



David Herrera Carrasco

Nació en Tapanatepec, Oaxaca, el 21 de abril de 1955. Llegó a la ciudad de Puebla a los seis años junto con su familia en una situación precaria.

Es un prestigioso profesor e investigador que estudió la licenciatura en Matemáticas en la segunda generación de la refundación de la Escuela de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla (UAP). En 1975 inició su labor docente como profesor de matemáticas en la Preparatoria Alfonso Calderón (UAP).

Desde 1981 a la fecha es profesor de Tiempo Completo en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Muchas universidades lo han acogido debido al entusiasmo con que investiga las matemáticas. Además, ha concluido la dirección de tesis: dos de doctorado, siete de maestría y varias de licenciatura; todas en matemáticas a excepción de una en electrónica, y actualmente tiene en proceso varias asesorías de tesis.

BUAP

FCFM

CSMA

BUAP
ediciones

Los capítulos del presente libro son creados por los autores en el marco de su participación en el International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA). Los CIMA emanan de la fortuna de contar con el mejor comité organizador que ha puesto la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. He aquí los resultados que promueven la riqueza matemática, trabajos tenaces que lograron sobreponerse a los inexorables jueces y fueron autorizados después de un arbitraje riguroso.



Matemáticas y sus aplicaciones 12



Matemáticas y sus aplicaciones 12

David Herrera Carrasco
Fernando Macías Romero

Editores



Fernando Macías Romero

Es profesor e investigador en el área de las matemáticas. Nació el 11 de noviembre de 1961 en Huauchinango, Puebla, México. Su pasión por las matemáticas lo llevó a estudiar la licenciatura, maestría y doctorado en esta noble área. Llegó a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP en el año 1979.

Además de contar con el reconocimiento y respeto de la comunidad de su facultad, recurrentemente es solicitado como árbitro de publicaciones y evaluador de proyectos, así como de programas como el ESDEPED y elaborador de programas de estudio. Como formador de nuevo talento matemático ha dirigido 33 tesis de licenciatura, 7 de maestría y 3 de doctorado, todas ellas concluidas con éxito, así como varias tesis en proceso. Actualmente es Investigador Nacional reconocido por el SNI.

Durante varios años ha sido el organizador de las International Conference on Mathematics and its Applications, que brindan un espacio de encuentro a un vasto número de expositores, asistentes y expertos internacionales de todas las áreas de la matemática y también es editor y autor de varios libros de matemáticas como los libros de *Matemáticas y sus aplicaciones*.

Matemáticas y sus aplicaciones *12*



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

David Herrera Carrasco
Fernando Macías Romero
Coordinadores

Primera edición: 2019

ISBN: 978-607-525-616-0

DR © Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
4 Sur 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfono: 01 (222) 2 29 55 00
www.buap.mx

Dirección General de Publicaciones
2 Norte 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfonos: 01 (222) 246 85 59 y 01 (222) 229 55 00 ext. 5768 y 5764
www.dgp.buap.mx

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Av. San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel, Edificio FM1-101B
Ciudad Universitaria, Puebla, Pue. México. CP. 72570
Teléfonos: 01 (222) 229 55 00 ext. 7552
www.fcfm.buap.mx

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA • *Rector*: José Alfonso Esparza Ortiz • *Secretario General*: José Jaime Vázquez López • *Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura*: José Carlos Bernal Suárez • *Director General de Publicaciones*: Hugo Vargas Comsille • *Directora de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas*: Martha Alicia Palomino Ovando

Impreso y hecho en México
Printed and made in Mexico

Matemáticas y sus aplicaciones 12

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de investigación presentados en el International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA), FCFM, BUAP.

Coordinadores

David Herrera Carrasco
Fernando Macías Romero

Comité científico internacional

Verónica Borja Macías (UTM), Ermínia de Lourdes Campello Fanti (UNESP, BRA), Jiling Cao (AUT AC, NZ), José Antonio Climent Hernández (UAM-A), Salvador García Ferreira (UNAM), Gerardo Hernández Valdez (BUAP), Miguel Antonio Jiménez Pozo (BUAP), Gabriel Kantún Montiel (BUAP), Judy Kennedy (LU, USA), Antonio de Jesús Libreros López (BUAP), Fernando Macías Romero (BUAP), José Gregorio Rodríguez Nieto (UNC, CO).

Contenido

Presentación	1
Análisis matemático	
Capítulo 1. Sobre el espacio cuasi-métrico de las funciones de complejidad	5
<i>Luz del Carmen Álvarez Marín, Diana Citlali Castañeda Álvarez, José Margarito Hernández Morales</i>	
Capítulo 2. Cuasi-rectificación de curvas	31
<i>José Margarito Hernández Morales, Vulfrano Tochihuitl Bueno</i>	
Lógica	
Capítulo 3. Algunos modelos sobre programas lógicos mediante operadores	51
<i>Iván Martínez Ruíz, Alejandro Ramírez Páramo, Erick Salgado Matías</i>	
Probabilidad y estadística	
Capítulo 4. Valuación de opciones asiáticas mediante ecuaciones diferenciales parciales y simulación Monte Carlo	85
<i>Araceli Matías González, Ambrosio Ortiz Ramírez</i>	
Topología	

Capítulo 5. Dendritas, su relación con el conjunto de Julia de algunas funciones holomorfas y ejemplos	111
<i>Maurico Esteban Chacón Tirado, Patricia Domínguez Soto, María de Jesús López Toriz</i>	
Capítulo 6. El arco y la curva cerrada simple, únicos continuos localmente conexos sin triodos simples	125
<i>David Herrera Carrasco, Antonio de Jesús Libreros López, Fernando Macías Romero</i>	
Capítulo 7. Los continuos enrejados tienen (n, m)-ésimo hiperespacio suspensión único	151
<i>David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Germán Montero Rodríguez</i>	
Capítulo 8. Una introducción a la categoría $\mathcal{T}op$, a los espacios Fréchet y límites inferiores	167
<i>José Juan Angoa Amador, Agustín Contreras Carreto, Manuel Ibarra Contreras</i>	
Índice de autores	207

Presentación

Tenemos la fortuna de hacer un recorrido hacia un proceso creativo sin precedentes. Ha llegado el momento de compartir esta sabiduría, de invitar a todo el mundo a embarcarse en el navío que nos conduce hacia la Fuente de todo lo creado. Esta es la razón por la cual editamos el libro que tienen en sus manos. La felicidad que propone este libro por su divulgación, investigación e intercambio de ideas se debe a la generosidad de muchísimos matemáticos que participaron en el denominado *Fifth International Conference on Mathematics and its Applications* (5CIMA, 2018), un esfuerzo profesional consolidado que ha permitido la participación de grandes personajes de diversas universidades, nacionales y extranjeras, tanto en el desarrollo del 5CIMA como en su memoria escrita, que es el presente libro. La base ha sido un comité organizador especializado, entusiasta y vigoroso emanado de la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. Este producto no es ni siquiera setemesino, es normal, de por lo menos nueve meses de trabajo constante. Por el amor a la matemática es que ha nacido este ejemplar que nos brinda la sabiduría necesaria para mostrarles parte de nuestros quehaceres cotidianos.

Los capítulos de este libro están agrupados por secciones de acuerdo al área temática en el 5CIMA. Dichos capítulos fueron sometidos a arbitraje riguroso.

Agradecemos, con toda el alma, a todos los árbitros su amabilidad, gentileza, dedicación y trabajo científico. Un agradecimiento especial a Antonio de Jesús Libreros López por su apoyo en la edición de esta obra. Gracias por dejar huella.

*David Herrera Carrasco
Fernando Macías Romero
Coordinadores*

Análisis matemático

Capítulo 1

Sobre el espacio cuasi-métrico de las funciones de complejidad

Luz del Carmen Álvarez Marín, Diana Citlali Castañeda
Álvarez, José Margarito Hernández Morales
Universidad Tecnológica de la Mixteca

Resumen

En 1995 M. Schellekens dio inicio al estudio de los espacios de complejidad obteniendo resultados sobre complejidad de algoritmos mediante la completación de Smyth, la cual provee fundamentos topológicos para la semántica denotacional y también para el análisis de complejidad de algoritmos divide y vencerás. Posteriormente, en 2008 L. M. García Raffi, S. Romaguera y M. Schellekens extendieron la teoría anterior para el análisis de algoritmos divide y vencerás probabilistas, mediante la asociación de un funcional de mejora a la relación de recurrencia del problema y la aplicación del Teorema del punto fijo para la obtención de la solución. El mérito de este escrito (si es que lo tiene) es la recopilación y estructuración de la investigación sobre estos temas desarrollada por los autores mencionados en sus diversos trabajos, así como de la teoría de los espacios asimétricos.

Introducción

La teoría usual de complejidad de algoritmos permite hacer comparaciones respecto a la eficiencia entre dos algoritmos distintos para resolver un mismo problema, y así elegir el más adecuado de acuerdo a requerimientos de espacio y tiempo. Esta comparación puede ser difícil de definir. El espacio de funciones de complejidad C ofrece una alternativa aplicable para cualquier par de algoritmos.

Uno de los objetivos de este trabajo es mostrar una aplicación de los espacios asimétricos en el área de la complejidad de algoritmos. Para ello haremos

mención de algunos conceptos fundamentales de la teoría de complejidad, así como de espacios asimétricos. Definiremos el espacio de complejidad C y su espacio dual C^* , y mencionaremos algunas propiedades topológicas de estos espacios. Utilizaremos estas propiedades para mostrar una aplicación a los algoritmos divide y vencerás probabilistas.

1 Preliminares

La complejidad de algoritmos es un área de estudio muy extensa que aplica diversas herramientas de la teoría de aproximación y del análisis funcional, entre otras. Para los fines de este trabajo, es suficiente con bosquejar algunos principios de la teoría de complejidad usual para después conjugarlos con la teoría del espacio de funciones de complejidad C propuesta recientemente por Schellekens y Romaguera en [8].

Complejidad de algoritmos

Un algoritmo es un conjunto finito de instrucciones precisas cuyo seguimiento conduce a la solución de un problema o cálculo. Dado un algoritmo, es útil preguntarse por la cantidad de operaciones que éste necesita realizar para resolver un problema de tamaño n .

Puede entenderse como función de complejidad de un algoritmo a la función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ que indica el tiempo que le toma al algoritmo resolver un problema de tamaño n . De acuerdo a lo anterior, es de esperarse que el valor de $f(n)$ aumente al crecer el valor de n , así estas funciones son crecientes. En la práctica es de gran interés analizar estas funciones de complejidad para valores de n muy grandes ([4]).

Una manera de establecer una referencia respecto al crecimiento de la función de complejidad de un problema o algoritmo, es encontrar otra función de expresión "más simple" que acote su imagen superiormente a partir de algún n fijo. Para ello se introduce la notación que se define a continuación.

Definición 1.1: Dadas las funciones $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$, se dice que la función g domina a f (o que f es dominada por g) si existen constantes $M \in \mathbb{R}^+$ y $k \in \mathbb{N}$, tales que $f(n) \leq M g(n)$, siempre que $n \geq k$, o de forma equivalente, si $\frac{f(n)}{g(n)} \leq M$ para todo $n \geq k$. A las constantes M y k se les llama "testigos" ([7]).

Cuando f es dominada por g se utiliza la notación $f \in O(g)$ lo cual se lee como "*f es de orden g*". Con lo anterior, $O(g)$ representa el conjunto de todas las funciones con dominio \mathbb{N} y contradominio \mathbb{R}^+ que son dominadas por g .

Algunos de los órdenes que con mayor frecuencia se utilizan para comparar las funciones de complejidad son los siguientes (en orden creciente):

Forma	Nombre
$O(1)$	Constante
$O(\log n)$	Logarítmico
$O(n)$	Lineal
$O(n \log n)$	$n \log n$
$O(n^2)$	Cuadrático
$O(n^3)$	Cúbico
$O(n^m)$	Polinomial
$O(C^n)$	Exponencial
$O(n!)$	Factorial

Algoritmos probabilistas

Existen algunos problemas en los cuales encontrar una solución óptima puede tomar mucho tiempo y el beneficio que el óptimo ofrece no difiere mucho del obtenido con otras soluciones alternativas. En estos casos muchas veces es conveniente desarrollar un algoritmo que sea capaz de tomar decisiones aleatorias y probarlas, en vez de ocupar mucho tiempo calculando la mejor alternativa. Este es uno de los fundamentos de los algoritmos probabilistas, los cuales están dotados de la capacidad de manejar la incertidumbre y de encontrar soluciones de manera relativamente rápida comparados con los algoritmos deterministas. Debido a la aleatoriedad en el comportamiento de estos algoritmos, es de esperarse que resulte más difícil el análisis de su complejidad.

Algoritmos divide y vencerás

Antes de definir directamente los algoritmos divide y vencerás, presentaremos una introducción sobre las relaciones de recurrencia. Esto es de gran importancia dado que cada uno de estos algoritmos tiene asociada una de ellas,

cuya solución resulta ser precisamente la función de complejidad del algoritmo. Cabe mencionar que los algoritmos divide y vencerás pueden clasificarse en dos categorías: los deterministas y los probabilistas. Sobre el caso particular de los segundos se ahondará en la última sección. En ésta se tratará el caso general de los algoritmos divide y vencerás.

Definición 1.2: Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión real, una relación de recurrencia para esta sucesión es una ecuación que determina el término a_n en función de los términos anteriores, a partir de algún a_{n_0} inicial cuyo valor es conocido. Una sucesión es una solución de una ecuación de recurrencia si sus términos satisfacen la relación para todo $n \geq n_0$ ([4]).

Por ejemplo, la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde $a_n = 3n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ es solución de la relación de recurrencia $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$. En efecto,

$$2a_{n-1} - a_{n-2} = 2[3(n-1)] - 3(n-2) = 3n = a_n.$$

Las condiciones iniciales y la relación de recurrencia determinan de manera única una sucesión, proporcionando una definición recursiva de ésta.

Los algoritmos divide y vencerás son algoritmos cuya estrategia consiste en dividir el problema en subproblemas de menor tamaño y resolverlos de forma separada. El objetivo de esta reducción es que los sub-problemas en los que se divide el problema original sean suficientemente simples para ser resueltos de forma sencilla, y posteriormente obtener la solución total del problema combinando las soluciones parciales. Esta es la estrategia que siguen los algoritmos recursivos: el problema se va reduciendo sucesivamente hasta llegar al caso base cuya solución es conocida, y a partir de allí se construye la solución del problema total. Un ejemplo de este tipo de algoritmos es la búsqueda binaria: la lista de búsqueda se va reduciendo sucesivamente a la mitad hasta obtener una lista de un sólo elemento.

Sea un problema de tamaño n , supongamos que el algoritmo divide y vencerás divide este problema en a sub-problemas de tamaño $\frac{n}{b}$ donde, suponemos para simplificar, n es múltiplo de b . Supongamos además que se requieren $g(n)$ operaciones para combinar las soluciones de los subproblemas y así calcular la solución total. Entonces, el número de operaciones necesarias, $f(n)$, para resolver el problema original de tamaño n , satisface la siguiente relación de recurrencia

$$f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + g(n),$$

la cual es denominada relación de recurrencia de divide y vencerás.

2 Espacios no simétricos

Una de las propiedades topológicas más relevantes que se utilizan en este trabajo es la completitud de Smyth, la cual se definió originalmente para espacios cuasi-uniformes como parte del estudio de la semántica denotacional. De hecho, muchas de las técnicas que se utilizan en la teoría de complejidad (tal como fue definida por Schellekens en [8]) surgen como adaptaciones de las herramientas desarrolladas en semántica denotacional, la cual puede entenderse a grandes rasgos como la formalización matemática del significado de los lenguajes de programación; en ella se construyen objetos matemáticos (llamados denotaciones) los cuales describen los significados de expresiones escritas en lenguajes de programación específicos evitando problemas de ambigüedad en los programas computacionales. En los inicios de la semántica denotacional, se propuso la denotación (o significado) de un programa de cómputo como una función que definía un mapeo entre entradas y salidas, sin embargo, más tarde se buscó la extensión de esta teoría a los programas recursivos, para los cuales se decidió definir a las denotaciones como funciones continuas entre órdenes parciales completos. Cabe mencionar que los espacios cuasi-uniformes definen precisamente un orden parcial, con lo cual en este contexto, la completación de Smyth tiene una importante aplicación: la completación topológica de un espacio cuasi-uniforme (el cual respresenta un orden parcial), en un espacio cuasi-uniforme topológico que respresenta un orden parcial completo.

Otro concepto importante (que se definirá con detalle en la siguiente sección) es el de los espacios Smyth completables, los cuales tienen una completación de Smyth cuasi-unimórfica a su bicompletación, lo cual permite trabajar con esta última en "sustitución" de la primera. Aclaremos también que toda completación de Smyth de un espacio cuasi-uniforme Smyth completable es nuevamente un espacio cuasi-uniforme.

Para los espacios uniformes, la completación (usual) está caracterizada mediante filtros de Cauchy, sin embargo, para espacios uniformes con una base de filtros numerable la completación puede ser definida mediante sucesiones de Cauchy, a este tipo de completación se le llama completación secuencial. Para el caso de los espacios cuasi-uniformes, existe también una completación secuencial, sin embargo no existe una caracterización de la completación de Smyth mediante sucesiones, usualmente esta es definida mediante filtros llamados round S-Cauchy, o mediante redes de Cauchy. Esto puede ser resuelto

suponiendo una condición extra: la completabilidad de Smyth. Con ello puede verse que en lugar de buscar una completación secuencial de Smyth, esta búsqueda puede reemplazarse por la de una bicompletación secuencial. Los espacios cuasi-métricos (que se definirán posteriormente), generan un espacio cuasi-uniforme de base numerable, con lo cual puede definirse su bicompletación secuencial (esto tiene sentido puesto que la bicompletación de un espacio cuasi-uniforme está relacionada con la completación del espacio uniforme que genera). Además, más adelante se mostrará que la distancia de complejidad es una cuasi-métrica, y que el espacio de complejidad C es Smyth-completable, lo cual permitirá trabajar con su completitud de Smyth mediante sucesiones, y así transportar todos estos resultados de la teoría de los espacios cuasi-uniformes a los espacios cuasi-métricos. La aplicación que se aborda en la última sección está precisamente basada en la completitud secuencial de Smyth del espacio C .

Espacios Cuasi-uniformes

Un filtro Γ sobre un conjunto X es un subconjunto no vacío de $P(X)$ tal que

1. Para cualesquiera $F, G \in \Gamma$, $F \cap G \in \Gamma$,
2. Para todo $G \subseteq X$, si existe $F \in \Gamma$ con $F \subseteq G$, entonces $G \in \Gamma$,
3. $\emptyset \notin \Gamma$,

donde $P(X) = \{U : U \subseteq X\}$ es el conjunto potencia de X .

