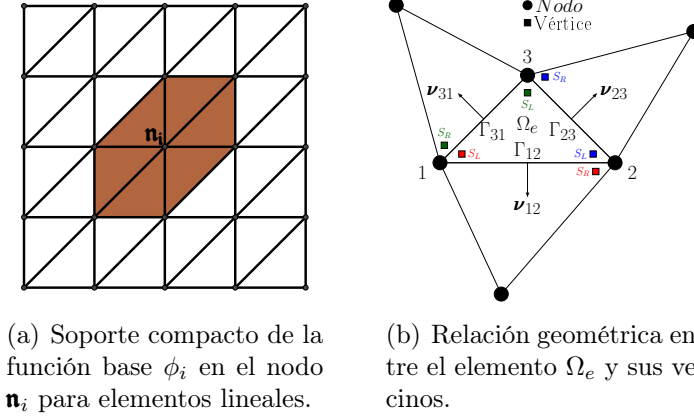


Figura 3: Soporte  $\phi_i$  y esquema para Galerkin Discontinuo

### Aproximación de la saturación

La ecuación de saturación (20) se resuelve implementando el método de Galerkin Discontinuo cuya forma variacional discreta es (véase [13]),

$$\Phi \int_{\Omega_e} \phi_i \frac{\partial S_h^n}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma_e} \phi_i \tilde{\mathbf{F}}^n \cdot \boldsymbol{\nu} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \mathbf{F}^n \cdot \nabla \phi_i d\Omega = 0, \quad (27)$$

donde  $\mathbf{F}^n = f_w(S_h^n) \mathbf{U}_h^n$  y  $\tilde{\mathbf{F}}^n$  es el flujo numérico tipo upwind definido como,

$$\tilde{\mathbf{F}}_{ij}^n = \frac{\tilde{\mathbf{F}}_i^n + \tilde{\mathbf{F}}_j^n}{2}, \quad i \neq j, \quad i = 1, 2, \quad (28)$$

y

$$\tilde{\mathbf{F}}_i^n = \begin{cases} f_w(S_L^n) \mathbf{U}_h^n(\mathbf{n}_i) & \text{si } \mathbf{U}_h^n(\mathbf{n}_i) \cdot \boldsymbol{\nu}_{ij} \geq 0, \\ f_w(S_R^n) \mathbf{U}_h^n(\mathbf{n}_i) & \text{si } \mathbf{U}_h^n(\mathbf{n}_i) \cdot \boldsymbol{\nu}_{ij} < 0, \end{cases}$$

donde  $\boldsymbol{\nu}_{ij}$  es el vector normal a la frontera  $\Gamma_{ij}$  y  $S_L^n, S_R^n$  son los valores de la saturación izquierdo y derecho en el tiempo  $t^n$  asociados a la misma frontera  $\Gamma_{ij}$ , ver Figura 3b. Observemos que  $\Gamma_e = \Gamma_{12} \cup \Gamma_{23} \cup \Gamma_{31}$ .

### Limitadores de pendiente

Los limitadores de pendiente son requeridos para reducir oscilaciones espurias alrededor de puntos donde hay cambios bruscos de pendiente y poder mante-

ner una buena precisión en las regiones suaves. En este trabajo consideramos tres tipos de limitadores de pendiente: los limitadores  $\Lambda\Pi_1$  y  $\Lambda\Pi_2$  para elementos lineales y  $\Lambda\Pi_3$  para bilineales, véase [2], [13] y [10], respectivamente.

### Limitador $\Lambda\Pi_1$

1. Calcular el valor promedio sobre cada elemento  $\Omega_e$

$$\bar{S}_e = \frac{1}{nne} \sum_{k=1}^{nne} S_{e,k}, \quad e = 0, 1, 2, 3, \quad (29)$$

donde  $S_{e,k}$  son los valores de la saturación en los nodos  $\mathbf{n}_k$  y  $nne$  es el número de nodos por elemento.

2. Obtener el máximo y mínimo de los valores promedio

$$S_0^{\min} = \min(\bar{S}_e), \quad S_0^{\max} = \max(\bar{S}_e), \quad e = 0, 1, 2, 3. \quad (30)$$

3. Evaluar el parámetro  $r_k$  a través de

$$r_k = \begin{cases} \frac{S_0^{\max} - \bar{S}_0}{S_k - \bar{S}_0}, & \text{si } S_k - \bar{S}_0 > 0, \\ \frac{S_0^{\min} - \bar{S}_0}{S_k - \bar{S}_0}, & \text{si } S_k - \bar{S}_0 < 0, \\ 1, & \text{si } S_k - \bar{S}_0 = 0, \end{cases} \quad (31)$$

donde,  $k = 1, 2, 3$  representan los lados del elemento  $\Omega_0$  y  $S_k$  es el valor promedio en la frontera  $k$  determinado por los valores nodales del elemento  $\Omega_0$ .

4. Estimar el valor de  $\varphi_k$  donde

$$\varphi_k = \max[\min(\beta r_k, 1), \min(r_k, \beta)]. \quad (32)$$

Aquí, el valor del parámetro  $\beta \in [0, 1]$ . En particular, si  $\beta = 1$  se tiene el limitador *minmod* y con  $\beta = 2$  obtenemos el limitador *Superbee*.

5. Elegir el limitador  $\varphi$  a través de

$$\varphi = \min(\varphi_k), \quad k = 1, 2, 3. \quad (33)$$



6. Los gradientes ilimitados se calculan para todos los elementos  $\Omega_e$  por medio de

$$\nabla S_e = \frac{1}{A_e} \left( \int_{\Gamma_e} S \nu_1 d\Gamma, \int_{\Gamma_e} S \nu_2 d\Gamma \right), \quad \boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2) \quad e = 0, 1, 2, 3, \quad (34)$$

donde  $A_e$  es el área del elemento formado por la frontera  $\Gamma_e = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ .

7. Por último, la variable limitada está definida por

$$S_0^l(x, y) = \bar{S}_0 + \varphi \nabla S_0^{mod} \cdot \mathbf{r}, \quad (35)$$

donde

$$\nabla S_0^{mod} = \frac{1}{2} (\nabla S_0 + w_1 \nabla S_1 + w_2 \nabla S_2 + w_3 \nabla S_3),$$

$$w_1 = \frac{\|\mathbf{r}_{02} \times \mathbf{r}_{23}\|}{\|\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{r}_{23}\|}, \quad w_2 = \frac{\|\mathbf{r}_{03} \times \mathbf{r}_{31}\|}{\|\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{r}_{23}\|}, \quad w_3 = \frac{\|\mathbf{r}_{01} \times \mathbf{r}_{12}\|}{\|\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{r}_{23}\|}$$

aquí el vector  $\mathbf{r}$  es un vector con origen en el centroide del elemento extendiéndose a un vértice del elemento. Por ejemplo, para el nodo  $\mathbf{n}_1$  se tiene  $\mathbf{r} = (x_{n_1} - \bar{x}, y_{n_1} - \bar{y})$ , donde  $\bar{x}, \bar{y}$  son las coordenadas del centroide del elemento  $\Omega_e$ . Análogamente,  $\mathbf{r}_{eg}$  es el vector con origen en el centroide del elemento  $\Omega_e$  al centroide del elemento  $\Omega_g$ . En la Figura 4 se muestra un esquema para este limitador.

**Limitador  $\Lambda\Pi_2$**  El proceso de limitación incluye cuatro pasos.

1. Se calcula el valor promedio para la saturación en el elemento principal  $\Omega_0$  a través de la relación (29).
2. Los gradientes ilimitados se calculan para todos los elementos  $\Omega_e$  usando la expresión (34).
3. El gradiente limitado se evalúa tomando un promedio ponderado de los gradientes ilimitados de los elementos vecinos, es decir,

$$\nabla S_0^l = w_1 \nabla S_1 + w_2 \nabla S_2 + w_3 \nabla S_3, \quad (36)$$

donde los factores de peso están dados por

$$w_1 = \frac{g_2 g_3 + \epsilon}{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + 3\epsilon},$$

$$w_2 = \frac{g_1 g_3 + \epsilon}{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + 3\epsilon},$$

$$w_3 = \frac{g_1 g_2 + \epsilon}{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + 3\epsilon},$$

con  $\epsilon$  un número pequeño para prevenir indeterminación, en nuestro caso  $\epsilon = 10^{-10}$ . Los valores  $g_i$  se calculan como la norma  $L_2(\Omega_e)$  de los gradientes ilimitados,

$$g_1 = \|\nabla S_1\|^2, \quad g_2 = \|\nabla S_2\|^2, \quad g_3 = \|\nabla S_3\|^2.$$

4. Finalmente, las variables limitadas en los vértices de cada elemento se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\sum_{j=1}^{nne} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} S_{0,j}^l = \frac{\partial S_0^l}{\partial x}$$

$$\sum_{j=1}^{nne} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} S_{0,j}^l = \frac{\partial S_0^l}{\partial y} \tag{37}$$

$$\sum_{j=1}^{nne} S_{0,j}^l = 3\bar{S}_0$$

El requisito para la solución reconstruida  $S_0^l$  es satisfacer cada componente del gradiente limitado y preservar el promedio en el centroide del elemento. En la Figura 5 se muestra un esquema para este limitador.

**Limitador  $\Lambda\Pi_3$**  En la Figura 6 se muestra un esquema gráfico de los valores que intervienen en el cálculo del limitador de pendiente  $\Lambda\Pi_3$ . Sea  $\tilde{S} = (\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3, \tilde{S}_4)$  y  $S = (S_1, S_2, S_3, S_4)$  los valores en los vértices de  $\Omega_0$  antes y después de limitar. Ahora, el valor promedio sobre cada elemento  $\Omega_e$  se definen por  $\tilde{S}_{e_k}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  y se calculan como

$$\bar{S}_{e_0} = \frac{1}{nne} \sum_{i=1}^{nne} \tilde{S}_i, \quad \tilde{S}_{ij} = \frac{\tilde{S}_i + \tilde{S}_j}{2},$$

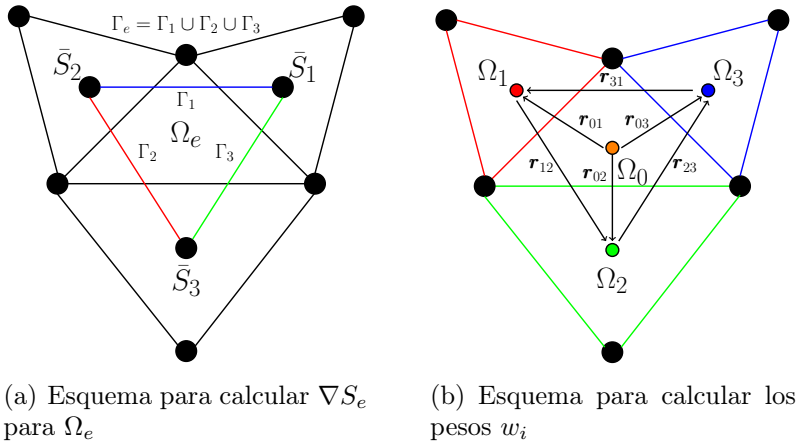


Figura 4: Limitador  $\Lambda\Pi_1$

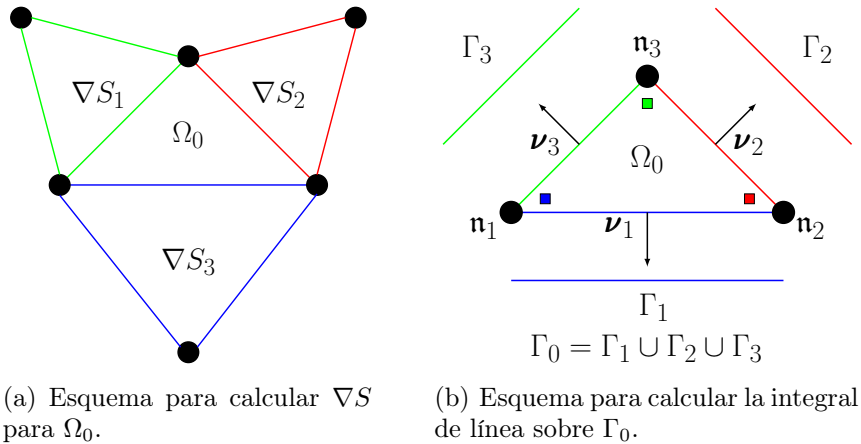


Figura 5: Limitador  $\Lambda\Pi_2$

aquí,  $\tilde{S}_{ij}$  es el valor promedio de los vértices antes de limitar. Después se calculan los valores limitados sobre las aristas mediante

$$\begin{aligned} S_{12} &= \bar{S}_{e_0} - \mathcal{M}(\bar{S}_{e_0} - \tilde{S}_{12}, \alpha(\bar{S}_{e_0} - \bar{S}_{e_1}), \alpha(\bar{S}_{e_3} - \bar{S}_{e_0})), \\ S_{23} &= \bar{S}_{e_0} - \mathcal{M}(\bar{S}_{e_0} - \tilde{S}_{23}, \alpha(\bar{S}_{e_0} - \bar{S}_{e_2}), \alpha(\bar{S}_{e_4} - \bar{S}_{e_0})), \\ S_{34} &= \bar{S}_{e_0} + \mathcal{M}(\tilde{S}_{34} - \bar{S}_{e_0}, \alpha(\bar{S}_{e_0} - \bar{S}_{e_1}), \alpha(\bar{S}_{e_3} - \bar{S}_{e_0})), \\ S_{41} &= \bar{S}_{e_0} + \mathcal{M}(\tilde{S}_{41} - \bar{S}_{e_0}, \alpha(\bar{S}_{e_0} - \bar{S}_{e_2}), \alpha(\bar{S}_{e_4} - \bar{S}_{e_0})), \end{aligned}$$

con  $\mathcal{M}(a, b, c)$  la función *minmod* en una dimensión con  $\alpha \in [0, 1]$ , ver [10].

Finalmente, para obtener los valores limitados de la saturación se resuelve el problema de mínimos cuadrados

$$\min_{S \in \Omega_0} \|S - \tilde{S}\|_2, \tag{38}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{1}{nne} \sum_{i=1}^{nne} S_i &= \bar{S}_{e_0}, && \text{(Conservación de masa sobre } \Omega_0) \\ S_1 + S_2 &= 2S_{12}, \\ S_2 + S_3 &= 2S_{23}, \\ S_3 + S_4 &= 2S_{34}, && \text{(Conservación de masa sobre las aristas de } \Omega_0) \\ S_4 + S_1 &= 2S_{41}, \end{aligned}$$

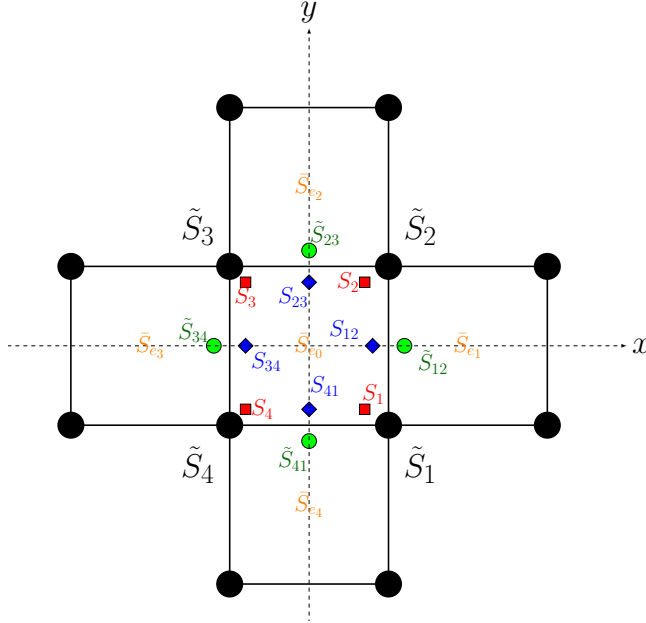


Figura 6: Esquema para el limitador  $\Lambda\Pi_3$ .

## Discretización temporal

Reescribimos la formulación variacional discreta (27) como el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) siguiente:

$$\frac{dS_h^n}{dt} = \frac{1}{\Phi} M^{-1}(G - T) = L(S_h^n), \quad (39)$$

donde

$$M = [M_{ij}], \quad M_{ij} = \int_{\Omega_e} \phi_i \phi_j \, d\Omega, \quad (40)$$

$$\mathbf{T} = [T_i], \quad T_i = \int_{\Gamma_e} \phi_i \tilde{\mathbf{F}}^n \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\Gamma, \quad (41)$$

$$\mathbf{G} = [G_i], \quad G_i = \int_{\Omega_e} (\nabla \phi_i \cdot \mathbf{U}_h^n) f_w(S_h^n) \, d\Omega, \quad i, j = 1, \dots, nne. \quad (42)$$

El sistema de EDO (39) se aproxima para cada tiempo  $n$  a través del método de Runge-Kutta TVD de segundo orden (RK2-TVD) junto con un limitador de pendiente  $\Lambda\Pi$  (véase [7]), que a continuación se describe.

Sea  $\{t^n\}_{n=0}^N$  una partición de  $J = [0, T]$  y  $\Delta t^{n+1} = t^{n+1} - t^n$ , con  $n = 0, \dots, N - 1$ , entonces la formulación para RK2-TVD está dada por

1. Sea  $S_h^0 = S_{w0}$  (la condición inicial).
2. Para  $n = 0, \dots, N - 1$  calculamos  $S_h^{n+1}$  como sigue:
  - Dado  $S_h^n$
  - Calcular las funciones intermedias

$$\begin{aligned} S_h^{(1)} &= S_h^n + \Delta t^n L(S_h^n) \\ S_{h,l}^{(1)} &= \Lambda \Pi(S_h^{(1)}) \\ S_h^{(2)} &= \frac{1}{2} [S_h^n + S_{h,l}^{(1)} + \Delta t^n L(S_{h,l}^{(1)})] \\ S_{h,l}^{(2)} &= \Lambda \Pi(S_h^{(2)}) \end{aligned}$$

- Actualizar

$$S_h^{n+1} = S_{h,l}^{(2)}$$

## Método IMPES mejorado

El método IMPES fue originalmente desarrollado en [14] y [16]. La idea básica de este método es separar el cálculo de la presión de la saturación. Para ello, se aproxima la presión en forma implícita y la aproximación de la saturación de manera explícita en el tiempo. Este método es simple de implementar y requiere menos memoria de cómputo que otros, por ejemplo, el método solución simultánea, véase [12]. Sin embargo para que sea estable requiere pasos de tiempo pequeños, véase [6]. Además, de la mecánica de fluidos en medio poroso se sabe que la variación temporal de la presión es más lenta que la saturación, por estas razones, es apropiado utilizar pasos de tiempo más grande para la presión que para la saturación. Por tal motivo, implementamos el método IMPES mejorado adoptado de [5].

Sea  $\{t^n\}_{n=0}^N$  una partición de  $J = [0, T]$  el intervalo de tiempo de interés y  $J^{n+1} = (t^n, t^{n+1}]$  los subintervalos de  $J$  con longitud  $\Delta t_p^{n+1} = t^{n+1} - t^n$ ,  $n = 0, \dots, N - 1$ , usada para la presión. Para aproximar la saturación, cada subintervalo  $J^{n+1}$  es dividido, a su vez, en subintervalos denotados por  $J^{n,m} = (t^{n,m-1}, t^{n,m}]$  donde  $t^{n,m} = t^n + m \frac{\Delta t_p^{n+1}}{M}$ ,  $m = 1, \dots, M$  y  $t^{n,0} = t^n$ .

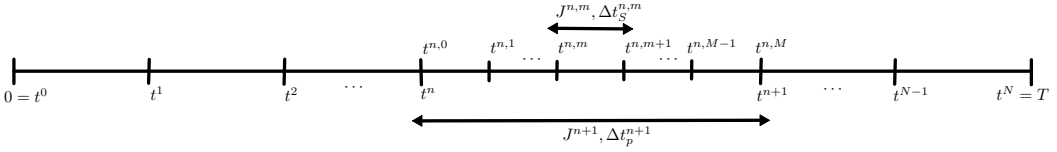


Figura 7: Discretización para el método de IMPES mejorado.

La longitud de  $J^{n,m}$  es denotado por  $\Delta t_S^{n,m} = t^{n,m} - t^{n,m-1}$ ,  $m = 1, \dots, M$ ,  $n = 0, \dots, N - 1$ . En la Figura 7 se muestra un esquema del método IMPES mejorado, el cual se describe a continuación:

1. Dado  $S_h^0 = S_{w0}$ , la condición inicial.
2. Para  $n = 0, \dots, N - 1$ .
  - (a) Dado  $S_h^n$ , calcular la presión  $p_h^n$
  - (b) Obtener la velocidad  $U_h^n$
  - (c) Para  $m = 1, \dots, M$ 
    - i. Calcular el paso de tiempo asociado a la saturación

$$\Delta t_S^{n,m} = \frac{DS_{max}}{\left(\frac{\partial S_h^{n+1,m}}{\partial t}\right)_{max}}$$

donde

$$\left(\frac{\partial S_h^{n+1,m}}{\partial t}\right)_{max} = - \left(\frac{\nabla \cdot \mathbf{F}(S_h^{n,m-1}, U_h^n)}{\Phi}\right)_{max},$$

y  $DS_{max}$  es la variación máxima de la saturación que se permite con  $S_h^{m,0} = S_h^0$ .

- ii. Calcular  $S_h^{m,m}$  utilizando el método RK2-TVD con el limitador

de pendiente a través de las funciones intermedias

$$\begin{aligned}
 S_h^{(1)} &= S_h^{n,m-1} + \Delta t_S^{n,m} L(S_h^{n,m-1}) \\
 S_{l,h}^{(1)} &= \Lambda \Pi(S_h^{(1)}) \\
 S_h^{(2)} &= \frac{1}{2} [S_h^{n,m-1} + S_h^{(1)} + \Delta t_S^{n,m} L(S_{l,h}^{(1)})] \\
 S_{l,h}^{(2)} &= \Lambda \Pi(S_h^{(2)}) \\
 S_h^{m,m} &= S_{l,h}^{(2)}
 \end{aligned}$$

donde el operador  $L$  está definido por la ecuación (39).

3. Actualizar

$$S_h^{m+1} = S_h^{n,M}$$

## 4 Validación del modelo numérico

Una vez definido nuestro esquema numérico para resolver el modelo de flujo es necesario comprobar nuestros resultados, para hacer esto nos respaldamos de la conservación de masa calculando el gasto volumétrico y volumen acumulado en los pozos productores en un tiempo en específico.

### Gasto másico

Conocida la velocidad total, se calcula la velocidad de agua y aceite a través de las ecuaciones (12) y (13) despreciando el efecto de la presión capilar. El gasto másico para la fases de agua y aceite en los pozos productores se calculan de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 q_{w,\Gamma_i} &= -\rho_w r_w h \int_0^{2\pi} \|\mathbf{U}_w\| d\theta \\
 q_{o,\Gamma_i} &= -\rho_o r_w h \int_0^{2\pi} \|\mathbf{U}_o\| d\theta, \quad i = 2, \dots, 5.
 \end{aligned} \tag{43}$$

donde,

$$\int_0^{2\pi} \|\mathbf{U}_\alpha\| d\theta = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n_d} \|\mathbf{U}_{k,\alpha}\|, \quad \alpha = \{o, w\},$$

con  $n_d$  el número de divisiones en la frontera del pozo inyector  $\Gamma_1$ .



## Gasto volumétrico

Conocidos los valores del gasto másico, se calcula el gasto volumétrico para la fase de agua y aceite en cada pozo productor mediante lo siguiente:

$$Q_{w,\Gamma_i} = \frac{q_{w,\Gamma_i}}{\rho_w}, \quad Q_{o,\Gamma_i} = \frac{q_{o,\Gamma_i}}{\rho_o}, \quad i = 2, \dots, 5. \quad (44)$$

El gasto de salida está dado por

$$Q_S = Q_{S,w} + Q_{S,o},$$

donde

$$Q_{S,w} = \sum_i Q_{w,\Gamma_i}, \quad Q_{S,o} = \sum_i Q_{o,\Gamma_i},$$

con  $Q_{S,w}$  y  $Q_{S,o}$  los gastos de salida para el agua y el aceite, respectivamente. Para verificar la condición de conservación de masa se tiene que cumplir que

$$Q_{iny} - Q_S = 0, \quad E_Q = \frac{Q_{iny} - Q_S}{Q_{iny}},$$

donde  $E_Q$  es el error relativo asociado al gasto de salida  $Q_S$ .

## Volumen acumulado

El volumen acumulado para cada fase (agua-aceite) se calcula por medio del gasto volumétrico en un periodo de tiempo, cuya forma está dada por

$$V_{w,\Gamma_i}(t) = \int_0^{T_f} Q_{w,\Gamma_i}(t) dt, \quad V_{o,\Gamma_i}(t) = \int_0^{T_f} Q_{o,\Gamma_i}(t) dt, \quad i = 2, \dots, 5. \quad (45)$$

Aquí,  $T_f$  denota el tiempo deseado, con  $T_f \in [0, T]$ . Como en el caso del gasto volumétrico, el volumen acumulado también debe cumplir la condición de conservación de masa, es decir,

$$V_{teo} - V_S = 0, \quad E_V = \frac{V_{teo} - V_S}{V_{teo}},$$

donde  $V_{teo} = Q_{iny}T_f$  es el volumen acumulado al tiempo final  $T_f$  y  $E_V$  es el error relativo asociado a  $V_S$  que es el volumen acumulado de salida, dado por

$$V_S = V_{S,w} + V_{S,o},$$

con

$$V_{S,w}(t) = \sum_i V_{w,\Gamma_i}(t), \quad V_{S,o}(t) = \sum_i V_{o,\Gamma_i}(t), \quad i = 2, \dots, 5.$$

## 5 Resultados Numéricos

En este apartado presentamos los resultados numéricos obtenidos de las simulaciones. En los Cuadros 1 y 2 se muestran las unidades y factores de conversión, respectivamente, que se emplean en este trabajo. El Cuadro 3 contiene el valor de los parámetros usados en el modelo matemático y los parámetros de referencia para el modelo adimensional se especifican en el Cuadro 4. Además, se considera una condición inicial discontinua para la saturación del agua definida como

$$S_{w0} = \begin{cases} 1 - S_{or}, & \text{si } (x, y) \in \Gamma_1, \\ 0.6, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Las pruebas numéricas se han desarrollado en una máquina HP Z240 Tower

Magnitud	Unidad SI	Cantidad	Convertir a	Multiplicar por
		Día	$s$	86,400
Presión	$Pa, \frac{N}{m^2}$	Atmosfera	$Pa$	101325
Velocidad	$\frac{m}{s}$	Barril	$m^3$	$1.5899 \times 10^{-1}$
Densidad	$\frac{kg}{m^3}$	(petróleo 42 gal)		
Viscosidad		centipoise	$Pa s$	0.001
(dinámica)	$Pa s$	psi	$Pa$	6894.76
		mildarcy	$m^2$	$9.86923 \times 10^{-16}$

Cuadro 1: Unidades SI.

Cuadro 2: Factores de conversión.

Workstation, Intel(R) Core(TM) i7-6700 CPU @ 3.40Ghz, 15 GB RAM. El código se programó en Matlab R2017b y se paralelizó con ayuda del *Parallel Computing Toolbox*. Para ello, se construyeron a alto nivel, ciclos-for paralelos (parfor-loop), matrices especiales y se emplearon funciones habilitadas en paralelo de Matlab. El software utiliza la interfaz de la aplicación Open Multiprocessing (OpenMP) para la generación del código multinúcleo en memoria compartida y usa como máximo el número de procesadores (workers para Matlab) del ordenador, en nuestro caso se utilizaron los 4 procesadores de la estación de trabajo. La ventaja de haber empleado este toolbox se muestra al final de este apartado.

Parámetro	Valor	Adimensional
$k_{rw}^0$		0.3
$k_{ro}^0$		0.7
$S_{wc}$		0.2
$S_{or}$		0.1
$\Phi$		0.2
$n_w$		2
$n_o$		2
$r_w$	0.0635 m	$1.5875 \times 10^{-4}$
$h$	20 m	0.05
$g_i$	1000 psi	1
$k_0$	100 mD	1
$\Delta k$	900 mD	9
$Q_{iny}$	$5.78 \times 10^{-3} m^3/d$	0.0212
$\delta$	10 m	0.025
$\rho_w$	1000 Kg/m <sup>3</sup>	1
$\rho_o$	800 Kg/m <sup>3</sup>	0.8
$\mu_w$	1 cP	1
$\mu_o$	3 cP	3

Parámetro referencia	Valor	SI
$L_R$		400 m
$\mu_R$	1 cp	$10^{-3} Pa \cdot s$
$p_R$	1000 psi	6894760 Pa
$k_R$	100 mD	$9.87 \times 10^{-14} m^2$
$\rho_R$		1000 kg/m <sup>3</sup>
$U_R$		$1.70 \times 10^{-6} m/s$
$t_R$		2721 d

Cuadro 4: Parámetros de referencia para la adimensionalización.

Cuadro 3: Parámetros utilizados en flujo bifásico.

Debido a que la condición inicial es discontinua en el pozo inyector, se requiere realizar un estudio de limitadores de pendiente con el fin de describir adecuadamente dicha discontinuidad. Para ello, primero presentamos la solución de la ecuación de saturación implementando los dos limitadores de pendiente para elementos lineales, donde se elige el que tiene mejor desempeño. Después la mejor opción de esta prueba se compara contra la solución obtenida usando el limitador de pendiente para elementos bilineales. Finalmente, mostramos la solución numérica del flujo bifásico para 3 horas de producción con el mejor limitador de pendiente. Cabe señalar, que los valores de los parámetros  $DS_{max}$ ,  $\alpha$  y  $M$  se han elegido de la experiencia de diversas pruebas.

En la Figura 8 se muestran las mallas utilizadas en la solución numérica para elementos lineales y bilineales con sus respectivos grados de libertad, las

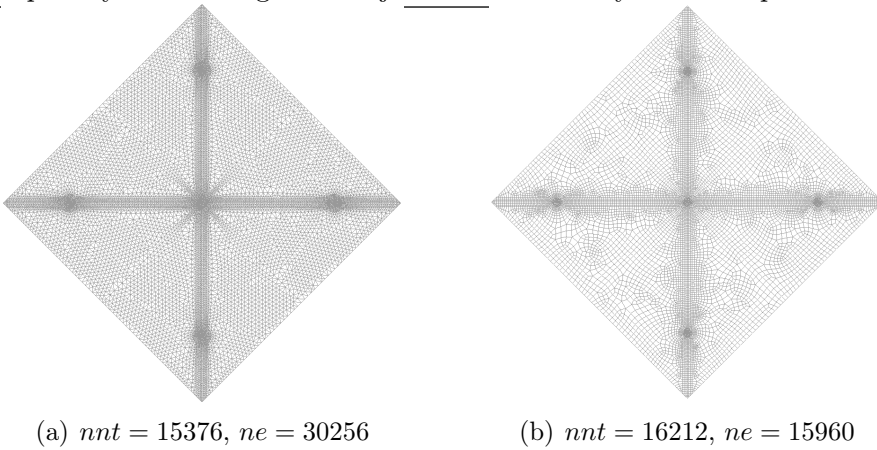
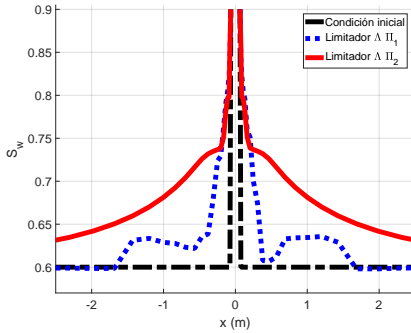
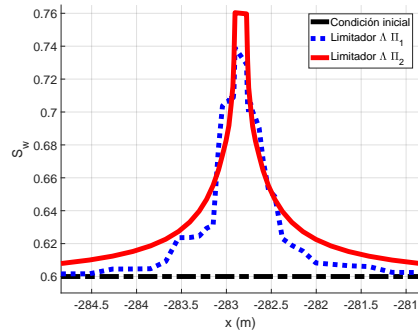
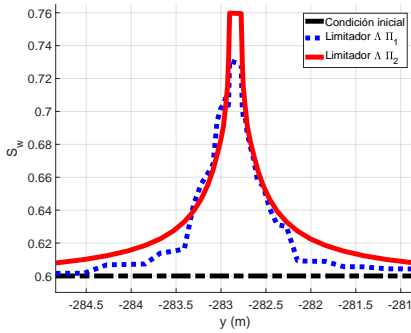
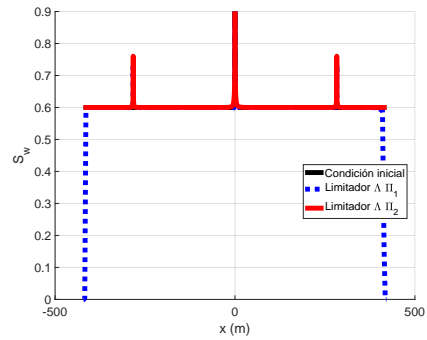


Figura 8: Número de nodos totales y número de elementos para elementos: (a) lineales y (b) bilineales.

cuales son generadas con ayuda del software GiD 11.0.8.

### Limitadores de pendiente para elementos lineales

En está prueba se muestra el efecto de los limitadores de pendiente  $\Lambda\Pi_1$  y  $\Lambda\Pi_2$  en la solución numérica de la ecuación de saturación con elementos lineales. Consideramos el caso de permeabilidad absoluta homogénea cuando  $\Delta k = 0$  en la relación (5) y un tiempo de producción de 30 min. Se fijan los parámetros  $DS_{max} = 0.005$  y  $M = 10$ . Además  $\beta = 1$  para el limitador  $\Lambda\Pi_1$ . Los valores para  $Q_{iny}$  y  $V_{teo}$  son de  $0.005787 \frac{m^3}{s}$  y  $0.17361 m^3$ , respectivamente. La Figura 9 muestra los resultados asociados a la ecuación de saturación mostrando un acercamiento alrededor del pozo inyector  $\Gamma_1$  y de los pozos productores  $\Gamma_4$  y  $\Gamma_5$ , como también un corte transversal sobre el eje x. Para el limitador  $\Lambda\Pi_2$ , los pozos productores tienen una saturación de agua de alrededor de 0.76. De la gráfica 9d se observa que al usar el limitador  $\Lambda\Pi_1$  no se aproxima correctamente la saturación en los extremos de la falla. De igual forma, las gráficas 9a - 9c muestran que cerca de los pozos, la mejor solución se obtiene implementando el limitador  $\Lambda\Pi_2$ , pues aproxima la solución sin oscilaciones, principalmente cerca de la discontinuidad del pozo inyector. Por tanto se elige este limitador para futuras pruebas.

(a) Pozo inyector  $\Gamma_1$ (b) Pozo productor  $\Gamma_4$ (c) Pozo productor  $\Gamma_5$ 

(d) Corte eje x

Figura 9: Aproximación de la saturación para el caso homogéneo con elementos lineales para los limitadores  $\Lambda\Pi_1$  y  $\Lambda\Pi_2$  a 30 min de producción.

## Elementos lineales vs bilineales

Ahora se comparan las soluciones numéricas de elementos lineales con el limitador  $\Lambda\Pi_2$  contra elementos bilineales con el limitador  $\Lambda\Pi_3$ , donde los grados de libertad son de 15376 y 16212, respectivamente. Teóricamente se sabe que la precisión es mejor con elementos bilineales al usar el método de elemento finito (Galerkin continuo), véase [3], sin embargo, estamos interesados en analizar el desempeño con elementos finitos discontinuos.

Consideramos el caso de permeabilidad absoluta homogénea y un tiempo de producción de 1h. Los valores de los parámetros son  $DS_{max} = 0.005$ ,  $M = 10$  y  $\alpha = 0.5$  para el limitador  $\Lambda\Pi_3$ . Los valores para  $Q_{iny}$  y  $V_{teo}$  son de  $0.005787 \frac{m^3}{s}$  y  $0.347214 m^3$ , respectivamente. En la Figura 10 se observan las soluciones numéricas asociadas a la saturación en el pozo inyector y dos productores, así como un corte en el eje x. Los resultados muestran que para 1h de producción la solución asociada a los elementos lineales ya saturó con agua los pozos productores, es decir, alcanzó el valor de  $1 - S_{or}$  que es el valor máximo que se puede tomar, lo que significa que ya no hay producción de aceite, sin embargo, este efecto físicamente en la realidad no es probable. Por otra parte, la solución con elementos bilineales aún no satura los pozos productores, pues su valor está alrededor de 0.75. No obstante, la solución con elementos bilineales presenta ligeras oscilaciones alrededor de los pozos, lo cual nos indica que los parámetros utilizados para esta aproximación necesitan ser ajustados de manera más precisa. En particular se ha observado que reduciendo el valor de  $DS_{max}$  a 0.001 prácticamente se eliminan las oscilaciones de la solución, pero es demasiado costoso. El Cuadro 5 presenta los resultados del gasto volumétrico y volumen acumulado y en la Figura 11 sus gráficas asociadas. Dichas gráficas confirman que para elementos lineales ya no hay producción de aceite a una hora de producción y el error relativo  $E_Q$  es superior al de los elementos bilineales. Además, el tiempo de CPU es mayor para elementos lineales que bilineales que ahorran alrededor del 9% (17 minutos), cuya diferencia se hará más grande conforme aumente el tiempo de producción. Por tanto podemos concluir que la mejor aproximación se tiene con elementos bilineales usando el limitador  $\Lambda\Pi_3$ .

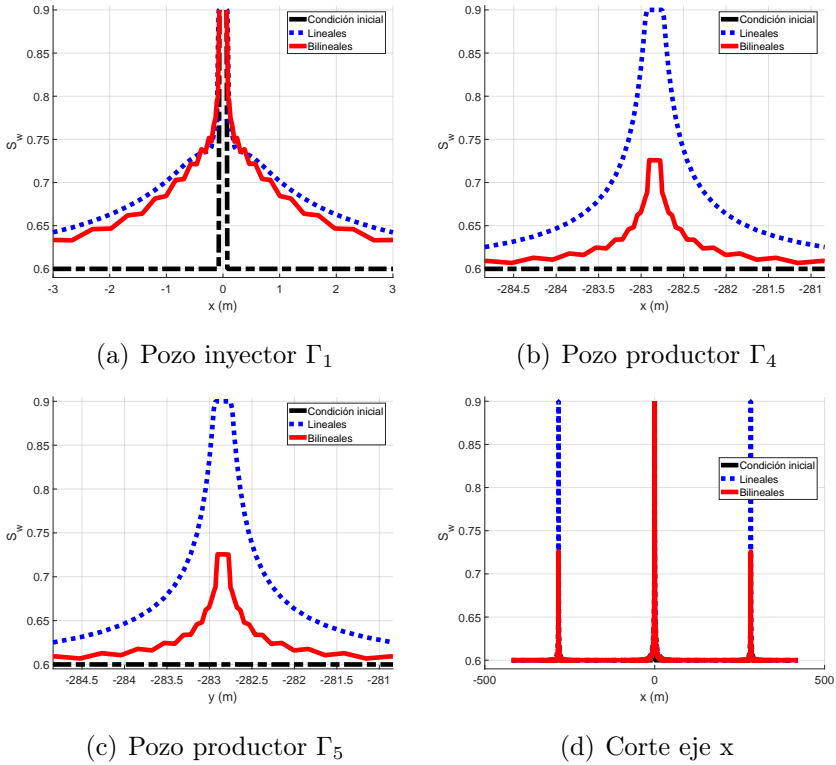


Figura 10: Aproximación de la saturación para el caso homogéneo con elementos lineales y bilineales a 1h de producción.

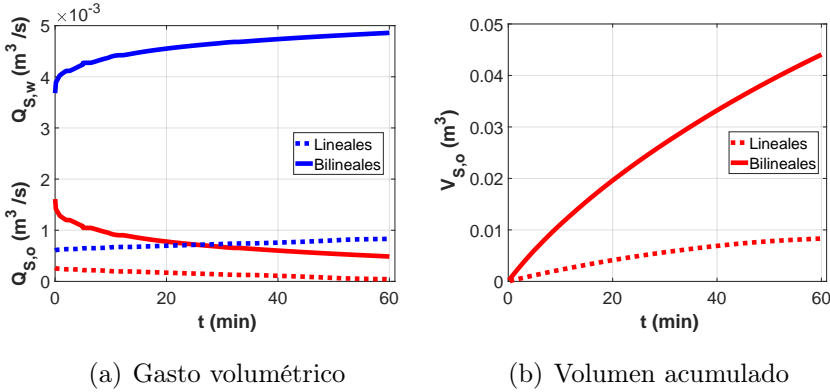


Figura 11: Comparación de gastos volumétricos de agua  $Q_{S,w}$  (líneas azules) y aceite  $Q_{S,o}$  (líneas rojas) y volumen acumulado de aceite  $V_{S,o}$  a 1h de producción para el caso homogéneo.

Elemento	$Q_S$	$E_Q$	$V_S$	$E_V$	CPU
Lineales	0.000873	8.49 %	0.052118	8.49 %	182.76
Bilineales	0.005346	7.62 %	0.319990	7.84 %	165.44

Cuadro 5: Comparación del gasto volumétrico ( $\frac{m^3}{s}$ ) y volumen acumulado ( $m^3$ ) de salida para elementos lineales y bilineales a una hora de producción. El tiempo de CPU se muestra en minutos.

## Simulación numérica del modelo de flujo bifásico

Se presentan los resultados asociados al modelo de flujo bifásico con elementos bilineales. Se considera la presencia de la falla conductiva de alta permeabilidad con  $\Delta k = 900$  mD y un tiempo de producción de 3 h, el gasto de inyección y volumen acumulado son  $0.005787 \frac{m^3}{s}$  y  $1.041734 m^3$ , respectivamente. Se ha realizado un análisis sobre los parámetros  $\alpha$ ,  $M$  y  $DS_{max}$ , donde las pruebas numéricas muestran que una buena elección de estos parámetros ayudan a minimizar oscilaciones y tiempo de CPU. El parámetro  $\alpha$  afecta el proceso de saturación en los pozos productores,  $M$  afecta el proceso de actualización de la presión en el método IMPES y  $DS_{max}$  afecta a las oscilaciones que se presentan en la ecuación de saturación. De acuerdo a lo anterior, los valores de



los parámetros que se utilizan en este subapartado son  $M = 10$ ,  $\alpha = 0.5$  para el limitador  $\Lambda\Pi_3$  y  $DS_{max}$  cambia de forma gradual en el tiempo conforme al Cuadro 6.

Tiempo	0-10	10-30	30-60	60-120	120-180	$Np$	$NS$	Total CPU
$DS_{max}$	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	1765	17650	756.32

Cuadro 6: Cambio gradual de  $DS_{max}$ .  $Np$  y  $NS$  son el número de veces que se calcula la presión y la saturación, respectivamente. El tiempo de CPU está en minutos.

El Cuadro 7 muestra la comparación entre tiempos de CPU al usar la paralelización implementada en *Parallel Computing Toolbox* de Matlab con 2,3 y 4 procesadores de la estación de trabajo contra la forma secuencial. Los resultados muestran que paralelizando el código se tiene un ahorro en tiempo de CPU con respecto a la forma secuencial, que equivale a una reducción del 53 % (858 min) con 4 procesadores, 50 % (808 min) con 3 procesadores y 38 % (623 min) con 2 procesadores. Por tanto, las simulaciones de flujo bifásico se realizan en paralelo con 4 procesadores.

Caso	Total CPU
Secuencial	1615.2
Paralelo (2 procesadores)	991.93
Paralelo (3 procesadores)	807.50
Paralelo (4 procesadores)	756.32

Cuadro 7: Tiempo de CPU (min) secuencial vs paralelo.

En la Figura 12 se exhiben los cortes sobre los ejes asociados a la presión, velocidad y saturación. El campo de velocidades como el comportamiento de la presión y saturación en 2D se observan en la Figura 13.

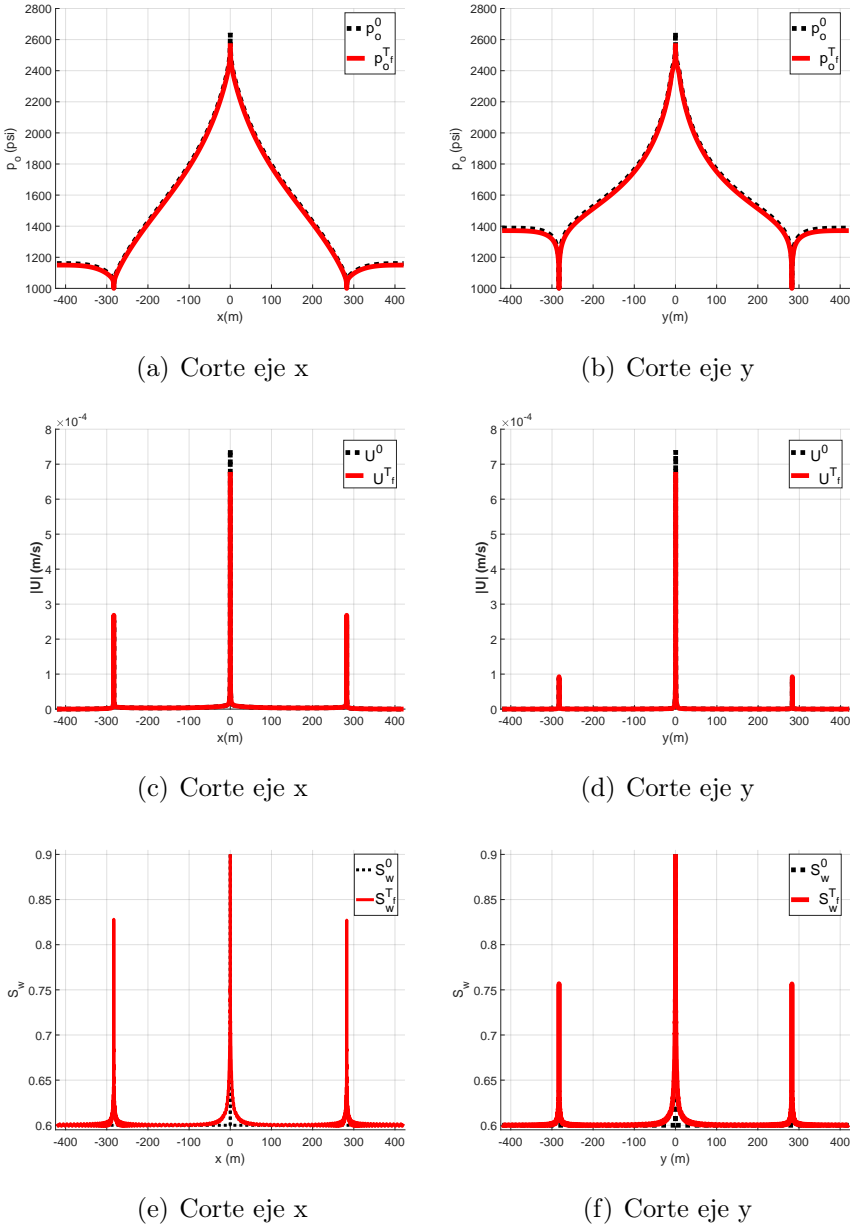
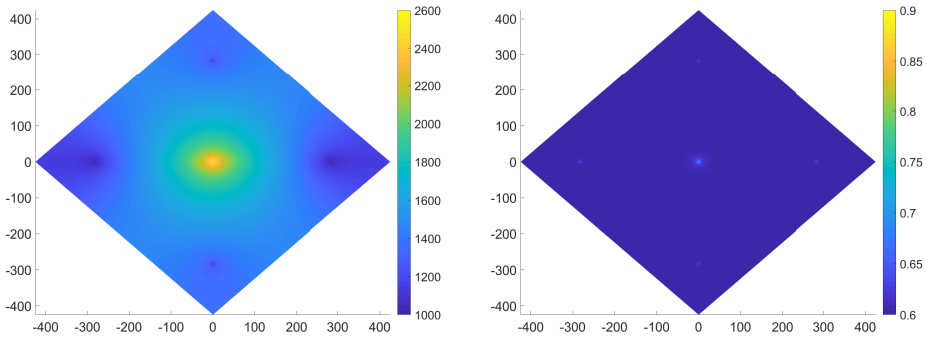
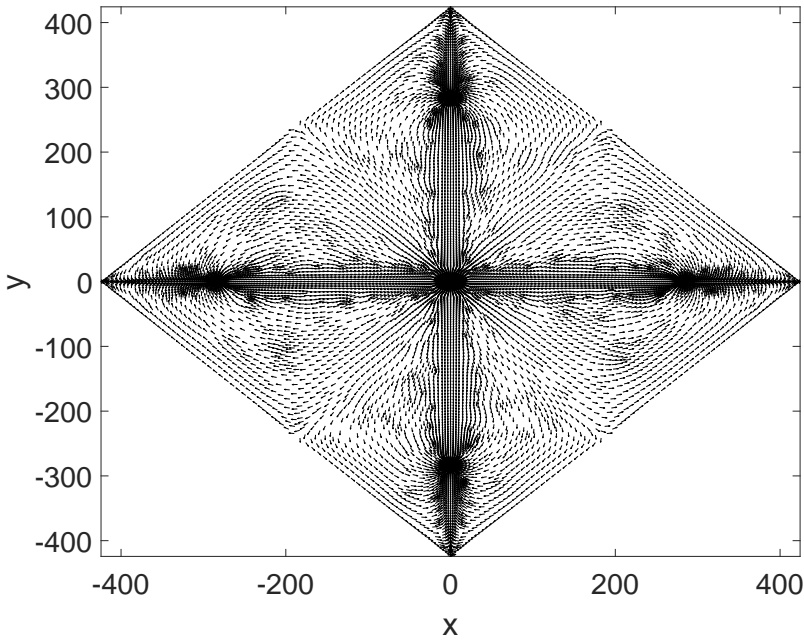


Figura 12: Aproximaciones numéricas: (a) y (b) presión, (c) y (d) la magnitud de la velocidad, (e) y (f) saturación. Modelo de flujo bifásico para 3 h de producción. La falla conductiva está sobre el eje x.



(a) Presión

(b) Saturación



(c) Campo de velocidades

Figura 13: Aproximaciones numéricas: presión, saturación y velocidad en 2D.

Los resultados muestran que a tres horas de producción aún no se tiene saturación de agua en los pozos productores lo que implica producción de aceite, además, sobre la falla conductiva se tiene una velocidad mayor que afecta a la saturación. Por otra parte, el Cuadro 8 muestra el gasto volumétrico y volumen acumulado de salida, tales datos indican que aún hay producción de aceite y es necesario más tiempo de producción.

$Q_S$	$E_Q$	$V_S$	$E_V$
0.005419	6.35 %	1.04170	7.25 %

Cuadro 8: Gasto volumétrico y volumen acumulado de salida para el modelo de flujo bifásico a 3h de producción.

## 6 Conclusiones y trabajo a futuro

Se simuló numéricamente el flujo bifásico asociado al modelo de desprendimiento y movilización de finos en una falla conductiva, considerando una condición inicial discontinua de la saturación en el pozo inyector. Se aplicaron las técnicas de elemento finito para aproximar la presión y velocidad y Galerkin Discontinuo para la saturación. Se realizó un estudio de limitadores de pendiente para elementos lineales y bilineales, el cual mostró que se obtienen mejores simulaciones al emplear elementos bilineales con el limitador  $\Pi_3$ . Se analizaron los valores de los parámetros  $DS_{max}$ ,  $\alpha$  y  $M$  para ajustarlo. Y el programa se aceleró considerablemente al usar la herramienta *Parallel Computing Toolbox* de Matlab. Todo con la finalidad de tener simulaciones confiables. Como trabajo futuro se simulará el desprendimiento, movilidad y atoramiento de finos.

## Agradecimientos

Los autores agradecen a los revisores la detallada revisión de este trabajo y sus valiosos comentarios y sugerencias para mejorar la calidad de este material.

## Bibliografía

- [1] E. W. Al-Shalabi y K. Sepehrnoori, *A comprehensive review of low salinity/engineered water injections and their applications in sandstone and carbonate rocks*, Journal of Petroleum Science and Engineering, 2016, 139, 137-161.
- [2] K. Anastasiou y C. T. Chan, *Solution of the 2D shallow water equations using the finite volume method on unstructured triangular meshes*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1997, 24, 1225-1245.
- [3] E. B. Becker, G. F. Carey y J. T. Oden, *Finite Element: An Introduction*, vol. I, Prentice-Hall, Inc. The University of Texas at Austin, 1981.
- [4] R. H. Brooks y A. T. Corey, *Hydraulic Properties of Porous Media*, vol. 3, Hidrology Papers Colorado State University Fort Collins Colorado, 1964.
- [5] Z. Chen, G. Huan y B. Li, *An improved IMPES method for two-phase flow in porous media*, Transport Porous Media, 2004, 54, 361-376.
- [6] Z. Chen, G. Huan e Y. Ma, *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*, SIAM (Society for Industrial y Applied Mathematics), 2006.
- [7] B. Cockburn y C. W. Shu, *The Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws V: Multidimensional Systems*, Journal of Computational Physics, 1998, 141, 199-224.
- [8] M. Coronado y M. A. Diaz-Viera, *Modeling fines migration and permeability loss caused by low salinity in porous media*, Journal of Petroleum Science & Engineering, 2017, 150, 355-365.
- [9] M. Coronado, X. Melgarejo-Castellanos y M. A. Díaz-Viera, *Blocking undesired inter-well flow channels using a slug of low-salinity-water during waterflooding: fines dynamics model*, Preprint submitted to Journal of Petroleum Science and Engineering, 2020.

- [10] H. Hoteit, P. Ackerer, R. Mosé, J. Erhel y B. Philippe, *New two-dimensional slope limiters for discontinuous Galerkin methods on arbitrary meshes*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 61, 2566-2593.
- [11] M. Jamei y H. Ghafouri, *A novel discontinuous Galerkin model for two-phase flow in porous media using an improved IMPES method*, International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, 2016, 26, 284-306.
- [12] D. J. Jim, P. D. W. y R. J. H. H., *A Method for Calculating Multi-Dimensional Immiscible Displacement*, Society of Petroleum Engineers, 1959.
- [13] W. Lai y A. A. Khan, *A discontinuous Galerkin method for two-dimensional shallow water flows*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2012, 70, 939-960.
- [14] J. W. Sheldon, B Zondek y W. T. Cardwell, *emphOne-Dimensional, Incompressible, Noncapillary, Two-Phase Fluid Flow in a Porous Medium*, AIME Petroleum Transactions, 1959, 216, 290-296.
- [15] J. J. Sheng, *Critical review of low-salinity waterflooding*, Journal of Petroleum Science and Engineering, 2014, 120, 216-224.
- [16] H. L. Stone y A. O. Garder, *Analysis of Gas-Cap or Dissolved-Gas Drive Reservoirs*, Society of Petroleum Engineers Journal, 1961, 1, 92-104.

Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa  
Avenida San Rafael Atlixco No 186, Colonia Vicentina, Iztapalapa,  
Ciudad de México, México. C.P. 09340

fjmartinezdeferia@gmail.com

mlss@xanum.uam.mx

Instituto Mexicano del Petróleo

Eje Central Lázaro Cárdenas 152, Colonia San Bartolo Atepehuacán, G. A.  
Madero

Ciudad de México, México. C.P. 07730

mcoronad@imp.mx



## Capítulo 4

# Diseño de un paracaídas para un pico-satélite CanSat

Fernando Sánchez Taxis, Iván Reyes Castillo, Mariana  
Natalia Ibarra Bonilla y Raúl Eusebio Grande  
División de Ingeniería Mecatrónica, Instituto  
Tecnológico Superior de Atlixco

### Resumen

Un pico-satélite (CanSat) es un dispositivo que simula un satélite real, en el sentido de sus componentes, estos se usan para el acercamiento de los estudiantes, al conocimiento de las tecnologías de la industria espacial [4], es decir, son el pretexto ideal para que un estudiante tenga la experiencia práctica de realizar un proyecto espacial. Los pico-satélites no orbitan, son lanzados desde una altura aproximada de un kilómetro desde el suelo, mediante drones o cohetes, una de sus misiones es lograr transmitir datos de telemetría como son: presión atmosférica, temperatura, humedad, entre otros. Lo anterior se debe hacer mientras el CanSat desciende lentamente hasta lograr su misión, el rango de la velocidad a la que debe descender es fijada en los concursos nacionales e internacionales. El trabajo que presentamos tiene por objetivo analizar dicha etapa, esto es, controlar la velocidad de descenso del CanSat mediante un paracaídas. Para tal meta analizamos el modelo matemático que describe dicho fenómeno, en la que encontramos las relaciones de los parámetros involucrados como son; velocidad límite o terminal, fuerza de arrastre, densidad del aire, coeficiente de arraste y área. Mismos que nos ayudaran a diseñar el paracaídas y a construirlo tomando en cuenta los resultados que genera tal modelo.



# 1 Introducción

En 1995 en la Universidad de Stanford surgió la iniciativa de involucrar a los estudiantes del programa educativo de ingeniería espacial en el diseño de satélites [4]. Estos esfuerzos fueron realizados por parte del profesor Robert Twiggs con el diseño y construcción de un micro satélite que más adelante se le conocería con el término de CanSat. El acrónimo CanSat proviene de la palabra Can que significa “lata” en el idioma inglés y de Sat de la contracción de “satélite”.

Uno de los principales objetivos de los pico-satélites CanSat reside en el aspecto educativo, estos son usados para inducir a los estudiantes al campo de las tecnologías aeroespaciales. Sin embargo, creemos que hoy en día a tomado un auge más allá de lo educativo, esto se puede constatar en la aparición de cada vez más competencias locales e internacionales a lo largo de cada año. En donde, el principal objetivo radica en poner a prueba el ingenio de los participantes, para realizar diferentes misiones, que van desde; transmitir datos de telemetría, salvaguardar un huevo en su interior, descender con una velocidad controlada usando un paracaídas u otro artefacto, probar una **ecuación matemática, una ley física**, etc. Así pues, podemos decir que tanto la electrónica involucrada en los dispositivos, como la matemática y la física inmersa en ellos pueden lograr hacer la diferencia entre los diferentes dispositivos.

Otra característica del CanSat es que no pueden recibir instrucciones desde la estación receptora, durante su trayecto de ascenso, descenso y/o retorno, es decir, deben ser completamente autónomos [4].

La primera parte de este trabajo describe de manera general los componentes de un CanSat, así como también los términos usados en el mismo. La segunda parte está enfocada al principal objetivo, que es, describir el modelo matemático del fenómeno que ocurre, desde el momento que el CanSat es desprendido del dron o cohete, hasta que él mismo llega a tocar el suelo, dicho modelo nos ayudara a entender con una mejor claridad tal evento, y así, poder diseñar el tamaño del paracaídas de tal manera que descienda a la velocidad elegida.

## 2 Conceptos

En esta sección solo enunciamos todos los conceptos usados a lo largo del trabajo, sin embargo, no es la meta dar una descripción a detalle de los mismos. Para el lector interesado en a ondar en los detalles recomendamos revisar las siguientes referencias [6], [9].

### Segunda ley de Newton

La segunda ley de Newton se puede enunciar de la siguiente manera: Si una partícula sufre una alteración de su sistema inercial de referencia debido a una interacción, interna o externa, dicha alteración puede ser cuantificada como

$$F = \frac{d(mv)}{dt} \quad (1)$$

donde  $mv$  es la cantidad de movimiento o momentum lineal. Así, la fuerza está definida como la razón de cambio temporal de dicha cantidad de movimiento. Si la masa de la partícula permanece invariante mientras se desplaza, la ecuación (1) se reduce a  $F = ma$ , conocida como la ley fundamental de la Dinámica.

### Fuerza de arrastre

Cuando una partícula se mueve a través de un medio distinto al vacío (como un fluido, ej. aire, agua, aceite, etc.), este medio ejerce una fuerza de resistencia conocida como fuerza de arrastre  $F_d$  que tiende a reducir su velocidad. La fuerza de arrastre depende de las propiedades del fluido y del tamaño, forma y velocidad del objeto relativa al fluido. De acuerdo a si el objeto se desplaza a alta o baja velocidad, dicha fuerza puede ser lineal o cuadrática en  $v$ . La dirección de  $F_d$  es el de la velocidad del objeto relativa al fluido, y su sentido se opone al movimiento (es decir siempre produce una desaceleración).

$$F_d = \frac{1}{2}\rho v^2 C_d A = kv^2 \quad (2)$$

donde  $k = \frac{1}{2}\rho C_d A$ , la fuerza de resistencia sobre cualquier objeto es proporcional a la densidad del fluido y proporcional al cuadrado de la velocidad relativa entre el objeto y el fluido.  $C_d$  no es constante sino que varía como

función de la velocidad, la dirección del flujo, la posición del objeto, el tamaño del objeto, la densidad del fluido.

### **Coefficiente de arrastre**

El coeficiente de arrastre, resistencia o fricción del medio (comúnmente denotado como:  $C_d$ ,  $C_x$  o  $C_w$ ) es una cantidad adimensional que se usa para cuantificar la resistencia de un objeto en un medio fluido como el aire o el agua. Es utilizado en la ecuación de resistencia, en donde un coeficiente de resistencia bajo indica que el objeto tendrá menos resistencia aerodinámica o hidrodinámica. El coeficiente de resistencia está siempre asociado con una superficie particular.

El coeficiente de resistencia de cualquier objeto comprende los efectos de dos contribuciones básicas a la resistencia dinámica del fluido: la resistencia de forma y de superficie.

### **Densidad**

La densidad o densidad absoluta es la magnitud que expresa la relación entre la masa y el volumen de una sustancia o un objeto sólido. Su unidad en el Sistema Internacional (SI) es kilogramo por metro cúbico ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ). La densidad es una magnitud intensiva. Matemáticamente se expresa como:

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{3}$$

### **Área**

El concepto de área permite asignar una medida a la extensión de una superficie, expresada en matemáticas como unidades de medida denominadas unidades de superficie. La unidad empleada para medir el área se denomina unidad cuadrada.

### **CanSat**

La agencia espacial europea define un CanSat como un conjunto de sistemas electrónicos que simulan las funciones de un satélite real [7], los componentes están integrados dentro de una lata de refresco de aproximadamente 355 mililitros y un peso no mayor a 500 gramos.

Existen diferentes tipos de CanSat, estos son:

- Rover-back

El CanSat debe desplazarse de manera autónoma a un punto definido, una vez aterrizado, por medio de un vehículo tipo Rover.

- Fly-back

En la etapa de descenso el CanSat controla su caída. Dependiendo de la misión esto lo debe hacer usando mecanismos que de alguna manera frenen su caída, como por ejemplo; un paracaídas, un autogiro e incluso se puede dotar de todo un sistema que permitan planear y trazar una determinada trayectoria, hasta alcanzar un punto definido.

- Medición de Parámetros

El CanSat durante su descenso debe recopilar datos de parámetros físicos y químicos del ambiente, mediante los sensores que están integrados en su segmento de vuelo.

- Resistencia al Impacto

El CanSat debe soportar el impacto que sufre al tocar el suelo, salvaguardando sus componentes y hasta otros objetos que lleven en su interior, como por ejemplo un huevo.

En general la arquitectura básica de un CanSat está conformada por la parte del segmento de vuelo y la del segmento terrestre.

## Segmento de Vuelo

Los principales subsistemas que lo integran son:

- Sistema de Sensores

Este módulo está constituido por todos los sensores (inerciales, de clima y posicionamiento) y es el encargado de medir todas las variables físicas, químicas y de posicionamiento geográfico del CanSat.

- Estructura Mecánica

Es la carcasa que se encarga de proteger todos los elementos del CanSat, por lo regular es diseñada de acuerdo al propósito de la misión o tipo de CanSat.