Un filtro puede converger a un elemento x de un espacio topológico X (lo cual permite visualizarlos como una generalización de las sucesiones). De forma más general, la convergencia puede definirse en términos de bases de filtros, donde para un conjunto X , $\beta \subseteq P(X)$ (no vacío) es base de filtro sobre X si cumple las siguientes propiedades:

1. Para cualesquiera $B_1, B_2 \in \beta$, existe $B_3 \in \beta$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$, y
2. $\emptyset \notin \beta$

Así podemos definir la convergencia como sigue: sean (X, τ) un espacio topológico, Γ una base de filtro sobre X y x un punto en X . Se dice que Γ converge a x , $\Gamma \longrightarrow x$, si para toda V vecindad de x en X , existe $F \in \Gamma$ tal que $F \subset V$.

Nótese que de las definiciones anteriores es fácil ver que un filtro sobre X es una base de filtro sobre X , con lo cual la convergencia queda definida para ambos.

Un espacio cuasi-uniforme es la dupla (X, Ψ) donde

1. Ψ es un filtro sobre $X \times X$.
2. Para todo $U \in \Psi$, existe $V \in \Psi$ tal que $V \circ V = V^2 \subseteq U$
3. Para todo $U \in \Psi$, $\Delta(X) \subseteq U$, donde $\Delta(X) = \{(x, x) : x \in X\}$,

y para cualesquiera $M, N \subseteq X \times X$, $M \circ N$ se define como

$$M \circ N = \{(x, z) \in X \times X : \exists y \in X \text{ tal que } (x, y) \in M \text{ y } (y, z) \in N\}.$$

A Ψ se la llama una cuasi-uniformidad sobre X , y a los elementos de Ψ se les llama séquitos o entornos.

Nótese que dado que $\Delta(X) \subseteq U$ para todo $U \in \Psi$, si $V^2 \subseteq U$, entonces $V \subseteq U$.

Si además de cumplir las condiciones anteriores, (X, Ψ) cumple que

4. Para todo $U \in \Psi$, $U^{-1} \in \Psi$, donde

$$U^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in U\},$$

(X, Ψ) es llamado un espacio uniforme, y nos referimos a Ψ como una uniformidad sobre X .

De forma análoga a como se define para los espacios topológicos, una base β para una cuasi-uniformidad Ψ es un subconjunto de Ψ tal que para todo $U \in \Psi$, existe $B \in \beta$ tal que $B \subseteq U$.

Ejemplo 2.1: Considérense los conjuntos

$$X = \{1, 2, 3\} \quad \text{y} \quad W = \{(x, y) : x \leq y\},$$

donde \leq representa el orden usual en \mathbb{R} . Claramente se tiene que $\Delta(x) \subset W$ y $W \circ W = W$, con lo cual el conjunto $\Psi_X = \{U \subseteq (X \times X) : W \subseteq U\}$ es una cuasi-uniformidad sobre X .

Una función $f : (X, \Psi) \rightarrow (Y, \Upsilon)$ entre dos espacios cuasi-uniformes es cuasi-uniformemente continua si para toda $V \in \Upsilon$, existe $U \in \Psi$ tal que

$f^2(U) \subseteq V$, donde $f^2(x, y) = (f(x), f(y))$. Un cuasi-uniformismo es una biyección $f : (X, \Psi) \rightarrow (Y, \Upsilon)$ entre espacios cuasi-uniformes tal que f y f^{-1} son cuasi-uniformemente continuas.

En los espacios cuasi-uniformes pueden definirse vecindades para puntos y subconjuntos de X , de la manera siguiente: para todo $U \in \Psi$, $x \in X$ y $Z \subseteq X$,

$$U(x) = \{y \in X : (x, y) \in U\} \quad \text{y} \quad U[Z] = \cup \{U(z) : z \in Z\}.$$

Una cuasi-uniformidad Ψ genera una topología $\tau(\Psi)$ sobre X , llamada "la topología asociada a la cuasi-uniformidad Ψ ", ésta se define de la manera siguiente:

La topología $\tau(\Psi)$ en X asociada con la cuasi-uniformidad (X, Ψ) es la topología generada por la familia de vecindades de cada punto $x \in X$, $\{U(x) : U \in \Psi\}$.

De la definición anterior puede verse que una función cuasi-uniformemente continua f es continua respecto a las topologías $\tau(\Psi)$ y $\tau(\Upsilon)$.

Dada una cuasi-uniformidad Ψ en X , la familia

$$\Psi^{-1} = \{U^{-1} : U \in \Psi\}$$

es otra cuasi-uniformidad sobre X conocida como la cuasi-uniformidad conjugada.

Notemos que tomando esto en cuenta, el espacio X puede verse como un espacio bitopológico respecto a las topologías $\tau(\Psi)$ y $\tau(\Psi^{-1})$.

Los espacios cuasi-uniformes (X, Ψ) , definen un preorden en X mediante la intersección de los elementos de la cuasi-uniformidad, esto es, $\cap\Psi$ cumple las propiedades reflexiva y transitiva. A éste se le llama preorden asociado a Ψ , y se denota por \leq_Ψ . Tomemos como ejemplo de esto a W del ejemplo 2.1, nótese que W es reflexiva y transitiva, y que $\cap\Psi_X = W$, con lo cual se tiene que $\cap\Psi_X$ es un preorden.

Nótese que dada una relación reflexiva y transitiva R , sobre un conjunto X (es decir, R un preorden sobre X), el filtro sobre $X \times X$ generado por la base $\{R\}$ es una cuasi-uniformidad sobre X . Esto queda ilustrado con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2: Sea X un conjunto arbitrario. Consideremos el conjunto potencia de X , $P(X)$, y la relación sobre éste definida por

$$R = \{(A, B) \in P(X) \times P(X) : A \subseteq B\}.$$

Claramente esta relación es reflexiva y transitiva, es decir, $\Delta(X) \subset R$ y $R \circ R = R$, con lo cual $\Psi_{P(X)} = \{U \subseteq P(X) \times P(X) : R \subseteq U\}$ es una cuasi-uniformidad sobre $P(X)$. Además, $\cap \Psi_{P(X)} = R$ es un preorden en $P(X)$.

Sea $U \in \Psi$, definimos $U^* = U \cap U^{-1}$. Para una cuasi-uniformidad Ψ , Ψ^* se define por

$$\Psi^* = \{U \subseteq X \times X : \exists B \in \beta, B \subseteq U\}$$

donde $\beta = \{U^* : U \in \Psi\}$, esto es, Ψ^* es la uniformidad generada por la base β .

En un espacio uniforme (X, Ψ^*) , un filtro Γ sobre X se dice que es un filtro de Cauchy si para cada $V \in \Psi^*$ existe $F \in \Gamma$ tal que $F \times F \subset V$. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3: Sea (X, Ψ^*) un espacio uniforme, y x un punto en X . Sea $F(x)$ la familia de vecindades de x definida como $F(x) = \{U(x) : U \in \Psi^*\}$, donde como se definió anteriormente, $U(x) = \{y \in X : (x, y) \in U\}$. Nótese que $F(x)$ es un filtro sobre X , pues $\emptyset \notin F(x)$ y las intersecciones de vecindades de x , al igual que los super conjuntos, son nuevamente vecindades de x . Ahora veamos que $F(x)$ es un filtro de Cauchy, en efecto, sea $U \in \Psi^*$, por definición existe $V \in \Psi^*$ tal que $V \circ V \subseteq U$. Notemos que

$$V(x) \times V(x) = \{(z, w) \in X \times X : (x, z) \in V \text{ y } (x, w) \in V\} \subseteq V \circ V \subseteq U,$$

pues $V(x) \times V(x)$ es simétrica. Por tanto $F(x)$ es un filtro de Cauchy.

Un espacio uniforme es completo si todo Γ filtro de Cauchy sobre X es convergente. Decimos que un espacio cuasi-uniforme (X, Ψ) es bicompleto si el espacio uniforme (X, Ψ^*) es completo. Puede encontrarse más al respecto en [2] y [10].

Espacios Smyth-Completables Una bicompletación de un espacio cuasi-uniforme (X, Ψ) es un espacio cuasi-uniforme bicompleto (Y, Υ) que posee un subespacio $\tau(\Upsilon^*)$ -denso cuasi-unimórfico a (X, Ψ) . Los espacios cuasi-uniformes T_0 tienen una única (salvo bajo uniformismos) bicompletación T_0 , conocida como "la bicompletación" ([8]).

Es posible hablar de la categoría de los espacios cuasi-uniformes (X, Ψ) , cuyos morfismos son las funciones cuasi-uniformemente continuas respecto a la topología $\tau(\Psi)$ generada por la cuasi-uniformidad. Llamemos a esta categoría Π_1 . De hecho, dado un espacio topológico (X, τ) , podemos generar una cuasi-uniformidad Ψ sobre X de tal forma que la topología gene-

rada por Ψ coincide con τ , es decir, que se cumpla $\tau = \tau(\Psi)$ ([10]). Esta cuasi-uniformidad se construye utilizando como base intersecciones finitas de los elementos del conjunto $\{S_G : G \in \tau\}$, donde para cada $G \in \tau$, $S_G = (G^c \times X) \cup (X \times G)$ define un preorden sobre X (pues claramente, $\Delta(X) \subseteq S_G$ y $S_G \circ S_G = S_G$). Consideremos un ejemplo muy sencillo meramente ilustrativo.

Ejemplo 2.4: Sea el conjunto $X = \{a, b\}$ y la topología $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ sobre X . Sean los conjuntos

$$S_{\{a\}} = (\{b\} \times X) \cup (X \times \{a\}) = \{(b, a), (b, b), (a, a)\}, \quad y \quad S_\emptyset = S_X = X \times X,$$

claramente $\Delta(x)$ está contenido en $S_{\{a\}}$, S_X y S_\emptyset , y $S_{\{a\}} \circ S_{\{a\}} = S_{\{a\}}$, de donde las intersecciones de $S_{\{a\}}$, S_X y S_\emptyset forman una base para una cuasi-uniformidad Ψ sobre X . Para cada elemento de X , $S_{\{a\}}$, S_X y S_\emptyset generan las siguientes vecindades

$$S_{\{a\}}(a) = \{a\}, \quad S_{\{a\}}(b) = \{a, b\}, \quad y$$

$$S_X(a) = S_\emptyset(a) = \{a, b\} = S_X(b) = S_\emptyset(b),$$

además, en la familia de vecindades que genera la cuasi-uniformidad Ψ , no existe una vecindad que contenga únicamente al punto $\{b\}$, pues $S_{\{a\}}$ está contenido en cada elemento de la cuasi-uniformidad. Por tanto, la topología generada por la cuasi-uniformidad resulta ser $\tau(\Psi) = \{\emptyset, \{a\}, X\} = \tau$.

Un espacio cuasi-uniforme topológico es una tercia (X, Ψ, τ) donde X es un conjunto no vacío, Ψ una cuasi-uniformidad de X y τ una topología para X (distinta a la generada por Ψ). Retomemos los conjuntos del ejemplo 2.4, y sea la tercia $(X, \tau(\Psi), \tau_x)$, donde τ_x es la topología discreta en X . Esta tercia es un espacio cuasi-uniforme topológico. Ahora consideremos la categoría Π_2 de los espacios cuasi-uniformes topológicos, en esta categoría los morfismos son las funciones cuasi-uniformemente continuas, esta vez respecto a ambas topologías: $\tau(\Psi)$ y τ . Puede verse que $\Pi_1 \subset \Pi_2$.

Existen espacios cuasi-uniformes cuya bicompletación es un espacio de la categoría de los espacios cuasi-uniformes topológicos Π_2 , mas no de la categoría de los espacios cuasi-uniformes Π_1 . Un espacio cuasi-uniforme se dice Smyth-Completable si su bicompletación es nuevamente un objeto de la categoría de los espacios cuasi-uniformes. Este concepto es útil para las aplicaciones posteriores.

Estos espacios pueden definirse también mediante filtros de K-Cauchy por la izquierda, donde un filtro Γ sobre un espacio cuasi-uniforme (X, Ψ) es llamado K-Cauchy por la izquierda si para cada $U \in \Psi$ existe un $F \in \Gamma$ tal que $U[x] \in \Gamma$ para cada $x \in F$. Un espacio cuasi-uniforme (X, Ψ) es Smyth-completable si y sólo si cada filtro K-Cauchy por la izquierda sobre (X, Ψ) , es un filtro de Cauchy en el espacio uniforme (X, Ψ^*) .

Espacios Smyth-completos Un espacio cuasi-uniforme (X, Ψ) es llamado Smyth-completo si cada filtro K-Cauchy por la izquierda en (X, Ψ) converge en (X, Ψ^*) , ([1]).

En seguida damos un breve resumen de una clase particular de espacios cuasi-uniformes, los llamados espacios cuasi-métricos, entre los cuales está el espacio de complejidad que es el actor principal de este trabajo.

Espacios Cuasi-métricos

Una cuasi-métrica sobre un conjunto arbitrario X , es una función $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisface

1. $\rho(x, x) = 0$,
2. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$,
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x) = 0$ implica $x = y$.

El par (X, ρ) recibe el nombre de espacio cuasi-métrico.

Ejemplos: Definamos las aplicaciones: $\rho_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$, mediante

2.5.

$$\rho_1(x, y) = \begin{cases} y - x & \text{si } x \leq y \\ k > 0 & \text{si } x > y \end{cases}$$

2.6. $\rho_2(x, y) = \max\{y - x, 0\}$. Tanto ρ_1 como ρ_2 son cuasi-métricas.

Dada una cuasi-métrica ρ sobre un conjunto X , siempre es posible construir otra cuasi-métrica $\bar{\rho}$ definida por

$$\bar{\rho}(x, y) = \rho(y, x)$$

a la cual se le conoce como cuasi-métrica conjugada de ρ .

A partir de ρ y $\bar{\rho}$ se define la métrica ρ^s mediante

$$\rho^s(x, y) = \text{máx} \{ \bar{\rho}(x, y), \rho(x, y) \}.$$

Nótese que ρ es una cuasi-métrica si y sólo si ρ^s es una métrica. Una cuasi-métrica ρ sobre X se llama bicompleta si ρ^s es una métrica completa sobre X . Tal como en los espacios métricos, es posible definir bolas abiertas y cerradas en este tipo de espacios no simétricos, lo cual nos permite definir también la topología que estas generan. Dado un espacio cuasi-métrico (X, ρ) , para $x \in X$ y $r > 0$ se definen las bolas abiertas y cerradas con centro en x y radio r como

$$B_\rho(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\} \text{ y}$$

$$B_\rho[x, r] = \{y \in X : \rho(x, y) \leq r\}.$$

Con esto, los conjuntos abiertos y cerrados se definen de manera análoga a como se hace en los espacios métricos: se dice que un subconjunto G de X es abierto respecto a ρ o que es ρ -abierto, si para cada $x \in G$, existe $r > 0$ tal que $B_\rho(x, r) \subseteq G$. Un subconjunto C de X es cerrado respecto a ρ (o ρ -cerrado), si es complemento de algún ρ -abierto.

En un espacio cuasi-métrico (X, ρ) , se cumple que ([3]):

- Toda bola abierta $B_\rho(x, r)$ es un conjunto ρ -abierto.
- Toda bola $B_\rho[x, r]$ es un conjunto $\bar{\rho}$ -cerrado.
- Para cualquier $x \in X$, se cumple que $B_{\rho^s}(x, r) = B_\rho(x, r) \cap B_{\bar{\rho}}(x, r)$.
- τ_{ρ^s} es la mínima topología que contiene a $\tau_\rho \cup \tau_{\bar{\rho}}$.

Como fue mencionado con anterioridad, existe una estrecha relación entre los espacios cuasi-métricos y los espacios cuasi-uniformes. Una cuasi-semimétrica ρ sobre X genera un espacio cuasi-uniforme (X, Ψ_ρ) mediante la base numerable $\beta_\rho = (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde

$$B_n = \left\{ (x, y) \in X \times X : \rho(x, y) < \frac{1}{2^n} \right\},$$

esto es,

$$\Psi_\rho = \{U \subseteq X \times X : \exists B_n \in \beta_\rho, B_n \subseteq U\}.$$

De igual manera, la familia

$$\overline{B}_n = \left\{ (x, y) \in X \times X : \rho(x, y) \leq \frac{1}{2^n} \right\},$$

genera la misma cuasi-uniformidad Ψ_ρ ([8]).

Dado que $B_n(x) = B_\rho(x, \frac{1}{2^n})$ y $\overline{B}_n(x) = B_\rho[x, \frac{1}{2^n}]$, puede verse que las topologías generadas por la cuasi-semimétrica ρ y la cuasi-uniformidad Ψ_ρ coinciden, es decir, se cumple que $\tau_\rho = \tau(\Psi_\rho)$. Esto es, una cuasi-métrica induce un espacio cuasi-uniforme de base numerable, lo cual permite ver la completación de su espacio uniforme inducido (o la bicompletación del espacio cuasi-uniforme) mediante sucesiones.

Espacios normados asimétricamente

Al trabajar con espacios lineales es frecuente la aparición de funcionales parecidos a las normas, en donde no se cumple la condición $p(x) = p(-x)$, este tipo de funcionales se define como sigue. Puede consultarse más al respecto en [2]. Sea X un espacio lineal real. Una función $p : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una norma asimétrica sobre X , si para toda $x, y \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$

- (i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$,
- (ii) $p(rx) = rp(x)$,
- (iii) $p(x) = p(-x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Al par (X, p) se le llama espacio normado asimétricamente ([2], [3]). Como en el caso de cuasi-métricas, se puede definir \bar{p} , la norma asimétrica conjugada de p , por $\bar{p}(x) = p(-x)$. De igual forma, se define $p^s(x) = \max\{p(x), p(-x)\}$, la cual resulta ser una norma llamada la norma asociada a p . Nótese que p es una norma asimétrica si y sólo si p^s es una norma sobre X .

Además, se cumple que $p(x) \leq p^s(x)$ y que $\bar{p}(x) \leq p^s(x)$ para toda $x \in X$.

Dada una norma asimétrica p , siempre es posible definir una cuasi-métrica ρ_p mediante $\rho_p(x, y) = p(y - x)$. Análogamente, para un espacio normado asimétricamente (X, p) , las bolas abiertas y cerradas con centro en x y radio r están dadas por

$$B_p(x, r) = \{y \in X : p(y - x) < r\}$$

$$B_p[x, r] = \{y \in X : p(y - x) \leq r\}.$$

Ejemplo 2.7: En \mathbb{R} la norma asimétrica dada por

$$u(x) = \max\{0, x\} = x \vee 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

define la cuasi-métrica

$$\rho_u(x, y) = u(y - x) = \max\{0, y - x\} = (y - x) \vee 0.$$

Conos normados asimétricamente

Un semigrupo es un par $(X, +)$ donde X es conjunto no vacío y $+$ es una operación binaria en X que cumple la propiedad asociativa. Mientras que un monoide es un semigrupo $(X, +)$ con elemento neutro o cero.