- Control y Procesamiento de Datos

Podemos decir que es el cerebro del CanSat, él que tiene la tarea de recabar la información de los sensores y a su vez dirigirlos a los elementos de transmisión, o de almacenarlos para después recuperarlos.

- Transmisión de Datos

Agrandes rasgos este sistema se encarga de enviar la información a la estación terrena en tiempo real.

- Sistema de Potencia

Es el encargado de energizar todos los sistemas del CanSat, mediante unas baterías o paneles solares.

## Segmento Terrestre

Esta integrado por una **estación terrena** la cual tiene la función de comunicarse con el CanSat, es decir, recibir toda la información que los sensores envían, desde el comienzo de la misión, hasta el final del mismo. La estructura básica la conforma una antena receptora, un tranreceptor conectada a una computadora, en donde con ayuda de un software especializado se pueda analizar, extraer los datos, y visualizarlos por medio de gráficas.

Todo lo anterior lo podemos resumir en el siguiente diagrama

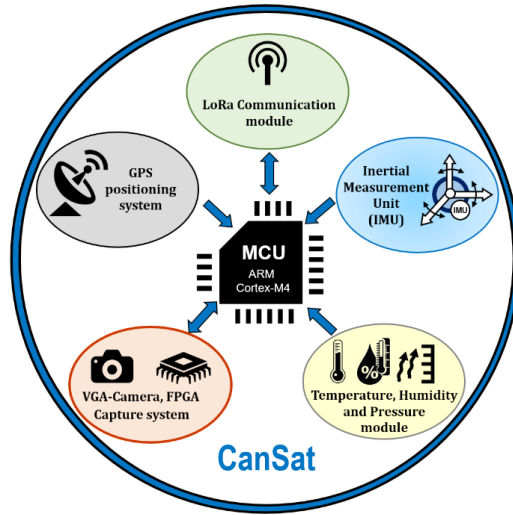


Figura 1: Módulos de un CanSat.

Para terminar esta sección es importante mencionar que en nuestro país es reciente la aparición de eventos que buscan integrar a los estudiantes de nivel superior, a competir usando sus cansats en donde demuestren su ingenio para realizar diferentes misiones. Sin embargo, en otros países tales dispositivos fueron introducidos desde los años noventa y en la actualidad ya son usados en estudiantes de niveles de secundaria.

### 3 Modelo matemático del descenso

Visualizando y analizando detenidamente el problema podremos pensar que cuando un cuerpo se suelta en la atmósfera, primero acelera bajo la influencia de su peso. La fuerza de arrastre resiste el movimiento del cuerpo, que actúa en la dirección opuesta al movimiento. Conforme aumenta la velocidad del cuerpo, lo mismo la fuerza de arrastre. Esto continúa hasta que todas las fuerzas se equilibran unas a otras y la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo (y por lo tanto su aceleración) es cero. Entonces, la velocidad del cuerpo, permanece constante durante el resto de su caída si las propiedades del fluido, en la trayectoria del cuerpo, permanecen esencialmente constantes o uniformes. Esta es la la velocidad máxima que un cuerpo que cae puede alcanzar, tal velocidad se llama velocidad terminal o límite [9].

En esta sección demostraremos usando el modelo de caída libre que lo dicho anteriormente así ocurre, más aún determinaremos cómo es tal velocidad límite. Para esto vamos a considerar que la fuerza de arrastre es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad del CanSat. En general la fuerza de arraste es una función de la velocidad del cuerpo, esta puede ser lineal, e incluso polinomial [5]. Sin embargo para un medio en donde el aire se comporta de manera uniforme, la fuerza de resistencia se puede considerar como una función de la velocidad al cuadrado. Por otro lado para ambientes donde el aire no es uniforme, se puede demostrar que la presión atmosférica varía dependiendo la altitud, convirtiendo la fuerza de resistencia en una función más compleja [5].

A continuación describiremos el modelo matemático que describe el fenómeno considerando un ambiente uniforme, es decir, en donde las características del medio permanecen esencialmente constantes durante toda la trayectoria del CanSat.

Sea  $w$  el peso de nuestro CanSat, y  $r$  la resistencia del aire del ambiente. Consideremos como positiva la dirección hacia abajo, como lo muestra la siguiente figura.

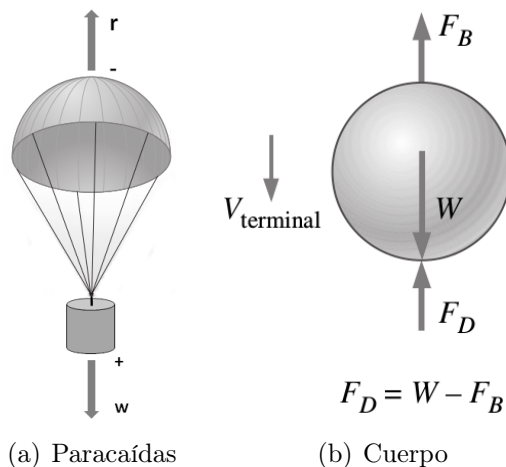


Figura 2: Paracaídas y cuerpo libre.

De acuerdo a la segunda ley de Newton, podemos afirmar que la fuerza resultante que actúa en el CanSat es igual a su masa ( $m$ ) por la aceleración (a) del CanSat, es decir,

$$w + r = ma \quad (4)$$

La resistencia del aire la consideraremos proporcional al cuadrado de la velocidad, esto es,

$$r = kv^2, \quad (5)$$

La constante  $k > 0$  es determinado por experimentación y esta depende de los siguientes factores:

- Densidad del aire ( $\rho$ )
- Coeficiente de arrastre ( $C_d$ )
- Área frontal del paracaídas expuesta al aire

Continuando con el modelo y considerando la dirección positiva hacia abajo, la sustitución de  $r$  en la ecuación (4) nos lleva a obtener la siguiente ecuación  $w - kv^2 = ma$ , misma que se traduce en la siguiente ecuación diferencial, pues la aceleración es la derivada de la velocidad.

$$m \frac{dv}{dt} = w - kv^2 \quad (6)$$

Dado que  $w = mg$ , entonces

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2 \quad (7)$$

Para resolver la ecuación diferencial, note que dicha ecuación diferencial se puede resolver por separación de variables. Por comodidad sea  $\alpha = \frac{k}{m}$ , de donde que,

$$\frac{dv}{dt} = g - \alpha v^2 \quad (8)$$

Poniendo la ecuación de la forma

$$\frac{dv}{g - \alpha v^2} = dt \quad (9)$$

o bien,

$$\left( \frac{1}{2\sqrt{g}(\sqrt{g} - v\sqrt{\alpha})} + \frac{1}{2\sqrt{g}(\sqrt{g} + v\sqrt{\alpha})} \right) dv = dt \quad (10)$$



Integrando obtenemos

$$\ln \left| \frac{(\sqrt{g} + v\sqrt{\alpha})}{(\sqrt{g} - v\sqrt{\alpha})} \right| = 2\sqrt{\alpha g}(t + c) \quad (11)$$

mejor aún,

$$\frac{\sqrt{g} + v\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g} - v\sqrt{\alpha}} = \pm e^{2\sqrt{\alpha g}(t+c)} \quad (12)$$

Considerando que la velocidad inicial del CanSat es cero, esto es,  $v(0) = 0$ , y despejando  $v(t)$ , obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \left( \frac{e^{2t\sqrt{g\alpha}} - 1}{e^{2t\sqrt{g\alpha}} + 1} \right) \quad (13)$$

Dado que  $\alpha = \frac{k}{m}$ , entonces

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \left( \frac{e^{2t\sqrt{gk/m}} - 1}{e^{2t\sqrt{gk/m}} + 1} \right), \quad (14)$$

El cual representa la velocidad instantánea del CanSat en el tiempo.

Otra forma de representar la velocidad es,

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \left( 1 - \frac{2}{e^{2t\sqrt{gk/m}} + 1} \right), \quad (15)$$

Lo cual permite notar que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}. \quad (16)$$

La velocidad anterior se conoce como velocidad límite o velocidad terminal, la cual la denotaremos por  $v_l$ ,

$$v_l^2 = \frac{mg}{k}. \quad (17)$$

equivalentemente,

$$kv_l^2 = w \quad (18)$$

Esta última ecuación permite observar que el CanSat alcanza dicha velocidad cuando su peso es igual a la fuerza de resistencia del aire, en pocas palabras  $v_l$  es la que permitirá que el CanSat descienda suavemente.

En lo que concierne a la constante de proporcionalidad  $k$ , se sabe que dicha constante esta dada por:

$$k = \frac{\rho AC_d}{2}, \quad (19)$$

Donde,

- $\rho$  representa la densidad del aire,
- $C_d$  el coeficiente de arrastre,
- $A$  es Área frontal del paracaídas expuesta al aire.

Para terminar esta sección, sustituimos la constante de proporcionalidad  $k$  en la ecuación anterior.

$$\frac{\rho AC_d}{2} v_l^2 = w, \quad (20)$$

De esta última note que el área del paracaídas se puede expresar en función de la velocidad límite, esto es,

$$A = \frac{2gm}{\rho C_d v_l^2}. \quad (21)$$

## 4 Coeficiente de arrastre

Cuando un fluido se desplaza sobre un cuerpo sólido, ejerce fuerzas de presión normales a la superficie y fuerzas de corte paralelas a la superficie a lo largo de la superficie exterior del cuerpo.

Usualmente existe interés en la resultante de las fuerzas de presión y de corte que actúan sobre el cuerpo en lugar de los detalles de las distribuciones de estas fuerzas en toda la superficie del cuerpo.

La componente de la fuerza de presión y de corte resultante que actúa en la dirección del flujo se llama fuerza de arrastre (o sólo arrastre), y la componente

que actúa normal a la dirección del flujo se llama fuerza de sustentación (o sólo sustentación).

Un cuerpo encuentra cierta resistencia cuando se fuerza a moverse a través de un fluido, especialmente un líquido. La fuerza que un fluido que fluye ejerce sobre un cuerpo en la dirección del flujo se llama arrastre. La fuerza de arrastre se puede medir de manera directa simplemente con unir el cuerpo sumergido a un flujo de fluido a un resorte calibrado y medir el desplazamiento en la dirección del flujo (tal como medir el peso con una báscula de resorte) [9].

## Área característica

Los coeficientes de resistencia se definen usando un área característica  $A$  que puede variar dependiendo de la forma del cuerpo:

$$C = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$$

el factor  $\frac{1}{2}\rho U^2$  en mecánica de fluidos se define como presión dinámica [6]. Cuando se quiere hacer uso de datos de resistencia u otras fuerzas, es importante tener la longitud y área utilizadas para adimensionalizar los coeficientes que nos proporcionan.

$A$  representa por lo general el área frontal del cuerpo (el área que se proyecta sobre un plano normal a la dirección del flujo). En otras palabras,  $A$  es el área que una persona vería si observara al cuerpo desde la dirección del fluido que se aproxima.

Los coeficientes de arrastre y sustentación locales varían a lo largo de la superficie como resultado de los cambios en la velocidad de la capa límite en la dirección del flujo.

De [9] se sabe que cuando un cuerpo se suelta en la atmósfera, primero acelera bajo la influencia de su peso ( $w$ ). La fuerza de arrastre ( $F_D$ ) resiste el movimiento del cuerpo, que actúa en la dirección opuesta al movimiento. Conforme aumenta la velocidad del cuerpo, lo mismo la fuerza de arrastre. Esto continúa hasta que todas las fuerzas se equilibran unas a otras y la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo (y por lo tanto su aceleración) es cero. Entonces, la velocidad del cuerpo, permanece constante durante el resto de su caída si las propiedades del fluido, en la trayectoria del cuerpo, permanecen esencialmente constantes. Ésta es la velocidad máxima que un cuerpo que cae puede alcanzar, se llama velocidad terminal figura 3.

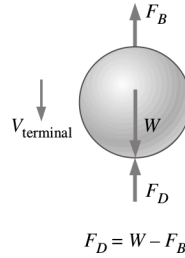


Figura 3: Durante una caída libre, un cuerpo alcanza su velocidad terminal cuando la fuerza de arrastre es igual al peso del cuerpo menos la fuerza de flotación (No hay aceleración).

## 5 Diseño y construcción del paracaídas

Un paracaídas es un artefacto (ver figura 4) diseñado para frenar las caídas mediante la resistencia generada por él mismo al atravesar el aire, logrando una velocidad de caída segura y prácticamente constante.



Figura 4: Paracaídas.

para el caso particular del CanSat la constante de proporcionalidad obtenida del modelo matemático  $k$ , esta dada por:

$$k = \frac{\rho A C_d}{2} \quad (22)$$

sustituyendo  $k$  en la velocidad límite se tiene:

$$A = \frac{2gm}{\rho C_d v^2} \tag{23}$$

donde:

- $\rho$  es la densidad local del aire.
- $v$  es la velocidad de descenso
- $C_d$  es el coeficiente de arrastre
- $m$  es la masa del CanSat
- $g$  es la constante de gravedad

Ya con esta última expresión (23), en donde observamos que en particular el área esta en función de la velocidad límite o velocidad de descenso, podemos empezar a diseñar nuestro paracaídas, primero que nada recordemos que el intervalo en la que debe de estar la velocidad límite es fijada en los concursos, para nuestro caso trabajaremos en un intervalo de  $5\text{ m/s}$  a  $10\text{ m/s}$ , ya que este fué el más común en los últimos concursos [8].

La propuesta que haremos es descender a una velocidad controlada de  $5.5\text{ m/s}$ , aún que, el lector puede decidir sobre el que más le convenga siempre y cuando no se salga del intervalo que le exijan.

De la Agencia Espacial Mexicana [3] se tiene que el coeficiente de arrastre para descender hay tres casos que se muestran en la siguiente Tabla 1.

Cuadro 1: *Coefficientes de arrastre.*

Velocidad de descenso	Modo de descenso	$C_d$
23 ft/s	Normal	1.26
20 ft/s	Oscilando	1.6
16 ft/s	Planeando	2.4

A partir de la velocidad elegida anteriormente observamos, según la tabla anterior, el coeficiente de arrastre que más nos conviene es  $C_d = 2.4$

Para el caso la forma del paracaídas se decidió aquella que tenga la forma de un octágono, luego entonces, el área  $A$  de sección transversal, es un polígono regular de 8 lados como se muestra en la figura 5, cuya área es:

$$A = 2\sqrt{2} r^2 \tag{24}$$

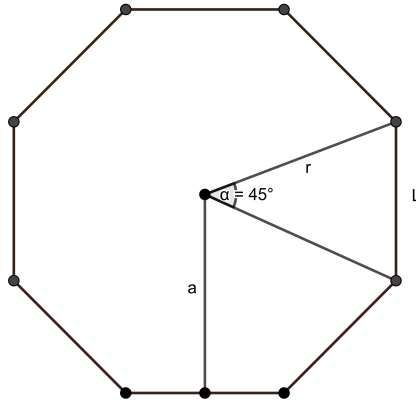


Figura 5: Área de sección transversal del paracaídas.

En cuanto a la forma del domo se considera una forma semiesférica con las siguientes características:

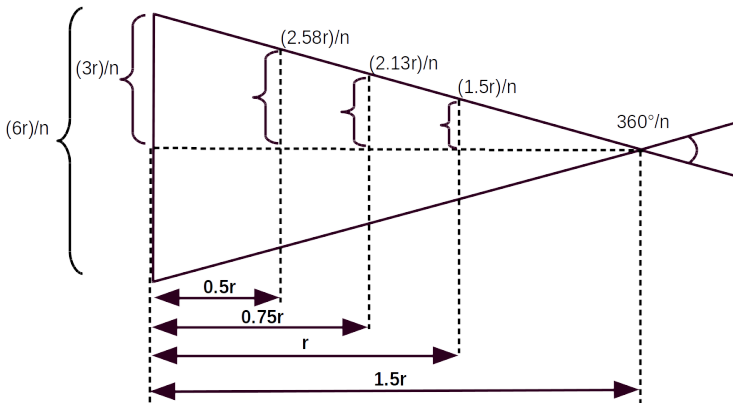


Figura 6: Lados del paracaídas.

donde  $r$  corresponde al radio del polígono, y  $n$  es el número de lados del polígono regular considerado.

Otros datos que necesitamos son el peso del CanSat y la densidad del aire, en la primera columna de la siguiente tabla se muestra tales parámetros, así como también los propuestos (velocidad límite, coeficiente de arrastre), la segunda columna muestra los resultados que se obtienen al sustituir los mismos en las fórmulas 23 y 24, es decir, las dimensiones de nuestro paracaídas.

Cuadro 2: *Parámetros.*

$v_l=5.5$ m/s	$A=1054.82$ cm <sup>2</sup>
$\rho=1.22$ kg/m <sup>3</sup>	$r=19.31$ cm
$C_d=2.4$	$L=\frac{6r}{n} \rightarrow \frac{6r}{8} = 14.48$ cm
$m=0.25$ kg	
$g=9.81$ m/s <sup>2</sup>	

Las siguientes figuras muestran el molde y el paracaídas hecho con las dimensiones anteriores.

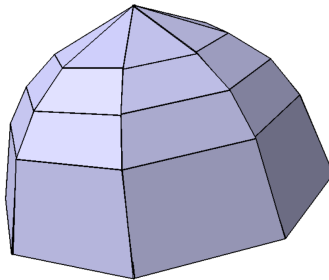


Figura 7: Molde del Paracaídas.



Figura 8: Paracaídas real.

Finalizamos este trabajo comentando que el lanzamiento del CanSat fué realizado en las instalaciones del Instituto Tecnológico Superior de Atlixco. Este fue lanzado a una altura de 100 metros por medio de un dron. El sensor del CanSat marco una velocidad de descenso de  $6\text{ m/s}$ .

Tomando en cuenta la precisión y la exactitud inherentes a cualquier dispositivo electrónico, así como también el intervalo elegido, consideramos que el control de la caída fue todo un éxito. Las siguientes imágenes muestran el lanzamiento y parte del descenso.



Figura 9: Lanzamiento.



Figura 10: Descenso del CanSat en paracaídas.



## Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo otorgado por parte de PRODEP, para la realización de este trabajo, el cual fue financiado con el proyecto: 511-6/17-8773. De la misma manera agradecemos a los árbitros por la revisión y las sugerencias que nos permitieron mejorar este trabajo.

## Bibliografía

- [1] Bouwmeester, J, Guo, J. *Survey of worldwide pico- and nanosatellite missions, distributions and subsystem technology*, Acta Astronaut, (2010) Vol. 67, No. 7-8, pp. 854-862.
- [2] Boyce diprima. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Limusa-Wiley, 2000.
- [3] Educación Espacial, Agencia Espacial Mexicana. *Ingeniería de sistemas espaciales aplicado a una misión CanSat* [http://www.educacionespacial.aem.gob.mx/images\\_ise/pdf](http://www.educacionespacial.aem.gob.mx/images_ise/pdf)
- [4] Twigg, R. University Space System Symposium (USSS). Hawaii, USA. (1998.)
- [5] Mohazzabi P, *High-altitude free fall*, Am. J. Phys. 64 (10) October (1996), 1242-1246.
- [6] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Mecánica de Fluidos*, Física Teórica, vol. 6, pp. 168, Editorial Reverté, S. A., 1985.
- [7] Mendoza-Torres J.E., Valadez-Campos E., Sumano-Mejía E., Vedenkin N., Mendoza-Torres G., Rodríguez-Pedroza B., Meza-Pérez J. *Prototipo de satélite tipo Cansat para Pruebas*. <https://inaoe.repositorioinstitucional.mx/jspui/bitstream/1009/1163/1/MendozaTorrJE.pdf>
- [8] Unisec México. <http://www.unisecmexico.com>

- [9] Yunus A. Cengel, John M. Cimbala, *Mecánica de Fluidos*, Fundamentos y aplicaciones, pp. 562-566, McGraw-Hill, 2006.

División de Ingeniería Mecatrónica, ITSA  
Prolongación Heliotropo No. 1201, Colonia Vista Hermosa,  
Atlixco, Pue. C.P. 74210

`fernando.sanchez@itsatlixco.edu.mx`

`ivan.reyes@itsatlixco.edu.mx`

`mariana.ibarra@itsatlixco.edu.mx`

`raul.eusebio@itsatlixco.edu.mx`



---

# Topología

---



## Capítulo 5

### Funciones perfectas

Manuel Ibarra Contreras y Armando Martínez García  
FCFM, BUAP

#### Resumen

En este capítulo daremos condiciones bajo las cuales una función es perfecta. Estas condiciones estarán dadas sobre el dominio, contradominio o la función misma, como se ve en la sección 3 donde se trabaja con funciones entre espacios compactos, en la sección 4 donde se trabaja con funciones entre espacios numerablemente compactos o en la sección 5 donde se trabaja con funciones entre espacios métricos.

## 1 Introducción

Una función perfecta entre los espacios topológicos  $X$  y  $Y$ , con  $X$  espacio de Hausdorff ( $T_2$ ), es una función continua, cerrada y con fibras compactas. Dentro de las propiedades topológicas que se satisfacen en la clase de los espacios Hausdorff están las que se preservan bajo las funciones perfectas y sus preimágenes. Entre otras cosas, en [3], se prueba que las clases de espacios regulares, espacios compactos, espacios localmente compactos y  $k$ -espacios cumplen ambas condiciones. Estas y otras propiedades de las funciones perfectas (por ejemplo, preservan la metrizableidad y la paracompacidad) las han llevado a tomar una posición muy importante dentro de la topología general. En este capítulo, como ya se mencionó en el resumen, se estudia este concepto en las clases de los espacios topológicos compactos, numerablemente compactos y metrizablees. Se estudia, entre otras cosas, cómo es que a una función que satisface alguna condición débil de continuidad (por ejemplo, la cuasi continuidad, la  $\theta$ -continuidad o la  $c$ -continuidad) se le pueden agregar condiciones de algún tipo que lleve a que la función sea perfecta.

## 2 Preliminares

Denotaremos con las letras  $X, Y$  a los espacios topológicos sin ningún axioma de separación a menos que se diga en forma explícita alguna condición adicional. Con las letras  $M$  y  $N$  denotaremos a los espacios métricos.

Si  $A \subset X$ , diremos que  $A$  es un conjunto cerrado si  $X \setminus A$  es un conjunto abierto. Una familia  $\mathcal{F}$ , de subconjuntos abiertos de  $X$  es base para  $X$  si todo conjunto abierto en  $X$  es la unión de una subfamilia de  $\mathcal{F}$ ; y se dirá que  $\mathcal{F}$  es una cubierta abierta de  $X$  si  $X = \bigcup \mathcal{F}$ . Para  $x \in X$ ,  $V \subset X$  es una vecindad de  $x$  si hay un conjunto abierto  $U$  tal que  $x \in U \subset V$  y una familia  $\mathcal{V}(x)$  de vecindades de  $x$  será una base de vecindades de  $x$  si para cada vecindad  $W$  de  $x$ , existe  $V \in \mathcal{V}(x)$  con la propiedad de que  $V \subset W$ .

En esta sección omitimos las pruebas de aquellos resultados que son básicos y que normalmente se prueban en un primer curso de topología (el lector interesado en revisarlas puede consultar [2] o [3]). Hacemos las pruebas de las proposiciones que tienen que ver con alguna de las condiciones débiles de continuidad.

**Definición 2.1.** Si  $x \in X$  y  $A \subset X$ , entonces

1. Un elemento  $x \in X$  es punto de adherencia de  $A$  si para todo conjunto abierto  $U$  tal que  $x \in U$ , se tiene que  $U \cap A \neq \emptyset$ .
2. La cerradura de  $A$  la cual denotaremos como  $cl_X(A)$  es el conjunto

$$cl_X(A) = \{x \in X : x \text{ es punto de adherencia de } A\}.$$

3. Una red en  $X$  es una función  $f : I \rightarrow X$  donde  $I$  es un conjunto dirigido.

Si  $f : I \rightarrow X$  es una red en  $X$ , es costumbre denotarla como  $\{x_i\}_{i \in I}$  donde  $x_i = f(i)$  para cada  $i \in I$ . También se dice que la red  $\{x_i\}_{i \in I}$  converge a un punto  $x \in X$ , denotado como  $x_i \rightarrow x$ , si para cada conjunto abierto  $V$  de  $X$  tal que  $x \in V$ , existe  $i_0 \in I$ , tal que para todo  $i \in I$  con  $i > i_0$ , se tiene que  $x_i \in V$ .

**Lema 2.2.** Si  $A \subset X$ , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $A$  es un conjunto cerrado.
2.  $A = cl_X(A)$ .

**Lema 2.3.** *Si  $x \in X$  y  $A \subset X$ , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $x \in cl_X(A)$ .
2. Existe una red  $\{x_i\}_{i \in I}$  que converge a  $x$  y  $x_i \in A$  para toda  $i \in I$ .

**Definición 2.4.** 1.  $X$  es  $T_1$  si para todo  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ , existen conjuntos abiertos  $U$  y  $V$  tales que

$$(x \in U \text{ y } y \notin U) \text{ y } (y \in V \text{ y } x \notin V).$$

2.  $X$  es  $T_2$  si para todo  $x, y \in X$  con  $x \neq y$  existen conjuntos abiertos  $U$  y  $V$  tales que

$$x \in U, y \in V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

3.  $X$  es regular si  $X$  es  $T_1$  y para todo conjunto cerrado  $F \subset X$  y  $x \in X$  tal que  $x \notin F$  existen conjuntos abiertos  $U$  y  $V$  tales que

$$x \in U, F \subset V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

4.  $X$  es compacto si  $X$  es  $T_2$  y toda cubierta abierta de  $X$  tiene una subcubierta finita.
5.  $X$  es numerablemente compacto si  $X$  es  $T_2$  y toda cubierta abierta numerable de  $X$  tiene una subcubierta finita.
6.  $X$  es primero numerable si cada  $x \in X$  tiene una base numerable.

Los lemas que siguen enuncian propiedades de las clases de espacios que se acaban de definir y que serán usadas en las secciones posteriores

**Lema 2.5.** 1.  $X$  es  $T_1$  si y sólo si para todo  $x \in X$ , el conjunto  $\{x\}$  es cerrado.

2. Si  $X$  es regular, entonces  $X$  es  $T_2$ .
3. Si  $X$  es compacto, entonces  $X$  es regular.
4.  $X$  es  $T_2$  si y sólo si toda red en  $X$  converge a lo más a un punto.



**Lema 2.6.** 1. Si  $X$  es  $T_2$  y  $Y \subset X$  compacto, entonces  $Y$  es un conjunto cerrado.

2. Si  $X$  compacto y  $F \subset X$  es un conjunto cerrado, entonces  $F$  es compacto.

**Lema 2.7.** 1. Si  $X$  es numerablemente compacto y  $F \subset X$  es un conjunto cerrado, entonces  $F$  es numerablemente compacto.

2. Si  $X$  es primero numerable y  $F \subset X$  es numerablemente compacto, entonces  $F$  es un conjunto cerrado.

**Definición 2.8.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función y  $x \in X$ , diremos que:

1.  $f$  es continua en  $x$  si para todo conjunto abierto  $V \subset Y$ , tal que  $f(x) \in V$ , existe un conjunto abierto  $U \subset X$  tal que  $x \in U$  y  $f(U) \subset V$ ,
2.  $f$  es débilmente continua en  $x$  si para todo conjunto abierto  $V \subset Y$ , tal que  $f(x) \in V$ , existe un conjunto abierto  $U \subset X$  tal que  $x \in U$  y  $f(U) \subset cl_Y(V)$ ,
3.  $f$  es  $\theta$ -continua en  $x$  si para todo conjunto abierto  $V \subset Y$  tal que  $f(x) \in V$  existe un conjunto abierto  $U \subset X$  tal que  $x \in U$  y  $f(cl_X(U)) \subset cl_Y(V)$ ,
4.  $f$  es  $c$ -continua en  $x$  si para todo conjunto abierto  $V \subset Y$  tal que  $f(x) \in V$  y  $Y \setminus V$  es compacto existe un conjunto abierto  $U \subset X$  tal que  $x \in U$  y  $f(U) \subset V$ ,
5.  $f$  es separante si  $X, Y$  son espacios  $T_2$  y para todo  $y_1, y_2 \in Y$  tales que  $y_1 \neq y_2$ , existen conjuntos abiertos  $V_1, V_2 \subset Y$  tales que  $y_1 \in V_1$ ,  $y_2 \in V_2$ ,  $cl_X(f^{-1}(V_1)) \cap f^{-1}(V_2) = \emptyset$  y  $f^{-1}(V_1) \cap cl_X(f^{-1}(V_2)) = \emptyset$ .
6.  $f$  es cuasi continua en  $x$  si para todo conjunto abierto  $V \subset X$  tal que  $x \in V$  y todo conjunto abierto  $W \subset Y$  tal que  $f(x) \in W$ , existe un conjunto abierto no vacío  $U \subset V$  tal que  $f(U) \subset W$ .

Diremos que  $f$  es continua en  $X$ , o débilmente continua en  $X$ , o  $\theta$ -continua en  $X$ , o  $c$ -continua en  $X$ , o cuasi continua en  $X$  si para cada  $x \in X$ ,  $f$  es continua en  $x$ , o débilmente continua en  $x$ , o  $\theta$  continua en  $x$ , o  $c$  continua

en  $x$ , o cuasi continua en  $x$ , respectivamente. Si no hay lugar a confusión, simplemente se dirá que  $f$  es continua, débilmente continua,  $\theta$ -continua,  $c$ -continua, o cuasi continua, respectivamente.

**Lema 2.9.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua o  $\theta$ -continua, entonces  $f$  es débilmente continua.*

*Demostración.* Se sigue de la Definición 2.8 incisos 1 y 3. □

El siguiente lema resume algunas de las equivalencias muy conocidas de la continuidad de una función.

**Lema 2.10.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $f$  es continua.
2. Para todo conjunto abierto  $V \subset Y$ , se tiene que  $f^{-1}(V)$  es un conjunto abierto.
3. Para todo conjunto cerrado  $F \subset Y$ , se tiene que  $f^{-1}(F)$  es un conjunto cerrado.
4. Para todo conjunto  $A \subset X$ , se tiene que  $f(\text{cl}_X(A)) \subset \text{cl}_Y(f(A))$ .
5. Para todo conjunto  $B \subset Y$ , se tiene que  $\text{cl}_X(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\text{cl}_Y(B))$ .

**Definición 2.11.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función, diremos que:

1.  $f$  es cerrada si para todo conjunto cerrado  $F \subset X$ , se tiene que  $f(F)$  es un conjunto cerrado,
2.  $f$  es compacta (numerablemente compacta) si para todo compacto (numerablemente compacto)  $K \subset Y$ , se tiene que  $f^{-1}(K)$  es compacto (numerablemente compacto),
3.  $f$  es preservadora de compactos (numerablemente compactos) si para todo compacto (numerablemente compacto)  $K \subset X$ , se tiene que  $f(K)$  es compacto (numerablemente compacto),
4.  $f$  tiene fibras compactas (fibras cerradas) si para todo  $y \in Y$ , se tiene que  $f^{-1}(y)$  es compacto (cerrado).

**Lema 2.12.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función  $c$ -continua con  $Y T_2$ , entonces para todo compacto  $K \subset Y$ , se tiene que  $f^{-1}(K)$  es un conjunto cerrado.