Definición 2.1: Un cono sobre \mathbb{R}^+ es una terna $(X, +, \cdot)$ tal que $(X, +)$ es un monoide abeliano, y $\cdot : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ una función tal que para cada $x, y \in X$ y $r, s \in \mathbb{R}^+$:

1. $r \cdot (s \cdot x) = (rs) \cdot x$
2. $r \cdot (x + y) = (r \cdot x) + (r \cdot y)$
3. $(r + s) \cdot x = (r \cdot x) + (s \cdot x)$
4. $1 \cdot x = x$.

Una norma asimétrica sobre un cono $(X, +, \cdot)$ es una función $p : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$,

1. $p(r \cdot x) = r p(x)$,
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$,
3. $p(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Un cono normado asimétricamente es un par (X, p) donde X es un cono y p es una norma asimétrica sobre X . Un caso particular de cono normado asimétricamente es el que desarrollaremos en la siguiente sección.

3 El espacio de complejidad y su dual

En 1995, Schellekens introdujo el espacio de complejidad, conformado por el conjunto de funciones de complejidad de algoritmos y dotado de una función distancia (no simétrica) entre ellas, con la intención de dar un sustento métrico y topológico al análisis de complejidad de algoritmos.

El espacio de complejidad C

Para analizar un algoritmo y medir qué tanto tarda en resolver un problema con un cierto tamaño, se encuentra una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ llamada función de complejidad.

Schellekens define el espacio de complejidad como el par (C, d_C) , donde

$$C = \left\{ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{f(n)} < \infty \right\}$$

y d_C es la cuasi-métrica sobre C dada por

$$d_C(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \left[\left(\frac{1}{g(n)} - \frac{1}{f(n)} \right) \vee 0 \right]$$

para cada $f, g \in C$.

Para un $n \in \mathbb{N}$ fijo, podríamos cuantificar el beneficio obtenido (en términos de reducción de complejidad) al remplazar el algoritmo con función de complejidad f por el algoritmo con función de complejidad g mediante $f(n) - g(n)$. Con el fin de obtener una medida de progreso relativo podemos remplazar esa diferencia por $\frac{f(n)-g(n)}{f(n)}$. Sin embargo, si $f(n)$ toma un valor muy grande comparado con el valor de $g(n)$, esta última expresión tiende a 1, pues $1 - \frac{g(n)}{f(n)} \rightarrow 1$ cuando $\frac{g(n)}{f(n)} \rightarrow 0$. Dado que se busca poder distinguir el nivel de beneficio para distintos valores de $g(n)$ (aún cuando se tengan valores de $f(n)$ muy grandes), se reemplaza la última expresión por $\frac{f(n)-g(n)}{f(n)g(n)} = \frac{1}{g(n)} - \frac{1}{f(n)}$. Nótese que el factor 2^{-n} garantiza la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{f(n)}$.

La asimetría de d_C ocasiona pérdida de cierta información, sin embargo este es un costo necesario pues es precisamente la no simetría la que guía la elección del algoritmo más eficiente.

Un poco después, Romaguera y Schellekens introdujeron el espacio de complejidad dual (cono normado asimétricamente) y han estudiado varias propiedades del espacio de complejidad original que son interesantes desde el punto de vista computacional, por medio del análisis de su dual.

De hecho, mientras que el espacio de complejidad no puede ser modelado como un cono normado asimétricamente, el espacio dual admite una estructura de cono (o espacio semilineal) normado asimétricamente y, por otra parte, este puede ser usado directamente para el análisis de cierto tipo de algoritmos, donde el tiempo de ejecución es la medida de complejidad ([8]).

El dual del espacio de complejidad C^*

El espacio de complejidad dual es denotado por (C^*, d_{C^*}) , y definido por

$$C^* = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} f(n) < \infty\}$$

y d_{C^*} es la cuasi-métrica sobre C^* dada por

$$d_{C^*}(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} [(g(n) - f(n)) \vee 0]$$

para cada $f, g \in C^*$. De hecho, C^* resulta ser un cono normado asimétricamente por la función real no negativa $q_{C^*}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} u(f(n))$ de tal forma que la cuasi-métrica d_{C^*} puede ser obtenida de la norma asimétrica q_{C^*} de la manera siguiente:

$$d_{C^*}(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} u(g(n) - f(n))$$

para cada $f, g \in C^*$. Mediante un breve desarrollo se puede verificar que el mapeo inversión $\Psi : C^* \rightarrow C$, $\Psi(f) = \frac{1}{f}$, es una isometría de (C^*, d_{C^*}) a (C, d_C) (con la convención de que $\frac{1}{0} = \infty$), esto permite transportar algunas propiedades del espacio dual al espacio de complejidad (aquellas que se mantienen bajo isometría).

Como se ha mencionado, la distancia de complejidad entre dos funciones $f, g \in C$ es $d_C(f, g)$ y mide el progreso relativo que se hace al bajar la complejidad reemplazando un programa P con función de complejidad f por un programa Q con función de complejidad g .

Puesto que para $f, g \in C^*$ se tiene $d_{C^*}(f, g) = d_C(1/f, 1/g)$, deducimos que $d_{C^*}(f, g)$ mide el progreso relativo que se hace al tratar de bajar la complejidad remplazando P por Q .

En particular, $d_{C^*}(f, g) = 0$ puede ser interpretado como que g es más eficiente que f .

Propiedades Métricas del Espacio de Complejidad

Se dice que un espacio cuasi-métrico (X, ρ) es pesable si existe una función (llamada "función peso") $w : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ se cumple:

$$\rho(x, y) + w(x) = \rho(y, x) + w(y).$$

Puede probarse que los espacios (C, d_C) y (C^*, d_{C^*}) son pesables con

$$\omega_C(f) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{f(n)} \quad \text{y} \quad \omega_{C^*}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(n),$$

respectivamente.

Por otro lado una sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en un espacio cuasi-métrico (X, ρ) se dice de K-Cauchy por la izquierda si para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$ siempre que $n_0 \leq n \leq m$.

Se ha mencionado ya que un espacio cuasi-métrico genera un espacio cuasi-uniforme, si este espacio es además Smyth completible (como fue definido para los espacios cuasi-uniformes) entonces el espacio cuasi-métrico cumple los siguientes enunciados:

Un espacio cuasi-métrico (X, ρ) es Smyth-completible si y sólo si toda sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de K-Cauchy por la izquierda en (X, ρ) , es de Cauchy en (X, ρ^s) .

Un espacio cuasi-métrico (X, ρ) es Smyth-completo si toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en (X, ρ) de K-Cauchy por la izquierda es convergente en (X, ρ^s) .

Además, Schellekens prueba en [6] que todo espacio pesable es Smyth-completible, lo cual conduce a que los espacios cuasi-métricos (C, d_C) y (C^*, d_{C^*}) son Smyth-completibles.

Otro concepto importante en los espacios cuasi-métricos, el cual se define de manera análoga a como se define en los espacios cuasi-uniformes, es la bicompletitud: un espacio cuasi-métrico (X, ρ) es bicompleto si (X, ρ^s) es completo, [1].

Utilizando los conceptos anteriores, es fácil deducir el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Un espacio cuasi-métrico (X, ρ) Smyth-completable y bicompleto es Smyth completo.*

Como se mencionó con anterioridad, nuestro objetivo es probar que los espacios C y C^* son Smyth-completos. Dado que la completitud de Smyth es una propiedad que se mantiene bajo isometría, podemos reducir esta tarea a probar que el espacio dual C^* la cumple. El teorema anterior muestra un bosquejo del camino que seguiremos para cumplir nuestro objetivo: dado que el espacio cuasi-métrico C^* es Smyth-completable, basta con probar que es bicompleto para deducir su completitud de Smyth.

Teorema 3.2. *El espacio de complejidad dual (C^*, d_{c^*}) es bicompleto.*

La prueba puede encontrarse en [11]. Del resultado anterior podemos deducir que el espacio de complejidad dual C^* es Smyth-completo. Y dada la isometría entre C y C^* , el espacio de complejidad C es también Smyth-completo.

4 Aplicaciones

Sea $C_0 = \{f \in C : f(n) < \infty \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ donde C es el espacio de complejidad ya definido anteriormente. Sea $\Phi : (C, d_c) \rightarrow (C, d_c)$ un funcional, se dice que este es un funcional de mejora respecto a una función $f \in C_0$ si para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se cumple que $\Phi^{n+1}f \leq \Phi^n f$. El objetivo de esta sección es mostrar que para muchas relaciones de recurrencia en las cuales se basa la estructura recursiva de los algoritmos divide y vencerás probabilistas, los funcionales asociados a estos algoritmos tienen un único punto fijo, el cual es la solución para su ecuación de recurrencia. Esto se logra construyendo un funcional monótono decreciente Φ asociado a una relación de recurrencia dada T , para el cual existe una función de complejidad g tal que $g \leq \Phi g$, y dada la completitud según Smyth del espacio (C, d_c) , la secuencia de iteraciones $(\Phi^k g)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en (C, d_c^s) a alguna función $f_T \in C$ la cual es el único punto fijo de Φ , y por tanto, también la solución a la relación de recurrencia T . Además, si Φ es un funcional de mejora para alguna $g \in C_0$, entonces $f_T \leq g$ y por tanto $f_T(n) \in O(g(n))$.

Esto se enuncia en el siguiente teorema, cuya demostración puede encontrarse en [5].

Teorema 4.1. *Sea T una relación de recurrencia, supongamos que existe $n_0 \geq 2$ tal que para todo $n \geq n_0$*

$$T(n) = u(n) + \sum_{k=1}^{n-1} v_k(n)T(k),$$

donde $u \in C_0$ y $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones en \mathbb{N} que cumplen que para algún $K > 0$ y para todo $n > n_0$

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} v_k(n) \leq K.$$

Entonces el funcional $\Phi : C \rightarrow C$ definido para toda $f \in C$ por $\Phi f(0) = T(1)$, $\Phi f(n) = T(n)$ para $n = 1, \dots, n_0 - 1$, y

$$\Phi f(n) = u(n) + \sum_{k=1}^{n-1} v_k(n)f(k)$$

para todo $n \geq n_0$, tiene un único punto fijo $f_T \in C_0$ el cual es la solución de la relación de recurrencia T . Más aún, si Φ es un funcional de mejora para alguna $g \in C$, entonces $f_T \leq g$, esto es, la solución de la relación de recurrencia es de orden $O(g)$.

Ejemplos

Los algoritmos divide y vencerás probabilistas presentan una ecuación de recurrencia que en el caso general se ve como sigue:

$$T(n) = c_1 n + c_2 + \sum_{k=1}^{n-1} q(n, k)T(k)$$

donde $T(1) \geq 0$, $c_1 > 0$ y $2c_1 + c_2 > 0$, y para todo $k \geq n - 1$, y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $q(n, k)$ es no negativa y proporcional a las probabilidades marginales correspondientes a la división de una tarea de tamaño n en sub-tareas de tamaño $k < n$. Nótese que dado que $2c_1 + c_2 > 0$, se tiene $T(2) = 2c_1 + c_2 + T(1)q(2, 1) > 0$, por tanto $T(n) > 0$ para todo $n \geq 2$.

Existen muchas formas posibles para la función $q(n, k)$, algunos ejemplos típicos son:

$$A) \frac{\alpha}{n}, \quad B) \frac{2\alpha(n-k)}{n(n+1)}, \quad C) \frac{\alpha}{n} \sum_{j=k+1}^n \frac{1}{j}, \quad D) \frac{2\alpha(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)},$$

con $\alpha > 0$, los cuales aparecen en algoritmos divide y vencerás probabilistas, en árboles de búsqueda binaria, en búsquedas completamente especificadas y consultas parciales en árboles cuaternarios y algoritmos Quicksort de mediana-de-tres.

CASO A): En este caso, la relación de recurrencia T está dada por

$$T(n) = c_1n + c_2 + \frac{\alpha}{n} \sum_{k=1}^{n-1} T(k), \quad \text{para toda } n \geq 2.$$

Por la observación anterior, podemos asumir que $T(1) > 0$, con lo cual podemos aplicar el teorema 4.1, con $n_0 = 2$, $u(n) = c_1n + c_2$ para $n \geq n_0$, $u(0) = u(1) = c > 0$ con c arbitrario y $v_k(n) = \frac{\alpha}{n}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto T tiene una solución única $f_T \in C_0$. Nótese que para todo $n > 2 = n_0$ se cumple

$$\sum_{k=2}^{n-1} v_k(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\alpha}{n} = \frac{\alpha(n-2)}{n} < \alpha.$$

Lo siguiente es obtener una clase de funciones de complejidad para las cuales el funcional Φ asociado a T es un funcional de mejora. Esto con el fin de acotar a f_T con estas funciones (cuyo orden O busca también obtenerse), y encontrar el orden O de f_T .

Notemos que para cada $n \geq 2$ se tiene que

$$\begin{aligned} T(n+1) &= c_1(n+1) + c_2 + \frac{\alpha}{n+1} \sum_{k=1}^n T(k) \\ &= c_1(n+1) + c_2 + \frac{\alpha}{n+1} \left(T(n) + \sum_{k=1}^{n-1} T(k) \right) \\ &= c_1(n+1) + c_2 + \frac{\alpha}{n+1} \left(T(n) + \frac{n}{\alpha} (T(n) - (c_1n + c_2)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_1(n+1) + c_2 + \frac{\alpha}{n+1}T(n) + \frac{\alpha n}{\alpha(n+1)}T(n) - \frac{\alpha n}{\alpha(n+1)}(c_1n + c_2) \\
&= c_1(n+1) + c_2 - \frac{n(c_1n + c_2)}{n+1} + \frac{n+\alpha}{n+1}T(n) \\
&= \frac{c_1(2n+1) + c_2}{n+1} + \frac{n+\alpha}{n+1}T(n) = h(n+1) + \frac{n+\alpha}{n+1}T(n),
\end{aligned}$$

donde $h(n+1) = \frac{c_1(2n+1) + c_2}{n+1}$ para todo $n \geq 2$.

Así, utilizando la definición original de T ,

$$T(2) = 2c_1 + c_2 + \frac{\alpha}{2}T(1),$$

y mediante la relación descrita anteriormente, para $n \geq 3$

$$T(n) = h(n) + \frac{n+\alpha-1}{n}T(n-1).$$

Por tanto, podemos expresar Φ como $\Phi f(0) = \Phi f(1) = T(1)$, $\Phi f(2) = T(2)$ (por la observación al inicio de la sección de ejemplos), y

$$\Phi f(n) = h(n) + \frac{n+\alpha-1}{n}f(n-1)$$

para $n \geq 3$, con $h(n) = \frac{c_1(2n-1) + c_2}{n}$.

Luego nótese que para funciones $g \in C$ que satisfagan que $T(n) \leq g(n)$ considerando $n = 0, 1, 2$, y

$$h(n) + \frac{n+\alpha-1}{n}g(n-1) \leq g(n) \quad \text{para } n \geq 3, \quad (1)$$

Φ es un funcional de mejora, pues $\Phi g \leq g$, y luego, por el teorema principal de este capítulo, la solución f_T de la relación de recurrencia T satisface $f_T \leq g$.

Dicho lo anterior, mostremos que para $0 < \alpha \leq 2$ y $a > 1$, $f_T(n) \in O(n \log_a n)$. En efecto, notemos que para $K, r > 0$ y $a > 1$ aplicando L'Hopital dos veces se llega a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{K[x^2(\log_a x - \log_a(x-1)) + \log_a(x-1)]}{rx + s} = \frac{K}{r \ln a},$$

luego, si $K > r \ln a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$

$$Kn \log_a n > \frac{n+1}{n} K(n-1) + \frac{rn+s}{n}.$$

Así para el caso particular en que $r = 2c_1$ y $s = c_2 - c_1$, obtenemos que para $0 < \alpha \leq 2$ y $n \geq n_0$,

$$Kn \log_a n > \frac{n+\alpha-1}{n} K(n-1) \log_a(n-1) + \frac{c_1(2n-1) + c_2}{n}. \quad (2)$$

Por lo tanto $g(n) = Kn \log_a n$, con $K > 2c_1 \ln a$, y $n \geq n_0$, satisface la desigualdad (1), es decir, pertenece a la clase de funciones para las cuales Φ es un funcional de mejora, lo cual nos lleva a concluir que $f_T(n) \in O(n \log_a n)$ siempre que $0 < \alpha \leq 2$.

CASO B): En este caso, la relación de recurrencia T está dada por

$$T(n) = c_1 n + c_2 + \frac{2\alpha}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)T(k), \quad \text{para todo } n \geq 2.$$

Al igual que en el caso A), podemos asumir que $T(1) > 0$, con lo cual T satisface las condiciones del teorema para $n_0 = 2$. Así se tiene que

$v_k(n) = \frac{2\alpha(n-k)}{n(n+1)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $u \in C_0$, con $u(0) = u(1) = c > 0$ (para c arbitrario) y $u(n) = c_1 n + c_2$ para $n \geq 2$. Nótese que

$$\sum_{k=2}^{n-1} (n-k) = \sum_{k=2}^{n-1} n - \sum_{k=2}^{n-1} k = n(n-2) - \left[\frac{n(n-1)}{2} - 1 \right] = \frac{n^2 - 3n + 2}{2},$$

de donde

$$\sum_{k=2}^{n-1} v_k(n) = \frac{2\alpha}{n(n+1)} \sum_{k=2}^{n-1} (n-k) = \frac{\alpha(n^2 - 3n + 2)}{n(n+1)} < \frac{\alpha(n-2)}{n+1},$$

para todo $n > 2$, pues $n - 3 + \frac{2}{n} < n - 2$ siempre que $n > 2$.