*Demostración.* Si  $K \subset Y$  compacto, por el Lema 2.6,  $K$  es un conjunto cerrado y por esto  $Y \setminus K$  es un conjunto abierto. Ahora, si  $x \in X \setminus f^{-1}(K)$ , entonces  $f(x) \in Y \setminus K$ . Como  $f$  es  $c$ -continua en  $x$ , existe un conjunto abierto  $U$  en  $X$  tal que  $x \in U$  y  $f(U) \subset Y \setminus K$ , y esto implica que  $x \in U \subset X \setminus f^{-1}(K)$ . Por lo tanto,  $f^{-1}(K)$  es un conjunto cerrado.  $\square$

**Definición 2.13.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función, la gráfica de  $f$ , que denotaremos por  $Graf(f)$ , es el conjunto

$$Graf(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

**Lema 2.14.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

1.  $Graf(f)$  es un conjunto cerrado de  $X \times Y$ .
2. Para todo  $x \in X$  y  $y \in Y$  tales que  $f(x) \neq y$ , existen conjuntos abiertos  $U \subset X$  y  $V \subset Y$  tales que

$$x \in U, y \in V \text{ y } f(U) \cap V = \emptyset.$$

*Demostración.* 1 implica 2. Sean  $x \in X$  y  $y \in Y$  tales que  $f(x) \neq y$ , entonces  $(x, y) \notin Graf(f)$ . Como  $Graf(f)$  es un conjunto cerrado de  $X \times Y$  y  $(x, y) \notin Graf(f)$ , entonces  $(x, y) \notin cl_{X \times Y}(Graf(f))$ , y esto implica que existen conjuntos abiertos  $U \subset X$  y  $V \subset Y$  tales que

$$x \in U, y \in V \text{ y } (U \times V) \cap Graf(f) = \emptyset.$$

Probaremos que  $f(U) \cap V = \emptyset$ .

Si existiera  $z \in f(U) \cap V$ , entonces  $z \in f(U)$  y  $z \in V$  y esto implica que existe  $x^* \in U$  tal que  $f(x^*) = z$  y  $f(x^*) \in V$ ; se sigue que  $(x^*, f(x^*)) \in (U \times V)$  y esto implica que

$$(U \times V) \cap Graf(f) \neq \emptyset$$

y esto contradice que  $(U \times V) \cap Graf(f) = \emptyset$ .

Por lo tanto  $f(U) \cap V = \emptyset$ .

2 implica 1. Si  $(x, y) \in X \setminus \text{Graf}(f)$ , entonces  $f(x) \neq y$ , y esto implica que existen conjuntos abiertos  $U \subset X$  y  $V \subset Y$  tales que

$$x \in U, y \in V \text{ y } f(U) \cap V = \emptyset.$$

Probaremos que  $(U \times V) \cap \text{Graf}(f) = \emptyset$ .

Si no fuera el caso, existiría

$$(x_1, y_1) \in (U \times V) \cap \text{Graf}(f),$$

esto implica que  $(x_1, y_1) \in (U \times V)$  y  $y_1 = f(x_1)$ ; se sigue que

$$f(U) \cap V \neq \emptyset$$

y esto contradice nuestra hipótesis.

Por lo tanto  $(U \times V) \cap \text{Graf}(f) = \emptyset$ , se sigue que

$$(x, y) \in U \times V \subset (X \setminus \text{Graf}(f)),$$

y esto significa que  $\text{Graf}(f)$  es un conjunto cerrado de  $X \times Y$ .  $\square$

De aquí en adelante cuando  $\text{Graf}(f)$  sea un conjunto cerrado, diremos también que  $f$  tiene gráfica cerrada.

**Lema 2.15.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función débilmente continua y  $Y$  es  $T_2$ , entonces  $f$  tiene gráfica cerrada.*

*Demostración.* Sean  $x \in X$  y  $y \in Y$  tales que  $f(x) \neq y$ . Como  $Y$  es  $T_2$  y  $f(x) \neq y$  existen conjuntos abiertos  $V_1, V_2 \subset Y$  tales que

$$f(x) \in V_1, y \in V_2 \text{ y } V_1 \cap V_2 = \emptyset,$$

esto implica que  $cl_Y(V_1) \cap V_2 = \emptyset$ .

Dado que  $f$  es débilmente continua y  $f(x) \in V_1$ , existe un conjunto abierto  $U \subset X$  tal que  $x \in U$  y  $f(U) \subset cl_Y(V_1)$ ; se sigue que

$$f(U) \cap V_2 = \emptyset.$$

Por lo tanto, del Lema 2.14, se sigue que  $\text{Graf}(f)$  es un conjunto cerrado.  $\square$

De los Lemas 2.14 y 2.9 tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 2.16.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función y  $Y$  es  $T_2$ , entonces  $f$  tiene gráfica cerrada si*

1.  $f$  es continua, o
2.  $f$  es  $\theta$ -continua.

**Lema 2.17.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función separante con  $X$  y  $Y$  espacios  $T_2$ , entonces  $f$  tiene gráfica cerrada.*

*Demostración.* Sean  $x \in X, y \in Y$  tales que  $f(x) \neq y$ . Como  $f$  es una función separante y  $f(x) \neq y$  existen conjuntos abiertos  $V_1, V_2 \subset Y$  tales que

$$f(x) \in V_1, y \in V_2, cl_X(f^{-1}(V_1)) \cap f^{-1}(V_2) = \emptyset \text{ y } f^{-1}(V_1) \cap cl_X(f^{-1}(V_2)) = \emptyset.$$

Como  $f(x) \in V_1$ , entonces  $x \in f^{-1}(V_1)$ ; esto implica que  $x \notin cl_X(f^{-1}(V_2))$ ; se sigue que  $x \in X \setminus cl_X(f^{-1}(V_2))$ .

Si  $U = X \setminus cl_X(f^{-1}(V_2))$ , es claro que

$$x \in U, U \text{ es un conjunto abierto y que } f(U) \subset Y \setminus V_2;$$

esto implica que  $f(U) \cap V_2 = \emptyset$ .

Por lo tanto, del Lema 2.14, se sigue que  $Graf(f)$  es un conjunto cerrado.  $\square$

**Lema 2.18.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función cerrada con fibras cerradas y  $X$  es regular, entonces  $f$  tiene gráfica cerrada.*

*Demostración.* Sean  $x \in X, y \in Y$  tales que  $f(x) \neq y$ , entonces  $x \notin f^{-1}(y)$  y dado que  $X$  es regular y  $f^{-1}(y)$  es cerrado, existen conjuntos abiertos  $U, V \subset X$  tales que

$$x \in U, f^{-1}(y) \subset V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

Como  $f$  es cerrada, entonces  $W = Y \setminus f(X \setminus V)$  es un conjunto abierto en  $Y$  tal que  $y \in W$  y  $f^{-1}(W) \subset V$ , y esto implica que

$$f(U) \cap W = \emptyset.$$

Por lo tanto, del Lema 2.14, se tiene que  $Graf(f)$  es un conjunto cerrado.  $\square$

**Teorema 2.19.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función débilmente continua y  $Y$  es regular, entonces  $f$  es continua.*

*Demostración.* Sean  $x \in X$  y  $V$  un conjunto abierto en  $Y$  tales que  $f(x) \in V$ .

Como  $Y$  es regular, existe un conjunto abierto  $W \subset Y$ , tal que  $f(x) \in W \subset cl_Y(W) \subset V$  y dado que  $f$  es débilmente continua en  $x$  y  $f(x) \in W$ , existe un conjunto abierto  $U$  en  $X$  tal que  $x \in U$  y  $f(U) \subset cl_Y(W)$ ; se sigue que  $f(U) \subset V$ .

Por lo tanto, del Lema 2.10, se sigue que  $f$  es continua.  $\square$

Del Lema 2.9 y Teorema 2.19 se obtiene el siguiente corolario.

**Corolario 2.20.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función  $\theta$ -continua, con  $Y$  regular, entonces  $f$  es continua.*

Y del Lema 2.5 y Teorema 2.19, se tiene que:

**Corolario 2.21.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función débilmente continua, con  $Y$  compacto, entonces  $f$  es continua.*

Si ahora usamos el Lema 2.5 y el Corolario 2.20 obtenemos el corolario que sigue.

**Corolario 2.22.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función  $\theta$ -continua, con  $Y$  compacto, entonces  $f$  es continua.*

La prueba del siguiente corolario es consecuencia del Lema 2.12.

**Corolario 2.23.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función  $c$ -continua con  $Y$  compacto, entonces  $f$  es continua.*

**Teorema 2.24.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función tal que para todo conjunto cerrado  $F \subset X$ ,  $f : F \rightarrow Y$  es cuasi continua, entonces  $f$  es continua.*

*Demostración.* Supongamos que existe  $x \in X$  tal que  $f$  no es continua en  $x$ .

Como  $f$  no es continua en  $x$  existe un conjunto abierto  $V \subset Y$  con  $f(x) \in V$  tal que para todo conjunto abierto  $U \subset X$  con  $x \in U$  existe  $x_U \in U$  y  $f(x_U) \notin V$ .

Sea

$$F = \{x_U : x_U \in U\}.$$

Es claro que  $cl_X(F)$  es un conjunto cerrado y que  $x \in cl_X(F)$ . Como  $f$  es cuasi continua en  $x \in cl_X(F)$ , para cada conjunto abierto  $W$  en  $cl_X(F)$  tal que  $x \in W$  existe un conjunto abierto  $W'$  en  $cl_X(F)$  tal que

$$W' \neq \emptyset, W' \subset W \text{ y } f(W') \subset V.$$

Como  $W'$  es un conjunto abierto en  $cl_X(F)$ , entonces existe un conjunto abierto  $V' \subset X$  tal que  $W' = V' \cap cl_X(F)$  y como  $W' \neq \emptyset$ , entonces  $V' \cap cl_X(F) \neq \emptyset$  y esto implica que  $V' \cap F \neq \emptyset$  y de aquí se sigue que existe  $x_U \in W'$  tal que  $f(x_U) \notin V$ , que contradice que  $f(W') \subset V$ .

Por lo tanto, concluimos que  $f$  es continua.  $\square$

**Definición 2.25.** Si  $f : X \rightarrow Y$  una función,  $x \in X$  y  $y \in Y$ , definimos los conjuntos  $\mathcal{C}(f, x)$  y  $\mathcal{C}^{-1}(f, y)$  como

1.  $\mathcal{C}(f, x) = \{y \in Y : \text{existe una red en } X, \{x_i\}_{i \in I} \text{ tal que } x_i \rightarrow x \text{ y } f(x_i) \rightarrow y\}$ ,
2.  $\mathcal{C}^{-1}(f, y) = \{x \in X : y \in \mathcal{C}(f, x)\}$ .

**Lema 2.26.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función y  $x \in X$ , entonces

1.  $f(x) \in \mathcal{C}(f, x)$ .
2. Si  $Y$  es  $T_2$  y  $f$  es continua en  $x$ , entonces  $\mathcal{C}(f, x) = \{f(x)\}$ .

*Demostración.* 1) Es claro que la red  $\{x_i\}_{i \in I}$  con  $x_i = x$  para todo  $i \in I$  satisface que  $x_i \rightarrow x$  y  $f(x_i) \rightarrow f(x)$ . Por lo tanto  $f(x) \in \mathcal{C}(f, x)$ .

2) Si  $y \in \mathcal{C}(f, x)$ , entonces existe una red en  $X$ ,  $\{x_i\}_{i \in I}$  tal que  $x_i \rightarrow x$  y  $f(x_i) \rightarrow y$ . Como  $f$  es continua y  $x_i \rightarrow x$ , entonces  $f(x_i) \rightarrow f(x)$  y como  $Y$  es  $T_2$ , del Lema 2.5 se sigue que  $y = f(x)$ .

Por lo tanto  $\mathcal{C}(f, x) = \{f(x)\}$ .  $\square$

**Teorema 2.27.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función con  $Y$  compacto y  $x \in X$ , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $f$  es continua en  $x$ .
2.  $\mathcal{C}(f, x) = \{f(x)\}$ .

*Demostración.* 1 implica 2. Si  $f$  es continua en  $x$ , como  $Y$  es  $T_2$ , del inciso 2 del Lema 2.26 se sigue que  $\mathcal{C}(f, x) = \{f(x)\}$ .

2 implica 1. Supongamos que  $f$  no es continua en  $x$ , entonces existe una red en  $X$ ,  $\{x_i\}_{i \in I}$  tal que  $x_i \rightarrow x$  y la red  $\{f(x_i)\}_{i \in I}$  no converge a  $f(x)$ .

Como  $Y$  es compacto,  $\{f(x_i) : i \in I\} \subset Y$  tiene un punto de acumulación  $y \in Y$  con  $y \neq f(x)$  y, por lo tanto existe una subred  $\{f(x_{i_k})\}_{k \in I}$  tal que

$f(x_{i_k}) \rightarrow y$ ; esto implica que  $y \in \mathcal{C}(f, x)$ ; se sigue que  $y = f(x)$  y esto es una contradicción.

Por lo tanto  $f$  es continua en  $x$ . □

**Lema 2.28.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  una función y  $(x, y) \in X \times Y$ , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1.  $(x, y) \in cl_{X \times Y}(Graf(f)) \setminus Graf(f)$ ,
2.  $x \in \mathcal{C}^{-1}(f, y) \setminus \{f^{-1}(y)\}$ .

*Demostración.* Basta observar que  $x \in \mathcal{C}^{-1}(f, y) \setminus \{f^{-1}(y)\}$  si y sólo si  $x \in \mathcal{C}^{-1}(f, y)$  y  $x \notin \{f^{-1}(y)\}$  si y sólo si  $y \in \mathcal{C}(f, x)$  y  $f(x) \neq y$  si y sólo si existe una red en  $X$ ,  $\{x_i\}_{i \in I}$  tal que  $x_i \rightarrow x$ ,  $f(x_i) \rightarrow y$  y  $f(x) \neq y$  si sólo si  $(x_i, f(x_i)) \rightarrow (x, y)$  y  $f(x) \neq y$  si y sólo si  $(x, y) \in cl_{X \times Y}(Graf(f)) \setminus Graf(f)$ . □

Del lema anterior se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 2.29.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función y  $y \in Y$ , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1.  $Graf(f)$  es un conjunto cerrado.
2.  $\mathcal{C}^{-1}(f, y) = \{f^{-1}(y)\}$ .

**Lema 2.30.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función con gráfica cerrada y  $Y$  es  $T_2$ , entonces para todo compacto  $K \subset Y$ , se tiene que  $f^{-1}(K)$  es un conjunto cerrado.*

*Demostración.* Sean  $K \subset Y$  compacto y  $x \in cl_X(f^{-1}(K))$ , entonces existe una red  $\{x_i\}_{i \in I}$  tal que  $x_i \rightarrow x$  y  $x_i \in f^{-1}(K)$  para toda  $i \in I$ ; se sigue que  $f(x_i) \in K$  para toda  $i \in I$ .

Como  $K$  es compacto, existen  $y \in K$  y una subred  $\{f(x_{i_k})\}_{k \in I}$  tal que  $f(x_{i_k}) \rightarrow y$ , y esto implica que  $(x_{i_k}, f(x_{i_k})) \rightarrow (x, y)$ .

Si  $f(x) \neq y$ , como  $Graf(f)$  es un conjunto cerrado, del Lema 2.14 se sigue que existen conjuntos abiertos  $U \subset X$  y  $V \subset Y$  tales que

$$x \in U, y \in V \text{ y } f(U) \cap V = \emptyset,$$

Como  $x_{i_k} \rightarrow x$  y  $x \in U$  existe  $i_0$  tal que  $x_{i_k} \in U$  para toda  $i_k > i_0$  esto implica que  $f(x_{i_k}) \in f(U)$  para toda  $i_k > i_0$  y dado que  $f(x_{i_k}) \rightarrow y$ , y  $y \in V$



existe  $i_1$  tal que  $f(x_{i_k}) \in V$  para todo  $i_k > i_1$ , entonces para  $i_2 = \max\{i_0, i_1\}$  se tiene que  $f(x_{i_k}) \in f(U) \cap V$  para toda  $i_k > i_2$  lo que contradice que  $f(U) \cap V = \emptyset$ ; se sigue que  $f(x) = y$  y así,  $x \in f^{-1}(K)$ .

Por lo tanto  $f^{-1}(K)$  es un conjunto cerrado.  $\square$

### 3 Funciones perfectas en espacios compactos

En esta sección,  $X$  y  $Y$  siempre serán espacios topológicos compactos, a menos que se explicita otra cosa. Cada uno de los resultados de esta sección aparecen en alguna de las siguientes referencias: [1], [5], [7]-[12].

**Definición 3.1.** Sea  $X$  un espacio  $T_2$ . Una función continua  $f : X \rightarrow Y$  es perfecta si  $f$  es cerrada y para todo  $y \in Y$ ,  $f^{-1}(y)$  es un conjunto compacto.

**Lema 3.2.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $f$  es perfecta,
2.  $f$  es continua.

*Demostración.* 1 implica 2. Es claro que si  $f$  es perfecta, entonces  $f$  es continua.

2 implica 1. Sea  $F \subset X$  un conjunto cerrado.

Como  $F$  es un conjunto cerrado, entonces por el Lema 2.6  $F$  es compacto; se sigue que  $f(F)$  es compacto y, por el Lema 2.6, se tiene que  $f(F)$  es un conjunto cerrado.

Además, como  $f$  es continua, para todo  $y \in Y$  se tiene que  $f^{-1}(y)$  es un conjunto cerrado en  $X$ ; esto implica que  $f^{-1}(y)$  es compacto.

Por lo tanto  $f$  es perfecta.  $\square$

**Lema 3.3.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $f$  es continua,
2.  $f$  tiene gráfica cerrada.

*Demostración.* 1 implica 2. Si  $f$  es continua, del Lema 2.15 se sigue que  $\text{Graf}(f)$  es un conjunto cerrado.

2 implica 1. Sea  $F \subset Y$  un conjunto cerrado. Del Lema 2.6, se sigue que  $F$  es compacto y, del Lema 2.30, se tiene que  $f^{-1}(F)$  es un conjunto cerrado.

Por lo tanto, del Lema 2.10, se sigue que  $f$  es continua.  $\square$

**Lema 3.4.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $f$  es continua,
2.  $f$  es cerrada con fibras cerradas,
3.  $f$  es compacta.

*Demostración.* 1 implica 2. Sea  $F \subset X$  un conjunto cerrado. Como  $F$  es un conjunto cerrado se sigue, por el Lema 2.6 que  $F$  es compacto, entonces  $f(F)$  es compacto y, si aplicamos el Lema 2.6, tenemos que  $f(F)$  es un conjunto cerrado. Además es claro que  $f$  tiene fibras cerradas.

Por lo tanto  $f$  es cerrada con fibras cerradas.

2 implica 3. Sean  $K \subset Y$  compacto,  $\{U_i : i \in I\}$  una cubierta abierta de  $f^{-1}(K)$  por conjuntos abiertos de  $X$ ,  $\mathcal{J} = \{J \subset I : J \text{ es finito}\}$  y para cada  $J \in \mathcal{J}$  definamos  $U_J = \cup\{U_i : i \in J\}$ .

Para cada  $k \in K$ ,  $f^{-1}(k) \subset X$  es un conjunto cerrado y por lo tanto, compacto y esto implica que existe  $J \in \mathcal{J}$  tal que  $f^{-1}(k) \subset U_J$ ; se sigue que

$$k \in Y \setminus f(X \setminus U_J) \text{ y así, } K \subset \bigcup\{Y \setminus f(X \setminus U_J) : J \in \mathcal{J}\}.$$

Como  $K$  es compacto y para cada  $J \in \mathcal{J}$ ,  $Y \setminus f(X \setminus U_J)$  es un conjunto abierto en  $Y$ , entonces existen  $J_1, J_2, \dots, J_n \in \mathcal{J}$  tales que  $K \subset \cup\{Y \setminus f(X \setminus U_{J_l}) : l \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ ; se obtiene que

$$\begin{aligned} f^{-1}(K) &\subset \bigcup\{f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U_{J_l})) : l \in \{1, 2, \dots, n\}\} \\ &= \bigcup\{X \setminus f^{-1}(f(X \setminus U_{J_l})) : l \in \{1, 2, \dots, n\}\} \\ &\subset \bigcup\{X \setminus (X \setminus U_{J_l}) : l \in \{1, 2, \dots, n\}\} = \bigcup\{U_{J_l} : l \in \{1, 2, \dots, n\}\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $f$  es compacta.

3 implica 1. Sea  $F \subset Y$  un conjunto cerrado. Como  $F$  es un conjunto cerrado se sigue que  $F$  es compacto en  $Y$ ; por lo tanto,  $f^{-1}(F)$  es compacto, entonces  $f^{-1}(F)$  es compacto y, como consecuencia es un conjunto cerrado en  $X$ .

Por lo tanto, del Lema 2.10, se sigue que  $f$  es continua.  $\square$

**Lema 3.5.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $f$  es cerrada con fibras cerradas,
2.  $f$  es preservadora de compactos con fibras cerradas.

*Demostración.* 1 implica 2. Si  $K \subset X$  es compacto, entonces  $K$  es un conjunto cerrado; se sigue que  $f(K)$  es un conjunto cerrado, entonces  $f(K)$  es compacto. Por lo tanto,  $f$  es preservadora de compactos.

2 implica 1. Sea  $F \subset X$  un conjunto cerrado. Como  $F \subset X$  es un conjunto cerrado, entonces  $F$  es compacto y, por lo tanto,  $f(F)$  es compacto y así,  $f(F)$  es un conjunto cerrado. Por lo tanto  $f$  es cerrada.  $\square$

De los Lemas 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5 y el Teorema 2.27 tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.6.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $f$  es perfecta,
2.  $f$  es continua,
3.  $f$  es cerrada con fibras cerradas,
4.  $f$  tiene  $\text{Graf}(f)$  cerrada,
5.  $f$  es compacta,
6.  $f$  es preservadora de compactos con fibras cerradas,
7. para todo  $x \in X$ ,  $\mathcal{C}(f, x) = \{f(x)\}$ .

Del Teorema 3.6, el Corolario 2.23, el hecho de que todo compacto  $T_2$  es regular, el Teorema 2.19 y el Corolario 2.20, obtenemos las siguientes equivalencias.

**Corolario 3.7.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $f$  es perfecta,
2.  $f$  es continua,
3.  $f$  es débilmente continua,
4.  $f$  es  $\theta$ -continua,
5.  $f$  es  $c$ -continua.

De los Lemas 2.17, 3.2, 3.3 y Teorema 2.24 tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 3.8.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función tal que*

1.  $f$  es separante o
2. para todo conjunto cerrado  $F \subset X$   $f : F \rightarrow Y$  es cuasi continua,

*entonces  $f$  es perfecta.*

## 4 Funciones perfectas en espacios numerablemente compactos

En toda esta sección  $X$  y  $Y$  son espacios topológicos primero numerables, numerablemente compactos y  $T_2$ , a menos que se especifique otra cosa. Recordemos (véase el Lema 2.7) que la compacidad numerable es una propiedad que se hereda para los subconjuntos cerrados y que se preserva bajo funciones continuas; también, que si  $Y$  es primero numerable y  $F \subset Y$  es un subespacio numerablemente compacto, entonces  $F$  es un conjunto cerrado en  $Y$ . Los resultados de esta sección se pueden consultar en alguna de las siguientes referencias: [1], [5], [7]-[11].

**Lema 4.1.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función con fibras compactas, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $f$  es perfecta,
2.  $f$  es continua.

*Demostración.* 1 implica 2. Como  $f$  es perfecta, por definición,  $f$  es continua.

2 implica 1. Sea  $F \subset X$  un conjunto cerrado. Como  $F$  es cerrado y  $X$  es numerablemente compacto, entonces  $F$  es numerablemente compacto; se sigue que  $f(F)$  es numerablemente compacto y como  $Y$  es primero numerable, entonces  $f(F)$  es un conjunto cerrado.

Por lo tanto  $f$  es cerrada y como tiene fibras compactas  $f$  es perfecta.  $\square$

**Lema 4.2.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función con fibras compactas, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $f$  es continua,
2.  $f$  es cerrada,
3.  $f$  es numerablemente compacta.

*Demostración.* 1 implica 2. Sea  $F \subset X$  un conjunto cerrado. Como  $F$  es cerrado y  $X$  es numerablemente compacto, entonces  $F$  es numerablemente compacto y como  $f$  es continua se sigue que  $f(F)$  es numerablemente compacto y dado que  $Y$  es primero numerable,  $f(F)$  es un conjunto cerrado.

Por lo tanto  $f$  es cerrada.

2 implica 3. Sea  $K \subset Y$  numerablemente compacto. Sean  $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$  una cubierta abierta numerable de  $f^{-1}(K)$  por conjuntos abiertos de  $X$  y  $\mathcal{N} = \{N \subset \mathbb{N} : N \text{ es finito}\}$  y para cada  $N \in \mathcal{N}$  definamos  $U_N = \bigcup\{U_n : n \in N\}$ .

Para cada  $k \in K$ ,  $f^{-1}(k) \subset X$  es compacto y esto implica que existe  $N \in \mathcal{N}$  tal que  $f^{-1}(k) \subset U_N$ ; se sigue que

$$k \in Y \setminus f(X \setminus U_N) \text{ y } K \subset \bigcup\{Y \setminus f(X \setminus U_N) : N \in \mathcal{N}\}.$$

Como  $K$  es compacto y para cada  $N \in \mathcal{N}$ ,  $Y \setminus f(X \setminus U_N)$  es un conjunto abierto, entonces existen  $N_1, N_2, \dots, N_s \in \mathcal{N}$  tales que  $K \subset \bigcup \{Y \setminus f(X \setminus U_{J_l}) : l \in \{1, 2, \dots, s\}\}$ ; implica que

$$\begin{aligned} f^{-1}(K) &\subset \bigcup \{f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U_{N_l})) : l \in \{1, 2, \dots, s\}\} \\ &= \bigcup \{X \setminus f^{-1}(f(X \setminus U_{N_l})) : l \in \{1, 2, \dots, s\}\} \\ &\subset \bigcup \{X \setminus (X \setminus U_{N_l}) : l \in \{1, 2, \dots, s\}\} \\ &= \bigcup \{U_{N_l} : l \in \{1, 2, \dots, s\}\}. \end{aligned}$$

De aquí se sigue que  $f^{-1}(K)$  es numerablemente compacto.

Por lo tanto  $f$  es numerablemente compacta.

3 implica 1. Sea  $F \subset Y$  un conjunto cerrado. Como  $F$  es cerrado y  $Y$  es numerablemente compacto, entonces  $F$  es numerablemente compacto y, como  $f$  es numerablemente compacta,  $f^{-1}(F)$  es numerablemente compacto y como  $X$  es primero numerable  $f^{-1}(F)$  es un conjunto cerrado.

Por lo tanto  $f$  es continua.  $\square$

**Lema 4.3.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función con  $X$  primero numerable y  $Y$  numerablemente compacto, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $f$  es continua.
2.  $f$  tiene gráfica cerrada.

*Demostración.* 1 implica 2. Sean  $x \in X$  y  $y \in Y$  tales que  $f(x) \neq y$ .

Como  $Y$  es  $T_2$  y  $f(x) \neq y$ , entonces existen conjuntos abiertos  $V, W \subset Y$  tales que

$$f(x) \in V, y \in W \text{ y } V \cap W = \emptyset.$$

Como  $f$  es continua y  $f(x) \in V$ , entonces existe un conjunto abierto  $U \subset X$  tal que  $x \in U$  y  $f(U) \subset V$  que implica que  $f(U) \cap W = \emptyset$ .

Por lo tanto aplicando el Lema 2.14 se sigue que  $\text{Graf}(f)$  es un conjunto cerrado.

2 implica 1. Sea  $F \subset Y$  un conjunto cerrado y  $x \in cl_X(f^{-1}(F))$ .

Como  $X$  es primero numerable y  $x \in cl_X(f^{-1}(F))$  existe una sucesión en  $f^{-1}(F)$ ,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $x_n \rightarrow x$ ; esto implica que  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una

sucesión en  $F$  y, dado que  $Y$  es numerablemente compacto y por lo tanto  $F$  es numerablemente compacto, existe  $y \in F$  tal que  $y \in cl_Y\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ .

Es claro que  $(x, y) \in cl_{X \times Y} Graf(f) = Graf(f)$ . Esto implica que  $f(x) = y$ ; se sigue que  $f(x) \in F$  es decir  $x \in f^{-1}(F)$ .

Por lo tanto  $f$  es continua.  $\square$

**Lema 4.4.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función con fibras compactas, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $f$  es preservadora de numerablemente compactos.
2.  $f$  es cerrada.

*Demostración.* 1 implica 2. Sea  $F \subset X$  un conjunto cerrado.

Como  $F$  es cerrado y  $X$  es numerablemente compacto se tiene que  $F$  es numerablemente compacto y como  $f$  es preservadora de numerablemente compactos  $f(F)$  es numerablemente compacto y como  $Y$  es primero numerable, entonces  $f(F)$  es cerrado.

Por lo tanto  $f$  es cerrada.

2 implica 1. Sea  $K \subset X$  numerablemente compacto.

Como  $K$  es numerablemente compacto y  $X$  es primero numerable  $K$  es cerrado y como  $f$  es cerrada  $f(K)$  es cerrado y dado que  $Y$  es numerablemente compacto,  $f(K)$  es numerablemente compacto.

Por lo tanto  $f$  es preservadora de numerablemente compactos.  $\square$

De los Lemas 4.1-4.4 y Teorema 2.29 tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.5.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función con fibras compactas las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1.  $f$  es perfecta,
2.  $f$  es continua,
3.  $f$  es cerrada,
4.  $f$  es numerablemente compacta,
5.  $f$  tiene gráfica cerrada,
6.  $f$  es preservadora de numerablemente compactos,

7. para todo  $y \in Y$ ,  $C^{-1}(f, y) = \{f^{-1}(y)\}$ .

Del Teorema 4.5 y el hecho de que todo numerablemente compacto  $T_2$  y primero numerable es regular tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 4.6.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función con fibras compactas, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $f$  es perfecta,
2.  $f$  es continua,
3.  $f$  es débilmente continua,
4.  $f$  es  $\theta$ -continua,
5.  $f$  es  $c$ -continua.

## 5 Funciones perfectas en espacios métricos

En esta sección  $(M, d)$ ,  $(N, d')$  son espacios métricos que serán denotados como  $M, N$ . Recordemos que para  $\epsilon > 0$  y  $x \in M$ , la bola abierta con centro en  $x$  y radio  $\epsilon$  es el conjunto

$$B(x, \epsilon) = \{y \in M : d(x, y) < \epsilon\},$$

y que  $U \subset M$  es un conjunto abierto en  $M$  si para cada  $x \in M$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) \subset U$ . Los resultados de esta sección se pueden consultar en alguna de las referencias siguientes: [4], [6], [13] y [14].

**Lema 5.1.** *Si  $x \in M$  y  $\epsilon > 0$ , entonces  $B(x, \epsilon)$  es un conjunto abierto en  $M$ .*

El Lema 2.3 tiene su versión en espacios métricos el cual dice lo siguiente.

**Lema 5.2.** *Si  $A \subset M$  y  $x \in M$ , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $x \in cl_M(A)$ ;
2. existe una sucesión en  $A$ ,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que converge a  $x$ .

**Teorema 5.3.** *Si  $f : M \rightarrow N$  es una función, entonces  $f$  es perfecta si*



1.  $f$  es compacta y
2.  $f$  es preservadora de compactos.

*Demostración.* Sea  $F$  un conjunto cerrado en  $N$  y supongamos que existe  $x \in [cl_M(f^{-1}(F)) \setminus f^{-1}(F)]$ .

Como  $x \in [cl_M(f^{-1}(F)) \setminus f^{-1}(F)]$ , se sigue que  $x \in cl_M(f^{-1}(F))$  y  $x \notin f^{-1}(F)$ ; esto implica que existe una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $x_n \in f^{-1}(F)$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $x_n \rightarrow x$ . Si  $H = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ , es claro que  $H$  es compacto y, si aplicamos la hipótesis 2, se sigue que

$$f(H) = \{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{f(x)\}$$

es compacto y como  $x_n \in f^{-1}(F)$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f(x_n) \in F$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , esto implica que  $f(H) \cap F \neq \emptyset$ .

Es claro que  $[f(H) \setminus \{f(x)\}] \subset F$  y que  $f(H) \cap F$  es compacto; aplicando 1, se sigue que

$$f^{-1}(f(H) \cap F) = H \cap f^{-1}(F)$$

es compacto y, por lo tanto, es un conjunto cerrado. Como  $x_n \rightarrow x$ , para todo conjunto abierto  $U$  tal que  $x \in U$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in U$  para toda  $n > n_0$ , y esto implica que

$$U \cap [H \cap f^{-1}(F)] \neq \emptyset$$

se sigue que  $x \in cl_M(H \cap f^{-1}(F))$  y como  $x \notin f^{-1}(F)$ , entonces  $x \notin [H \cap f^{-1}(F)]$ ; esto implica que

$$x \in [cl_M(H \cap f^{-1}(F)) \setminus (H \cap f^{-1}(F))]$$

pero

$$cl_M(H \cap f^{-1}(F)) = (H \cap f^{-1}(F))$$

lo que es una contradicción; se sigue que  $cl_M(f^{-1}(F)) = f^{-1}(F)$ . Por lo tanto  $f$  es continua.

Ahora sea  $F$  un conjunto cerrado en  $M$ .

Supongamos que existe  $y \in [cl_N(f(F)) \setminus f(F)]$ .

Como  $y \in [cl_N(f(F)) \setminus f(F)]$ , se sigue que  $y \in cl_N(f(F))$  y  $y \notin f(F)$ , por lo tanto existe una sucesión  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $y_n \rightarrow y$  con  $y_n \in f(F)$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Sea  $K = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ . Es claro que  $K$  es compacto. Por la hipótesis 1,

$$f^{-1}(K) = \{f^{-1}(y_n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{f^{-1}(y)\}$$

es compacto; por lo tanto  $f^{-1}(K) \cap F$  es compacto y, por la hipótesis 2, obtenemos que  $f(f^{-1}(K) \cap F)$  es compacto y, por lo tanto, cerrado.

Como  $y_n \rightarrow y$ , para todo conjunto abierto  $V \subset N$  existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $y_n \in V$  para toda  $n > N_0$ ; esto implica que  $V \cap f(F \cap f^{-1}(K)) \neq \emptyset$ ; se sigue que  $y \in cl_N(f(F \cap f^{-1}(K)))$ , y esto implica que  $y \in f(F \cap f^{-1}(K))$  pero  $y \notin f(F \cap f^{-1}(K))$  ya que

$$f(F \cap f^{-1}(K)) \subset f(F) \text{ y } y \notin f(F),$$

que es una contradicción. Se sigue que  $cl_N(f(F)) = f(F)$  y así concluimos que  $f$  es cerrada.

Además es claro que  $f$  tiene fibras compactas.

Por lo tanto  $f$  es perfecta. □

**Corolario 5.4.** *Si  $f : M \rightarrow N$  es una función débilmente continua y compacta, entonces  $f$  es perfecta.*

*Demostración.* Como  $N$  es regular y  $f$  es débilmente continua, por el Teorema 2.19,  $f$  es continua y esto implica que  $f$  es preservadora de compactos y como por hipótesis es compacta, del Teorema 5.3, se tiene que  $f$  es perfecta. □

**Corolario 5.5.** *Si  $f : M \rightarrow N$  es una función  $\theta$ -continua y compacta, entonces  $f$  es perfecta.*

**Corolario 5.6.** *Si  $f : M \rightarrow N$  es una función con  $\text{Graf}(f)$  cerrada y preservadora de compactos, con  $M$  espacio métrico compacto, entonces  $f$  es perfecta.*

*Demostración.* Como  $M$  es compacto, del Lema 2.30  $f$  es compacta y como por hipótesis  $f$  es preservadora de compactos, del Teorema 5.3, se sigue que  $f$  es perfecta. □

**Corolario 5.7.** *Si  $f : M \rightarrow N$  es una función biyectiva, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $f$  es compacta y preservadora de compactos,

2.  $f$  es homeomorfismo.

**Teorema 5.8.** *Si  $f : M \rightarrow N$  es una función, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $f$  es compacta,

2. Si  $f(x_n) \rightarrow y$ , entonces existe  $x \in f^{-1}(y)$  y una subsucesión  $\{x_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  que converge a  $x$ .

*Demostración.* 1. implica 2. Si  $f(x_n) \rightarrow y$ , entonces el conjunto  $K = \{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$  es compacto. Se sigue que  $f^{-1}(K)$  es compacto y tal que  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset f^{-1}(K)$ . Esto implica que existen una subsucesión  $\{x_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  y  $x \in f^{-1}(K)$  tales que  $x_{n_i} \rightarrow x$ .

Afirmamos que  $x \in f^{-1}(y)$ . En caso contrario  $f(x) \neq y$  lo que implica que  $d(f(x), y) = \epsilon > 0$ . Como  $f(x_n) \rightarrow y$ , entonces  $f(x_{n_i}) \rightarrow y$ ; esto implica que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $f(x_{n_i}) \in B(y, \epsilon)$  para toda  $n_i > n_0$  y el conjunto  $H = \{f(x_{n_i}) : n_i > n_0\} \cup \{y\}$  es compacto; se sigue que  $f^{-1}(H)$  es compacto y por lo tanto cerrado lo que no puede ser pues  $x \in (cl_X(f^{-1}(H)) \setminus f^{-1}(H))$ .

Por lo tanto  $x \in f^{-1}(y)$ .

2. implica 1. Sea  $B \subset N$  compacto y  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $f^{-1}(B)$ . Como  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset f^{-1}(B)$  se sigue que  $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset B$ ; esto implica que existe  $y \in Y$  tal que  $f(x_n) \rightarrow y$ , y como  $B$  es compacto se sigue que  $B$  es cerrado y por lo tanto  $y \in B$  así que  $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(B)$ . De aquí concluimos que existen una subsucesión  $\{x_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  y  $x \in f^{-1}(y)$  tales que  $x_{n_i} \rightarrow x$ . Se sigue que  $x \in f^{-1}(B)$ . Por lo tanto  $f$  es compacta.  $\square$

El siguiente resultado es muy conocido pero, dada su importancia, damos su demostración.

**Teorema 5.9.** *Si  $f : M \rightarrow N$  es una función, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $f$  es continua,

2. Si  $x_n \rightarrow x$ , entonces  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

*Demostración.* 1. implica 2. Sean  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $X$ ,  $x \in X$  y  $\epsilon > 0$  tales que  $x_n \rightarrow x$  y  $f(x) \in B(f(x), \epsilon)$ . Como  $f(x) \in B(f(x), \epsilon)$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon)$ . Como  $x \in B(x, \delta)$ , entonces

existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in B(x, \delta)$  para toda  $n > N$  y de aquí  $f(x_n) \in B(f(x), \epsilon)$  para toda  $n > N$ . Por lo tanto  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

2. implica 1. Sean  $A \subset X$  y  $y \in f(\text{cl}_X(A))$ , entonces existe  $x \in \text{cl}_X(A)$  tal que  $f(x) = y$ . Como  $x \in \text{cl}_X(A)$ , entonces existe una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $A$  tal que  $x_n \rightarrow x$  así que, por hipótesis,  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  y  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en  $f(A)$  y esto implica que  $y \in \text{cl}_Y(f(A))$ . Por lo tanto, del Lema 2.10 se sigue que  $f$  es continua.  $\square$

De los Teoremas 5.3, 5.8 y 5.9 tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 5.10.** *Si  $f : M \rightarrow N$  es una función, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $f$  es perfecta,
2. Si  $x_n \rightarrow x$ , entonces  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  y si  $f(x_n) \rightarrow y$ , entonces existen  $x \in f^{-1}(y)$  y una subsucesión de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que converge a  $x$ .

**Definición 5.11.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Diremos que  $f$  satisface la Propiedad del Valor Intermedio (PVI) si para cada  $y \in (f(a), f(b))$  o  $y \in (f(b), f(a))$ , existe  $x \in (a, b)$  tal que  $f(x) = y$ .

**Teorema 5.12.** *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función tal que*

1.  $f$  satisface PVI y
2. para cada  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(y)$  es cerrado,

entonces  $f$  es perfecta.

*Demostración.* Sean  $x_0 \in [a, b]$ ,  $\epsilon > 0$  y  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tales que  $x_0 \in [x_1, x_2]$ .

Por la hipótesis 2.,  $f^{-1}(f(x_0) + \epsilon)$  y  $f^{-1}(f(x_0) - \epsilon)$  son cerrados tales que

$$x_0 \notin f^{-1}(f(x_0) + \epsilon) \text{ y } x_0 \notin f^{-1}(f(x_0) - \epsilon)$$

lo que implica que existen  $\delta_1 > 0$  y  $\delta_2 > 0$  tales que

$$(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap f^{-1}(f(x_0) + \epsilon) = \emptyset \text{ y } (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \cap f^{-1}(f(x_0) - \epsilon) = \emptyset.$$

Eligiendo a  $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$  se sigue que

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap f^{-1}(f(x_0) + \epsilon) = \emptyset \text{ y } (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap f^{-1}(f(x_0) - \epsilon) = \emptyset.$$

Afirmamos que si  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , entonces  $f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ .

Supongamos que existe  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  tal que  $f(x) \notin (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ .

Como  $f(x) \notin (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ , entonces  $f(x) < f(x_0) - \epsilon$  o  $f(x) > f(x_0) + \epsilon$  y como  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , entonces  $x_0 < x$  o  $x < x_0$ .

Supongamos que  $x_0 < x$  y que  $f(x_0) + \epsilon < f(x)$ , entonces existe  $x^* \in (x_0, x)$  tal que  $f(x^*) = f(x_0) + \epsilon$ ; se sigue que  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap f^{-1}(f(x_0) + \epsilon) \neq \emptyset$  lo que es una contradicción. Los otros casos son tratados en forma análoga.

Por lo tanto  $f$  es continua.

Sea  $F \subset [a, b]$  un conjunto cerrado.

Como  $[a, b]$  es compacto y  $F$  es cerrado, entonces  $F$  es compacto; se sigue que  $f(F)$  es compacto; esto implica que  $f(F)$  es cerrado.

Por lo tanto  $f$  es cerrada.

Como  $[a, b]$  es compacto y  $f^{-1}(y)$  es cerrado, entonces  $f^{-1}(y)$  es compacto.

Por lo tanto  $f$  es perfecta.  $\square$

**Corolario 5.13.** *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función inyectiva la cual satisface PVI, entonces  $f$  es perfecta.*

**Corolario 5.14.** *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua con  $f(a) \neq f(b)$ , entonces  $f$  es perfecta.*

**Corolario 5.15.** *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función débilmente continua con  $f(a) \neq f(b)$ , entonces  $f$  es perfecta.*

## Agradecimientos

Los autores agradecen al árbitro el tiempo dedicado a la revisión de este capítulo; sus sugerencias fueron muy útiles para la presentación de esta última versión.

## Bibliografía

- [1] D. R. Andrews and K. Whittlesy, *Closure continuity*, American Mathematical Monthly vol 73 7 (1966) 758-759.

- 
- [2] F. Casarrubias y A. Tamariz, *Elementos de topología general*, UNAM, Aportaciones matemáticas, serie textos, 37, 2015.
- [3] R. Engelking, *General topology*, Heldermann, Sigma series in pure mathematics, vol 6, 1989.
- [4] G. L. Garg and A. Goel, *Perfect maps in metric spaces*, Soochow Journal of Mathematics. Vol 20 **3** (1994), 277-278.
- [5] G. L. Garg and A. Goel, *Perfect maps in compact (countably compact) Spaces*, Internat. J. Math and Math. Sci. Vol 18, **4** (1995) 773-776.
- [6] G. L. Garg and A. Goel, *Convergence and perfect maps in metric spaces*, Indian J. pure appl Math 27, **7** (1996) 633-637.
- [7] G. L. Garg and A. Goel, *On maps: Continuous, closed, perfect, and with closed graph*, Internat. J. Math and Math. Sci. Vol 20, **2** (1997) 405-408.
- [8] A. Goel and G. L. Garg, *Convergence conditions and closed maps of*, Soochow Journal of Mathematics. Vol 33, **2** (2007), 257-261.
- [9] M. Ibarra y A. Martínez, *Condiciones que implican la continuidad de una función real de variable real*, en F. Macías (editor) Matemáticas y sus aplicaciones 4, Fomento editorial BUAP (2014), 65-85.
- [10] N. Levine, *A decomposition of continuity in topological spaces*, American Mathematical Monthly vol 68 **1** (1961) 44-46.
- [11] P. E. Long, *Functions with closed graphs*, American Mathematical Monthly vol 76 **8** (1969) 930-932.
- [12] N. F. G. Martin, *Quasi-continuous functions on product spaces*, Duke Math J. Vol 28 **1** (1961) 39-43.
- [13] I. Tsereteli, *On perfect mappings from  $\mathbb{R}$  to  $\mathbb{R}$* , Georgian Math. Journal, **1** (1994), 5, 567-573.
- [14] C. H. Rowe, *Note on a pair of properties which characterize continuous functions*, Bull. Amer. Math. Soc. vol 32 **3** (1926) 285-287.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

mibarra@fcfm.buap.mx

maga@fcfm.buap.mx

## Capítulo 6

# Límites inversos y continuos indescomponibles

David Herrera Carrasco, Antonio de Jesús Libreros  
López y Fernando Macías Romero  
FCFM, BUAP

### Resumen

En este trabajo abordaremos uno de los continuos más exóticos, los denominados continuos indescomponibles, y como estos pueden ser construidos mediante una herramienta bastante usada en la topología, los límites inversos.

## 1 Introducción

En 1910, L.E.J Brouwer describió un continuo indescomponible que refutó una conjetura hecha por Arthur Moritz Schoenflies de que el límite conjunto de dos conjuntos abiertos, conexos y ajenos en  $\mathbb{R}^2$  era la unión de dos subconjuntos propios cerrados y conexos. Zygmunt Janiszewski describió más de esos continuos indescomponibles, incluida una versión del Arcoiris de Knaster, centrandose en la irreductibilidad de estos continuos. En 1917, Kunizo Yoneyama describió los Lagos de Wada (llamados así por Takeo Wada) cuyo límite común es indescomponible.

Fue hasta la década de 1920 cuando los continuos indescomponibles comenzaron a ser estudiados por la Warsaw School of Mathematics por su propio bien, en lugar de como contraejemplos patológicos y el primero en dar la definición de descomposición fue Stefan Mazurkiewicz. En 1922, Bronisław Knaster describió el pseudo-arco, el primer ejemplo donde todo subcontinuo es un continuo indescomponible.



## 2 Preliminares

Dado un subconjunto  $Y$  de un espacio topológico  $X$ , usaremos  $\text{int}_X(Y)$ ,  $\text{cl}_X(Y)$  y  $\text{Fr}_X(Y)$  para denotar al interior, la cerradura y la frontera de  $Y$  en  $X$ , respectivamente. Recordemos que los abiertos de  $Y$  son los abiertos de  $X$  intersectados con  $Y$ . Diremos que un espacio topológico es no degenerado si tiene más de un punto. Si  $\mathcal{A}$  es una colección de subconjuntos, la unión de sus elementos y la intersección de estos lo denotaremos por  $\bigcup \mathcal{A}$  y  $\bigcap \mathcal{A}$ , respectivamente. Si  $X$  es un espacio y  $\mathcal{A}$  es una colección de subconjuntos de  $X$ , diremos que  $\mathcal{A}$  es una cubierta para  $X$  si  $X \subset \bigcup \mathcal{A}$ .

**Definición 2.1.** Sea  $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$  una colección de espacios topológicos. Dado  $j \in \mathbb{N}$ , la  $j$ -ésima proyección es la función

$$\pi_j : \prod_{i=1}^{\infty} X_i \longrightarrow X_j$$

$$(x_i)_{i=1}^{\infty} \longmapsto x_j$$

La colección  $\mathcal{S} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{\pi_j^{-1}(U) : U \text{ es un abierto de } X_j\}$  es una subbase para  $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ .

Algo importante a resaltar es que las funciones  $\pi_j$  son funciones continuas y abiertas, y obviamente suprayectivas, hechos que estaremos usando más adelante.

**Definición 2.2.** Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Un subconjunto de un continuo que también es un continuo le llamaremos **subcontinuo**.

La definición de conexo y compacto, al igual que muchos resultados sencillos pero importantes sobre estos temas, pueden ser encontradas en muchos libro de topología, por mencionar algunos [1] y [6], para quien guste ahondar más sobre el tema. En la mayoría de los resultados estaremos trabajando con continuos no degenerados, que al ser estos conexos no solo tendrán dos puntos sino tantos como los números reales. A continuación presentamos algunos continuos que estaremos usando más adelante.

**Ejemplo 2.3.**

- (a) Un **arco** es un espacio homeomorfo al intervalo  $[0, 1]$ . Sea  $\alpha : [0, 1] \rightarrow A$  un homeomorfismo, diremos que  $\alpha(0)$  y  $\alpha(1)$  son los puntos extremos del arco  $A$ .

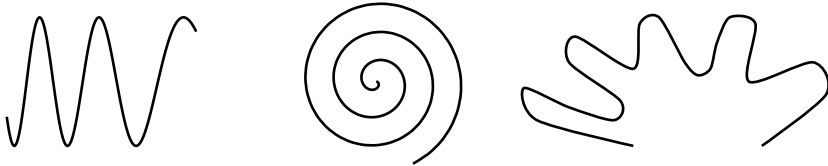


Figura 1: Ejemplos de arcos

- (b) Un **curva cerrada simple** es un espacio homeomorfo a la circunferencia unitaria en el plano  $S^1$ .

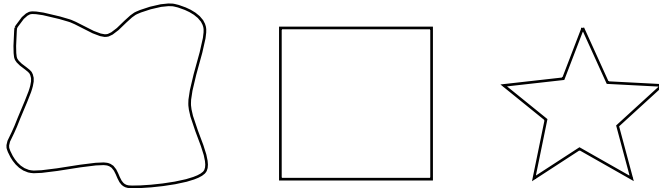


Figura 2: Ejemplos de curvas cerradas simples

- (c) Un **triodo simple**  $T$  es la unión de 3 arcos que únicamente se intersectan en un punto extremo  $v$  de dichos arcos. El punto  $v$  es llamado el **vértice** de  $T$ .

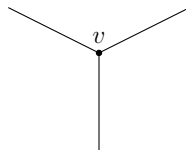


Figura 3: Triodo simple

(d) Sean  $J = \{0\} \times [-1, 1]$  y  $S = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x \in (0, 1]\}$ . Como  $S$  es conexo, tenemos que  $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(S)$  es conexo. Más aún,  $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(S) = J \cup S$  es cerrado y acotado, y por tanto, compacto. Así,  $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(S)$  es un continuo, conocido como el **continuo**  $\text{sen}(\frac{1}{x})$ , véase la Figura 4.

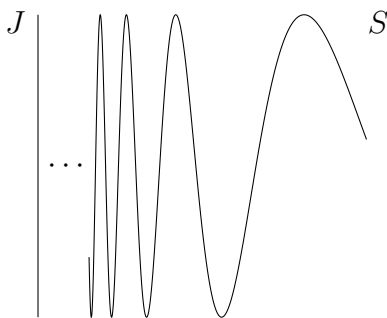


Figura 4: Continuo  $\text{sen}(\frac{1}{x})$

**Definición 2.4.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $A, B$  subconjuntos de  $X$ . Decimos que  $A$  y  $B$  están **separados** si  $\text{cl}_X(A) \cap B = \emptyset$  y  $A \cap \text{cl}_X(B) = \emptyset$ .

La definición anterior aunque parece sencilla nos da una manera alternativa de ver la desconexidad de un espacio, como se prueba en el Teorema 2.5, y que en muchos casos es mejor ya que no depende directamente de conjuntos abiertos.

**Teorema 2.5.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $Z \subset X$  no vacío.  $Z$  es desconexo si y solo si existen  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $X$  no vacíos y separados tales que  $Z = A \cup B$ .

*Demostración.* Supongamos que  $Z$  es desconexo. Entonces existen  $U$  y  $V$  abiertos de  $X$  tales que  $Z \cap U$  y  $Z \cap V$  son no vacíos, ajenos y  $Z \subset U \cup V$ . Sean  $A = Z \cap U$  y  $B = Z \cap V$ . Notemos que  $Z = A \cup B$  y  $A, B$  son no vacíos. Veamos que  $A$  y  $B$  están separados. Supongamos que existe  $p \in \text{cl}_X(A) \cap B$ . Entonces  $p \in \text{cl}_X(A)$  y  $p \in V$ , y por tanto,  $V \cap A \neq \emptyset$ . Luego,  $A \cap B \neq \emptyset$ , lo cual contradice que  $A$  y  $B$  sean ajenos. Así,  $\text{cl}_X(A) \cap B = \emptyset$ . De manera análoga, se prueba que  $A \cap \text{cl}_X(B) = \emptyset$ . Por lo tanto,  $A$  y  $B$  están separados.

Ahora supongamos que existen  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $X$  no vacíos y separados tales que  $Z = A \cup B$ . Sean  $U = X - \text{cl}_X(B)$  y  $V = X - \text{cl}_X(A)$ .

Notemos que  $U$  y  $V$  son abiertos en  $X$  que contienen a  $A$  y  $B$ , respectivamente. Más aún,  $A = Z \cap U$ ,  $B = Z \cap V$  y  $Z \subset U \cup V$ . Por lo tanto,  $Z$  es desconexo.  $\square$

Los tres resultados siguientes, apesar de su poca complejidad, serán muy utiles para obtener resultados importantes sobre los continuos indescomponibles y los límites inversos.

**Lema 2.6.** *Sean  $X$  un espacio conexo y  $Z \subset X$  conexo. Si  $X - Z = A \cup B$  con  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $X$  no vacíos que están separados, entonces  $Z \cup A$  y  $Z \cup B$  son conexos.*

*Demostración.* Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $X$  no vacíos tales que  $A$  y  $B$  están separados y  $X - Z = A \cup B$ . Supongamos que  $Z \cup A$  es desconexo. Entonces existen  $K$  y  $L$  subconjuntos de  $X$  no vacíos y separados tales que  $Z \cup A = K \cup L$ . Como  $Z$  es conexo, tenemos que  $Z$  está contenido en  $K$  o en  $L$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $Z \subset K$ . Luego,  $L \subset A$ . De esto,  $L$  y  $B$  están separados. Notemos que  $X = (B \cup K) \cup L$ . Más aún,  $B \cup K$  y  $L$  están separados, lo cual contradice la conexidad de  $X$ . Por lo tanto,  $Z \cup A$  es conexo. Análogamente,  $Z \cup B$  es conexo.  $\square$

**Lema 2.7.** *Sea  $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$  una colección de espacios métricos compactos tales que para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $X_{i+1} \subset X_i$ . Si  $U$  es un abierto de  $X_1$  tal que  $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \subset U$ , entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $X_N \subset U$ .*

*Demostración.* Sea  $U$  abierto de  $X_1$  tal que  $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \subset U$ . Procedamos por contradicción, es decir, supongamos que para cada  $i \in \mathbb{N}$ , existe  $x_i \in X_i - U$ . Como  $X_1 - U$  es compacto, podemos suponer que  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$  converge a algún punto  $p \in X_1 - U$ . Notemos que para cada  $k \in \mathbb{N}$ , la subsucesión  $\{x_i\}_{i=k}^{\infty}$  esta contenida en  $X_k$ . Por la compacidad de  $X_k$ ,  $p \in X_k$ . De esto,  $p \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \subset U$ , lo cual no es posible puesto que  $p \notin U$ . Por lo tanto, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $X_N \subset U$ .  $\square$

**Teorema 2.8.** *Si  $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$  una colección de continuos tales que para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $X_{i+1} \subset X_i$ , entonces  $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$  es un continuo.*

*Demostración.* Sea  $X_\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ . Notemos que  $X_\infty \neq \emptyset$ , pues en caso contrario por el Lema 2.7, tomando a  $U = \emptyset$ , tendríamos que para algún  $N \in \mathbb{N}$ ,  $X_N = \emptyset$ . Más aún, dado que cada  $X_i$  es un compacto, tenemos que cada  $X_i$  es un cerrado de  $X_1$ . Luego,  $X_\infty$  es cerrado de  $X_1$ , y por tal compacto. Para terminar veamos que  $X_\infty$  es conexo. Para esto, sean  $U$  y  $V$  abiertos de  $X$  y ajenos tales que  $X_\infty \subset U \cup V$ . Por el Lema 2.7, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $X_N \subset U \cup V$ . Como  $X_N$  es conexo, tenemos que  $X_N \subset U$  o  $X_N \subset V$ . Luego,  $X_\infty \subset U$  o  $X_\infty \subset V$ , concluyendo que  $X_\infty$  es conexo. Por lo tanto,  $X_\infty$  es un continuo.  $\square$

### 3 Continuos indescomponibles

**Definición 3.1.** Sea  $X$  un continuo. Se dice que  $X$  es **descomponible** si existen  $A$  y  $B$  subcontinuos propios de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ . Un continuo es **indescomponible** si no es descomponible.

Antes de que uno presenciara la definición anterior, cualquiera podría pensar que todo subcontinuo se puede escribir como la unión de dos subcontinuos propios, ya que comúnmente los continuos que a uno se le ocurren son así. Lo cual genera la pregunta: ¿existirán los continuos indescomponibles? Aunque no podamos responder rápidamente esta pregunta lo que si podemos es buscar que propiedades deben de cumplir estos espacios a partir de su definición, y así darnos una idea de como deben ser estos continuos tan misteriosos.

**Teorema 3.2.** *Un continuo  $X$  es descomponible si y solo si existe un subcontinuo propio con interior no vacío.*

*Demostración.* Sea  $X$  un continuo. Supongamos que  $X$  es descomponible. Entonces existen  $A$  y  $B$  subcontinuos propios de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ . Notemos que  $X - B \subset A$ . Como  $B$  es un subconjunto propio y cerrado de  $X$ , tenemos que  $\emptyset \neq X - B \subset \text{int}_X(A)$ . Así,  $A$  es un subcontinuo propio con interior no vacío.

Ahora, supongamos que existe  $A$  subcontinuo propio de  $X$  con interior no vacío. Consideremos los dos siguientes casos:

**Caso 1.**  $X - A$  es conexo. Entonces  $\text{cl}_X(X - A)$  es cerrado y conexo en  $X$ , y por tanto, un subcontinuo de  $X$ . Notemos que  $\text{int}_X(A) \cap \text{cl}_X(X - A) = \emptyset$ .

Como  $\text{int}_X(A) \neq \emptyset$ , tenemos que  $\text{cl}_X(X - A)$  es un subcontinuo propio de  $X$ . Luego,  $X = A \cup \text{cl}_X(X - A)$ .

**Caso 2.**  $X - A$  es desconexo. Entonces existen  $K, L$  subconjuntos no vacíos de  $X$  separados tales que  $X - A = K \cup L$ . Por el Lema 2.6,  $A \cup K$  y  $A \cup L$  son subcontinuos propios de  $X$  tales que  $X = (A \cup K) \cup (A \cup L)$ .

En cada caso se tiene que  $X$  es la unión de dos subcontinuos propios de  $X$ . Por lo tanto,  $X$  es descomponible.  $\square$

De este teorema se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 3.3.** *Un continuo  $X$  es indescomponible si y solo si todo subcontinuo propio tiene interior vacío.*

Del corolario anterior podemos inferir que en un continuo indescomponible ocurre una de las siguientes condiciones:

- (a) todos sus subcontinuos propios son degenerados o
- (b) a cada subcontinuo propio se le acercan otros subcontinuos.

Con esto en mente podemos ver que en efecto estos continuos son bastante raros, sin embargo con esta observación no es suficiente para poder dar un ejemplo de un continuo indescomponible. Para poder obtener mas propiedades interesantes sobre estos continuos introducamos unos subconjuntos particulares, denominados *composantes*.

## 4 Composantes de un continuo

**Teorema 4.1.** [6, Teorema 5.6] (**Teorema de golpes en la frontera**) Sean  $X$  un continuo y  $E$  un subconjunto propio de  $X$  no vacío. Si  $K$  es una componente de  $E$ , entonces  $\text{cl}_X(K) \cap \text{bd}_X(E) \neq \emptyset$  (o bien,  $\text{cl}_X(K) \cap \text{cl}_X(X - E) \neq \emptyset$ ).

**Corolario 4.2.** Sean  $X$  un continuo y  $E$  un subconjunto propio de  $X$  no vacío. Si  $E$  es abierto de  $X$  y  $K$  es una componente de  $E$ , entonces  $\text{cl}_X(K) - E \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Por el Teorema 4.1,  $\text{cl}_X(K) \cap \text{cl}_X(X - E) \neq \emptyset$ . Como  $E$  es abierto de  $X$ , tenemos que  $\text{cl}_X(K) \cap (X - E) \neq \emptyset$ , o bien,  $\text{cl}_X(K) - E \neq \emptyset$ .  $\square$

**Definición 4.3.** Sean  $X$  un continuo y  $p \in X$ . La **composante** de  $p$  es

$$K(p) = \{q \in X : \text{existe } S \text{ subcontinuo propio de } X \text{ tal que } p, q \in S\}$$

Claramente, la composante de  $p$  también puede definirse como

$$K(p) = \bigcup \{S \subset X : S \text{ subcontinuo propio de } X \text{ que contiene a } p\}.$$

Antes de continuar con algunas propiedades de estos conjuntos veamos algunos ejemplos

**Ejemplo 4.4.**

- (a) Para el intervalo  $[0, 1]$  tenemos que  $K(0) = [0, 1]$  y  $K(1) = (0, 1]$ , y cuando  $p \in (0, 1)$ ,  $K(p) = [0, 1]$ .
- (b) Para la circunferencia unitaria  $S^1$ , la composante de cualquier punto es el continuo, es decir, si  $p \in S^1$ , entonces  $K(p) = S^1$ .
- (c) Para un triodo  $T$  ocurre lo mismo que en la circunferencia  $S^1$ .
- (d) Sea  $X = J \cup S$  el continuo  $\text{sen}(\frac{1}{x})$ , como en el Ejemplo 2.3(d). A diferencia de los continuos antes tratados este tiene propiedades interesantes por lo cual se explicará con un más de detalle sus composantes.

- Para  $p \in S$ .

Claramente si  $q \in S$ , entonces el arco con puntos extremos  $p$  y  $q$  es un subcontinuo propio de  $X$ . Así,  $S \subset K(p)$ . Sea  $e = (1, \text{sen}(1))$ .

Sea  $p \neq e$  y  $A$  el arco con extremos  $p$  y  $e$ . Dado  $q \in J$ , tenemos que  $q$  y  $p$  pertenecen al continuo  $(X - A) \cup \{p\}$ , el cual no es  $X$ , aunque es homeomorfo a  $X$ . Así,  $J \subset K(p)$ . Por lo tanto,  $K(p) = X$ .

Sea  $q \in J$  y  $Y$  un subcontinuo de  $X$  que contiene a  $q$  y  $e$ . Entonces  $S \subset Y$ . Al ser  $Y$  un continuo, es un conjunto cerrado y por tanto  $Y$  contiene la cerradura de  $S$ , es decir,  $X \subset Y$  o mejor dicho  $Y$  debe ser  $X$ . De esto que ningún punto de  $J$  pertenece a  $K(e)$ . Por lo tanto,  $K(e) = S$ .

- Para  $p \in J$ .

Claramente si  $q \in J$ , entonces el arco con puntos extremos  $p$  y  $q$  es un subcontinuo propio de  $X$ . Así,  $J \subset K(p)$ . Más aún, para  $q \in S -$

$\{e\}$  tenemos que  $q$  y  $p$  pertenecen al continuo  $(X - A) \cup \{q\}$ , donde  $A$  es el arco con puntos extremos  $q$  y  $e$ . Así,  $S - \{e\} \subset K(p)$ . Sin embargo, como hemos visto antes el único continuo que contiene a  $e$  y  $p$  es  $X$ , y por tanto,  $p \notin K(p)$ . Por lo tanto,  $K(p) = X - \{e\}$ .

Resumiendo, las componentes de  $X$  son  $S$ ,  $X - \{e\}$  y  $X$ .

Teniendo ya una idea de como son las componentes veamos que propiedades en general tienen estos conjuntos.