Por el teorema 4.1, podemos deducir que la relación de recurrencia T tiene una única solución $f_T \in C_0$. Como hicimos en el caso anterior, buscaremos una clase de funciones de complejidad para las cuales el funcional Φ asociado

a la relación de recurrencia T sea un funcional de mejora. Esto con el fin de acotar a f_T por estas funciones (preferentemente de orden O conocido) y encontrar el orden O de f_T . Para esto notemos que para cada $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
 T(n+1) &= c_1(n+1) + c_2 + \frac{2\alpha}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^n (n+1-k)T(k) \\
 &= c_1(n+1) + c_2 + \frac{2\alpha}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)T(k) + \sum_{k=1}^n T(k) \right) \\
 &= c_1(n+1) + c_2 \\
 &\quad + \frac{2\alpha}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{n(n+1)}{2\alpha} (T(n) - (c_1n + c_2)) + \sum_{k=1}^n T(k) \right) \\
 &= \left(c_1(n+1) + c_2 - \frac{n(c_1n + c_2)}{n+2} \right) + \frac{n}{n+2} T(n) + \frac{2\alpha}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^n T(k).
 \end{aligned}$$

Por tanto, de la definición original de T tenemos que

$$T(2) = 2c_1 + c_2 + \frac{\alpha}{3}T(1),$$

y utilizando la ecuación anterior, obtenemos que para $n \geq 3$

$$T(n) = h(n) + \frac{n-1}{n+1}T(n-1) + \frac{2\alpha}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n-1} T(k),$$

donde

$$h(n) = c_1n + c_2 - \frac{(n-1)(c_1(n-1) + c_2)}{n+1} = \frac{c_1(3n-1) + 2c_2}{n+1}.$$

Así, el funcional Φ asociado a T puede expresarse como

$$\Phi f(0) = \Phi f(1) = T(1), \quad \Phi f(2) = T(2),$$

$$\Phi f(3) = h(3) + \frac{1}{2}T(2) + \frac{\alpha}{6}(T(1) + T(2)), \quad y$$

$$\Phi f(n) = h(n) + \frac{n-1}{n+1}f(n-1) + \frac{2\alpha}{n(n+1)} \left(T(1) + T(2) + \sum_{k=3}^{n-1} f(k) \right)$$

para todo $n \geq 4$. Luego si $g \in C$ es monótona decreciente (es decir, si se cumple que $g(n) \leq g(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) y satisface que $T(n) \leq g(n)$ para $n = 0, 1, 2, 3$ y

$$\frac{c_1(3n-1) + 2c_2}{n+1} + \frac{(n-1)(n+2\alpha)}{n(n+1)}g(n-1) \leq g(n) \quad \text{para } n \geq 4,$$

entonces Φ es un funcional de mejora para g (pues $\Phi g(n) \leq T(n) \leq g(n)$ para $n = 0, 1, 2, 3$ y

$$\Phi g(n-1) \leq \frac{c_1(3n-1) + 2c_2}{n+1} + \frac{(n-1)(n+2\alpha)}{n(n+1)}g(n-1) \quad \text{para } n \geq 4),$$

y por tanto, la solución f_T de la relación de recurrencia T satisface que $f_T \leq g$.

De manera análoga a como se hizo en el caso A), mostremos que para $a > 1$ y $0 < \alpha \leq 3/2$, la función $g(n) = n \log_a n$ satisface las condiciones anteriores, con lo cual podremos deducir que $f_T(n) \in O(n \log_a n)$. Para esto, nótese que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n+1 > \frac{(n-1)(n+3)}{n+1}$, de donde, retomando la inecuación (2) se sigue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$,

$$Kn \log_a n > \frac{(n-1)(n+2\alpha)}{n(n+1)}K(n-1) \log_a(n-1) + \frac{c_1(3n-1) + 2c_2}{n+1},$$

siempre que $K > 3c_1 \ln a$ y $0 < \alpha \leq 3/2$. Esto es, $g(n) = Kn \log_a n$ cumple la condición citada anteriormente, con $K > 3c_1 \ln a$ y $n \geq n_0$. Por lo tanto podemos concluir que para $0 < \alpha \leq 3/2$, se cumple que $f_T(n) \in C(n \log_a n)$.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo obtenido por parte del Programa Para el Desarrollo Profesional Docente mediante la aprobación del proyecto Espacios Asimétricos, Bitopológicos y Aplicaciones en la Complejidad de Algoritmos del Cuerpo Académico UTMIX-39.

Bibliografía

- [1] Romaguera, S., Schellekens, M. (1999). *Quasi-metric properties of complexity spaces*. Topology and its Applications, 98(1), 311-322.

- [2] Cobzas S., *Functional Analysis in Asymmetric normed Spaces*, Mathematics FA arXiv: 006.117v, 2010.
- [3] J. M. Hernández Morales, C. H. Castañeda Roldán, L. C. Álvarez Marín, J. L. Hernández López, V. Tochiuitl Bueno, J. L. Carrasco Pacheco, M. A. Ramírez Solano, R. Vázquez Huerta, *Espacios con distancias no simétricas*.
- [4] Grimaldi, R. P. (1998). *Matemáticas discreta y combinatoria: introducción y aplicaciones*. Pearson Educación.
- [5] García-Raffi, L. M., Romaguera, S., Schellekens, M. P. (2008). *Applications of the complexity space to the general probabilistic divide and conquer algorithms*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 348(1), 346-3
- [6] H.P.A Künzi, *Nonsymmetric topology*, in: Proc. Colloquium on Topology, 1993, Szekszárd, Hungary, Colloq. Math. Soc. János Bolyai Math. Studies 4 (1995) 303-338. Romaguera, S., Schellekens, M. (1999). *Quasi-metric properties of complexity spaces*. Topology and its Applications, 98(1), 311-322.
- [7] Rosen, K. H., Krithivasan, K. (2012). *Discrete mathematics and its applications: with combinatorics and graph theory*. Tata McGraw-Hill Education.
- [8] Schellekens, M. (1995). *The Smyth completion: a common foundation for denotational semantics and complexity analysis*. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 1, 535-556.
- [9] Hernández Morales, J. M., Jiménez Pozo, M. A., *Espacios de Lipschitz con normas asimétricas*.
- [10] Künzi, H. P. A. (2009). *An introduction to quasi-uniform spaces*. Contemp. Math, 486, 239-304.
- [11] Castaneda Alvarez, D.C., Hernández Morales J.M., Álvarez Marín, L. de C.(2018). *Sobre el espacio cuasi-métrico de las funciones de complejidad*.

Universidad Tecnológica Mixteca
Km 2.5 Carretera a Acatlima,
Huajuapán de León, Oaxaca, C.P. 69000

dianacastagneda94@gmail.com

jmhm@mixteco.utm.mx

lcamarin@yahoo.com.mx

Capítulo 2

Cuasi-rectificación de curvas

José Margarito Hernández Morales, Vulfrano Tochihuitl

Bueno

IFM, UTM

Resumen

La longitud de arco, también llamada rectificación de una curva ζ , es la medida de la distancia o camino recorrido a lo largo de dicha curva. Como lo hacían los antiguos geómetras, la idea para calcular la longitud de una curva contenida en el plano o en el espacio, consiste en dividirla en segmentos pequeños, escogiendo una familia finita de puntos en ζ , y aproximar la longitud mediante la longitud de la poligonal con vértices en dichos puntos. Cuánto más puntos escojamos en ζ , mejor debe ser el valor obtenido como aproximación de la longitud. El objetivo de este trabajo es, analizar las propiedades de longitud de una curva y principalmente demostrar la continuidad de la función longitud de arco en un espacio cuasi-semimétrico en general, verídicos en un métrico.

1 Introducción

El impactante teorema de Bohman-Korovkin ([2] y [9]) establece que si T_n es una sucesión de operadores lineales positivos sobre el espacio $C([0, 1])$, tales que $T_n(1)$, $T_n(x)$ y $T_n(x^2)$ convergen uniformemente a 1, x y x^2 , respectivamente, entonces $T_n(f)$ converge uniformemente a f para toda $f \in C([0, 1])$, es decir, la sucesión T_n converge al operador identidad sobre $C([0, 1])$. Este teorema desencadenó una teoría amplia y profunda (ver el tratado de Altmore y Campiti [1]). El Teorema de Korovkin es de tipo cualitativo, pues afirma la convergencia de la sucesión de operadores al operador identidad sin hacer mención sobre la velocidad con la cual converge. La parte cuantitativa que hace referencia a la velocidad con la cual se da la convergencia mencionada fue iniciada por Mamedov [8] y continuada por Freud [4]. Resultados

cuantitativos relativos a los espacios clásicos $C([a, b])$ y $C([0, 2\pi])$, fueron entendidos por Censor [3] al espacio $C(\mathbb{X})$, siendo $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ un espacio compacto y convexo; con las funciones de prueba $1, x_i, x_i^2$ (funciones coordenadas). En [5] Jiménez Pozo extiende los resultados de Censor al espacio $C(\mathbb{X})$, en donde ahora \mathbb{X} es un espacio métrico compacto y métricamente convexo. Los resultados cuantitativos desde Mamedov hasta Jiménez están en función de la desigualdad fundamental $\omega(f, n\alpha) \leq n\omega(f, \alpha)$, que es satisfecha por toda función real o compleja definida sobre un espacio métricamente convexo, toda $n \in \mathbb{N}$ y en donde ω es la función módulo de continuidad de f , dada por

$$\omega(f, \alpha) = \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{X} \\ d(x, y) \leq \alpha}} \{|f(x) - f(y)|\}.$$

¿Pero que ocurre en el caso en que \mathbb{X} no es métricamente convexo? La respuesta la da nuevamente Jiménez pozo en [6], al asociar a cada espacio métrico \mathbb{X} , un número positivo o infinito ρ , al que denominó Coeficiente de deformación de la convexidad métrica de \mathbb{X} ; éste coeficiente es dado por

$$\rho = \rho(\mathbb{X}) := \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{X} \\ x \neq y}} \inf_{\zeta_{xy}} \frac{\ell(\zeta_{xy})}{d(x, y)},$$

en donde $\ell(\zeta_{xy})$ denota la longitud de una curva que une a x con y , cuya existencia es asumida. Entre otras cosas, demostró que se cumple

$$\omega(f, \beta\alpha) \leq [\rho\beta + 1]\omega(f, \alpha).$$

Con esta desigualdad probó un teorema cuantitativo de tipo Korovkin, prescindiendo de la hipótesis de convexidad métrica.

Como se puede observar, en la definición del coeficiente de deformación ρ , se encuentra presente el concepto de longitud de una curva. Las nociones, conceptos y resultados referentes a la longitud de una curva (en base a la cual se define ρ) en un espacio métrico, fueron analizados por Jiménez Pozo y Tochihuitl Bueno en [10], como un preámbulo al análisis del coeficiente de deformación de la convexidad métrica de curvas y superficies. En este trabajo generalizamos las nociones, conceptos y resultados que han sido mencionados en un espacio métrico en general al contexto de los espacios cuasi-métricos. De manera específica, en principio mencionamos lo que es una cuasi-semimétrica, así como la cuasi-semimétrica conjugada y la semimétrica que generan estas

dos, enseguida pasamos a describir las tres topologías que se obtienen de estas tres cuasi-semimétricas y la relación entre ellas, después definimos lo que es la longitud de una curva en un espacio cuasi-semimétrico con el objetivo de definir lo que es una curva rectificable en este tipo de espacios. Además de lo anterior, se analizan los conceptos de reparametrizaciones y las relaciones que existen entre las rectificabilidades con respecto a la cuasi-semimétrica y su conjugada, para finalmente establecer resultados sobre las longitudes de una curva considerando las dos cuasi-semimétricas en cuestión. Finalizamos esta introducción mencionando que un trabajo a futuro se espera definir el concepto de coeficiente de deformación de la convexidad asimétrica, el cual será una extensión del coeficiente definido por Jiménez Pozo.

2 Espacios cuasi-semimétricos

En un espacio métrico (\mathbb{X}, d) , se tiene que la distancia de x a y es igual a la distancia de y a x . Aún más, la distancia de x a y no es cero cuando x y y son distintos. En un espacio cuasi-semimétrico, no necesariamente ocurre lo anterior, como bien se puede constatar en los ejemplos siguientes.

Definición 2.1. Una cuasi-semimétrica sobre un conjunto no vacío \mathbb{X} , es una función $\rho : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{X}$ se cumple:

1. $\rho(x, y) \geq 0$ y $\rho(x, x) = 0$.
2. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Al par ordenado (\mathbb{X}, ρ) se llama espacio cuasi-semimétrico.

Si para cualesquiera $x, y \in \mathbb{X}$, la relación $\rho(x, y) = \rho(y, x) = 0$ implica $x = y$, a ρ se le denomina cuasimétrica. Para una cuasi-semimétrica ρ sobre \mathbb{X} , las funciones $\rho^{-1} : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\rho^s : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\rho^{-1}(x, y) = \rho(y, x) \quad \text{y} \quad \rho^s(x, y) = \max\{\rho(x, y), \rho^{-1}(x, y)\}$$

son también cuasi-semimétricas (cuasisemimétrica conjugada y super s de ρ , respectivamente). Además, ρ^s es métrica si y sólo si ρ es cuasimétrica [7]. Con $\mathcal{C}(\mathbb{X})$ se denota al conjunto de todas las cuasi-semimétricas sobre \mathbb{X} . Es de hacerse notar que si $\rho, \rho' \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$ y, α y β son números reales no negativos, entonces $\alpha\rho + \beta\rho' \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$.

Ejemplo 2.2. La función $\rho_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} \rho_1(x, y) &= y - x && \text{para } x \leq y, \\ &= 1 && \text{para } y < x. \end{aligned}$$

es una cuasi-semimétrica sobre \mathbb{R} . Se tiene, por ejemplo, $\rho_1(2, 5) = 3$ y $\rho_1(5, 2) = 1$. Por tanto, existen $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $\rho_1(x, y) \neq \rho_1(y, x)$.

En general, para cualquier $k \geq 0$, la función $\rho_k : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} \rho_k(x, y) &= y - x && \text{para } x \leq y, \\ &= k && \text{para } y < x. \end{aligned}$$

es una cuasi-semimétrica sobre \mathbb{R} .

En lo sucesivo (a menos que se diga otra cosa), ρ_k denotará la cuasi-semimétrica sobre \mathbb{R} dada arriba.

Ejemplo 2.3. Si \mathbb{X} es el conjunto de todos los números reales positivos, entonces la función $\rho : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\rho(x, y) = |\log_5(\frac{x}{y})|$ es una cuasi-semimétrica sobre \mathbb{X} . Aún más, ρ es una métrica sobre \mathbb{X} . En general, toda métrica sobre un conjunto no vacío \mathbb{X} , es una cuasi-semimétrica.

Ejemplo 2.4. Sea ε el experimento aleatorio que consiste en el lanzamiento de tres monedas normales y anotar lo que aparece en la cara superior de cada moneda, el espacio muestral $\Omega_\varepsilon = \{\alpha : \alpha = x_1x_2x_3\}$ donde $x_i = a$ o $x_i = s$ según se observe águila o sol en la i -ésima moneda, respectivamente y $\mathbb{X} = \mathcal{P}(\Omega_\varepsilon)$ el conjunto potencia de Ω_ε . La función $\rho : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ en el que $\rho(x, y) = P(x \cap y^c)$ es la probabilidad del evento $x \cap y^c$ es una cuasi-semimétrica. En este ejemplo también existen $x, y \in \mathbb{X}$ tal que $\rho(x, y) \neq \rho(y, x)$.

Como en el caso de espacios métricos, en espacios cuasi-semimétricos también se definen las bolas abiertas, bolas cerradas, conjuntos abiertos, conjuntos cerrados y la topología determinada por una cuasi-semimétrica.

Definición 2.5. Sea (\mathbb{X}, ρ) un espacio cuasi-semimétrico, $x_0 \in \mathbb{X}$ y $r > 0$. Se denota y se define a la bola:

1. Abierta con centro x_0 y radio r por $B_\rho(x_0, r) := \{x \in \mathbb{X} : \rho(x_0, x) < r\}$.

2. Cerrada con centro x_0 y radio r por $B_\rho[x_0, r] := \{x \in \mathbb{X} : \rho(x_0, x) \leq r\}$.

Así, dado un espacio cuasi-semimétrico (\mathbb{X}, ρ) , $x_0 \in \mathbb{X}$ y $r > 0$, se tienen las bolas abiertas $B_\rho(x_0, r)$, $B_{\rho^{-1}}(x_0, r)$ y $B_\rho^s(x_0, r)$, como también las correspondientes bolas cerradas. Además, $B_\rho^s(x_0, r) = B_\rho(x_0, r) \cap B_{\rho^{-1}}(x_0, r)$ [7]. El subconjunto \mathbb{G} de \mathbb{X} se dice ρ -abierto, si para cada $x \in \mathbb{G}$ existe $r > 0$ tal que $B_\rho(x, r) \subseteq \mathbb{G}$. Análogamente, un subconjunto \mathbb{F} de \mathbb{X} se dice ρ -cerrado si es complemento de un ρ -abierto. Se tiene que "Toda bola abierta es ρ -abierto" y "Toda bola cerrada es ρ^{-1} -cerrado" [7]. Se verifica que:

- Los conjuntos \emptyset y \mathbb{X} son ρ -abiertos.
- La unión de cualquier familia de ρ -abiertos ρ -abierto.
- La intersección finita de ρ -abiertos es ρ -abierto.
- La intersección de cualquier familia de ρ -cerrados es ρ -cerrado.
- La unión finita de ρ -cerrados es ρ -cerrado.

Con lo anterior y la definición de topología, dado un espacio cuasi-semimétrico (\mathbb{X}, ρ) , el conjunto

$$\tau_\rho = \{\mathbb{G} \subseteq \mathbb{X} : \mathbb{G} \text{ es } \rho\text{-abierto}\}$$

es una topología sobre \mathbb{X} . Análogamente se tienen las topologías $\tau_{\rho^{-1}}$ y τ_{ρ^s} sobre \mathbb{X} .

Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio cuasi-semimétrico (\mathbb{X}, ρ) , se dice que ρ -converge al elemento x de \mathbb{X} si para todo $\epsilon > 0$ (suficientemente pequeño) existe $N = N(x, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x, x_n) < \epsilon$ para toda $n \geq N$. Con $x_n \xrightarrow{\rho} x$ se indica que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ρ -converge a x . Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio cuasi-semimétrico (\mathbb{X}, ρ) , se dice ρ -convergente si existe $x \in \mathbb{X}$ tal que $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Se tiene:

- $x_n \xrightarrow{\rho} x$ si y sólo si $\rho(x, x_n) \rightarrow 0$.
- $x_n \xrightarrow{\rho} x$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $N = N(x, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_\rho(x, \epsilon)$ para toda $n \geq N$.

Ejemplo 2.6. Sea \mathbb{Z} el conjunto de los números enteros y la cuasi-semimétrica ρ sobre \mathbb{Z} dada por $\rho(x, y) = R_7(x - y)$, el residuo que resulta de dividir $x - y$ entre siete. La sucesión $\{1 + 7n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{Z} es tal que $1 + 7n \xrightarrow{\rho} 8$ y $1 + 7n \xrightarrow{\rho} -6$.