**Lema 4.5.** *Sea  $X$  un continuo. Si  $C$  es un subcontinuo propio de  $X$ , entonces existe  $D$  subcontinuo propio de  $X$  tal que  $C \subset D$  y  $C \neq D$ .*

*Demostración.* Sea  $C$  subcontinuo propio de  $X$ . Entonces existe  $p \in X - C$ . Como  $X$  es regular, existe  $V$  abierto de  $X$  tal que

$$C \subset V \subset \text{cl}_X(V) \subset X - \{p\}.$$

Sea  $D$  la componente de  $\text{cl}_X(V)$  tal que  $C \subset D$ . Notemos que  $D$  es cerrado y en consecuencia compacto. Así,  $D$  es un subcontinuo propio de  $X$ , porque  $p \notin D$ . Luego, por el Teorema 4.1,  $D \cap \text{bd}_X(\text{cl}_X(V)) \neq \emptyset$ . Notemos que  $\text{bd}_X(\text{cl}_X(V)) = \text{bd}_X(V)$ . Así,  $D \cap \text{bd}_X(V) \neq \emptyset$ . En consecuencia,  $D \neq C$ .  $\square$

**Teorema 4.6.** *Las componentes de un continuo son conjuntos densos y conexos.*

*Demostración.* Sean  $X$  un continuo y  $p \in X$ . Como  $K(p)$  es la unión de los subcontinuos propios que contienen a  $p$ , tenemos que  $K(p)$  es conexo. Veamos que  $K(p)$  es denso. Supongamos que  $\text{cl}_X(K(p)) \neq X$ . Notemos que  $\text{cl}_X(K(p))$  es un subcontinuo propio de  $X$ . Por el Lema 4.5, existe  $S$  subcontinuo propio de  $X$  tal que  $\text{cl}_X(K(p)) \subset S$  y  $\text{cl}_X(K(p)) \neq S$ . Como  $p \in S$ , tenemos que  $S \subset K(p) \subset \text{cl}_X(K(p))$ . En consecuencia,  $S = \text{cl}_X(K(p))$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $K(p)$  es denso en  $X$ .  $\square$

**Teorema 4.7.** *Si  $X$  es un continuo y  $p \in X$ , entonces  $X - K(p)$  es conexo.*

*Demostración.* Si  $K(p) = X$ , entonces se tiene lo deseado. Supongamos que  $K(p) \neq X$  y  $X - K(p)$  no es conexo. Sean  $U$  y  $V$  abiertos de  $X$  y ajenos tales que  $U \cap (X - K(p))$  y  $V \cap (X - K(p))$  son no vacíos y  $X - K(p) \subset U \cup V$ . Notemos que  $\text{cl}_X(U) \cap V = \emptyset$ . Luego,  $(\text{cl}_X(U) - U) \cap (U \cup V) = \emptyset$ . Sea  $Q$



componente de  $U$  tal que  $Q \cap (X - K(p)) \neq \emptyset$ . Como  $U \neq X$ , por el Corolario 4.2, tenemos que  $\text{cl}_X(Q) - U \neq \emptyset$ . Sea  $r \in \text{cl}_X(Q) - U$ , entonces  $r \in \text{cl}_X(U) - U$ . Luego,  $r \in K(p)$ . Sea  $S$  subcontinuo propio de  $X$  tal que  $r, p \in S$ . Notemos que  $S \cup \text{cl}_X(Q)$  es continuo que contiene a  $p$ . Si  $S \cup \text{cl}_X(Q) \neq X$ , entonces  $\text{cl}_X(Q) \subset K(p)$ , lo cual contradice como se tomo  $Q$ . Así,  $S \cup \text{cl}_X(Q) = X$ . Como  $\text{cl}_X(U) \cap V = \emptyset$ , tenemos que  $\text{cl}_X(Q) \cap V = \emptyset$ . En consecuencia,  $V \subset S \subset K(p)$ , es decir,  $V \cap (X - K(p)) = \emptyset$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $X - K(p)$  es conexo.  $\square$

Los dos resultados anteriores se pueden corroborar con el Ejemplo 4.4. Sin embargo lo que más nos interesa es ver que propiedades cumplen las composantes en los continuos indescomponibles y para esto necesitaremos de los dos siguientes resultados.

**Teorema 4.8.** *Toda composante de un continuo es unión numerable de subcontinuos propios.*

*Demostración.* Sea  $X$  un continuo y  $K(p)$  una composante de  $X$ . Como  $X$  es un continuo, entonces  $X$  posee un base numerable  $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sean  $U_n = B_n - \{p\}$  y  $C_n$  la componente de  $X - U_n$  que contiene a  $p$ . Notemos que cada  $C_n$  es un subcontinuo propio de  $X$  que contiene a  $p$ . En consecuencia  $\bigcup \{C_n : n \in \mathbb{N}\} \subset K(p)$ . Ahora, dado  $q \in K(p)$ , existe  $S_q$  subcontinuo propio de  $X$  tal que  $p, q \in S_q$ . Luego,  $X - S_q$  es un abierto de  $X$ , por lo que existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $B_m \subset X - S_q$ . Así,  $S_q$  es un subconjunto conexo de  $X - U_m$  que contiene a  $p$ . En consecuencia,  $S_q \subset C_m$ , en particular,  $q \in C_m$ . De esto,  $K(p) \subset \bigcup \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Concluyendo así la prueba.  $\square$

**Teorema 4.9. (Teorema de Baire.)** *Sean  $X$  un continuo y  $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$  una colección de subcontinuos propios de  $X$ . Si cada  $S_n$  tiene interior vacío, entonces  $\bigcup S_n$  tiene interior vacío.*

*Demostración.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $U_n = X - S_n$ . Como  $\text{int}_X(S_n) = \emptyset$ , entonces  $U_n$  es denso y abierto de  $X$ . Sea  $V$  abierto de  $X$  y no vacío. Así, existen  $X_0 \in X$  y  $r_0 > 0$  tal que  $B(x_0, r_0) \subset V$ .

**Afirmación:** existen  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  sucesión en  $X$  y  $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$  sucesión en  $\mathbb{R}^+$  tales que  $B(x_n, 2r_n) \subset U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$  y  $r_n < \frac{1}{n}$ .

En efecto, sea  $n \in \mathbb{N}$ . Supongamos que  $x_m$  y  $r_m$  ya están elegidos para  $m < n$ . Como  $U_n$  es denso, existe  $x_n \in U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$ . Al ser  $U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$

abierto de  $X$ , existe  $r_n > 0$  tal que  $r_n < \frac{1}{n}$  y  $B(x_n, 2r_n) \subset U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$ . Concluyendo así la prueba de la afirmación.

Notemos que para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B(x_n, 2r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \subset V$ . De esto,  $d(x_n, x_{n+1}) < r_n < \frac{1}{n}$ . Por tanto,  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy. Como  $X$  es compacto, existe  $x \in X$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $r_n > 0$ , por la convergencia de  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , existe  $n_0 > n$  tal que  $d(x, x_{n_0}) < r_n$ . Así,  $d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_n) < r_n + r_n = 2r_n$ , es decir,  $x \in B(x_n, 2r_n)$ . Como  $B(x_n, 2r_n) \subset U_n$ , tenemos que  $x \in \bigcap U_n$ . De esto,  $x \in \bigcap U_n \cap V$ . Por lo tanto,  $\bigcap U_n$  es denso en  $X$ . Finalmente, como  $X - \bigcap U_n = \bigcup (X - U_n) = \bigcup S_n$ ,  $\bigcup S_n$  tiene interior vacío.  $\square$

En el Ejemplo 4.4 se puede observar que el continuo siempre resulta ser una composante, el siguiente resultado nos afirma que los únicos continuos que satisfacen esto son los continuos descomponibles.

**Teorema 4.10.** *Sea  $X$  un continuo.  $X$  es descomponible si y solo si  $X$  es composante de alguno de sus puntos.*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es descomponible. Entonces existen  $A$  y  $B$  subcontinuos propios de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ . Por la conexidad de  $X$ , tenemos que  $A \cap B \neq \emptyset$ . Sea  $p \in A \cap B$ . Luego,  $A \subset K(p)$  y  $B \subset K(p)$ . Por lo tanto,  $K(p) = X$ .

Ahora, supongamos que existe  $p \in X$  tal que  $K(p) = X$ . Luego, por el Teorema 4.8,  $X = \bigcup S_n$ , donde cada  $S_n$  es un subcontinuo propio de  $X$ . Por el Teorema 4.9,  $S_m$  tiene interior no vacío, para algún  $m \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto, por el Teorema 3.2,  $X$  es descomponible.  $\square$

Si  $X$  es un continuo indescomponible, del Teorema 4.10 se puede inferir lo siguiente:

- (a)  $X$  no es una composante,
- (b)  $X$  tiene al menos dos composantes y
- (c) para cada  $p \in X$  existe  $q \in X$  tal que todo subcontinuo propio que contiene a  $p$  no contiene a  $q$ .

Por último veamos una propiedad de las composantes en los continuos indescomponibles que es bastante sencilla pero interesante.

**Teorema 4.11.** *Si  $X$  es un continuo indescomponible y  $K(p)$  una composante de  $X$ , entonces  $K(p)$  es composante de cada uno de sus elementos.*

*Demostración.* Sea  $q \in K(p)$ , entonces existe  $S_q$  subcontinuo propio de  $X$  tal que  $p, q \in S_q$ . Veamos que  $K(q) = K(p)$ . Dado  $a \in K(q)$ , existe  $S_a$  subcontinuo propio de  $X$  tal que  $q, a \in S_a$ . Luego,  $S_q \cup S_a$  es un subcontinuo de  $X$ . Más aún, por la indescomponibilidad de  $X$ ,  $S_q \cup S_a$  es un subcontinuo propio de  $X$  que contiene a  $p$  y a  $a$ . En consecuencia,  $K(q) \subset K(p)$ . Similarmente se tiene la otra contención, concluyendo así la prueba.  $\square$

**Corolario 4.12.** *Si  $X$  es un continuo indescomponible, entonces las componentes de  $X$  son ajenas dos a dos.*

*Demostración.* Sean  $K(p)$  y  $K(q)$  componentes de  $X$  distintas. Supongamos que  $K(p) \cap K(q) \neq \emptyset$ . Sea  $a \in K(p) \cap K(q)$ . Luego, por el Teorema 4.11,  $K(p) = K(a) = K(q)$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $K(p)$  y  $K(q)$  son ajenas.  $\square$

Del Corolario 4.12 podemos ver que las componentes forman una partición para los continuos indescomponibles, y por tanto una relación de equivalencia. Resumiendo las propiedades que hemos visto podemos decir que las componentes de un continuo indescomponible son conjuntos ajenos, densos y conexos con complemento conexo. Con esto podemos darnos una mejor idea de como son estos espacios.

Al ser las componentes una partición para los continuos indescomponibles, una idea para contruir uno sería empezando por las componentes, mediante la unión numerable de continuos, para luego unirlos de tal manera que cada una sea densa en la unión. Sin embargo, también habría que cuidar que la unión sea un continuo haciendo más difícil este proceso.

Cuando se presentan dificultades para contruir un espacio es común recurrir a otros métodos, como los espacios cociente y las intersecciones anidadas, aunque en este caso lo que usaremos serán los denominados límites inversos.

## 5 Límites inversos

**Definición 5.1.** Sea  $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$  una colección de espacios topológicos, y para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $f_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$  una función continua. A  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$  se le conoce como **sistema inverso**.

(a) El **límite inverso** de  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ , denotado por  $\varprojlim \{X_i, f_i\}$ , es el subespacio de  $\prod_{i=1}^\infty X_i$  definido por

$$\varprojlim \{X_i, f_i\} = \left\{ (x_i)_{i=1}^\infty \in \prod_{i=1}^\infty X_i : \text{para cada } i \in \mathbb{N}, f(x_{i+1}) = x_i \right\}.$$

(b) Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea

$$L_n(X_i, f_i) = \left\{ (x_i)_{i=1}^\infty \in \prod_{i=1}^\infty X_i : \text{para cada } i \leq n, f(x_{i+1}) = x_i \right\}.$$

**Teorema 5.2.** *Sea  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  un sistema inverso. Entonces*

(a) *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $L_{n+1}(X_i, f_i) \subset L_n(X_i, f_i)$ ,*

(b) *para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $L_n(X_i, f_i)$  es homeomorfo a  $\prod_{i=n+1}^\infty X_i$  y*

(c)  $\varprojlim \{X_i, f_i\} = \bigcap_{n=1}^\infty L_n(X_i, f_i)$

*Demostración.* Claramente (a) y (c) se cumplen. Para (b), sea  $n \in \mathbb{N}$  definamos

$$\begin{aligned} h : L_n(X_i, f_i) &\longrightarrow \prod_{i=n+1}^\infty X_i \\ (x_i)_{i=1}^\infty &\longmapsto (x_i)_{i=n+1}^\infty \end{aligned}$$

Note que  $h$  es una función biyectiva. Veamos que es continua y abierta. Sean

$$\begin{aligned} \pi_j : \prod_{i=1}^\infty X_i &\longrightarrow X_j & p_j : \prod_{i=n+1}^\infty X_i &\longrightarrow X_{j+n} \\ (x_i)_{i=1}^\infty &\longmapsto x_j & (x_i)_{i=n+1}^\infty &\longmapsto x_{j+n} \end{aligned}$$

Sea  $\pi_j^* = \pi_j|_{L_n(X_i, f_i)}$ . Notemos que  $p_j \circ h = \pi_{j+n}^*$ . Sabemos que los subbasicos de  $\prod_{i=n+1}^\infty X_i$  son de la forma  $p_j^{-1}(U)$ , donde  $U$  es un abierto de  $X_{j+n}$ . Además,

$$h^{-1}(p_j^{-1}(U)) = (p_j \circ h)^{-1}(U) = \pi_{j+n}^{*-1}(U)$$

Como  $\pi_{j+n}^{-1}(U)$  es un abierto de  $L_n(X_i, f_i)$ , concluimos que  $h$  es continua. Por otro lado los subbasicos de  $L_n(X_i, f_i)$  son de la forma  $\pi_j^{*-1}(V)$ , donde  $V$  es un abierto de  $X_j$ . Para  $j \leq n$ , tenemos que

$$h(\pi_j^{*-1}(V)) = \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i.$$

Sea  $j > n$ . Entonces

$$h(\pi_j^{*-1}(V)) = (\pi_j^* \circ h^{-1})^{-1}(V) = p_{j-n}^{-1}(V).$$

Como  $p_{j-n}^{-1}(V)$  es un abierto de  $\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ , concluimos que  $h$  es abierta. Por lo tanto,  $h$  es un homeomorfismo. □

Usando los Teoremas 2.8 y 5.2 obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 5.3.** *Sea  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$  un sistema inverso. Si cada  $X_i$  es un continuo, entonces  $\varprojlim \{X_i, f_i\}$  es un continuo.*

Con este último resultado ya sabemos como contruir continuos mediante los límites inversos, sin embargo nuestro objetivo es obtener un continuo indescomponible por lo que es necesario agregar condiciones al sistema inverso para obtener lo que deseamos y aunque uno pensaria que debería de ser una condición complicada, este no es el caso, la condición es bastante sencilla de comprender y la presentamos en la siguiente definición.

**Definición 5.4.** Un  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$  un sistema inverso donde cada  $X_i$  es un continuo es llamado un **sistema inverso indescomponible** siempre que para cada  $i \in \mathbb{N}$ , si  $A_{i+1}$  y  $B_{i+1}$  son subcontinuos de  $X_{i+1}$  tales que  $X_{i+1} = A_{i+1} \cup B_{i+1}$ , entonces  $f_i(A_{i+1}) = X_i$  o  $f_i(B_{i+1}) = X_i$ .

Antes de probar que el límite de un sistema inverso indescomponible es un continuo indescomponible probemos el siguiente resultado que será útil para ese y otros resultados posteriores.

**Lema 5.5.** *Sea  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$  un sistema inverso de espacios métricos con límite inverso  $X_{\infty}$ . Si  $K$  es un subconjunto compacto de  $X_{\infty}$ , entonces  $\{\pi_i(K), f_i|_{\pi_{i+1}(K)}\}_{i=1}^{\infty}$  es un sistema inverso con funciones suprayectivas y*

$$\varprojlim \{\pi_i(K), f_i|_{\pi_{i+1}(K)}\} = K = \left[ \prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(K) \right] \cap X_{\infty}.$$

*Demostración.* Notemos que para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $f_i(\pi_{i+1}(K)) = \pi_i(K)$ . Por lo tanto,  $\{\pi_i(K), f_i|_{\pi_{i+1}(K)}\}_{i=1}^{\infty}$  es un sistema inverso con funciones suprayectivas. Además, no es difícil ver que

$$\lim_{\leftarrow} \{\pi_i(K), f_i|_{\pi_{i+1}(K)}\} = \left[ \prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(K) \right] \cap X_{\infty}.$$

Sea  $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in X_{\infty}$  tal que cada  $x_i \in \pi_i(K)$ . Entonces para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $K \cap \pi_i^{-1}(x_i) \neq \emptyset$ . Sea  $K_i = K \cap \pi_i^{-1}(x_i)$ . Además, por la continuidad de  $\pi$ , tenemos que  $K_i$  es un cerrado del compacto  $K$ , y por tanto,  $K_i$  es compacto. Sea  $i \in \mathbb{N}$ . Veamos que  $K_{i+1} \subset K_i$ . Dado  $x \in K_{i+1}$ , tenemos que  $x \in K$  y  $\pi_{i+1}(x) = y_{i+1}$ . Luego,  $\pi_i(x) = f_i(\pi_{i+1}(x)) = f_i(y_{i+1}) = y_i$ , así,  $x \in \pi_i^{-1}(y_i)$ . De esto,  $x \in K_i$ , y por tanto,  $K_{i+1} \subset K_i$ . Notemos que  $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset$ , pues en caso contrario por el Lema 2.7, tomando a  $U = \emptyset$ , tendríamos que para algún  $N \in \mathbb{N}$ ,  $K_N = \emptyset$ , lo cual sería una contradicción. Así, existe  $p \in K$  tal que para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \pi_i^{-1}(x_i)$ . En consecuencia,  $x = p \in K$ . Con esto hemos probado que

$$\left[ \prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(K) \right] \cap X_{\infty} \subset K.$$

Claramente,

$$K \subset \left[ \prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(K) \right] \cap X_{\infty}.$$

Con esto concluimos la prueba del resultado.  $\square$

**Teorema 5.6.** Si  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$  es un sistema inverso indescomponible con límite inverso  $X_{\infty}$ , entonces  $X_{\infty}$  es un continuo indescomponible.

*Demostración.* Por el Teorema 5.3 sabemos que  $X_{\infty}$  es un continuo. Para probar que  $X_{\infty}$  es indescomponible tomemos  $A$  y  $B$  subcontinuos de  $X_{\infty}$  tal que  $X_{\infty} = A \cup B$ . Probaremos que  $A = X_{\infty}$  o  $B = X_{\infty}$ . Notemos que para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$X_{i+1} = \pi_{i+1}(X_{\infty}) = \pi_{i+1}(A) \cup \pi_{i+1}(B).$$

Como  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$  es un sistema inverso indescomponible y  $\pi_{i+1}(A)$  y  $\pi_{i+1}(B)$  son subcontinuos de  $X_{i+1}$ , tenemos que  $f_i(\pi_{i+1}(A)) = X_i$  o  $f_i(\pi_{i+1}(B)) = X_i$ . Además,  $f_i(\pi_{i+1}(A)) = \pi_i(A)$  y  $f_i(\pi_{i+1}(B)) = \pi_i(B)$ . De esto concluimos que

para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\pi_i(A) = X_i \circ \pi_i(B) = X_i$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\pi_j(A) = X_j$  para una cantidad infinita de  $j$ . Sea  $i \in \mathbb{N}$ . Entonces existe  $j \in \mathbb{N}$  mayor a  $i$  tal que  $\pi_{j+1}(A) = X_{j+1}$ . Notemos que

$$\pi_i(A) = f_i \circ \cdots \circ f_j \circ \pi_{j+1}(A) = f_i \circ \cdots \circ f_j(X_{j+1})$$

De la Definición 5.4, podemos deducir que cada  $f_i$  es suprayectiva, concluyendo que  $\pi_i(A) = X_i$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Usando el Lema 5.5 tenemos que  $A = X_\infty$ . Por lo tanto,  $X_\infty$  es un continuo indescomponible.  $\square$

Con ayuda del teorema anterior podemos contruir continuos indescomponibles apartir de continuos, los cuales no necesitan ser complejos, como se puede observar en los Ejemplos 5.7 y 5.8.

**Ejemplo 5.7.** Sea  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & , x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & , x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

La función  $T$  es conocida como la **función tienda**, por la forma que tiene su gráfica, véase la Figura 5. Además, es una de las funciones más usadas en los sistemas dinámicos.

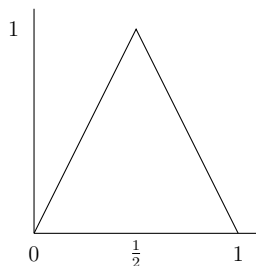


Figura 5: Gráfica de la función tienda

Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , tomemos a  $f_i = T$  y a  $X_i = [0, 1]$ . Veamos que  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  es un sistema inverso indescomponible. Sean  $i \in \mathbb{N}$  y  $A_{i+1}, B_{i+1}$  subcontinuos de  $X_{i+1}$  tales que  $X_{i+1} = A_{i+1} \cup B_{i+1}$ . Probemos que  $f_i(A_{i+1}) = X_i$  o  $f_i(B_{i+1}) = X_i$ . Notemos que si uno de los subcontinuos consiste de un solo punto, entonces el otro necesariamnete debe ser  $X_{i+1}$ , y como  $f_i$  es suprayectiva obtendriamos lo deseado. De esto, podemos suponer que  $A_{i+1}$  y  $B_{i+1}$  son

continuos no degenerados. Como  $X_{i+1} = [0, 1]$ , tenemos que  $A_{i+1}$  y  $B_{i+1}$  son intervalos. Podemos suponer que  $0 \in A_{i+1}$ .

**Caso 1.** Si  $1 \in A_{i+1}$ , entonces  $A_{i+1} = [0, 1]$ . Luego,

$$f_i(A_{i+1}) = T([0, 1]) = [0, 1] = X_i.$$

**Caso 2.** Si  $1 \notin A_{i+1}$ , entonces  $1 \in B_{i+1}$ . Como  $\frac{1}{2} \in A_{i+1}$  o  $\frac{1}{2} \in B_{i+1}$ , tenemos que  $[0, \frac{1}{2}] \subset A_{i+1}$  o  $[\frac{1}{2}, 1] \subset B_{i+1}$ . Luego

$$[0, 1] = T([0, \frac{1}{2}]) \subset f_i(A_{i+1}) \text{ o } [0, 1] = T([\frac{1}{2}, 1]) \subset f_i(B_{i+1}).$$

Por lo tanto,  $f_i(A_{i+1}) = X_i$  o  $f_i(B_{i+1}) = X_i$ .

Con esto hemos probado que  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$  es un sistema inverso indescomponible. Por el Teorema 5.6,  $\varprojlim \{X_i, f_i\}$  es un continuo indescomponible.

Una construcción geométrica del continuo del Ejemplo 5.7 se describe a continuación. Denotemos por  $C_0$  al conjunto de cantor y para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea

$$C_n = \{c \in C_0 : \frac{2}{3^n} \leq c \leq \frac{1}{3^{n-1}}\}.$$

Para cada  $c \in C_0$ , sea

$$S_{(0,c)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (c - \frac{1}{2})^2 \text{ y } y \geq 0\},$$

la semicircunferencia superior con centro  $(\frac{1}{2}, 0)$  tal que  $(c, 0)$  es un extremo de  $S_{(0,c)}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $c \in C_n$ , sea

$$S_{(n,c)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \frac{5}{2 \cdot 3^n})^2 + y^2 = (c - \frac{5}{2 \cdot 3^n})^2 \text{ y } y \leq 0\},$$

la semicircunferencia inferior con centro  $(\frac{5}{2 \cdot 3^n}, 0)$  tal que  $(c, 0)$  es un extremo de  $S_{(n,c)}$ . Definimos, para cada  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , a  $S_n = \bigcup \{S_{(n,c)} : c \in C_n\}$ . A la unión de los  $S_n$  se le conoce como el **Arcoiris de Knaster**, al cual denotaremos por  $\mathcal{K}$ , véase la Figura 6. Como para cada semicircunferencia superior existe una semicircunferencia inferior que lo intersecta y viceversa, tenemos  $\mathcal{K}$  es conexo. Más aún, es cerrado y acotado, puesto que  $\text{Fr}_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ . De esto,  $\mathcal{K}$  es compacto, y por lo tanto, un continuo.



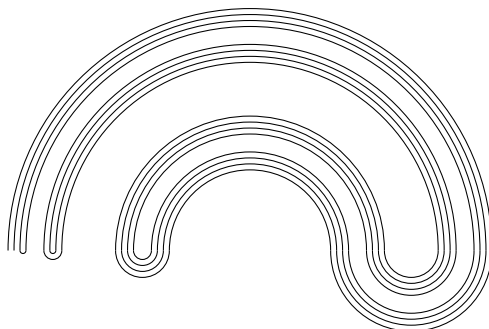


Figura 6: Arcoiris de Knaster

**Ejemplo 5.8.** Sea  $S^1$  la circunferencia unitaria en  $\mathbb{R}^2$ . Definimos a  $P^2 : S^1 \rightarrow S^1$  como  $P^2((\cos(\theta), \text{sen}(\theta))) = (\cos(2\theta), \text{sen}(2\theta))$ .

Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , tomemos a  $f_i = P^2$  y a  $X_i = S^1$ . Veamos que  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  es un sistema inverso indescomponible. Como se puede notar en el Ejemplo 5.7, bastará probar que  $P^2(A) = S^1$  o  $P^2(B) = S^1$  para subcontinuos  $A$  y  $B$  de  $S^1$  tales que  $S^1 = A \cup B$ . Notemos que si  $A$  o  $B$  consiste de un solo punto o es  $S^1$ , el resultado sería cierto. De esto podemos suponer que  $A$  y  $B$  son subcontinuos propios de  $S^1$  no degenerados. Entonces  $A$  y  $B$  son arcos, véase la Figura 7.

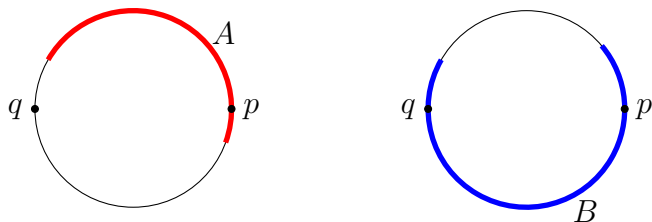


Figura 7: Subcontinuos propios de  $S^1$

Claramente, por la conexidad de  $S^1$ ,  $A \cap B \neq \emptyset$ . Sean  $p \in A \cap B$  y  $q \in S^1$  el punto antipodal de  $p$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $q \in B$ . Sea  $\theta_1 \in [0, 2\pi)$  tales que  $p = (\cos(\theta_1), \text{sen}(\theta_1))$ . Como  $q$  es el punto antipodal de  $p$ , entonces  $q = (\cos(\theta_1 + \pi), \text{sen}(\theta_1 + \pi))$ . Sean

$$B_1 = \{(\cos(\theta), \text{sen}(\theta)) : \theta \in [\theta_1, \theta_1 + \pi]\} \text{ y}$$

$$B_2 = \{(\cos(\theta), \text{sen}(\theta)) : \theta \in [\theta_1 + \pi, \theta_1 + 2\pi]\}.$$

Por la continuidad de  $P^2$ , sabemos que  $P^2(B_1)$  y  $P^2(B_2)$  son subcontinuos de  $S^1$  no degenerados. Como

$$P^2((\cos(\theta_1), \text{sen}(\theta_1))) = (\cos(2\theta_1), \text{sen}(2\theta_1)) = P^2((\cos(\theta_1 + \pi), \text{sen}(\theta_1 + \pi))),$$

tenemos que  $P^2(B_1) = S^1$ . Similarmente  $P^2(B_2) = S^1$ . Como,  $p, q \in B$ , entonces  $B_1 \subset B$  o  $B_2 \subset B$ . En cualquier caso concluimos que  $P^2(B) = S^1$ . Por lo tanto,  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  es un sistema inverso indescomponible. Por el Teorema 5.6,  $\varprojlim \{X_i, f_i\}$  es un continuo indescomponible.

Al igual que el Ejemplo 5.7, el ejemplo anterior también tiene una construcción geométrica en  $\mathbb{R}^3$  mediante la intersección anidada de continuos, que explicamos a continuación.

Sea  $T_1$  un toro sólido, el cual es un espacio homeomorfo al producto cartesiano  $S^1 \times D$  donde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Luego, construimos otro toro sólido  $T_2$  contenido en  $T_1$  de tal manera que de dos vueltas dentro de  $T_1$ , véase la Figura 8.

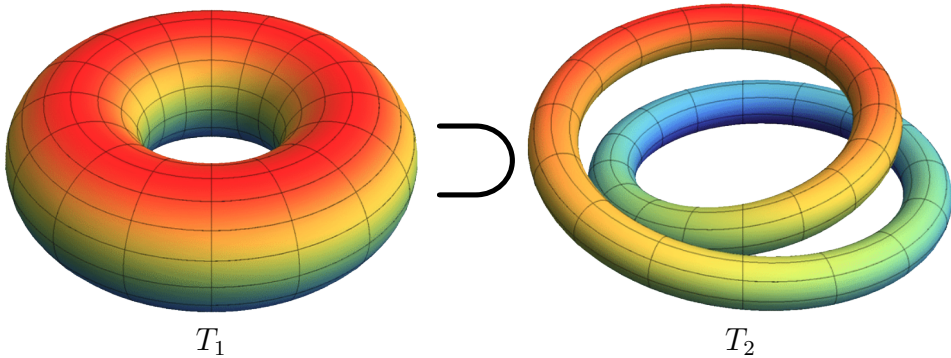


Figura 8: Toros sólidos  $T_1$  y  $T_2$

Similarmente, construimos un toro sólido  $T_3$  contenido en  $T_2$  que de dos vueltas dentro de este. Repitiendo esta construcción obtenemos una sucesión de toros sólidos  $\{T_n\}$  tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_{n+1} \subset T_n$  y  $T_{n+1}$  da dos vueltas dentro de  $T_n$ , véase la Figura 9.

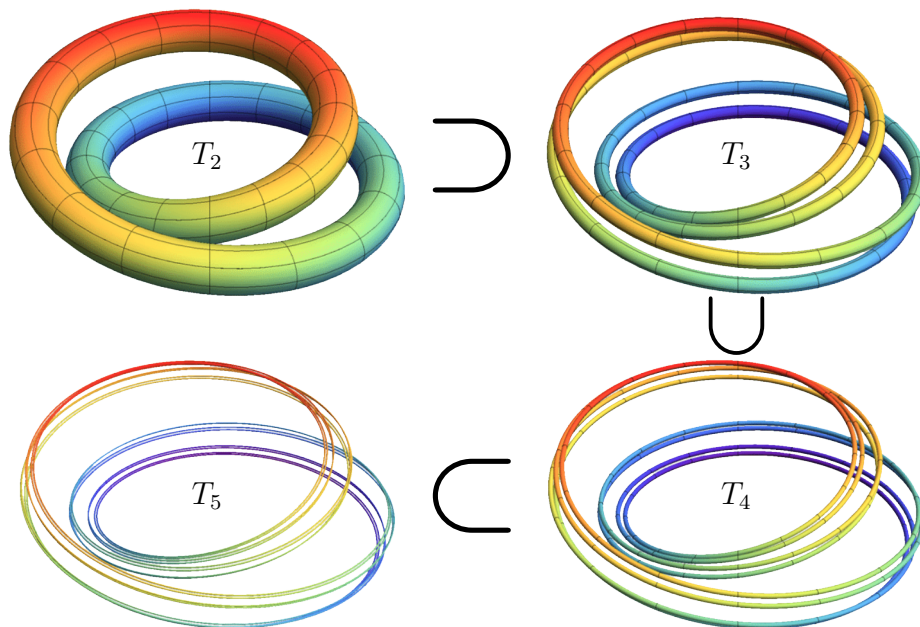


Figura 9: Sucesión de toros sólidos

Por le Teorema 2.8, sabemos que  $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$  es un continuo, el cual es conocido como el **Solenoide Diádico**.

Con estos ejemplos nos ha quedado claro que los límites inversos son muy útiles para construir espacios bastante extravagantes, sin embargo los límites inverso no solo sirven para contruir continuos sino también nos ayuda a estudiar propiedades sobre estos como se puede observar el los Teoremas 5.10 y 5.11

**Lema 5.9.** *Sea  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$  un sistema inverso de espacios métricos con límite inverso  $X_{\infty}$ . Si  $A$  y  $B$  son subconjuntos compactos de  $X_{\infty}$ , entonces*

$$\varprojlim \{C_i, f_i|_{C_{i+1}}\} = C,$$

donde  $C = A \cap B$  y para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $C_i = \pi_i(A) \cap \pi_i(B)$ .

*Demostración.* Como  $A$  y  $B$  son compactos, tenemos que  $C$  también lo es.

Usando el Lema 5.5, tenemos que

$$\begin{aligned}\varprojlim\{\pi_i(A), f_i|_{\pi_{i+1}(A)}\} &= A, \varprojlim\{\pi_i(B), f_i|_{\pi_{i+1}(B)}\} = B \text{ y} \\ \varprojlim\{\pi_i(C), f_i|_{\pi_{i+1}(C)}\} &= C.\end{aligned}$$

Notemos que para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\pi_i(C) \subset C_i \subset \pi_i(A)$  y  $\pi_i(C) \subset C_i \subset \pi_i(B)$ . Luego,

$$C \subset \varprojlim\{C_i, f_i|_{C_{i+1}}\} \subset A \text{ y } C \subset \varprojlim\{C_i, f_i|_{C_{i+1}}\} \subset B.$$

En consecuencia,

$$C \subset \varprojlim\{C_i, f_i|_{C_{i+1}}\} \subset C.$$

Por lo tanto,  $\varprojlim\{C_i, f_i|_{C_{i+1}}\} = C$ .  $\square$

**Teorema 5.10.** *El límite inverso de arcos no puede contener curvas cerradas simples.*

*Demostración.* Sea  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$  un sistema inverso donde cada  $X_i$  es un arco. Denotemos por  $X_{\infty}$  al límite inverso de  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ . Para probar el resultado procedamos por contradicción, es decir, supongamos que existe una curva cerrada simple  $S$  contenida en  $X_{\infty}$ . Luego, existen  $A$  y  $B$  arcos tales que  $S = A \cup B$  y  $A \cap B$  es desconexo. Por el Lema 5.9, sabemos que

$$\varprojlim\{C_i, f_i|_{C_{i+1}}\} = C,$$

donde  $C = A \cap B$  y para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $C_i = \pi_i(A) \cap \pi_i(B)$ . Por otro lado, al ser  $A$  y  $B$  arcos, en particular, son continuos. Así, para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\pi_i(A)$  y  $\pi_i(B)$  son subcontinuos de  $X_i$ . Dado que  $X_i$  es un arco, tenemos que  $\pi_i(A)$  y  $\pi_i(B)$  son subarcos de  $X_i$ . De esto,  $C_i = \pi_i(A) \cap \pi_i(B)$  es un arco o un punto, en cualquier caso,  $C_i$  es un continuo. Concluimos, por el Teorema 5.3,  $C$  es un continuo, contradiciendo la desconexidad de  $C$ . Por lo tanto,  $X_{\infty}$  no contiene curvas cerradas simples.  $\square$

**Teorema 5.11.** *El límite inverso de arcos o curvas cerradas simples no puede contener triodos simples.*

*Demostración.* Sea  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  un sistema inverso donde cada  $X_i$  es un arco o una curva cerrada simple. Denotemos por  $X_\infty$  al límite inverso de  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ . Supongamos que existe  $T$  triodo simple contenido en  $X_\infty$  con vértice  $v$ . Sean  $L_1, L_2$  y  $L_3$  arcos tales que  $T = L_1 \cup L_2 \cup L_3$  y  $v$  es el único punto en común de  $L_1, L_2$  y  $L_3$ . Por el Lema 5.5, sabemos que para cada  $j \in \{1, 2, 3\}$

$$\varprojlim \{\pi_i(L_j), f_i|_{\pi_{i+1}(L_j)}\} = L_j$$

y  $f_i|_{\pi_{i+1}(L_j)}$  es una función suprayectiva para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Por la continuidad de  $\pi_i$ , tenemos que  $\pi_i(L_1), \pi_i(L_2)$  y  $\pi_i(L_3)$  son subcontinuos de  $X_i$  que contienen a  $\pi_i(v)$ . Al ser  $X_i$  un arco o una curva cerrada simple, tenemos que uno de los subcontinuos está contenido en la unión de los otros dos. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\pi_j(L_1) \subset \pi_j(L_2) \cup \pi_j(L_3)$  para una cantidad infinita de  $j$ . Sea  $i \in \mathbb{N}$ . Entonces existe  $j \in \mathbb{N}$  mayor a  $i$  tal que  $\pi_{j+1}(L_1) \subset \pi_{j+1}(L_2) \cup \pi_{j+1}(L_3)$ . Notemos que

$$\pi_i(L_1) = f_i \circ \cdots \circ f_j \circ \pi_{j+1}(L_1) \subset f_i \circ \cdots \circ f_j(\pi_{j+1}(L_2) \cup \pi_{j+1}(L_3)).$$

Como las funciones  $f_i|_{\pi_{i+1}(L_2)}$  y  $f_i|_{\pi_{i+1}(L_3)}$  son suprayectivas tenemos que

$$f_j(\pi_{j+1}(L_2) \cup \pi_{j+1}(L_3)) = \pi_i(L_2) \cup \pi_i(L_3).$$

En consecuencia, concluimos que para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\pi_i(L_1) \subset \pi_i(L_2) \cup \pi_i(L_3)$ . Luego,

$$\begin{aligned} \varprojlim \{\pi_i(L_1), f_i|_{\pi_{i+1}(L_1)}\} &\subset \varprojlim \{\pi_i(L_2) \cup \pi_i(L_3), f_i|_{\pi_{i+1}(L_2) \cup \pi_{i+1}(L_3)}\} \\ &= \varprojlim \{\pi_i(L_2 \cup L_3), f_i|_{\pi_{i+1}(L_2 \cup L_3)}\} \\ &= L_2 \cup L_3. \end{aligned}$$

De esto que  $L_1 \subset L_2 \cup L_3$ , contradiciendo que el único punto en común de estos arcos era  $v$ . Por lo tanto,  $X_\infty$  no contiene triodos simples.  $\square$

Para concluir con este trabajo veamos la construcción de un continuo indecomponible mediante límites inversos, y que gracias a los Teoremas 5.10 y 5.11, este no posee curvas cerradas simples ni triodos simples.

**Ejemplo 5.12.** Definamos a  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{3}{2} - x & , x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , sea  $X_i = [0, 1]$  y  $f_i = f$ . Sea  $X_\infty$  al límite inverso de  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ . Veamos que  $X_\infty$  es homeomorfo al continuo  $\text{sen}(\frac{1}{x})$ . Para esto primero describamos los puntos que se encuentran en  $X_\infty$ , para lo cual será de gran utilidad la gráfica de la función  $f$ , así como dividir a esta misma en dos secciones como se muestra en la Figura 10.

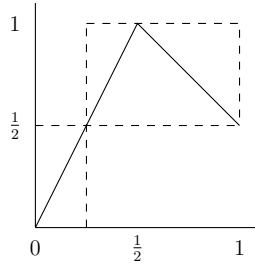


Figura 10: Gráfica de la función  $f$

Sea  $(x_n)_{n=1}^\infty \in X_\infty$ . Con ayuda de la gráfica observemos lo siguiente:

- (a) Si para algún  $m \in \mathbb{N}$ ,  $x_m < \frac{1}{2}$ , entonces  $x_{m+1} = \frac{x_m}{2}$ , y con esto haciendo que la sucesión decrezca con este comportamiento.
- (b) Si  $x_m \geq \frac{1}{2}$ , como se puede observar en la gráfica de  $f$ ,  $x_{m+1}$  puede ser  $\frac{x_m}{2}$  o  $\frac{3}{2} - x_m = f(x_m)$ .

Considerando esto podemos escribir a  $X_\infty$  como la unión de los siguientes conjuntos.

$$A_0 = \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty : x_n = \frac{a}{2^{n-1}}, \text{ para algún } a \in [0, \frac{1}{2}] \right\},$$

$$A = \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty : x_n = f^{n-1}(a), \text{ para algún } a \in [\frac{1}{2}, 1] \right\},$$

donde  $f^0$  es la función identidad y para  $m$  natural,  $f^m$  es la composición de  $f$  consigo misma  $m$  veces. Dado  $m \in \mathbb{N}$ , sea

$$A_m = \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty : x_n = \begin{cases} f^{n-1}(a) & , n \leq m \\ \frac{f^{m-1}(a)}{2^{n-m}} & , n > m \end{cases}, \text{ para algún } a \in [\frac{1}{2}, 1] \right\}.$$

Por lo observado en (a) y (b) podemos concluir que

$$X_\infty = \bigcup_{m=0}^\infty A_m \cup A.$$

Además, no es difícil ver que  $A_0$ ,  $A$  y cada  $A_m$  son arcos. Más aún,  $A_0$  y ningún  $A_m$  intersectan a  $A$ . Por otro lado, para cada  $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ,  $A_m$  intersecta a  $A_{m+1}$  en un único punto, para ser más específicos, si  $m$  es par  $A_m$  y  $A_{m+1}$  se intersectan en el extremo cuando  $a = \frac{1}{2}$  y cuando  $m$  es impar se intersectan en el extremo cuando  $a = 1$ . De esto podemos concluir que la unión de  $A_0$  con los conjuntos  $A_m$  es homeomorfo al intervalo  $(0, 1]$ . Otra observación a considerar es que mientras más grande tomemos a  $m$  los puntos de  $A_m$  se parecen más a los de  $A$ , o dicho de otra manera, los conjuntos  $A_m$  se acercan a  $A$ . Por lo que  $X_\infty$  se puede representar como en la Figura 11.

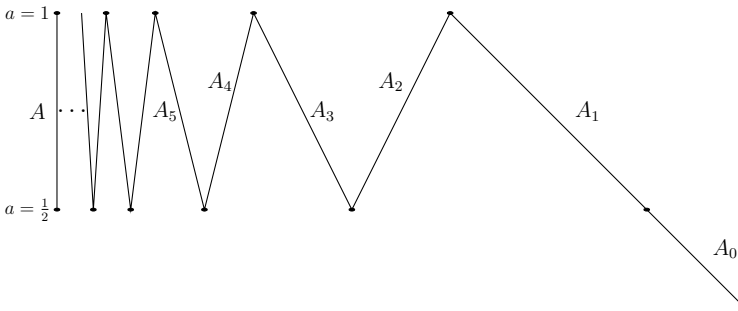


Figura 11:  $X_\infty$

Por lo tanto,  $X_\infty$  es homeomorfo al continuo  $\text{sen}(\frac{1}{x})$ .

## Bibliografía

- [1] J. Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1978.
- [2] Bronislaw Knaster, *Sur les continus non-bornés*, *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 5 (1924) 23–58.
- [3] C. Kuratowski, *Théorie des Continus Irréductibles Entre Deux Points I*, *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 3 (1922) 200–231.
- [4] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Academic Press, New York, N.Y., 1968.

- [5] F. Leon Jones, *Historia y desarrollo de la teoría de los continuos indescomponibles*, Aportaciones Matemáticas, Vol. 27, ISBN:968-36-3591-1, 2004.
- [6] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory. An introduction*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx  
216470298@fcfm.buap.mx  
fmacias@fcfm.buap.mx





## Capítulo 7

# Continuidad de la función $\omega_f$ en el intervalo $[0, 1]$

Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera  
Carrasco y Fernando Macías Romero  
FCFM, BUAP

### Resumen

En el presente trabajo se revisan algunas propiedades de los sistemas dinámicos. Damos una breve introducción a la dinámica de funciones de  $X$  en  $X$ , así como funciones del hiperespacio  $2^X$  en  $2^X$ . Se define el conjunto omega límite y se enuncian algunas de sus propiedades. Finalmente se presenta la función  $\omega_f$ , que depende de una función  $f$  y se caracteriza al tipo de funciones  $f$  que hacen cotinuas a la función  $\omega_f$ , cuando  $X$  es el intervalo  $[0, 1]$ .

## 1 Preliminares

La acción de iterar ha estado presente en matemáticas desde hace tiempo, esta acción es lo que da vida a los sistemas dinámicos. Dado  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^n$  denota la composición de  $f$  consigo misma  $n$  veces y  $f^0$  es la función identidad.

**Definición 1.1.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $f : X \rightarrow X$  una función continua, para cada  $x \in X$  el conjunto

$$\mathcal{O}(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\},$$

es la **órbita de  $x$  bajo  $f$** .

Podemos interpretar  $f^n(x)$  como el  $n$ -ésimo momento de  $x$ , así la órbita de  $x$  da el desplazamiento de  $x$  sobre el espacio. A su vez la órbita de un punto se puede interpretar como una sucesión, por tanto sería interesante saber si converge o no converge. Con base a esto la pareja  $(X, f)$  brinda

un modelo matemático del movimiento, esto es lo que entenderemos como *sistema dinámico*.

La siguiente definición proporciona una noción de estabilidad entre órbitas y es fundamental para este trabajo.

**Definición 1.2.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $f : X \rightarrow X$  una función. Decimos que  $f$  es **equicontinua** en un punto  $x$  si para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $y \in B(x, \delta)$ , entonces  $f^n(y) \in B(f^n(x), \varepsilon)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

A la colección de los puntos fijos de una función  $f$  lo denotaremos por

$$\mathcal{F}(f) = \{x \in X : f(x) = x\}.$$

Si  $x_0$  es un punto fijo bajo  $f$ , se tiene que  $\mathcal{O}(x_0, f) = \{x_0\}$ . A pesar de que la órbita de un punto fijo es muy simple, los puntos fijos juegan un papel importante en la dinámica inducida por  $f$ .

## 2 Dinámica de $f$

En esta sección enunciamos algunas propiedades dinámicas, para funciones que van de un espacio métrico sobre sí mismo.

**Teorema 2.1.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Si  $f : X \rightarrow X$  una función continua, entonces  $\mathcal{F}(f)$  es un conjunto cerrado en  $X$ .*

*Demostración.* Si  $cl(\mathcal{F}(f)) = \emptyset$  se tiene lo deseado. Supongamos que  $cl(\mathcal{F}(f)) \neq \emptyset$ . Sea  $x \in cl(\mathcal{F}(f))$ , podemos construir una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  contenida en  $\mathcal{F}(f)$  que converge a  $x$ . Como  $f$  es continua, tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ , dado que  $x_n \in \mathcal{F}(f)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $f(x_n) = x_n$ . Se sigue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , y por unicidad del límite en espacios métricos, concluimos que  $f(x) = x$  y así,  $x \in \mathcal{F}(f)$ , por lo tanto  $\mathcal{F}(f) = cl(\mathcal{F}(f))$ , es decir,  $\mathcal{F}(f)$  es cerrado en  $X$ .  $\square$

**Teorema 2.2.** *Sean  $J$  un intervalo en  $\mathbb{R}$  y  $f : J \rightarrow J$  una función continua. Sea  $[a, b] \subset J$ .*

- (i) *Si  $f([a, b]) \subset [a, b]$ , entonces  $f$  tiene un punto fijo en  $[a, b]$ .*
- (ii) *Si  $[a, b] \subset f([a, b])$ , entonces  $f$  tiene un punto fijo en  $[a, b]$ .*

*Demostración.* (i) Como  $f([a, b]) \subset [a, b]$ , entonces

$$a \leq f(a) \text{ y } f(b) \leq b.$$

Sea  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h(x) = f(x) - x$ . La función  $h$  es continua en el intervalo  $[a, b]$  y además,

$$h(b) \leq 0 \leq h(a).$$

Por el Teorema del valor intermedio existe  $c \in [a, b]$ , tal que  $h(c) = 0$ . Así,  $f(c) = c$ .

(ii) Como  $[a, b] \subset f([a, b])$ , entonces existen  $\alpha$  y  $\beta$  en  $[a, b]$ , tales que  $f(\alpha) = a$  y  $f(\beta) = b$ , luego

$$f(\alpha) \leq \alpha \text{ y } f(\beta) \geq \beta.$$

Supongamos sin perder generalidad que  $\alpha \leq \beta$ , definiendo la función  $h : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $h(x) = f(x) - x$ , tenemos que

$$h(\alpha) \leq 0 \leq h(\beta).$$

Nuevamente, por el Teorema del valor intermedio existe  $c \in [\alpha, \beta] \subset [a, b]$  tal que  $h(c) = 0$ . Por lo tanto  $f(c) = c$ .  $\square$

Los siguientes resultados, además de ser interesantes, son de gran utilidad para este trabajo. Por comodidad se han enunciado para el intervalo  $[0, 1]$ , pero se cumplen para cualquier intervalo cerrado.

**Teorema 2.3.** *Sea  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una función continua. Si  $\mathcal{F}(f)$  es disconexo, entonces  $\mathcal{F}(f^2)$  es disconexo.*

*Demostración.* Notar que  $\mathcal{F}(f) \neq \emptyset$  ya que el conjunto vacío es conexo. Además  $\mathcal{F}(f)$  no puede constar de un único elemento, por lo que podemos tomar  $a, b' \in \mathcal{F}(f)$  tal que  $a < b'$ . Sea  $b = \inf\{x \in \mathcal{F}(f) : a < x\}$ . De la definición de  $b$ , se tiene que  $f(x) \neq x$  para cada  $x \in (a, b)$ . Como  $\mathcal{F}(f)$  es cerrado, podemos construir una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}(f)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ . De la continuidad de  $f$  se tiene:

$$f(b) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b.$$

Por lo que  $b \in \mathcal{F}(f)$ . Por el Teorema del valor intermedio podemos asegurar que, para toda  $x \in (a, b)$ ,  $f(x) < x$  o bien para toda  $x \in (a, b)$ ,  $f(x) > x$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $f(x) < x$  para cada  $x \in (a, b)$ .

Es claro que  $a, b \in f([a, b])$ , como  $f$  es continua y  $[a, b]$  es conexo tenemos que  $f([a, b])$  es conexo, así  $[a, b] \subset f([a, b])$ . Dado  $x \in (a, b)$ , existe  $y_0 \in (a, b)$  tal que  $x = f(y_0)$ , de esto  $f(x) = f^2(y_0) < f(y_0) < y_0$ , es decir,  $f^2(y_0) < y_0$ . De esto existe  $y_0 \in (a, b)$  tal que  $y_0 \notin \mathcal{F}(f^2)$ . Por ende  $\mathcal{F}(f^2)$  no puede ser conexo, en caso contrario, como  $a, b \in \mathcal{F}(f^2)$  se tendría que  $y_0 \in [a, b] \subset \mathcal{F}(f^2)$ , lo cual no es posible. Por lo tanto,  $F(f^2)$  es desconexo.  $\square$

**Teorema 2.4.** *Sea  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una función continua y suprayectiva. Si  $\mathcal{F}(f^2)$  es conexo, entonces  $f^2 = Id$ .*

*Demostración.* Del Teorema 2.2 se tiene que  $\mathcal{F}(f^2) \neq \emptyset$ . Sean  $a = \min \mathcal{F}(f^2)$  y  $b = \max \mathcal{F}(f^2)$ . Como  $\mathcal{F}(f^2)$  es conexo, se tiene que  $F(f^2) = [a, b]$ . Supongamos que  $f^2 \neq Id$ . Luego, tenemos alguno de los siguientes dos casos:

*Caso 1*  $a > 0$ .

Note que  $f^2(0) > 0$ . Si existe  $t_0 \in (0, a)$  tal que  $f^2(t_0) < t_0$ , entonces por el Teorema del valor intermedio, existe  $c \in (0, t_0)$  tal que  $f^2(c) = c$ . Esto último contradice que  $\mathcal{F}(f^2) = [a, b]$ . De este modo, cada  $t \in [0, a)$  satisface que  $f^2(t) > t$ . Por tanto,  $0 \notin f^2([0, a))$  y, claramente,  $0 \notin f^2([a, b]) = [a, b]$ ; es decir,  $0 \notin f^2([0, b])$ . Como  $f^2$  es suprayectiva (ya que  $f$  lo es),  $f^2([0, 1]) = [0, 1]$ , si  $b = 1$ , tendríamos que  $0 \notin f^2([0, 1])$ , lo cual es una contradicción, así  $b < 1$ .

*Caso 2*  $b < 1$ .

Note que  $f^2(1) < 1$ . Se puede probar de manera análoga al caso 1 que  $f^2(t) < t$  para toda  $t \in (b, 1]$ . Por lo tanto  $1 \notin f^2((b, 1])$  y también  $1 \notin f^2([a, b]) = [a, b]$ ; es decir,  $1 \notin f^2([a, 1])$  luego por argumentos similares al caso 1 tenemos que  $a > 0$ .

Tenemos lo siguiente,  $0 < a \leq b < 1$ ,  $0 \notin f^2([0, b])$  y  $1 \notin f^2([a, 1])$ .

Observe que, dado cualquier  $x \in [a, b]$ ,  $f^2(f(x)) = f(f^2(x)) = f(x)$  y por ende  $f(x) \in \mathcal{F}(f^2) = [a, b]$ . De este modo,  $f([a, b]) \subset [a, b]$ . Como  $\mathcal{F}(f) \subset \mathcal{F}(f^2)$ , tenemos que  $0, 1 \notin \mathcal{F}(f)$  así,  $f(0) > 0$  y  $f(1) < 1$ . Veamos que para cada  $t \in [0, a)$ ,  $f(t) > t$ . Si existe  $t_0 \in (0, a)$  tal que  $f(t_0) < t_0$ , entonces existe  $c \in (0, t_0)$  tal que  $f(c) = c$ , por ende  $c \in \mathcal{F}(f^2) = [a, b]$ , esta es una contradicción. De esto que  $f(t) > t$  para cada  $t \in [0, a)$ . De forma similar,  $f(t) < t$  para cada  $t \in (b, 1]$ . De lo anterior tenemos que  $0 \notin f([0, a))$  y  $1 \notin f((b, 1])$ .

Como  $f([a, b]) \subset [a, b]$ , tenemos que  $0, 1 \notin f([a, b])$ , por lo que  $0 \notin f([0, b])$  y  $1 \notin f([a, 1])$ . Como  $f$  es suprayectiva, existen  $s_0 \in (b, 1]$  y  $s_1 \in [0, a)$  tales que  $f(s_0) = 0$  y  $f(s_1) = 1$ .

Veamos que  $[0, a] \subset f([b, 1])$ . Como  $f(b) \in [a, b]$ , es claro que  $a \leq f(b)$ , de esto  $[0, a] \subset [f(s_0), f(b)]$ . Además  $f(s_0), f(b) \in f([b, s_0])$  y  $f([b, s_0])$  es conexo, así se tienen las contenciones  $[f(s_0), f(b)] \subset f([b, s_0]) \subset f([b, 1])$ . Por tanto,  $[0, a] \subset f([b, 1])$ .

Probemos que  $f([0, a]) \subset (b, 1]$ . Supongamos que existe  $r \in [0, a)$  con  $f(r) \leq b$ . Consideremos  $a' = \max\{r, s_1\}$  y así,  $[b, 1] \subset [f(r), 1] = [f(r), f(s_1)] \subset f([0, a'])$ , de esto que  $f([b, 1]) \subset f^2([0, a'])$ . Como  $[0, a'] \subset [0, a] \subset f([b, 1])$ , se cumple que

$$[0, a'] \subset f([b, 1]) \subset f^2([0, a']).$$

Por el Teorema 2.2 existe  $p \in [0, a']$  tal que  $f^2(p) = p$ , esto es una contradicción ya que  $p \notin [a, b] = \mathcal{F}(f^2)$ . Por lo tanto  $f([0, a]) \subset (b, 1]$ .

Similarmente se prueba que  $f((b, 1]) \subset [0, a)$ . De esas dos contenciones obtenemos,

$$f^2([0, a]) \subset f((b, 1]) \subset [0, a).$$

De lo anterior  $1 \notin f^2([0, a])$ , como  $1 \notin f^2([a, 1])$ , tenemos que  $1 \notin f^2([0, 1])$ , esto contradice el hecho de que  $f^2$  es suprayectiva. Por ende  $f^2 = Id$ .  $\square$

**Definición 2.5.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $f : X \rightarrow X$  una función continua y  $x_0 \in X$ . Decimos que  $x_0$  es un **punto periódico** de  $f$  si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(x_0) = x_0$ . Al conjunto de todos los puntos periódicos de  $f$  lo denotamos con  $Per(f)$ . Si  $x \in Per(f)$ , decimos que  $\mathcal{O}(x, f)$  es una **órbita periódica**.

Dado  $x_0 \in Per(f)$ . Definimos el periodo de  $x_0$  como,

$$p = \min\{n \in \mathbb{N} : f^n(x_0) = x_0\}.$$

En comparación con el conjunto  $\mathcal{F}(f)$  podemos decir que  $Per(f)$  no necesariamente es cerrado, la función que cumple esto es la famosa función tienda. La función tienda denotada por  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  se define como

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Sus gráficas dan una idea de como se comporta la dinámica de  $T$ .

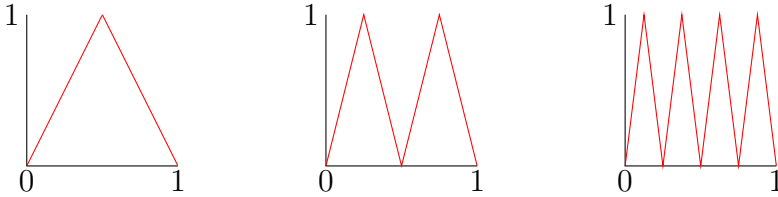


Figura 1: Gráficas de  $T$ ,  $T^2$  y  $T^3$ .

El siguiente teorema expone en (1) una propiedad importante de la función tienda y en (2) podemos ver que  $Per(T)$  no es un conjunto cerrado ya que  $\frac{1}{2} \notin Per(T)$ .

**Teorema 2.6.** [4, Proposición 7.3] Sea  $T$  la función tienda.

1. Si  $(a, b) \subset [0, 1]$ , entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $T^N((a, b)) = [0, 1]$ .
2. El conjunto  $Per(T)$  es denso en  $[0, 1]$ .

Los conjuntos  $\mathcal{F}(f)$  y  $Per(f)$  pueden ser conjuntos vacíos, un ejemplo de esto se puede encontrar en [1, Ejemplo 2.18]. El siguiente teorema para funciones reales sobre un intervalo asegura la existencia de puntos de cualquier periodo siempre que exista al menos un punto de periodo 3.

**Teorema 2.7.** (Li-Yorke)[4, Teorema 3.4] Sean  $A$  un intervalo en  $\mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $f : A \rightarrow A$  una función continua. Si  $f$  tiene un punto de periodo 3, entonces  $f$  tiene un punto de periodo  $n$ .

### 3 Dinámica colectiva

Sea  $X$  un espacio métrico compacto. Un hiperespacio de  $X$  es una familia de subconjuntos de  $X$  que cumplen una propiedad. El hiperespacio que será de nuestro interés es:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y } A \neq \emptyset\}.$$

Este hiperespacio se *topologiza* con la llamada métrica de Hausdorff, para definirla damos el concepto de *nube*.

**Definición 3.1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto. Dados  $A, B \in 2^X$  y  $\varepsilon > 0$ , definimos la **nube** de radio  $\varepsilon$  alrededor de  $A$  como,

$$N(A, \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon) = \{x \in X : \text{existe } a \in A, d(x, a) < \varepsilon\}.$$

Sea  $H : 2^X \times 2^X \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por,

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(B, \varepsilon) \text{ y } B \subset N(A, \varepsilon)\}.$$

La función  $H$  es una métrica en  $2^X$ , una prueba de ello se encuentra en [2, Proposición 2.1]. Como  $X$  es un espacio métrico compacto se prueba que  $2^X$  también es compacto, la prueba de esto se puede encontrar en [5, Teorema 4.13], así solo resta dar una función continua de  $2^X$  en  $2^X$  para tener un sistema dinámico.

Una función continua  $f : X \rightarrow X$  nos da de manera natural una función en el hiperespacio  $2^X$ , a saber

$$2^f : 2^X \rightarrow 2^X.$$

Con regla de correspondencia,

$$2^f(A) = f(A).$$

Como  $f$  es continua,  $2^f$  esta bien definida, es decir,  $2^f(A) \in 2^X$ . La función  $2^f$  es conocida como la *función inducida* por  $f$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y para cada  $A \in 2^X$  se tiene que

$$(2^f)^n(A) = f^n(A).$$

**Teorema 3.2.** *La función inducida  $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$  es continua.*

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $f$  es continua y  $X$  es un espacio métrico compacto, por el Teorema de Heine [3, Teorema 4, sección 6.6],  $f$  es uniformemente continua en  $X$ . Luego existe  $\delta^* > 0$  tal que si  $x_1, x_2 \in X$  cumplen que  $d(x_1, x_2) < \delta^*$ , entonces  $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ .

Sea  $\delta = \delta^*$ . Tomemos  $A, B \in 2^X$  tales que:

$$H(A, B) < \delta.$$



Para cada  $z \in f(A)$  existe  $a \in A$  tal que  $f(a) = z$  y dado que  $A \subset N(B, \delta)$  podemos tomar  $b \in B$  tal que  $d(a, b) < \delta$ , entonces  $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$ , así  $f(a) \in N(f(B), \varepsilon)$  y por lo tanto,

$$f(A) \subset N(f(B), \varepsilon).$$

De manera análoga,

$$f(B) \subset N(f(A), \varepsilon).$$

Luego,

$$H(f(A), f(B)) < \varepsilon.$$

Por lo tanto  $2^f$  es continua. □

Dada la relación estrecha que existe entre las reglas de correspondencia de  $f$  y  $2^f$ , la pregunta que nos hacemos es ¿cuál es la relación entre las propiedades dinámicas de  $f$  y las propiedades dinámicas de  $2^f$ ? Esta pregunta es muy amplia, los siguientes teoremas muestran algo de esto.

**Teorema 3.3.** [4, Proposición 18.12] Sean  $(X, d)$  un espacio métrico compacto y  $f : X \rightarrow X$  una función continua. Si  $Per(f)$  es un conjunto denso en  $X$ , entonces  $Per(2^f)$  es un conjunto denso en  $2^X$ .

En términos generales, la densidad de  $Per(2^f)$  en  $2^X$  no implica la densidad de  $Per(f)$  en  $X$ . Un ejemplo de ello se puede encontrar en [4, Sección 18.6].

Resulta que si el espacio donde estamos trabajando es el intervalo  $[0, 1]$ , entonces la densidad de puntos periódicos en el hiperespacio sí implica densidad de puntos periódicos en  $[0, 1]$ .

**Teorema 3.4.** Sea  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una función continua. Si  $Per(2^f)$  es denso en  $2^{[0,1]}$ , entonces  $Per(f)$  es denso en  $[0, 1]$ .