El ejemplo anterior muestra que una sucesión convergente en un espacio cuasi-semimétrico, puede converger a más de un punto.

Ejemplo 2.7. En el espacio cuasi-semimétrico (\mathbb{R}, ρ_0) , se tiene que: $\frac{1}{n} \xrightarrow{\rho_0} 0$, $\frac{1}{n} \xrightarrow{\rho_0^{-1}} 0$, $-n \xrightarrow{\rho_0} 0$, $n \xrightarrow{\rho_0^{-1}} 0$ y $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no es ρ_0^s -convergente.

Definición 2.8. Sean $(\mathbb{X}, \rho_{\mathbb{X}})$ y $(\mathbb{Y}, \rho_{\mathbb{Y}})$ dos espacios cuasi-semimétricos, $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ una función y $x_0 \in \mathbb{X}$. Se dice que f es continua en x_0 si para todo $\epsilon > 0$ (suficientemente pequeño) existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_{\rho_{\mathbb{X}}}(x_0, \delta)) \subseteq B_{\rho_{\mathbb{Y}}}(f(x_0), \epsilon).$$

La función f se dice continua si es continua en cada elemento de \mathbb{X} . Además, la composición de funciones continuas es continua.

Ejemplo 2.9. Para cualquier espacio cuasi-semimétrico (\mathbb{X}, ρ) , la función identidad sobre \mathbb{X} es continua.

Ejemplo 2.10. Sea $\mathbb{X} = \mathbb{R} = \mathbb{Y}$, $\rho_{\mathbb{X}} = \rho_1$ y $\rho_{\mathbb{Y}} = \rho_1^{-1}$. La función $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ dada por $f(x) = x$, no es continua. En efecto, para cualesquiera $x_0 \in \mathbb{X}$ y $\epsilon > 0$, se tiene $B_{\rho_1^{-1}}(f(x_0), \epsilon) = (x_0 - \epsilon, x_0]$. Ahora bien, como

$$\begin{aligned} B_{\rho_1}(x_0, \delta) &= [x_0, x_0 + \delta) && \text{para } \delta \leq 1 \\ &= (-\infty, x_0 + \delta) && \text{para } 1 < \delta, \end{aligned}$$

entonces no puede existir $\delta > 0$ tal que $f(B_{\rho_1}(x_0, \delta)) \subseteq B_{\rho_1^{-1}}(f(x_0), \epsilon)$. De aquí que f , no sea continua en x_0 .

El teorema siguiente es una generalización de lo que sucede en espacios métricos.

Teorema 2.11. Sean $(\mathbb{X}, \rho_{\mathbb{X}})$ y $(\mathbb{Y}, \rho_{\mathbb{Y}})$ dos espacios cuasi-semimétricos, $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ una función y $x_0 \in \mathbb{X}$. Si f es continua en x_0 , entonces $f(x_n) \xrightarrow{\rho_{\mathbb{Y}}} f(x_0)$ para toda sucesión $x_n \xrightarrow{\rho_{\mathbb{X}}} x_0$.

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathbb{X} tal que $x_n \xrightarrow{\rho_{\mathbb{X}}} x_0$ y $\epsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que $f(B_{\rho_{\mathbb{X}}}(x_0, \delta)) \subseteq B_{\rho_{\mathbb{Y}}}(f(x_0), \epsilon)$. Para dicho δ existe $N = N(x, \delta) \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_{\rho_{\mathbb{X}}}(x_0, \delta)$ para toda $n \geq N$. De donde, $f(x_n) \in B_{\rho_{\mathbb{Y}}}(f(x_0), \epsilon)$ para toda $n \geq N$. Esto es, $f(x_n) \xrightarrow{\rho_{\mathbb{Y}}} f(x_0)$. \square

Definición 2.12. Sean (X, ρ_X) y (Y, ρ_Y) dos espacios cuasi-semimétricos y una función $f : X \rightarrow Y$. Se dice que f es :

- Bicontinua superiormente si f es continua con ρ_X, ρ_Y y ρ_Y^{-1} .
- Bicontinua inferiormente si f es continua con ρ_X, ρ_X^{-1} y ρ_Y .
- Bicontinua si f es bicontinua tanto inferiormente como superiormente.

Ejemplo 2.13. Sea $X = \mathbb{R} = Y$ y $\rho_X = \rho_1 = \rho_Y$. La función $f : X \rightarrow Y$ dada por $f(x) = x$ es continua, pero no bicontinua superiormente. En efecto, sean $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$ arbitrarios, como $B_{\rho_Y^{-1}}(f(x_0), \epsilon) = (x_0 - \epsilon, x_0]$ y para $\delta > 0$

$$\begin{aligned} B_{\rho_X}(x_0, \delta) &= [x_0, x_0 + \delta) && \text{si } \delta \leq 1 \\ &= (-\infty, x_0 + \delta) && \text{si } 1 < \delta, \end{aligned}$$

entonces no puede existir $\delta > 0$ tal que $f(B_{\rho_X}(x_0, \delta)) \subseteq B_{\rho_Y^{-1}}(f(x_0), \epsilon)$.

Ejemplo 2.14. Toda función constante entre dos espacios cuasi-semimétricos es superiormente continua.

Ejemplo 2.15. Sea el espacio cuasi-semimétrico (\mathbb{Z}, ρ) tal que $\rho(x, y) = R_7(y-x)$ residuo que resulta de dividir $y-x$ entre siete. La función $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = x$ es continua. Para la continuidad de f respecto a ρ y ρ^{-1} , basta con observar que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, $B_\rho(f(x_0), \epsilon) = B_{\rho^{-1}}(f(x_0), \epsilon)$. De esta manera, f es bicontinua superiormente.

Teorema 2.16. Si (X, ρ_X) y (Y, ρ_Y) son dos espacios cuasi-semimétricos y f una función de X en Y , entonces f es bicontinua superiormente si y sólo si f es continua con las cuasi-semimétricas ρ_X y ρ_Y^s .

Demostración. En efecto:

1. Supóngase f bicontinua superiormente. Sean $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$ arbitrarios. Existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$f(B_{\rho_X}(x_0, \delta_1)) \subseteq B_{\rho_Y}(f(x_0), \epsilon) \quad \text{y} \quad f(B_{\rho_X}(x_0, \delta_2)) \subseteq B_{\rho_Y^{-1}}(f(x_0), \epsilon).$$

Al tomar $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene

$$f(B_{\rho_X}(x_0, \delta)) \subseteq B_{\rho_Y}(f(x_0), \epsilon) \quad \text{y} \quad f(B_{\rho_X}(x_0, \delta)) \subseteq B_{\rho_Y^{-1}}(f(x_0), \epsilon),$$

por tanto,

$$f(B_{\rho_{\mathbb{X}}}(x_0, \delta)) \subseteq B_{\rho_{\mathbb{Y}}}(f(x_0), \epsilon) \cap B_{\rho_{\mathbb{Y}}^{-1}}(f(x_0), \epsilon) = B_{\rho_{\mathbb{Y}}^s}(f(x_0), \epsilon).$$

Con lo mostrado, f es continua con las cuasi-semimétricas $\rho_{\mathbb{X}}$ y $\rho_{\mathbb{Y}}^s$.

2. Supóngase que f es continua con las cuasi-semimétricas $\rho_{\mathbb{X}}$ y $\rho_{\mathbb{Y}}^s$. Sean $x_0 \in \mathbb{X}$ y $\epsilon > 0$ arbitrarios. Existe $\delta > 0$ y tal que

$$f(B_{\rho_{\mathbb{X}}}(x_0, \delta)) \subseteq B_{\rho_{\mathbb{Y}}^s}(f(x_0), \epsilon).$$

Pero como $B_{\rho_{\mathbb{Y}}^s}(f(x_0), \epsilon) \subseteq B_{\rho_{\mathbb{Y}}}(f(x_0), \epsilon)$ y $B_{\rho_{\mathbb{Y}}^s}(f(x_0), \epsilon) \subseteq B_{\rho_{\mathbb{Y}}^{-1}}(f(x_0), \epsilon)$, entonces $f(B_{\rho_{\mathbb{X}}}(x_0, \delta)) \subseteq B_{\rho_{\mathbb{Y}}}(f(x_0), \epsilon)$ y $f(B_{\rho_{\mathbb{X}}}(x_0, \delta)) \subseteq B_{\rho_{\mathbb{Y}}^{-1}}(f(x_0), \epsilon)$, de donde, f es bicontinua superiormente.

De 1 y 2, se infiere la tesis del teorema. □

3 Cuasi-rectificación de curvas

La longitud es un concepto métrico definible para entidades geométricas en el que se ha definido una función distancia o métrica. Sin embargo, no debe confundirse longitud con distancia, ya que para una curva en general, la distancia entre dos puntos cualesquiera de la misma es siempre inferior a la longitud de la curva comprendida entre esos dos puntos. Rectificar una curva es determinar la distancia o camino recorrido a la largo de la curva. Cuando la curva es un segmento de recta que une dos puntos, el cálculo de la longitud no representa problema alguno, pero si lo es para curvas en general. La idea para calcular la longitud de una curva ζ , contenida en el plano o en el espacio, consiste en dividirla en segmentos pequeños, escogiendo una familia finita de puntos sobre la misma, y aproximar la longitud mediante la longitud de la poligonal con vértices en dichos puntos, cuánto más puntos escojamos en la curva, mejor debe ser el valor obtenido como aproximación de la longitud, idea atribuible a los antiguos geométras, como por ejemplo, Arquímedes (288-212 A. C).

En esta sección presentamos la definición de curva, suma poligonal asociada a una curva en función de una parametrización y una partición, curvas rectificables y resultados.

Definición 3.1. Sea (\mathbb{X}, ρ) un espacio cuasi-semimétrico y $\emptyset \neq \zeta \subseteq \mathbb{X}$. Se dice que ζ es una curva en \mathbb{X} si existe una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{X}$ continua tal que

$$\text{Im}(f) = \zeta.$$

La función f de la definición se llama parametrización (camino) para la curva ζ , $f(a)$ y $f(b)$ se llaman extremos de la curva y finalmente, que f recorre a la curva de $f(a)$ a $f(b)$ cuando $t \in [a, b]$ va de a hasta b (orientación de la curva inducida por f). La función continua $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{X}$, se llama reparametrización de la curva ζ si existe una función $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ estrictamente monótona y sobreyectiva (por tanto continua e invertible) tal que

$$g = f \circ \varphi.$$

La reparametrización g se dice que invierte la orientación de la curva si g recorre la curva de $f(b)$ a $f(a)$, lo cual es equivalente a que φ sea estrictamente decreciente. Similarmente, g preserva la orientación de la curva si g recorre la curva de $f(a)$ a $f(b)$, lo cual es equivalente a que φ sea estrictamente creciente. Con g^+ y g^- se indica que g preserva la orientación y que invierte la orientación de la curva, respectivamente. Con $\varphi \uparrow$ y $\varphi \downarrow$ indicaremos que φ es estrictamente creciente y estrictamente decreciente, respectivamente. Así, g^+ si y sólo si $\varphi \uparrow$ y g^- si y sólo si $\varphi \downarrow$.

Definición 3.2. Sea (\mathbb{X}, ρ) un espacio cuasi-semimétrico, ζ una curva en \mathbb{X} parametrizada por $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{X}$ y $P_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición del intervalo cerrado $[a, b]$. Una suma poligonal para ζ inducida por f y la partición P_n se denota y se define mediante

$$S(\zeta, f, \rho, P_n) := \sum_{i=0}^{n-1} \rho(f(t_{i+1}), f(t_i)).$$

Observación 3.3. Si $P_{[a,b]}$ es la clase de todas las particiones del intervalo $[a, b]$, entonces:

- $\rho(f(b), f(a)) \leq S(\zeta, f, \rho, P_n)$ para toda $P_n \in P_{[a,b]}$.
- $S(\zeta, f, \rho, P_n) \leq S(\zeta, f, \rho, P_m)$ para $P_n, P_m \in P_{[a,b]}$ con $P_n \subseteq P_m$.

De la observación anterior, si $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente (con el orden de inclusión) en $P_{[a,b]}$, entonces $\{S(\zeta, f, \rho, P_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente \mathbb{R} .

Definición 3.4. Sea (\mathbb{X}, ρ) un espacio cuasi-semimétrico y ζ una curva en \mathbb{X} parametrizada por $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{X}$. Se dice que ζ es $f\rho$ -rectificable (que tiene longitud finita según f y ρ) si el conjunto

$$\{S(\zeta, f, \rho, P) : P \in P_{[a,b]}\}$$

es acotado superiormente.

Según el axioma del supremo, si la curva ζ es $f\rho$ -rectificable, entonces el conjunto

$$\{S(\zeta, f, \rho, P) : P \in P_{[a,b]}\}$$

tiene supremo(mínima cota superior) al que se llama longitud de la curva ζ y se denota con $\ell(\zeta)$ o bien con $\ell(\zeta, f, \rho)$, es decir

$$\ell(\zeta) = \ell(\zeta, f, \rho) := \sup\{S(\zeta, f, \rho, P) : P \in P_{[a,b]}\}.$$

De la observación anterior, se infiere que si ζ es $f\rho$ -rectificable, entonces

$$\rho(f(b), f(a)) \leq \ell(\zeta, f, \rho).$$

Ejemplo 3.5. Sea (\mathbb{R}^2, ρ) donde $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + \rho_0(y_1, y_2)$ y ζ el segmento de recta que une a los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. Se tiene que ζ es una curva pues es la imagen de la función continua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (t, t)$. Ahora bien, para cualquier partición $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in P_{[0,1]}$ se tiene que

$$\rho(f(t_{i+1}), f(t_i)) = \rho((t_{i+1}, t_{i+1}), (t_i, t_i)) = |t_{i+1} - t_i|$$

y por ende $S(\zeta, f, \rho, P) = 1$. De donde $\ell(\zeta, f, \rho) = 1$.

Por otro lado, como

$$\begin{aligned} \rho^{-1}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \rho((x_2, y_2), (x_1, y_1)) \\ &= |x_2 - x_1| + \rho_0(y_2, y_1), \end{aligned}$$

entonces para cualquier partición $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in P_{[0,1]}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \rho^{-1}(f(t_{i+1}), f(t_i)) &= \rho(f(t_i), f(t_{i+1})) \\ &= \rho((t_i, t_i), (t_{i+1}, t_{i+1})) \\ &= |t_i - t_{i+1}| + \rho_0(t_i, t_{i+1}) \\ &= |t_{i+1} - t_i| + t_{i+1} - t_i \\ &= 2|t_{i+1} - t_i| \end{aligned}$$

y así, $S(\zeta, f, \rho^{-1}, P) = 2$. De donde $\ell(\zeta, f, \rho^{-1}) = 2$.

Teorema 3.6. *Sea (\mathbb{X}, ρ) un espacio cuasi-semimétrico y ζ una curva en \mathbb{X} parametrizada por $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{X}$. Si ζ es $f\rho$ -rectificable, entonces existe $x_0 \in \mathbb{X}$ y $r > 0$ tal que $\zeta \subseteq B_\rho(x_0, r)$.*

Demostración. Sea $x \in \zeta$ arbitrario. Existe $t \in [a, b]$ tal que $f(t) = x$. Como $\rho(f(b), x) = \rho(f(b), f(t)) \leq \ell(\zeta, f, \rho)$, entonces $x \in B_\rho(f(b), \ell(\zeta, f, \rho) + 1)$. De donde $\zeta \subseteq B_\rho(f(b), \ell(\zeta, f, \rho) + 1)$. \square

Dos cuasi-semimétricas ρ y ρ' sobre \mathbb{X} se dicen métricamente equivalentes, si existen α y β números reales positivos tales que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{X}$ se satisface

$$\alpha\rho'(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \beta\rho'(x, y).$$

Con base a lo anterior, se puede demostrar que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{X}$ y ρ y ρ' son dos cuasi-semimétricas sobre \mathbb{X} métricamente equivalentes, entonces f es continua con ρ si y sólo si f es continua con ρ' .

Teorema 3.7. *Sea (\mathbb{X}, ρ) un espacio cuasi-semimétrico y ζ una curva en \mathbb{X} parametrizada por $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{X}$. Si ρ' es una cuasi-semimétrica sobre \mathbb{X} tal que ρ y ρ' son métricamente equivalentes, entonces ζ es $f\rho$ -rectificable si y sólo si ζ es $f\rho'$ -rectificable.*

Demostración. Sean α y β números reales positivos tales que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{X}$; $\alpha\rho'(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \beta\rho'(x, y)$. Sea $P \in P_{[a,b]}$ arbitrario.

1. Si ζ es $f\rho$ -rectificable, entonces $S(\zeta, f, \rho', P) \leq \frac{1}{\alpha}\ell(\zeta, f, \rho)$ y por ende ζ es $f\rho'$ -rectificable.
2. Si ζ es $f\rho'$ -rectificable, entonces $S(\zeta, f, \rho, P) \leq \beta\ell(\zeta, f, \rho')$ y en consecuencia ζ es $f\rho$ -rectificable.

De 1 y 2, se obtiene la tesis del teorema. \square

Teorema 3.8. *Sea (\mathbb{X}, ρ) un espacio cuasi-semimétrico y ζ una curva en \mathbb{X} parametrizada por $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{X}$. Si $g^+ : [c, d] \rightarrow \mathbb{X}$ es una reparametrización de ζ , entonces ζ es $f\rho$ -rectificable si y sólo si ζ es $g^+\rho$ -rectificable. Además, $\ell(\zeta, f, \rho) = \ell(\zeta, g^+, \rho)$.*

Demostración. Sea $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ estrictamente creciente y sobreyectiva tal que $g^+ = f \circ \varphi$.

1. Suponga que ζ es $f\rho$ -rectificable y sea $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ en $P_{[c,d]}$ arbitrario. El conjunto $\varphi(P) = \{\varphi(t_0), \varphi(t_1), \dots, \varphi(t_n)\}$ es una partición de $[a, b]$. Como $g(t_i) = f(\varphi(t_i))$, entonces

$$S(\zeta, g^+, \rho, P) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho(f(\varphi(t_{i+1})), f(\varphi(t_i))) \leq \ell(\zeta, f, \rho).$$

La arbitrariedad de P y la desigualdad anterior, implican que el conjunto $\{S(\zeta, g^+, \rho, P) : P \in P_{[c,d]}\}$ es acotado superiormente, es decir, ζ es $g^+\rho$ -rectificable. Además, $\ell(\zeta, g^+, \rho) \leq \ell(\zeta, f, \rho)$.