*Demostración.* Sean  $(a, b)$  un intervalo abierto contenido en  $[0, 1]$ . Tenemos que  $(a, b) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ , donde  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  y  $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ . Como  $2^f : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$  tiene densidad de puntos periódicos en  $2^{[0,1]}$ , existen  $A \in 2^{[0,1]}$  y  $N \in \mathbb{N}$  tales que

$$H(\{x_0\}, A) < \varepsilon \quad y \quad f^N(A) = A.$$

Luego,  $A \subset (a, b)$ . Sean  $\alpha = \text{mín}A$  y  $\beta = \text{máx}A$ , tenemos que  $a < \alpha \leq \beta < b$ . Como  $f^N(A) = A$ , entonces

$$f^N(\alpha) \geq \alpha \quad y \quad f^N(\beta) \leq \beta.$$

Dado que  $f^N$  es una función continua en el intervalo  $[0, 1]$ , por el Teorema del valor intermedio, existe  $c \in [\alpha, \beta]$  tal que  $f^N(c) = c$ . Por lo tanto  $Per(f) \cap (a, b) \neq \emptyset$ .  $\square$

## 4 El conjunto omega límite

En esta sección  $X$  denota un espacio métrico. Dado un punto  $x \in X$ , estudiaremos la convergencia de la órbita  $\mathcal{O}(x, f)$ , el ente al que converge es el llamado conjunto omega límite de  $x$ .

**Definición 4.1.** Sea  $x_0 \in X$ . Decimos que  $y \in X$  es un punto límite de la órbita  $\mathcal{O}(x_0, f)$ , si existe una sucesión estrictamente creciente de números naturales

$$\{n_i\}_{i=1}^{\infty}, \quad n_1 < n_2 < n_3 \dots$$

tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_0) = y.$$

La colección de todos los puntos límites de  $\mathcal{O}(x_0, f)$  se llama, **conjunto omega límite** de  $x_0$  bajo  $f$ . Denotado por,

$$\omega(x_0, f) = \{y \in X : y \text{ es un punto límite de } \mathcal{O}(x_0, f)\}.$$

En este sentido decimos que  $\mathcal{O}(x_0, f)$  converge a  $\omega(x_0, f)$ , ya que con el tiempo los puntos de la órbita están muy cercanos a los puntos del conjunto omega límite. Tenemos la siguiente proposición que es inmediata de la definición.

**Teorema 4.2.** Sean  $f : X \rightarrow X$  una función continua y  $x \in X$ . Se cumple lo siguiente.

- (a)  $\omega(x, f)$  es un conjunto cerrado.
- (b) Si  $X$  es compacto, entonces  $\omega(x, f) \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Para (a). Si  $\omega(x, f) = \emptyset$ , entonces es cerrado. Supongamos que  $\omega(x, f) \neq \emptyset$ . Demostraremos que toda sucesión convergente en  $\omega(x, f)$  converge a un punto de  $\omega(x, f)$ . Sea  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión contenida en  $\omega(x, f)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Veamos que  $y \in \omega(x, f)$ .

Como la sucesión  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge, existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $d(y_{n_1}, y) < \frac{1}{2}$ . A su vez  $y_{n_1} \in \omega(x, f)$ , por lo que existe  $l_1 \in \mathbb{N}$  tal que,

$$f^{l_1}(x) \in B(y_{n_1}, \frac{1}{2}) \subset B(y, 1).$$

Análogamente, elegimos  $n_2 > n_1$  tal que  $d(y_{n_2}, y) < \frac{1}{2^2}$ . Como  $y_{n_2} \in \omega(x, f)$ , entonces existe  $l_2 > l_1$  tal que,

$$f^{l_2}(x) \in B(y_{n_2}, \frac{1}{2^2}) \subset B(y, \frac{1}{2}).$$

De manera recursiva encontramos una sucesión creciente de números naturales  $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$  tal que para toda  $j$ ,

$$f^{l_j}(x) \in B(y, \frac{1}{2^{j-1}}).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f^{l_i}(x) = y.$$

Así,  $y$  pertenece al conjunto  $\omega(x, f)$ .

Para (b). Sea  $x \in X$ , como  $X$  es un espacio métrico compacto, entonces es secuencialmente compacto, por ello la sucesión  $\{f^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  tiene una subsucesión convergente y el punto al que converge pertenece a  $\omega(x, f)$ , por lo tanto  $\omega(x, f) \neq \emptyset$ .  $\square$

**Teorema 4.3.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico compacto y  $f : X \rightarrow X$  una función continua. Para toda  $x \in X$ , se tiene que  $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$ . Es decir,  $\omega(x, f)$  es un conjunto estrictamente invariante bajo  $f$ .

*Demostración.* Tomemos  $x_0 \in X$ . Veamos primero que  $f(\omega(x_0, f)) \subset \omega(x_0, f)$ . Sea  $y_0 \in f(\omega(x_0, f))$ . Entonces existe  $z_0 \in \omega(x_0, f)$  tal que  $f(z_0) = y_0$ , y existe una sucesión  $\{n_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$  estrictamente creciente tal que,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_0) = z_0.$$

Por la continuidad de  $f$ ,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i+1}(x_0) = f(z_0) = y_0.$$

Así,  $y_0$  está en  $\omega(x_0, f)$ . Por lo tanto,  $f(\omega(x_0, f)) \subset \omega(x_0, f)$ .

Veamos ahora que  $\omega(x_0, f) \subset f(\omega(x_0, f))$ . Sea  $a_0 \in \omega(x_0, f)$ , entonces existe una sucesión  $\{n_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$  estrictamente creciente tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_0) = a_0.$$

Podemos suponer que cada  $n_i$  es mayor o igual a 2. Como  $X$  es compacto y la sucesión  $\{f^{n_i-1}(x_0)\}_{i=1}^{\infty}$  esta contenida en  $X$ , entonces existe una subsucesión

$\{n_{i_j} - 1\}_{j=1}^{\infty}$  de  $\{n_i - 1\}_{i=1}^{\infty}$  tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{i_j}-1}(x_0) = b_0.$$

Así,  $b_0 \in \omega(x_0, f)$  y además,

$$f(b_0) = f(\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{i_j}-1}(x_0)) = \lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{i_j}}(x_0) = a_0.$$

Por lo tanto  $a_0 \in f(\omega(x_0, f))$ . □

**Teorema 4.4.** *Sea  $f : X \rightarrow X$  una función continua. Si  $X$  es compacto, entonces  $2^f$  tiene al menos un punto fijo.*

*Demostración.* Dado  $x \in X$  por el Teorema 4.2 tenemos que  $\omega(x, f)$  es no vacío y cerrado, así  $\omega(x, f) \in 2^X$ . Por el Teorema 4.3  $2^f(\omega(x, f)) = f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$ , es decir,  $\omega(x, f)$  es un punto fijo de  $2^f$ . □

El siguiente teorema aclara la idea de cuando decimos que la órbita de  $x$  converge al conjunto omega límite.

**Teorema 4.5.** *Sean  $X$  un espacio métrico compacto,  $f : X \rightarrow X$  una función continua,  $x_0 \in X$  y  $U$  un subconjunto abierto de  $X$  tal que  $\omega(x_0, f) \subset U$ , entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N$  se tiene que  $f^n(x_0) \in U$ .*

*Demostración.* Dado que  $U$  es un conjunto abierto,  $X - U$  es un conjunto cerrado y por ser  $X$  compacto,  $X - U$  también es compacto. Consideremos el siguiente conjunto,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : f^n(x_0) \in X - U\}.$$

Supongamos que la cardinalidad de  $A$  es infinita, podemos tomar una sucesión estrictamente creciente  $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$  tal que  $f^{n_i}(x_0) \in X - U$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Como  $X$  es secuencialmente compacto podemos suponer sin perder generalidad

que  $\{f^{n_i}(x_0)\}_{i=1}^{\infty}$  converge a un punto  $z \in X - U$ , ya que  $X - U$  es cerrado. Por otro lado  $z \in \omega(x_0, f) \subset U$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $A$  es finito y así, tomando  $N = (\text{máx } A) + 1$ , se tendrá que para toda  $n \geq N$ ,  $f^n(x_0) \in U$ .  $\square$

**Teorema 4.6.** Sean  $X$  un espacio métrico compacto,  $f : X \rightarrow X$  una función continua y  $x \in X$ . Si  $\omega(x, f)$  es finito, entonces existe  $y \in \omega(x, f)$  tal que,

$$\omega(x, f) = \mathcal{O}(y, f).$$

*Demostración.* Supongamos que  $\omega(x, f)$  tiene exactamente  $k$  elementos. Digamos

$$\omega(x, f) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}.$$

Tomemos a  $x_1$ , por el Teorema 4.3 se tiene que  $\mathcal{O}(x_1, f) \subset \omega(x, f)$ . Podemos suponer que

$$\mathcal{O}(x_1, f) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\},$$

donde  $m \leq k$ . Demostraremos que  $\mathcal{O}(x_1, f) = \omega(x, f)$ .

Si  $m < k$ . Es claro que  $f(\mathcal{O}(x_1, f)) = \mathcal{O}(x_1, f)$  y por lo tanto el conjunto  $\{x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_k\}$  es invariante bajo  $f$ . Es posible tomar  $\delta > 0$  de tal manera que  $cl(B(x_1, \delta)), cl(B(x_2, \delta)), \dots, cl(B(x_k, \delta))$  son ajenos dos a dos.

Sean

$$U = \bigcup_{i=1}^m B(x_i, \delta) \text{ y } W = \bigcup_{i=m+1}^k B(x_i, \delta).$$

Tenemos lo siguiente,  $\mathcal{O}(x_1, f) \subset U$  y  $U \cup W$  es un conjunto abierto que contiene a  $\omega(x, f)$  y además  $cl(U) \cap cl(W) = \emptyset$ . Por el Teorema 4.5, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq N$ , entonces  $f^n(x) \in U \cup W$ .

Consideremos los conjuntos

$$E = \{n \geq N : f^n(x) \in U\} \text{ y } F = \{n \geq N : f^n(x) \in W\}.$$

Podemos tomar una sucesión de números naturales  $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$  estrictamente creciente, de tal manera que

$$f^{n_i}(x) \in U \text{ y } f^{n_i+1}(x) \in W.$$

Dado que  $X$  es secuencialmente compacto, podemos suponer que  $\{f^{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$  es convergente a un punto  $z$  en  $cl(U)$ .

$$cl(U) \cap \omega(x, f) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} = \mathcal{O}(x_1, f),$$

y  $z \in \omega(x, f)$ , entonces  $z \in \mathcal{O}(x_1, f)$ . Por ser  $f$  continua,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i+1}(x) = f(z).$$

Como la sucesión  $\{f^{n_i+1}(x)\}_{i=1}^{\infty}$  esta contenida en  $W$ , entonces  $f(z) \in cl(W)$ . A su vez  $f(z) \in \mathcal{O}(x_1, f) \subset U$ , por lo que  $cl(U) \cap cl(W) \neq \emptyset$ . Esto es una contradicción. Por lo tanto  $m = k$ , es decir,  $\mathcal{O}(x_1, f) = \omega(x, f)$ .  $\square$

Veamos un caso donde el conjunto omega límite es un conjunto infinito.

**Teorema 4.7.** [4, Proposición 12.11] Sea  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  la función tienda. Existe  $x_0 \in [0, 1]$  tal que  $\omega(x_0, T) = [0, 1]$ .

## 5 La función $\omega_f$

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto. Hemos estudiado funciones continuas de  $X$  en  $X$  y de  $2^X$  en  $2^X$ . Dada una función  $f : X \rightarrow X$  continua, sabemos que  $\omega(x, f)$  es un conjunto cerrado, motivados por ello podemos definir la función  $\omega_f : X \rightarrow 2^X$  con la siguiente regla de correspondencia,

$$\omega_f(x) = \omega(x, f).$$

Es de interés saber si  $w_f$  es continua, esta sección la dedicamos a determinar las condiciones bajo las cuales  $w_f$  es continua, en particular cuando  $X = [0, 1]$ .

**Teorema 5.1.** Sea  $X$  un espacio métrico compacto. Si  $f : X \rightarrow X$  es equicontinua, entonces  $\omega_f : X \rightarrow 2^X$  es continua.

*Demostración.* Sea  $x \in X$  y  $\varepsilon > 0$ . Como  $f$  es equicontinua en  $x$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $d(x, y) < \delta$ , entonces  $d(f^n(x), f^n(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Sea  $y \in X$  tal que  $d(x, y) < \delta$ , veamos que  $H(w_f(x), w_f(y)) < \varepsilon$ . Dado  $y_0 \in \omega_f(y)$ , existe una sucesión de naturales  $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$  estrictamente creciente tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{k_n}(y) = y_0$ . Como  $\{f^{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión en el compacto  $X$ , existe  $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$  subsucesión de  $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{l_n}(x) = x_0$ , para algún

$x_0 \in \omega_f(x)$ . Luego, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $d(f^{lN}(x), x_0) < \frac{\varepsilon}{3}$  y  $d(f^{lN}(y), y_0) < \frac{\varepsilon}{3}$ . Así,

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, f^{lN}(x)) + d(f^{lN}(x), f^{lN}(y)) + d(f^{lN}(y), y_0) < \varepsilon.$$

En consecuencia,  $y_0 \in N(\omega_f(x), \varepsilon)$ . Por tanto,  $\omega_f(y) \subset N(\omega_f(x), \varepsilon)$ . Similarmente, se tiene que  $\omega_f(x) \subset N(\omega_f(y), \varepsilon)$ . Entonces  $H(\omega_f(x), \omega_f(y)) < \varepsilon$ . Por ende,  $\omega_f$  es continua.  $\square$

El siguiente teorema es fundamental para caracterizar a las funciones  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tales que  $\omega_f$  es continua.

**Teorema 5.2.** Si  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  y  $\omega_f: [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$  son funciones continuas, entonces  $\mathcal{F}(f^2)$  es conexo.

*Demostración.* Si  $\mathcal{F}(f^2)$  consta de un solo elemento el resultado se cumple. Supongamos que  $\mathcal{F}(f^2)$  no es conexo.

Sean  $a, b \in \mathcal{F}(f^2)$  tales que  $x \notin \mathcal{F}(f^2)$  para todo  $x \in (a, b)$ , es decir,  $f^2(x) \neq x$ . Como  $f^2$  es continua, entonces  $f^2(x) < x$  para todo  $x \in (a, b)$  ó  $f^2(x) > x$ , para todo  $x \in (a, b)$ . Sin perder generalidad, supongamos que  $f^2(x) > x$  para cada  $x \in (a, b)$ . Tenemos tres casos.

**Caso I.** Para todo  $x \in (a, b)$ ,  $f^2(x) < b$ .

Dado  $x \in (a, b)$  tenemos que  $a < x < f^2(x) < b$ . Luego  $f^4(x) = f^2(f^2(x)) > f^2(x)$ , de esta manera se observa que  $\{f^{2n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión creciente y acotada por  $b$ , luego converge al  $\sup\{f^{2n}(x): n \in \mathbb{N}\} := h$ . Como  $b$  es cota superior, entonces  $h \leq b$ . Supongamos que  $h < b$ . Como  $\{f^{2n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$  converge a  $h$ , entonces por el Teorema 2.2  $h$  es un punto fijo de  $f^2$  lo cual es una contradicción, por tanto  $h = b$ .

Por continuidad de  $f$  la sucesión  $\{f^{2n+1}(x)\}_{n=1}^{\infty}$  converge a  $f(b)$ . Así,  $\omega_f(x) = \{b, f(b)\}$ . De esto tenemos que para cualquier sucesión en  $(a, b)$ , convergente a  $a$ , se cumple que sus imágenes bajo  $\omega_f$  convergen a  $\omega_f(b)$ , esto contradice la continuidad de  $\omega_f$ .

**Caso II.** Existe  $x_1 \in (a, b)$  tal que  $f^2(x_1) = b$ .

Podemos tomar  $x_2 \in (a, x_1)$  tal que  $f^2(x_2) = x_1$ . Siguiendo esta idea podemos construir una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  que converge a  $a$  tal que  $f^2(x_{n+1}) = x_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Note que  $f^{2n}(x_n) = b$ , pues  $f^2(x_{n+1}) = x_n$  y en particular  $f^2(x_1) = b$ . Luego,  $f^{2n+1}(x_n) = f(b)$  ya que  $f^{2n+1}(x_n) = f(f^{2n}(x_n)) = f(b)$ . Así,  $\omega_f(x_n) =$

$\{b, f(b)\}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $\omega_f(a) = \{a, f(a)\}$  nuevamente se contradice la continuidad de  $\omega_f$  en  $a$ .

**Caso III.** Para todo  $x \in (a, b)$ ,  $f^2(x) > b$ .

Podemos hallar una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $(a, b)$  que converga a  $a$ . Como  $f^2$  es continua debería ocurrir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^2(x_n) = f^2(a) = a$ . Por la suposición  $f^2(x_n) > b$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^2(x_n) \geq b > a$ , esto es una contradicción.

En cualquiera de los 3 casos llegamos a una contradicción. Por lo tanto  $\mathcal{F}(f^2)$  es conexo.  $\square$

**Teorema 5.3.** Sea  $X$  un espacio métrico y  $f : X \rightarrow X$  es una función continua y periódica (en el sentido  $f^n = f$ , para algún  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$ ), entonces  $f$  es equicontinua.

*Demostración.* Sea  $n$  el periodo de  $f$ . Luego, dado  $\varepsilon > 0$  y  $x \in X$ , existe  $\delta_i > 0$  tal que si  $d(x, y) < \delta_i$ , entonces  $d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , esto ya que cada  $f^i$  es continua en  $x$ . Tomemos  $\delta = \min(\delta_i)$ . Sea  $k \in \mathbb{N}$ , tenemos dos casos,

**Caso I.**  $k \leq n$ .

Si  $d(x, y) < \delta$ , entonces  $d(f^k(x), f^k(y)) < \varepsilon$ . Esto por como se tomo  $\delta$ .

**Caso II.**  $k > n$ .

Tenemos que  $k - n > 0$ , por el algoritmo de la división existen  $m \in \mathbb{N}$ ,  $j \in \{0, \dots, n-2\}$  tal que  $k - n = (n-1)m + j$ , de aquí que  $k = n + (n-1)m + j$ . Veamos mediante inducción matemática sobre  $m$  que  $f^{n+(n-1)m} = f$ . Para  $m = 1$ , como  $f^n = f$ , entonces  $f^{n+(n-1)1} = f^n \circ f^{n-1} = f \circ f^{n-1} = f^{1+n-1} = f^n = f$ . Supongamos que se cumple para  $m \in \mathbb{N}$  con  $m > 1$ . Así,  $f^{n+(n-1)m} = f$ , luego

$$\begin{aligned} f^{n+(n-1)(m+1)} &= f^{n+(n-1)m+(n-1)} \\ &= f^{n+(n-1)m} \circ f^{(n-1)} \\ &= f \circ f^{n-1} = f^{1+n-1} = f^n = f. \end{aligned}$$

De esto se tiene que  $f^k = f^{n+(n-1)m+j} = f^{n+(n-1)m} \circ f^j = f \circ f^j = f^{j+1}$ . Es claro que  $j+1 \in \{1, \dots, n-1\}$ , por ende  $d(f^k(x), f^k(y)) = d(f^{j+1}(x), f^{j+1}(y)) < \varepsilon$  si  $d(x, y) < \delta$ .

Por lo tanto  $f$  es equicontinua.  $\square$



El siguiente teorema nos da condiciones necesarias y suficientes para que  $\omega_f$  sea continua cuando  $X = [0, 1]$ .

**Teorema 5.4.** *Sea  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una función continua y suprayectiva. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.  $f$  es equicontinua,
2.  $\omega_f : [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$  es continua,
3.  $\mathcal{F}(f^2)$  es conexo.

*Demostración.* (1  $\Rightarrow$  2) Esto se obtiene de forma directa del Teorema 5.1

(2  $\Rightarrow$  3) Esta implicación se obtiene del Teorema 5.2.

(3  $\Rightarrow$  1) Como  $\mathcal{F}(f^2)$  es conexo, por el Teorema 2.4  $f^2 = Id$ , de esto que  $f^3 = f$ , es decir,  $f$  es periódica. Luego por el Teorema 5.3  $f$  es equicontinua.  $\square$

Ahora nos centraremos en dar una caracterización de las funciones  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que hacen continua a  $\omega_f$ . Si  $f^2 = Id$ , implica que  $f$  es inyectiva, ya que si  $f(x) = f(y)$  se tiene que  $f^2(x) = f(f(x)) = f(f(y)) = f^2(y)$ , es decir,  $x = y$ . El siguiente teorema nos da un mejor panorama de como deben ser estas funciones.

**Teorema 5.5.** *Sea  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una función continua y suprayectiva. Entonces  $f$  es biyectiva si y solo si  $f$  es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.*

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Veamos que  $f(0), f(1) \in \{0, 1\}$ . Supongamos que  $f(0) \notin \{0, 1\}$ , así  $f(0) \in (0, 1)$ . Como  $f$  es suprayectiva existen  $r, s \in (0, 1]$  con  $r \neq s$  tales que  $f(r) = 0$  y  $f(s) = 1$ , supongamos sin perder generalidad que  $r < s$ . Definiendo la función  $h(x) = f(x) - f(0)$ , tenemos que  $h(r) < 0 < h(s)$ , por lo que existe  $c \in [r, s]$  tal que  $f(c) = f(0)$  y así  $c = 0$ , esto es una contradicción. Por lo tanto,  $f(0) \in \{0, 1\}$ . De forma análoga se prueba que  $f(1) \in \{0, 1\}$ .

De la inyectividad de  $f$  tenemos dos casos,

1. Si  $f(0) = 1$  y  $f(1) = 0$ , entonces  $f$  es estrictamente decreciente.

Supongamos que existen  $x_0, y_0 \in (0, 1)$  con  $x_0 < y_0$  tales que  $f(1) < f(x_0) < f(y_0) < f(0)$ , de esto se puede ver que existe  $z \in [0, x_0]$  tal que  $f(z) = f(y_0)$  y así  $z = y_0$ , esto es una contradicción. Por lo tanto  $f(x) > f(y)$  siempre que  $x < y$ .

2. Si  $f(0) = 0$  y  $f(1) = 1$ , entonces  $f$  es estrictamente creciente.

Los argumentos son similares al caso anterior.

( $\Leftarrow$ ) La demostración de esto es directa de las definiciones. □

**Corolario 5.6.** *Sea  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una función continua y suprayectiva. Si  $\mathcal{F}(f^2)$  es conexo, entonces  $f$  es una función estrictamente creciente o estrictamente decreciente.*

**Teorema 5.7.** *Sea  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una función continua, biyectiva y estrictamente creciente. Si  $f^2 = Id$ , entonces  $f = Id$ .*

*Demostración.* Como  $f$  es estrictamente creciente, por la demostración anterior tenemos que  $f(0) = 0$  y  $f(1) = 1$ . Sea  $x_0 \in (0, 1)$  y supongamos que  $f(x_0) < x_0$ , de esto tendríamos que  $f^2(x_0) < f(x_0)$ , es decir,  $x_0 < f(x_0)$ , lo cual es una contradicción. Si suponemos que  $f(x_0) > x_0$  también se llega a una contradicción. Por lo tanto  $f(x_0) = x_0$  para toda  $x_0 \in [0, 1]$ . □

Llegado a este punto podemos pensar que cambiando la hipótesis de estrictamente creciente por estrictamente decreciente, deberíamos de obtener una única función que satisfaga las hipótesis, incluso podemos pensar que esta función es  $f(x) = 1 - x$ . Sin embargo, esto no ocurre, daremos dos ejemplos de esto y después una caracterización de estas.

**Ejemplo 5.8.** Sea  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}], \\ -\frac{1}{3}(x - 1) & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, 1]. \end{cases}$$

Sea  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2x - 1} + \frac{1}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

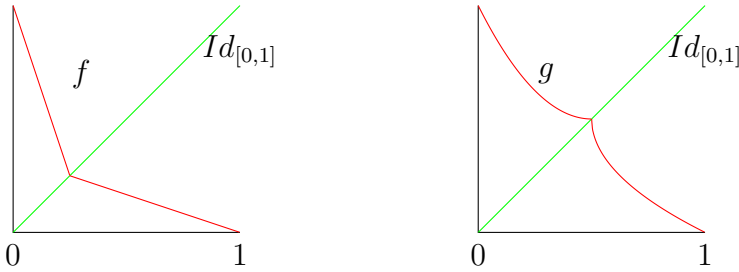


Figura 2: Gráficas de  $f$  y  $g$ .

Estas funciones son continuas, biyectivas y estrictamente decrecientes, además se puede ver que  $f^2 = Id$  y  $g^2 = Id$ .

Estos dos ejemplos tienen en común que, la segunda parte de la función es una reflexión de la primera respecto a la función identidad. El siguiente teorema muestra que esto es cierto.

**Teorema 5.9.** *Sea  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una función continua, suprayectiva y estrictamente decreciente. Entonces  $f^2 = Id$  si y solo si existe  $b \in (0, 1)$  y  $g : [0, b] \rightarrow [b, 1]$  continua, suprayectiva y estrictamente decreciente tal que*

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in [0, b], \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in [b, 1]. \end{cases}$$

*Demostración.* ( $\Leftarrow$ ) Sea  $x \in [0, 1]$ , se tienen dos casos:

1. Si  $x \in [0, b]$  tenemos que  $f(x) = g(x)$ , como  $g(x) \in [b, 1]$ , se tiene que  $f^2(x) = f(g(x)) = g^{-1}(g(x)) = x$ .
2. Si  $x \in [b, 1]$  se obtiene  $f(x) = g^{-1}(x)$ , dado que  $g(x)^{-1} \in [0, b]$ , entonces  $f^2(x) = f(g^{-1}(x)) = g(g^{-1}(x)) = x$ .

Por lo tanto  $f^2 = Id$ .

( $\Rightarrow$ ) Por el Teorema 2.2 existe  $b \in [0, 1]$  tal que  $f(b) = b$ , por lo visto en la prueba del Teorema 5.5,  $b \in (0, 1)$ . Definamos  $g : [0, b] \rightarrow [b, 1]$  por  $g(x) = f(x)$ . Veamos que  $g$  esta bien definida, es decir,  $g([0, b]) \subset [b, 1]$ , como  $f^2 = Id$  y  $f$  es estrictamente decreciente tenemos que  $f$  es inyectiva y además,  $f(0) = 1$  y  $f(1) = 0$ . Supongamos que existe  $x_0 \in (0, b)$  tal que  $g(x_0) \in (0, b)$ .

$f$  restringida a  $[b, 1]$  es continua y se cumple que  $f(1) < g(x_0) < f(b)$ , así existe  $c \in (b, 1)$  tal que  $f(c) = g(x_0) = f(x_0)$ , esto contradice el hecho de que  $f$  es inyectiva. Por tanto  $g([0, b]) \subset [b, 1]$ . Es claro que  $b, 1 \in g([0, b])$ , como  $f([0, b]) = g([0, b])$  se tiene que  $g([0, b])$  es conexo y por ello  $[b, 1] \subset g([0, 1])$ . Por lo tanto  $g([0, b]) = [b, 1]$ , es decir,  $g$  es suprayectiva. Por hipótesis  $g$  es continua y estrictamente decreciente. Por esto, la función  $g$  es continua y biyectiva, luego su función inversa  $g^{-1} : [b, 1] \rightarrow [0, b]$  esta bien definida, es continua, biyectiva y estrictamente decreciente.

Veamos que  $f(x) = g^{-1}(x)$  para  $x \in [b, 1]$ . Sea  $x \in [b, 1]$ ,  $g^{-1}(x) \in [0, b]$ , luego como  $f$  y  $g$  coinciden en el intervalo  $[0, b]$  se tiene que  $f(g^{-1}(x)) = g(g^{-1}(x)) = x$  y así,  $g^{-1}(x) = f^2(g^{-1}(x)) = f(x)$ . Esto completa la demostración.  $\square$

De esto podemos ver que hay una infinidad de funciones que cumplen con ser continua, biyectiva, estrictamente decreciente y  $f^2 = Id$ .

Tomando como referencia las funciones definidas en el Ejemplo 5.8, tenemos que  $\omega_f(x) = \{x, f(x)\}$ , de esto que podemos representar a las funciones  $\omega_f$  y  $\omega_g$  como sigue,

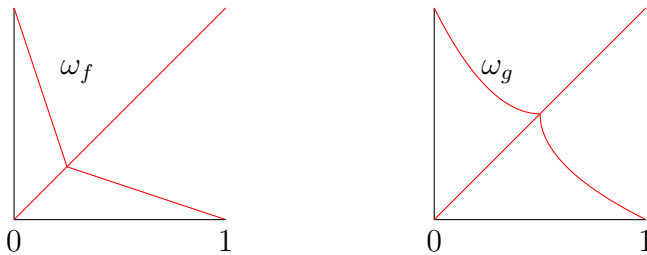


Figura 3: Gráficas de  $\omega_f$  y  $\omega_g$ .

Motivados por esto, nos preguntamos si existe una función  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tal que la representación de  $\omega_h$  sea de la siguiente manera

Es decir, que  $\omega_h(x) = \{x, h(x), h^2(x)\}$  o bien  $h^3 = Id$ . La respuesta es negativa, ya que de existir  $h$  tendría un punto de periodo 3 y por el Teorema 2.7, la función  $h$  debe tener un punto de periodo 2, lo cual contradice que  $h^3 = Id$ .

De aquí, nos preguntamos ¿Existe una función  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continua y suprayectiva tal que  $h^n = Id$  para  $n \geq 4$ ? El argumento que se utilizó para

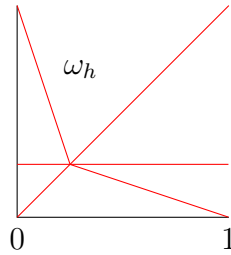


Figura 4: Gráfica de  $\omega_h$ .

cuando  $n = 3$  ya no es válido en estos casos, sin embargo, el teorema siguiente responde de forma negativa a esta pregunta.

**Teorema 5.10.** *Sea  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una función continua y suprayectiva. Si  $f^n = Id$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f^2 = Id$ .*

*Demostración.* Si  $f^n = Id$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f^{n+1} = f$ , por el Teorema 5.3 se tiene que  $f$  es equicontinua, luego por el Teorema 5.4  $\mathcal{F}(f^2)$  es conexo, finalmente por el Teorema 2.4  $f^2 = Id$ .  $\square$

El anterior teorema nos dice que una función continua y suprayectiva de  $[0, 1]$  en  $[0, 1]$ , tal que  $f^n = Id$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , no tiene más opción que ser la función identidad o ser una función como las que se describen en el Teorema 5.9.

## Bibliografía

- [1] F. Aguilar, *Dinámica en el intervalo y en su hiperespacio de compactos* (tesis de licenciatura). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México. (2019)
- [2] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos N. 28, Sociedad Matemática, ISBN:968-36-3594-6,2004.
- [3] I. Iribarren, *Topología de espacios métricos*, Limusa-Wiley, México, 1973.
- [4] J. King, H. Méndez, *Sistemas dinámicos discretos*, Las prensas de la ciencia, Temas de Matemáticas, ISBN: 978-607-02-5263-1, 2014.

- [5] S.B. Jr. Nadler, *Continuum Theory. An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

felipe.aguilarr@alumno.buap.mx  
dherrera@fcfm.buap.mx  
fmacias@fcfm.buap.mx



# Índice de autores

Aguilar Romero, Felipe de Jesús, 160

Bykov, Alexander, 26

Coronado Gallardo, Manuel, 53

Domínguez Soto, Patricia, 26

Eusebio Grande, Raúl, 86

Herrera Carrasco, David, 135, 160

Ibarra Bonilla, Mariana Natalia, 86

Ibarra Contreras, Manuel, 109

Libreros López, Antonio de Jesús, 135

Macías Romero, Fernando, 135, 160

Martínez García, Armando, 109

Martínez Deferia, Francisco Javier, 53

Reyes Castillo, Iván, 86

Sánchez Martínez, Jorge Alberto, 26

Sandoval Solís, María Luisa, 53

Sánchez Taxis, Fernando, 86

Vázquez Rosas, Cristhian, 5

Villa Hernández, David, 5

Zavala López, Brenda, 5



Matemáticas y sus aplicaciones 14

Editado por Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco está a

disposición en pdf en la página

de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP)

[www.fcfm.buap.mx](http://www.fcfm.buap.mx)

a partir del 26 de octubre de 2020

peso del archivo: 6 MB

El cuidado de la edición es de Antonio de Jesús Libreros López.