2. Recíprocamente, suponga que ζ es $g^+\rho$ -rectificable. Se tiene que f es una reparametrización de ζ que conserva la orientación de la curva inducida por g^+ , pues $f = g^+ \circ \varphi^{-1}$ con φ^{-1} estrictamente creciente y sobreyectiva. Siguiendo la prueba del primer inciso se tiene que ζ es $f\rho$ -rectificable y $\ell(\zeta, f, \rho) \leq \ell(\zeta, g^+, \rho)$.

De los incisos 1 y 2, se infiere la tesis del teorema y la igualdad anunciada. \square

Teorema 3.9. *Sea (\mathbb{X}, ρ) un espacio cuasi-semimétrico y ζ una curva parametrizada por $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{X}$. Si $g^- : [c, d] \rightarrow \mathbb{X}$ es una reparametrización de ζ y f es bicontinua superiormente, entonces ζ es $g^-\rho$ -rectificable si y sólo si ζ es $f\rho^{-1}$ -rectificable. Además, $\ell(\zeta, g^-, \rho) = \ell(\zeta, f, \rho^{-1})$.*

Demostración. Sea $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ estrictamente decreciente y sobreyectiva tal que $g^- = f \circ \varphi$.

1. Suponga que ζ es $f\rho^{-1}$ -rectificable y $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición de $[c, d]$. El conjunto $\varphi(P) = \{t'_0, t'_1, \dots, t'_n\}$ donde $t'_i = \varphi(t_{n-i})$ para $i = 0, 1, \dots, n$ es una partición de $[a, b]$. Como

$$\begin{aligned} S(\zeta, g^+, \rho, P) &= \sum_{i=0}^{n-1} \rho(g^-(t_{i+1}), g^-(t_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho^{-1}(f(t'_{i+1}), f(t'_i)) \\ &\leq \ell(\zeta, f, \rho^{-1}), \end{aligned}$$

entonces $\{S(\zeta, g^+, \rho, P) : P \in [c, d]\}$ es acotado superiormente. Por tanto, ζ es $g^+\rho$ -rectificable. Además, $\ell(\zeta, g^+, \rho) \leq \ell(\zeta, f, \rho^{-1})$.

2. De manera análoga se demuestra que si ζ es $g^- \rho$ -rectificable, entonces ζ es (f, ρ^{-1}) -rectificable (pues f es una reparametrización de la curva ζ que invierte la orientación inducida por g^-). Además, $\ell(\zeta, f, \rho^{-1}) \leq \ell(\zeta, g^-, \rho)$.

De los incisos 1 y 2, se infiere la tesis del teorema y la igualdad anunciada. \square

Teorema 3.10. *Sea (\mathbb{X}, ρ) un espacio cuasi-semimétrico, ζ es una curva en \mathbb{X} parametrizada por $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{X}$ y $t \in (a, b)$ un elemento arbitrario. Si ζ es $f\rho$ -rectificable, entonces tanto $\zeta^t = f|_{[a,t]}$ es $f|_{[a,t]}\rho$ -rectificable como $\zeta_t = f|_{[t,b]}$ es $f|_{[t,b]}\rho$ -rectificable. Además, $\ell(\zeta, f, \rho) = \ell(\zeta^t, f|_{[a,t]}, \rho) + \ell(\zeta_t, f|_{[t,b]}, \rho)$.*

Demostración. Suponga que ζ es $f\rho$ -rectificable. Sean $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ y $Q = \{t'_0, t'_1, \dots, t'_m\}$ particiones arbitrarias de $[a, t]$ y $[t, b]$, respectivamente. Luego $P \cup Q = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t'_0, t'_1, \dots, t'_m\}$ es una partición de $[a, b]$. De donde

$$S(\zeta^t, f|_{[a,t]}, \rho, P) \leq \ell(\zeta, f, \rho) \quad \text{y} \quad S(\zeta_t, f|_{[t,b]}, \rho, Q) \leq \ell(\zeta, f, \rho)$$

y por consecuencia ζ^t y ζ_t son $f|_{[a,t]}\rho$ -rectificable y $f|_{[t,b]}\rho$ -rectificable, respectivamente. Ahora bien, como

$$S(\zeta^t, f|_{[a,t]}, \rho, P) + S(\zeta_t, f|_{[t,b]}, \rho, Q) \leq S(\zeta, f, \rho, P \cup Q) \leq \ell(\zeta, f, \rho),$$

entonces al sacar supremo, primero sobre todas las particiones de $[a, t]$ y luego sobre todas las particiones de $[t, b]$ se tiene

$$\ell(\zeta^t, f|_{[a,t]}, \rho) + \ell(\zeta_t, f|_{[t,b]}, \rho) \leq \ell(\zeta, f, \rho). \tag{1}$$

Sea ahora $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición arbitraria de $[a, b]$. Si existe i tal que $t = t_i$, entonces $P_i = \{t_0, t_1, \dots, t_i\}$ y $P^i = \{t_i, t_{i+1}, \dots, t_n\}$ son particiones de $[a, t]$ y $[t, b]$, respectivamente, por tanto

$$\begin{aligned} S(\zeta, f, \rho, P) &= S(\zeta^t, f|_{[a,t]}, \rho, P_i) + S(\zeta_t, f|_{[t,b]}, \rho, P^i) \\ &\leq \ell(\zeta^t, f|_{[a,t]}, \rho) + \ell(\zeta_t, f|_{[t,b]}, \rho). \end{aligned}$$

Supóngase $t \neq t_i$ para toda i . Existe i tal que $t_i < t < t_{i+1}$. De donde $P_t = \{t_0, t_1, \dots, t_i, t, t_{i+1}, \dots, t_n\}$ es un refinamiento de P y por tanto

$$S(\zeta, f, \rho, P) \leq S(\zeta, f, \rho, P_t) \leq \ell(\zeta^t, f|_{[a,t]}, \rho) + \ell(\zeta_t, f|_{[t,b]}, \rho).$$

La cadena de desigualdades anterior dicen que, $\ell(\zeta^t, f|_{[a,t]}, \rho) + \ell(\zeta_t, f|_{[t,b]}, \rho)$ es una cota superior del conjunto $\{S(\zeta, f, \rho, P) : P \in P_{[a,b]}\}$ y por ende,

$$\ell(\zeta, f, \rho) \leq \ell(\zeta^t, f|_{[a,t]}, \rho) + \ell(\zeta_t, f|_{[t,b]}, \rho). \quad (2)$$

De (1) y (2) se infiere $\ell(\zeta, f, \rho) = \ell(\zeta^t, f|_{[a,t]}, \rho) + \ell(\zeta_t, f|_{[t,b]}, \rho)$. \square

El recíproco del teorema anterior es también cierto, es decir, que si ζ es una curva en \mathbb{X} parametrizada por $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{X}$, $t \in (a, b)$ tales que $\zeta^t = f|_{[a,t]}$ es $f|_{[a,t]}$ - ρ -rectificable y $\zeta_t = f|_{[t,b]}$ es $f|_{[t,b]}$ - ρ -rectificable, entonces ζ es f - ρ -rectificable. Además,

$$\ell(\zeta, f, \rho) = \ell(\zeta^t, f|_{[a,t]}, \rho) + \ell(\zeta_t, f|_{[t,b]}, \rho).$$

La generalización de este teorema, así como su recíproco, se encuentra en el siguiente corolario.

Corolario 3.11. *Sea (\mathbb{X}, ρ) un espacio cuasi-semimétrico, ζ una curva en \mathbb{X} parametrizada por $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{X}$, $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in P_{[a,b]}$ y $\zeta^i = f|_{[t_{i-1}, t_i]}$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces ζ es f - ρ -rectificable si y sólo si ζ^i es $f|_{[t_{i-1}, t_i]}$ - ρ -rectificable. Además*

$$\ell(\zeta, f, \rho) = \ell(\zeta^1, f|_{[t_0, t_1]}, \rho) + \ell(\zeta^2, f|_{[t_1, t_2]}, \rho) + \dots + \ell(\zeta^n, f|_{[t_{n-1}, t_n]}, \rho).$$

Demostración. Basta hacer una simple inducción sobre n . \square

La prueba del teorema anterior, permite considerar una función real de variable real, llamada **función longitud de arco**, la cual la encontramos en el teorema que sigue.

Teorema 3.12. *Sea (\mathbb{X}, ρ) un espacio cuasi-semimétrico y ζ una curva en \mathbb{X} parametrizada por $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{X}$. Si ζ es f - ρ -rectificable, entonces la función (longitud de arco) $\ell : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\ell(t) = \ell(\zeta^t)$ es creciente.*

Demostración. Sean $t_1, t_2 \in [a, b]$ tal que $t_1 < t_2$. Si $P = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ es una partición de $[a, t_1]$, entonces $P' = \{y_1, y_2, \dots, y_n, t_2\}$ es una partición de $[a, t_2]$. De la definición de suma poligonal se tiene

$$S(\zeta^{t_1}, f|_{[a, t_1]}, \rho, P) \leq S(\zeta^{t_2}, f|_{[a, t_2]}, \rho, P') \leq \ell(\zeta^{t_2}, f|_{[a, t_2]}, \rho),$$

y por tanto $\ell(t_1) \leq \ell(t_2)$. \square

Como $\ell(b) = \ell(\zeta^t) + \ell(\zeta_t)$, resulta $\ell(\zeta_t) = \ell(b) - \ell(\zeta^t)$. Aplicando el teorema anterior, se tiene que si $t_1 < t_2$, entonces $\ell(\zeta_{t_2}) \leq \ell(\zeta_{t_1})$. Esto permite demostrar el teorema siguiente.

Teorema 3.13. *Sea (\mathbb{X}, ρ) un espacio cuasi-semimétrico y ζ una curva en \mathbb{X} parametrizada por $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{X}$. Si ζ es $f\rho$ -rectificable, entonces la función $\ell^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\ell^*(t) = \ell(\zeta_t)$ es decreciente.*

Demostración. Ver el preámbulo al enunciado del teorema. □

Teorema 3.14. *Sea (\mathbb{X}, ρ) un espacio cuasi-semimétrico y ζ una curva en \mathbb{X} parametrizada por $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{X}$. Si ζ es $f\rho$ -rectificable y f es bicontinua superiormente, entonces la función longitud de arco es continua.*

Demostración. Sea $t \in (a, b)$ arbitrario. Si mostramos que ℓ es continua tanto por la izquierda como por la derecha de t , se tendría la continuidad de ℓ en t .

1. Sea $\epsilon > 0$ y $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $[a, t)$ tal que $t_n \rightarrow t$. Por la definición de $\ell(t)$, la convergencia de t_n a t y la continuidad de f en t , existen $P = \{t'_0, t'_1, \dots, t'_m\} \in P_{[a, t]}$ y $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

- $\ell(t) - \frac{\epsilon}{2} < S(\zeta^t, f|_{[a, t]}, \rho, P)$.
- $t'_{m-1} < t_n$ para toda $n \geq N_1$.
- $\rho(f(t), f(t_n)) < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $n \geq N_2$.

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, $n \geq N$ y $P' = \{t'_0, t'_1, \dots, t'_{m-1}, t_n\}$, se tiene

$$\begin{aligned} \ell(t) - \frac{\epsilon}{2} &< S(\zeta^t, f|_{[a, t]}, \rho, P) \leq S(\zeta^{t_n}, f|_{[a, t_n]}, \rho, P') + \rho(f(t), f(t_n)) \\ &< \ell(t_n) + \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

de donde, $|\ell(t) - \ell(t_n)| < \epsilon$ y ℓ es continua por la izquierda de t . Si hacemos $t = b$ en el proceso anterior, se obtiene la continuidad de ℓ por la izquierda de b .

2. Sean $\epsilon > 0$ y $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $(t, b]$ tal que $t_n \rightarrow t$. Como en el caso anterior (ahora usamos la bicontinuidad superior de f), sean $P = \{t'_0, t'_1, \dots, t'_m\} \in P_{[t, b]}$, $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que:

- $\ell(\zeta_t, f|_{[t,b]}, \rho) - \frac{\epsilon}{2} < S(\zeta_t, f|_{[t,b]}, \rho, P)$.
- $t < t_n < t'_1$ para toda $n \geq N_1$.
- $\rho^{-1}(f(t), f(t_n)) < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $n \geq N_2$.

Al seleccionar $N = \max\{N_1, N_2\}$, $n \geq N$, $P_n = \{t'_0, t_n, t'_1, \dots, t'_m\}$ y $P' = \{t_n, t'_1, \dots, t'_m\}$, se tiene

$$\ell^*(t) - \frac{\epsilon}{2} < S(\zeta_t, f|_{[t,b]}, \rho, P_n) \leq \rho(f(t_n), f(t)) + \ell(\zeta_{t_n}) < \frac{\epsilon}{2} + \ell^*(t_n),$$

y por tanto $|\ell^*(t) - \ell^*(t_n)| < \epsilon$. Pero como

$$|\ell(t) - \ell(t_n)| = |(\ell(b) - \ell(t_n)) - (\ell(b) - \ell(t))| = |\ell^*(t_n) - \ell^*(t)|,$$

entonces $|\ell(t) - \ell(t_n)| < \epsilon$. Es decir, ℓ es continua por la derecha de t .

De 1 y 2 se tiene la continuidad de ℓ . □

Conclusiones

Con base al axioma del supremo y las definiciones de espacios cuasi-semimétricos, funciones continuas y suma poligonal, se consideró la noción de curva y longitud de una curva, así como la generalización de los resultados relacionados con longitudes de curvas presentes en el caso métrico al caso cuasi-semimétrico.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo obtenido por parte del Programa para el Desarrollo Profesional Docente mediante la aprobación del Proyecto Espacios Asimétricos, Bitopológicos y Aplicaciones en la Complejidad de Algoritmos elaborado por el Cuerpo Académico UTMIX-39. Agradecimiento especial a los arbitros que sacrificaron su valioso tiempo en la revisión del presente trabajo y por las atinadas observaciones y recomendaciones que hicieron para mejorar la calidad de este escrito.

Bibliografía

- [1] Altamore, F., Campiti, M., Korovkin-type Approximation Theory and its application, De Gruyter Studies in Mathematics. !7 Berlin, 1994.
- [2] Bohman, H., On approximation of continuous and analytic funtions, Ark. Mat., 2 (1954)43-56.
- [3] Censor, E., Cuantitative results for positive linear approximation operators. J. Approx. Th. 4, 442-450.
- [4] Freud, G., On approximation by positive linear methods I, II. Studia. Sci. Math. Hungar, 3, 1968, 365-370.
- [5] Jiménez Pozo, M. A., Sur les operateurs positifs et la méthode des fonctions test. C. R. Acad.Sc. Paris, 278, 1974, 149-152.
- [6] Jiménez Pozo, M. A., Deformation de la convexité et théorèmes du type Kprovkin. C. R. Acad. Sc. Paris, 290 (1980), 213-215.
- [7] Hernández J. M., Castañeda C. H., Álvarez L. C., Hernández J. L.,Tochihuitl V., Carrasco J. L., Ramírez T. and Vázquez R., *Espacios con distancias no simétricas*. Temas de Ciencia y Tecnología 53, 2014, 3-9.
- [8] Mamedov R. G., On the order of approximation of functions differentiable by positive linear operators. Doklady A. N, 128,1959,674-676.
- [9] P. P. Korovkin., On the convergence on linear positive operators in the space of continuous functions. Dokl. Akad. Nauk, 90,1953, 961-964 (russian)
- [10] Tochihuitl Bueno V., Jiménez Pozo M. A., Rectificación y coeficiente de deformación de la convexidad de curvas. Tesis 1998.

Instituto de Física y Matemáticas, UTM
Carretera a Acatlima Km 2.5,
Huajuapán de León Oax. Oaxaca, México, C. P. 69000

vtochi@mixteco.utm.mx

jmhm@mixteco.utm.mx

Lógica

Capítulo 3

Algunos modelos sobre programas lógicos mediante operadores

Iván Martínez Ruíz, Alejandro Ramírez Páramo, Erick Salgado Matías
FCFM, BUAP

Resumen

En este trabajo presentaremos distintas clases de modelos para el estudio de programas lógicos, así como resultados de puntos fijos de ciertos operadores adecuados definidos sobre los espacios de valuaciones $I(X, \mathcal{T})$, donde X puede ser un conjunto arbitrario y \mathcal{T} una lógica con un número finito de valores de verdad.

1 Introducción

La programación lógica inició a principios de los años 70 como consecuencia directa de trabajos anteriores sobre demostradores automáticos de teoremas e inteligencia artificial (IA). La construcción de sistemas deductivos automáticos es, por supuesto, un pilar central dentro de los trabajos que tienen como objetivo el desarrollo de la inteligencia artificial. Basándose en el trabajo de Herbrand [26] en 1930, hubo mucha actividad en los demostradores automáticos a principios de los 60's por Prawitz [21], Gilmore [8], Davis, Putnam [6] y otros. Este esfuerzo culminó en 1965 con la publicación del artículo emblemático hecho por Robinson [22], en el cual introduce el principio de resolución. El principio de resolución es una regla de inferencia, la cual es en particular bien-comportada para la automatización sobre una computadora.

El crédito por la introducción de la programación lógica se le atribuye principalmente a Kowalski [16] y Colmerauer [5], aunque Green [9] y Heyes [12] también deberían compartir dicho mérito. En 1972, Kowalski y Colmerauer fueron los que establecieron la idea (fundamental) de que la lógica puede

ser usada como un lenguaje de programación. El acrónimo PROLOG (PROGRAMMING IN LOGIC) fue concebido y el primer interpretador de PROLOG [5] fue implementado en lenguaje ALGOL-W por Roussel, el mismo año. El sistema PLANNER de Hewitt [13] puede ser considerado como un predecesor de PROLOG.

Una de las ideas principales de la programación lógica, [debido a Kowalski [17] y [18]], es que un algoritmo consiste de dos componentes disjuntos: la lógica y el control. La lógica declara cuál es el problema que tiene que ser resuelto, mientras que el control se encarga de declarar cómo el problema será resuelto.

Los sistemas de programación lógica no necesariamente están basados en el principio de resolución, estos pueden ser sistemas no clausales con muchas reglas de inferencia [2], [10], [11]. Así, en este trabajo, consideraremos únicamente sistemas de programación lógica basados en el principio de resolución y en el sistema PROLOG, sin perder de vista que la finalidad u objetivo del trabajo se encuentra en el estudio de la semántica de estos sistemas y la búsqueda de modelos minimales para los mismos mediante operadores. Este trabajo se basa principalmente en las contribuciones desarrolladas por Pascal Hitzler y Anthony Karel Seda, presentes en su libro “Mathematical Aspects of Logic Programming Semantics” [véase [14]]. Por último, es necesario mencionar que lo nuevo en este trabajo es la forma en que se exponen algunos de los resultados, así como la modificación en distintas pruebas, buscando solventar nuestro conocimiento en el área.

2 Elementos de la Programación lógica y

Programación declarativa

La programación declarativa (o programación inferencial) puede entenderse como aquel estilo de programación en el cual el programador especifica qué debe computarse más que cómo deben realizarse los cálculos. En este nuevo paradigma de programación un programa consiste de dos partes fundamentales: lógica y control. La tarea básica del programador se centra en la lógica dejando de lado el control, el cual se asume de manera automática por parte del sistema. De lo anterior, se infiere que la parte lógica determina el significado del programa mientras que la parte de control se remite a la eficiencia de este. Esta distinción posee la ventaja de que la eficiencia del programa puede

refinarse modificando únicamente el control del programa, sin la necesidad de una intervención directa en la lógica del algoritmo. En otras palabras, la característica fundamental de la programación declarativa es el uso de la lógica como lenguaje de programación, la cual podemos conceptualizar como sigue [véase [15]]: (*) Un programa es una teoría formal en una cierta lógica, en otras palabras, un conjunto de fórmulas lógicas que resultan ser la especificación del problema que se pretende resolver. (**) La computación se entiende como una forma de inferencia o deducción en dicha lógica.

Se considera que la lógica empleada debe cumplir ciertos requisitos, como son: (1) Un lenguaje lo suficientemente expresivo, para con ello lograr que el campo de aplicación sea lo suficientemente interesante. (2) Poseer una semántica operacional, es decir, cierto mecanismo que nos permita ejecutar los programas. (3) Una semántica declarativa, la cual nos permitirá darle cierto significado a los programas de manera completamente independiente a su posible ejecución. (4) Poseer ciertos resultados de corrección y completitud que aseguren que lo que se computa coincide con aquello que es considerado como verdadero (de acuerdo con la noción de verdad que se este empleando).

En esencia, la semántica declarativa precisa la sintáctica del lenguaje por medio de la traducción del significado de los objetos en elementos y estructuras del dominio conocido.

Programación Lógica

La programación lógica ¹ se basa en fragmentos de la lógica de predicados, siendo el más usado la lógica de las cláusulas de Horn (HCL), la cual es la base para un lenguaje de programación cuando se posee una semántica operacional susceptible de una implementación eficiente. Tal es el caso de la resolución SLD, la cual es un método de prueba por refutación [véase [19] pg. 11.] que emplea el algoritmo de unificación [véase [19] pg. 24.] como base y permite la extracción de respuestas. Como semántica declarativa se utiliza una semántica por teoría de modelos que toma como dominio de interpretación un universo puramente sintáctico, en este caso el universo de Herbrand.

¹Para una revisión más amplia consúltese [19]

Lógica de predicados de primer orden

Iniciaremos discutiendo brevemente la sintaxis y la semántica de un lenguaje de primer orden [véase [20], [19]].

Un lenguaje de primer orden tiene dos aspectos fundamentales: la sintaxis y su semántica. El aspecto sintáctico concierne a las fórmulas bien formadas admitidas por la gramática de un lenguaje formal, así como cuestiones más profundas sobre pruebas-teóricas. Por otro lado, la semántica se centra en los significados adjuntos a las fórmulas bien formadas y los símbolos que éstas poseen.

Sintaxis de la lógica de predicados de primer orden

En general, una teoría de primer orden consiste de un alfabeto, un lenguaje de primer orden (fórmulas bien formadas de la teoría), un conjunto de axiomas (subconjunto designado de las fórmulas bien formadas) y un conjunto de reglas de inferencias (usados para derivar los teoremas de la teoría).

Definición 2.1. Un **alfabeto** \mathcal{A} consiste de las siguientes siete clases de símbolos: una colección de símbolos constantes (posiblemente vacía) $\{a, b, c, \dots\}$; una colección no vacía de símbolos variables $\{u, v, w, x, y, z, \dots\}$; una colección de símbolos funcionales (posiblemente vacía) $\{f, g, h, \dots\}$; una colección no vacía de símbolos predicados $\{p, q, r, \dots\}$; colección de conectivos, en nuestro caso, $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$; colección de cuantificadores, $\{\exists, \forall\}$; símbolos de puntuación, “ (”, “) ” y “ , ”.

En las siguientes definiciones se asumirá que \mathcal{A} denota algún alfabeto fijo pero arbitrario.

Definición 2.2. Un **término** es definido recursivamente sobre \mathcal{A} como sigue:

1. Cada símbolo constante en \mathcal{A} es un término.
2. Cada símbolo variable en \mathcal{A} es un término.
3. Si f es algún símbolo funcional n -ario en \mathcal{A} y t_1, t_2, \dots, t_n son términos, entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es un término.

Un término es llamado **básico** si no contiene símbolos variables.

Definición 2.3. Un **átomo**, fórmula atómica o proposición A sobre \mathcal{A} es una expresión de la forma $p(t_1, \dots, t_n)$, donde p es un símbolo predicado n -ario en \mathcal{A} y t_1, \dots, t_n son términos sobre \mathcal{A} . Una **literal** es un átomo o la negación de un átomo.

Los átomos algunas veces son llamados **literales positivos** y los átomos negados reciben el nombre de **literales negadas**.

Definición 2.4. Una fórmula bien-formada (sobre \mathcal{A}) es definida recursivamente como sigue:

1. Cada átomo es una fórmula bien-formada.
2. Si F y G son fórmulas bien formadas, entonces también lo son $\neg F$ y $F \square G$ donde \square es cualquier conectivo binario del lenguaje.
3. Si F es una fórmula bien-formada y x es un símbolo variable, entonces $\forall x F$ y $\exists x F$ también lo son.

Una fórmula es llamada **base** si no contiene símbolos variables. Así, en particular, un **átomo base** es un átomo que no posee símbolos variables.

Es claro que los paréntesis son necesarios al escribir fórmulas bien formadas para evitar ambigüedad. Sin embargo, su uso puede ser minimizado por medio de su jerarquía de precedencia habitual (orden descendiente) que es la siguiente; \neg, \forall, \exists tienen una precedencia mayor; seguida por \vee, \wedge ; y por último $\rightarrow, \leftrightarrow$.

Definición 2.5. Un **lenguaje de primer orden** \mathcal{L} dado por un alfabeto \mathcal{A} consiste del conjunto de todas las fórmulas bien formadas determinadas por los símbolos de \mathcal{A} . Nos referiremos a términos sobre \mathcal{A} como términos en o sobre \mathcal{L} .

Ejemplo 2.6. Supóngase que \mathcal{A} es un alfabeto que contiene como símbolos constantes $\{a, b\}$, símbolos variables $\{x\}$, símbolos funcionales $\{h\}$ con h funcional binario, símbolos predicados $\{p\}$ con p binario y los mismos símbolos que se habían definido anteriormente para los conectivos, cuantificadores y puntuación. Como ejemplos de términos sobre \mathcal{A} se tienen los siguientes: $a, b, x, h(a, a), h(x, a), h(h(a, x), b)$... En particular, note que $h(a, a)$ es un término base mientras que $h(x, a)$ no lo es.

Más aún, los siguientes son ejemplos de fórmulas bien formadas en el lenguaje de primer-orden \mathcal{L} determinado por el alfabeto \mathcal{A} : $p(a, x)$, $\neg p(x, b)$, $p(b, p(a, b))$, $p(a, b) \vee \neg p(x, a)$, $\forall x p(x, a)$, $\exists x p(b, x)$..., donde $p(b, p(a, b))$ es una fórmula base (atómica) y $\forall x p(x, a)$ no lo es.

3 Semántica de la lógica de predicados de primer orden

Ahora presentemos, de forma semántica, un estudio de los elementos básicos de la lógica de predicados de primer orden. Para ello, se adopta el enfoque usual utilizado en la teoría de modelos con dos variantes que serán esenciales en el desarrollo de este trabajo. Primero, en su mayoría no se manejarán fórmulas cuantificadas porque para los propósitos de la semántica de programas lógicos, digamos P , generalmente se considerará el conjunto $base(P)$ en lugar de P mismo, donde sus elementos no contienen símbolos variables ni cuantificados. La segunda diferencia esencial corresponde a la posibilidad de emplear más de dos valores de verdad, con sus respectivos valores distinguidos.

En la lógica clásica 2-valuada, y en la mayoría de las matemáticas, es usual emplear el conjunto $TWO = \{\mathbf{f}, \mathbf{t}\}$ con valores de verdad *true* \mathbf{t} y *false* \mathbf{f} . Sin embargo, en muchos lugares dentro de la programación lógica y otras áreas de la computación, ha sido ventajoso trabajar con más valores de verdad en lugar de sólo estos dos. Por ello, en la formulación de los conceptos de valuación e interpretación, se trabajará de manera muy general al permitir conjuntos arbitrarios de valores de verdad y ciertos conectivos definidos sobre ellos. En cualquier caso, \mathcal{T} denotará un conjunto arbitrario de valores de verdad o, un conjunto de verdad que contiene al menos dos elementos, donde uno de ellos puede distinguirse con el valor de verdad \mathbf{t} , que denota true. Además, asumiremos ciertos conectivos binarios como funciones sobre \mathcal{T} , dígase: la conjunción (\wedge) y disyunción (\vee), un conectivo unario: negación (\neg). Por último, la implicación (\leftarrow) puede ser dada como un tercer conectivo binario o puede ser definida en términos de otros conectivos.

Definición 3.1. Una lógica \mathcal{T} es un conjunto de valores de verdad junto con las definiciones de aquellos conectivos referidos a esta.

En general, si las definiciones de los conectivos son claras escribiremos simplemente el conjunto de valores de verdad, \mathcal{T} , para referirnos a la lógica

correspondiente sin causar confusión alguna. Es común que las definiciones de ciertos conectivos puedan ser dadas por medio de una tabla de verdad. Así es el caso para la lógica con dos valores y las lógicas que se puedan considerar para este trabajo.

Las siguientes definiciones son fundamentales para el desarrollo de este trabajo, empleando en ellas la notación común en programación lógica.

Definición 3.2. Sean \mathcal{L} un lenguaje de primer-orden y D un conjunto no vacío. Una **preinterpretación** J para \mathcal{L} con **dominio** D , es una asignación \cdot^J que satisface lo siguiente:

1. Para cada símbolo constante $c \in \mathcal{L}$, $c^J \in D$.
2. Para cada símbolo funcional n-ario $f \in \mathcal{L}$, f^J es una función n-aria sobre D .

Una **asignación J -variable** es un mapeo (total) θ , de los símbolos variables de \mathcal{L} a elementos en D .

Sean J una preinterpretación con dominio D y θ una asignación J -variable. Entonces, se puede asignar a cada término, $t \in \mathcal{L}$, un elemento en D (llamada su **denotación o término asignado**) de manera recursiva como sigue:

- Si t es un símbolo variable, $(t\theta)^J = \theta(t)$.
- Si t es un símbolo constante, $(t\theta)^J = t^J$.
- Si $t = f(t_1, \dots, t_n)$ símbolo funcional n-ario, donde t_1, \dots, t_n son términos, $(t\theta)^J = f^J((t_1\theta)^J, \dots, (t_n\theta)^J)$.
- Para los átomos $A = p(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{L}$, $(A\theta)^J = p((t_1\theta)^J, \dots, (t_n\theta)^J)$, que será llamada **instancia J -Base** del átomo $p(t_1, \dots, t_n)$.

Se denota por $B_{\mathcal{L},J}$ al conjunto de instancias J -base de los átomos en \mathcal{L} . Así, $B_{\mathcal{L},J}$ es el conjunto de todos los símbolos $p(d_1, \dots, d_n)$, donde $p \in \mathcal{L}$ es un símbolo predicado n-ario y $d_1, \dots, d_n \in D$.

Definición 3.3. Sean \mathcal{L} un lenguaje de primer orden, J una preinterpretación para \mathcal{L} con dominio D y \mathcal{T} una lógica. Una **valuación o interpretación** para \mathcal{L} (basada sobre J) con valores en \mathcal{T} es un mapeo v , donde $v : B_{\mathcal{L},J} \rightarrow \mathcal{T}$.

Sean $v : B_{\mathcal{L},J} \rightarrow \mathcal{T}$ una valuación y θ una asignación J -variable. Entonces, v y θ determinan de manera inductiva un valor de verdad bien-definido en \mathcal{T} para cualquier cuantificador libre, fórmula bien formada $F \in \mathcal{L}$ mediante la construcción de F y las definiciones de los conectivos en \mathcal{T} . Se dirá que v es **un modelo para F** , denotado por $v \models F$, si v asigna el valor true \mathbf{t} para F . Usualmente nos referiremos a valuaciones, interpretaciones y modelos basados sobre J como J -valuaciones, J -interpretaciones y J -modelos, respectivamente.

Denotaremos por $I(B_{\mathcal{L},J}, \mathcal{T})$ al conjunto de todas las valuaciones para \mathcal{L} basadas sobre J con valores en \mathcal{T} , donde $I(B_{\mathcal{L},J}, \mathcal{T})$ será considerado como un conjunto ordenado. Tales ordenes sobre $I(B_{\mathcal{L},J}, \mathcal{T})$ vendrán inducidos por aquellos definidos sobre \mathcal{T} y por tanto $B_{\mathcal{L},J}$ no será relevante en ello. Así, consideraremos a las valuaciones o interpretaciones como simples mapeos $X \rightarrow \mathcal{T}$ con X un conjunto arbitrario y denotando al conjunto de tales mapeos como $I(X, \mathcal{T})$.

Espacios ordenados de valuaciones

Iniciemos mostrando una notación conveniente relacionada a la terminología de valuación e interpretación. Si se consideran estructuras generales tales como ordenamientos o topologías sobre $I(X, \mathcal{T})$, entenderemos a las valuaciones como mapeos. Si \mathcal{T} es un conjunto con 2, 3 ó 4 elementos, es conveniente identificar a una valuación con una tupla (ordenada) de conjuntos sobre la cual ésta toma los diferentes valores de verdad en \mathcal{T} . Así, para referirnos a estas últimas utilizaremos el término de interpretación. A continuación veamos algunas definiciones que serán de utilidad.

Definición 3.4. Sean $x, y \in D$ con D -poset. Se dice que x, y son **comparables**, si se cumple alguno de los siguientes casos; $x \sqsubseteq y$ o $y \sqsubseteq x$. En otro caso, se dice que x, y son **incomparables**.

Si A es un subconjunto no vacío en D , con (D, \sqsubseteq) -poset, diremos que A es una **cadena** si para cualesquiera dos elementos de A estos son comparables respecto a \sqsubseteq ; diremos que \sqsubseteq es un **orden total**, si D en si mismo está totalmente ordenado por \sqsubseteq ; A es una ω -**cadena**, si A es una sucesión creciente, dígame $a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \dots$ con $a_i \in A$, donde ω denota el primer ordinal límite.

Definición 3.5. Sean $A \subseteq D$ subconjunto no vacío y (D, \sqsubseteq) -poset. Entonces, A es llamado **dirigido** si para todo $a, b \in A$, existe $c \in A$ tal que: $a \sqsubseteq c$ y $b \sqsubseteq c$.

Definición 3.6. Sea (D, \sqsubseteq) un poset. Entonces se define lo siguiente:

1. (D, \sqsubseteq) es un **orden parcial ω -completo** (ω -cpo) si D tiene un elemento bottom y existe $\sqcup A$ en D para cada ω -cadena $A \in D$.
2. (D, \sqsubseteq) es una **cadena completa**, si cada cadena en D posee un supremo.
3. (D, \sqsubseteq) es un **orden parcial completo** (o cpo), si existe $\sqcup A$ en D para cada A subconjunto dirigido en D y D tiene un elemento bottom.
4. (D, \sqsubseteq) es una **semi-lattice superior completa**, si existe $\sqcup A$ en D para cada A subconjunto dirigido en D y existe $\sqcap A$, para cada $A \subseteq D$.
5. (D, \sqsubseteq) es una **lattice completa**, si para cada A subconjunto de D existen $\sqcup A$ e $\sqcap A$ en D .

Definición 3.7. Sean D, E posets y $f : D \rightarrow E$ una función.

- f es llamada **monótona**, si para todo $a, b \in D$ con $a \sqsubseteq b$, se tiene que $f(a) \sqsubseteq f(b)$ en E^2 .
- Si D, E son ω -cpo, entonces f es llamada **ω -continua** si f es monótona y para cada A , ω -cadena en D , se tiene que $\sqcup f(A) = f(\sqcup A)$.
- Si D, E son cpo, entonces f es llamada **continua (u orden continuo)** si f es monótona y para cada subconjunto dirigido A en D se tiene $\sqcup f(A) = f(\sqcup A)$.

Observación No es difícil probar que una función entre ordenes parciales completos, dígase $f : D \rightarrow E$, es continua si, y solo si, f es monótona y $\sqcup f(A) = f(\sqcup A)$, para cada cadena A en D .

Definición 3.8. Sean D un conjunto y $f : D \rightarrow D$ una función.

- Si $x \in D$ satisface $f(x) = x$, entonces x es llamado **un punto fijo** de f .
- Si (D, \sqsubseteq) poset, $y \in D$ tal que $y \sqsubseteq f(y)$ ($f(y) \sqsubseteq y$), entonces y es llamado **un punto post-fijo (un punto pre-fijo)**.

² f es llamada antitona si $f(b) \sqsubseteq f(a)$ con $a \sqsubseteq b$.

- Si x es punto fijo de f , tal que para cualquier punto fijo y de f se tiene $x \sqsubseteq y$, entonces x es llamado el **menor punto fijo** de f , denotado por $\text{lpf}(f) = x$. De manera completamente análoga, se pueden definir el **menor punto post-fijo** y el **menor punto pre-fijo**.

Por último definamos la **potencia ordinal** $f \uparrow \alpha$ de una función monótona, f , sobre un cpo (D, \sqsubseteq) como sigue:

- $f \uparrow 0 = \perp$.
- Para cualquier ordinal α , $f \uparrow (\alpha + 1) = f(f \uparrow \alpha)$.
- Si α es un ordinal límite, $f \uparrow \alpha = \bigsqcup \{f \uparrow \beta \mid \beta \leq \alpha\}$.

Los siguientes dos teoremas son fundamentales en el manejo de la semántica de programas lógicos y cuyas pruebas pueden consultarse en [23] y [24].

Teorema 3.9 (Kleene). *Sean (D, \sqsubseteq) un ω -cpo y $f : D \rightarrow D$ es ω -continua. Entonces, f tiene un menor punto fijo $x = f \uparrow \omega$ el cual es, también, su menor punto pre-fijo.*

Dado que toda función continua es ω -continua, el resultado 3.9 puede ser aplicado a funciones continuas sobre cpos. Más aún, si la función no es ω -continua pero es monótona, la existencia del menor punto fijo puede garantizarse de la siguiente manera.

Teorema 3.10 (Knaster-Tarski). *Sean (D, \sqsubseteq) un cpo, $f : D \rightarrow D$ monótona y $x \in D$ tal que $x \sqsubseteq f(x)$. Entonces existe $a \in D$ tal que a es el menor punto fijo de f con $x \sqsubseteq a$, el cual es también el menor punto pre-fijo de f , y existe el menor ordinal α tal que $a = f^\alpha(x)$. Más aún, f admite un menor punto fijo a , el cual es también, su menor punto pre-fijo.*

Muchos aspectos teóricos de las ciencias de la computación dependen de la noción de conjunto parcialmente ordenado. Sin embargo, con frecuencia son requeridas más estructuras, además de las proporcionadas por un orden parcial. Por ejemplo, se necesitan estructuras extras para modelar lenguajes de programación estándar que proporcionen una teoría abstracta de la computabilidad tanto como una teoría viable sobre puntos fijos. En la actualidad, se conoce que la teoría de Scott sobre dominios proporciona un espacio con una estructura adecuada para estudiar los objetivos mencionados.

Definición 3.11. Sean (D, \sqsubseteq) un poset y $a \in D$. Se dice que a es un elemento compacto o finito en D si, siempre que $A \subseteq D$ dirigido y $a \sqsubseteq \sqcup A$, se cumple $a \sqsubseteq x$ para algún $x \in A$. El conjunto de todos los elementos compactos en D , se denota por D_c ³.

Definición 3.12. Sea (D, \sqsubseteq) un cpo.

- D es un **cpo algebraico** si, para cada $x \in D$, el conjunto $approx(x) = \{a \in D_c \mid a \sqsubseteq x\}$ es dirigido y $x = \sqcup approx(x)$.
- D es **consistentemente completo** si siempre que el conjunto $\{x, y\} \subseteq D$ es consistente (es decir, x e y tienen una cota superior en común), entonces $\sqcup\{x, y\}$ existe en D .

Definición 3.13. Un **dominio de Scott-Ershov**, dominio de Scott o simplemente dominio es un cpo algebraico consistentemente completo.

Es posible dotar al conjunto de valores de verdad \mathcal{T} con una relación, digamos \leq , con la cual (\mathcal{T}, \leq) puede ser un cpo, una semi-lattice superior completa, una lattice completa, un dominio de Scott (con elemento mínimo, bottom (\perp)) o incluso una bilattice cuando se le asocia con dos órdenes compatibles. En el caso particular en que \mathcal{T} sea dotado de un orden, \leq , se puede definir el correspondiente **ordenamiento puntual** sobre $I(X, \mathcal{T})$ denotado por \sqsubseteq y definido para cuales quiera v_1 y v_2 como sigue: $v_1 \sqsubseteq v_2$ si y solo si $v_1(x) \leq v_2(x)$, para todo $x \in X$.

Observación 1. Si \leq es un orden parcial, entonces \sqsubseteq también lo es. Más aún, si \perp es el elemento bottom de \mathcal{T} , la valuación que mapea cada elemento $x \in X$ a \perp servirá como elemento bottom en $I(X, \mathcal{T})$ y se denotará tal valuación, una vez más, por \perp sin causar confusión alguna.

Finalmente, supongamos que (\mathcal{T}, \leq) es un dominio de Scott, entonces se dirá que una **valuación** $v \in I(X, \mathcal{T})$ es **finita**, si para cada $x \in X$, $v(x)$ es un elemento compacto en (\mathcal{T}, \leq) y el conjunto $\{x \in X \mid v(x) \neq \perp\}$ es finito.

Análogamente, las propiedades sobre la estructura de \mathcal{T} se pueden heredar a $I(X, \mathcal{T})$ las cuales pueden ser establecidas en el siguiente resultado.

Teorema 3.14. Sean X un conjunto no vacío, (\mathcal{T}, \leq) un conjunto de valores de verdad dotado con elemento bottom \perp e $I(X, \mathcal{T})$ dotado con el ordenamiento puntual y elemento bottom recién definidos.

³ $D_c \neq \emptyset$, ya que, en un cpo bottom siempre es compacto.

1. Si (\mathcal{T}, \leq) es ordenado parcialmente, entonces $I(X, \mathcal{T})$ es ordenado parcialmente.
2. Si (\mathcal{T}, \leq) es ω -cpo, entonces $I(X, \mathcal{T})$ es ω -cpo.
3. Si (\mathcal{T}, \leq) es cpo, entonces $I(X, \mathcal{T})$ es cpo.
4. Si (\mathcal{T}, \leq) es una semi-lattice superior completa, entonces $I(X, \mathcal{T})$ es una semi-lattice superior completa.
5. Si (\mathcal{T}, \leq) es una lattice completa, entonces $I(X, \mathcal{T})$ es una lattice completa.
6. Si (\mathcal{T}, \leq) es un dominio de Scott, entonces $I(X, \mathcal{T})$ es un dominio de Scott. En esta situación los elementos compactos de $I(X, \mathcal{T})$ son las valuaciones finitas.

Demostración. (1) Es inmediato verificar que $I(X, \mathcal{T})$ es un ordenamiento parcial a partir del ordenamiento que éste posee.

(2) El argumento es similar a (3) por lo que será omitido.

(3) Sea $M \subseteq I(X, \mathcal{T})$ un subconjunto dirigido. Afirmamos que para cualquier $x \in X$, $M(x) = \{v(x) \mid v \in M\}$ es un conjunto dirigido. En efecto, sean $x \in X$ y $v_1, v_2 \in M$ tales que $v_1(x), v_2(x) \in M(x)$. Entonces, existe $v_3 \in M$ tal que $v_1 \leq v_3$ y $v_2 \leq v_3$, así $v_1(x) \sqsubseteq v_3(x)$ y $v_2(x) \sqsubseteq v_3(x)$. Por tanto, $M(x)$ es dirigido. Más aún, dicho conjunto posee un supremo en \mathcal{T} ya que (\mathcal{T}, \leq) es un cpo. Por lo anterior, se puede definir una valuación v_M en X , por $v_M(x) := \bigsqcup\{v(x) \mid v \in M\} = \bigsqcup(M(x))$, donde es fácil verificar que v_M es el supremo de M en $I(X, \mathcal{T})$. De hecho, para cualquier conjunto dirigido $M \subseteq I(X, \mathcal{T})$, $\bigsqcup M$ satisface la siguiente relación: para cada $x \in X$, $(\bigsqcup M)(x) = \bigsqcup(M(x))$, donde $M(x) := \{v(x) \mid v \in M\}$. En efecto, sea $x \in X$, véase que (i) $(\bigsqcup M)(x) \leq \bigsqcup(M(x))$ y (ii) $(\bigsqcup M)(x) \geq \bigsqcup(M(x))$. Para (i), dado que para toda $v \in M : v(x) \leq v_M(x)$, entonces $v \sqsubseteq v_M$. Así, $\bigsqcup M \sqsubseteq v_M$ y por ello, $(\bigsqcup M)(x) \leq v_M(x)$. Para (ii), dado que para toda $v \in M$, $v \sqsubseteq \bigsqcup M$. Entonces, para toda $v \in M : v(x) \leq (\bigsqcup M)(x)$. Así, $v_M(x) \leq (\bigsqcup M)(x)$. De (i) y (ii) se tiene lo pedido. Por tanto, $I(X, \mathcal{T})$ es un cpo.

(4) Por lo argumentado en (3), para cada $M \subseteq I(X, \mathcal{T})$ subconjunto dirigido existe el supremo $\bigsqcup M$. Más aún, para cualquier $M \subseteq I(X, \mathcal{T})$ se tiene que existe $\prod M$ y es definido por: $(\prod M)(x) = \prod(M(x))$ para cada

$x \in X$, donde $M(x)$ es como se definió en (3). Por tanto, $I(X, \mathcal{T})$ es una semi-lattice superior completa.

(5) Se sigue de manera inmediata por los incisos (3) y (4).

(6) Mostremos primero que las valuaciones finitas son los elementos compactos. Supóngase que v es una valuación finita y que $\{x \in X \mid v(x) \neq \perp\} = \{x_1, \dots, x_n\} = V$. Además, supongamos que $M = \{u_k \mid k \in K\}$ es un conjunto dirigido de valuaciones en $I(X, \mathcal{T})$ tal que $v \sqsubseteq \bigsqcup M$. Sea $x_i \in V$. Entonces, se tiene que $v(x_i) \leq \bigsqcup M(x_i) = \bigsqcup (M(x_i))$. Lo anterior implica que, $v(x_i)$ es un elemento compacto y $\{u_k(x_i) \mid k \in K\}$ es un conjunto dirigido. Por lo tanto, para cada $i = \overline{1, n}$, existe $u_{k_i} \in M$ tal que $v(x_i) \leq u_{k_i}(x_i)$. Como M es dirigido, existe $u \in M$ tal que $u_{k_i} \sqsubseteq u$ para todo i , y por tanto, se sigue de manera inmediata que $v \sqsubseteq u$. Se concluye que v es compacto.

Recíprocamente, supongamos que u es cualquier valuación sobre X y sea M el conjunto de todas las valuaciones finitas v tales que $v \sqsubseteq u$. Veamos que M es dirigido. En efecto, sean $v_1, v_2 \in M$ valuaciones no triviales y $x \in X$ tales que $v_1(x) \neq \perp$ y $v_2(x) \neq \perp$ (hay sólo un número finito de tales x que lo cumplen). Nótese que $approx(u(x))$ es un conjunto dirigido en \mathcal{T} , que $v_1(x), v_2(x) \in approx(u(x))$ y por considerar valuaciones de un-punto (llamadas, aquellas valuaciones w tales que $w(x) \neq \perp$ en al menos un valor, x), existe $v_3(x) \in approx(u(x))$ tal que $v_1(x) \leq v_3(x)$ y $v_2(x) \leq v_3(x)$. De lo anterior se sigue que, existe $v_3 \in M$ tal que $v_1 \sqsubseteq v_3$ y $v_2 \sqsubseteq v_3$, y por tanto M es dirigido. Más aún, dado $x \in X$, y $a \in approx(u(x))$ es posible elegir por v_a^x a alguna valuación de un-punto que satisface $v_a^x(x) = a$ y $v_a^x(y) = \perp$ para todo $y \neq x$. Entonces, se verifica que $v_a^x \in M$ y $\bigsqcup \{v_a^x \mid a \in approx(u(x))\} = u(x)$. Así, $\bigsqcup M = u$.

Se sigue de las observaciones anteriores que si u es compacto, entonces existe $v \in M$ tal que $u \sqsubseteq v$. Por tanto el conjunto $\{x \in X \mid v(x) \neq \perp\}$ es finito. Afirmamos que, para cada $x \in X$, $u(x)$ es un elemento compacto en (\mathcal{T}, \leq) . En efecto, supongamos lo contrario, es decir, existe $x_0 \in X$ tal que $u(x_0)$ no es compacto en (\mathcal{T}, \leq) . Entonces, existe al menos un conjunto dirigido $N \in \mathcal{T}$ tal que $u(x_0) \leq \bigsqcup N$, para el cual no existe $n \in N$ con $u(x_0) \leq n$. Para cada $n \in N$ defínase la familia $N_n^* := \{u_n \in I(X, \mathcal{T}) \mid n \in N\}$ donde $u_n(x) = u(x)$ para todo $x \neq x_0$ y $u_n(x_0) = n$. Entonces, N_n^* es dirigido y $u \sqsubseteq \bigsqcup \{u_n \mid n \in N\}$, sin embargo, aún no se tiene $u \sqsubseteq u_n$ para cualquier $n \in N$. Esto contradice el hecho de que u sea un elemento compacto. Por tanto, se cumple la afirmación. Así, los elementos compactos son, de hecho, las valuaciones finitas e, incluso, se observa que $approx(u)$ es dirigido y que

$\bigsqcup approx(u) = u$ para cada valuación $u \in I(X, \mathcal{T})$.

Finalmente, si u_1 y u_2 son dos elementos finitos consistentes en $I(X, \mathcal{T})$, entonces la valuación definida por $v(x) := \bigsqcup\{u_1, u_2\}$ para cada $x \in X$, es el supremo de u_1 y u_2 (el cual es un elemento finito). \square

Conjuntos TWO

Una gran parte de la semántica declarativa para programas lógicos emplea la lógica clásica 2-valuada. En esta sección se discutirán las propiedades de los conjuntos *TWO*, implícitos en las lógicas mencionadas. En la lógica clásica el ordenamiento usual tomado es **truth**, el cual es un orden parcial denotado por \leq_t que satisface $\mathbf{f} \leq_t \mathbf{t}$. Por ello, *TWO* resulta ser una lattice completa con elemento bottom \mathbf{f} .

Definición 3.15. Sean $t_1, t_2 \in TWO$. Se define la **implicación** para t_1, t_2 como sigue; $t_1 \leftarrow t_2$ toma el valor \mathbf{f} si, y solo si, $t_1 \leq_t t_2$, y \mathbf{t} en otro caso.

El siguiente resultado se obtiene como consecuencia de una aplicación directa del Teorema 3.14, con el correspondiente ordenamiento puntual inducido.

Teorema 3.16. Sean X un conjunto arbitrario y $\mathcal{T} = TWO$. Entonces $I(X, \mathcal{T})$ es una lattice completa con el orden \leq_t . Más aún, el conjunto $I(X, \mathcal{T})$ es un dominio de Scott, donde sus elementos compactos son aquellas valuaciones v para las cuales el conjunto $\{x \in X \mid v(x) \neq \perp\}$ es finito.

Dada v una valuación, se define de manera única una partición de X de la siguiente manera; $v_{\mathbf{f}} = v^{-1}(\mathbf{f})$ y $v_{\mathbf{t}} = v^{-1}(\mathbf{t})$, donde alguno de ellos puede ser incluso vacío. Con la notación anterior, una valuación v que toma valores en *TWO* queda completamente determinada por $I = v_{\mathbf{t}}$. Por tanto, tal valuación puede ser identificada con I . Recíprocamente, cualquier $I \subseteq X$ determina una valuación $v : X \rightarrow TWO$ con la propiedad: $v(x) = \mathbf{t}$ si, y solo si, $x \in I$.

La relación biunívoca entre mapeos y tuplas de subconjuntos nos permite utilizar indistintamente tales conceptos.

Definición 3.17. Una valuación que tome valores en *TWO* será llamada 2-valuada.

La identificación mencionada de valuaciones con tuplas de conjuntos, permite definir una relación que lleva el ordenamiento puntual de valuaciones

sobre el ordenamiento puntual de interpretaciones y se empleará la misma notación para los ordenamientos en los casos correspondientes. En consecuencia, se obtiene el siguiente resultado cuya prueba es directa.

Teorema 3.18. *Sean I y K interpretaciones 2-valuadas. Entonces $I \sqsubseteq K$ si, y solo si, $I \subseteq K$ como subconjuntos de X . El elemento bottom para el conjunto de interpretaciones 2-valuadas está dado por el conjunto vacío.*

Dado que se está trabajando con una lattice completa, se tiene que la valuación que mapea cada elemento de X en el correspondiente elemento top, es en si mismo un elemento top para el espacio de valuaciones.

Modelos y operadores sobre programas lógicos

Se dará inicio a esta sección definiendo uno de los conceptos base para trabajar con un programa lógico.

Definición 3.19. Sea \mathcal{L} un lenguaje de primer orden. Una **cláusula de programa o regla** en \mathcal{L} es una fórmula de la forma $(\forall x_1) \dots (\forall x_l)(A \leftarrow L_1 \wedge \dots \wedge L_n)$ donde $l, n \in \mathbb{N}$, “ A ” es un átomo en \mathcal{L} , “ L_i ” literales en \mathcal{L} con $i \in \{1, \dots, n\}$ y “ x_j ” variables que ocurren en la fórmula con $j \in \{1, \dots, l\}$.

Para simplificar la notación nos referiremos únicamente por $A \leftarrow L_1, \dots, L_n$ a una cláusula del programa, donde el átomo “ A ” es llamado la **cabeza de la cláusula**, cada “ L_i ” es llamada **literal del cuerpo de la cláusula** y el “ L_1, \dots, L_n ” es llamado el **cuerpo de la cláusula**.

Como un abuso de notación, se permitirá que $n = 0$ en el sentido que el cuerpo de la cláusula es vacío. En este caso, la cláusula $(A \leftarrow)$ o simplemente A es llamada **cláusula unitaria o hecho**⁴. Si una literal del cuerpo L es un átomo B , entonces se dice que B **ocurre positivamente** en el cuerpo de la cláusula. Por otro lado, si L es un átomo negado, dígase $\neg B$, entonces se dice que B **ocurre negativamente** en el cuerpo de la cláusula. Por tanto, una cláusula típica será denotada por $A \leftarrow A_1, \dots, A_n, \neg B_1, \dots, \neg B_m$ donde A_i y B_j son átomos en \mathcal{L} con el respectivo corrimiento de los índices i, j .

En general se considerarán tres tipos de programas lógicos, que son:

⁴Algunas veces se escribirán las cláusulas simplemente como $A \leftarrow$ cuerpo, donde “cuerpo”denota el cuerpo de la cláusula.

1. **Programa lógico normal**, aquel que posee un conjunto finito de cláusulas.
2. **Programa lógico definite**, aquel programa lógico en el cual no ocurren símbolos negados.
3. **Programa lógico proposicional**, aquel programa lógico en el cual todos los símbolos predicados son de aridad cero.

El término **programa** se usará en el sentido de programa normal.

Cada programa P tiene asociado un lenguaje denotado por \mathcal{L}_P , el cual llamaremos base de un lenguaje del programa P . \mathcal{L}_P no será dado de manera explícita pero se sobre entiende que el lenguaje consiste de las constantes, variables, funciones y símbolos predicados que ocurren en el programa P . Convenimos que cuando P no contenga algún símbolo constante se añadirá uno.

Por último, como una convención relativa a programas lógicos, se establece que los símbolos constantes, funcionales y predicados se denotarán mediante letras minúsculas, mientras que los símbolos variables se denotarán por letras mayúsculas.

Los siguientes ejemplos de programas exhiben lo mencionado en líneas anteriores.

Ejemplo 3.20 (Programa-Tweety1). Sea Tweety1 el programa que consiste de las siguientes cláusulas.

$$\begin{aligned}
 \text{pingüino}(\text{tweety}) &\leftarrow \\
 \text{ave}(\text{bob}) &\leftarrow \\
 \text{ave}(X) &\leftarrow \text{pingüino}(X) \\
 \text{vuela}(X) &\leftarrow \text{ave}(X), \neg \text{pingüino}(X)
 \end{aligned}$$

Por tanto, Tweety1 representa los siguientes hechos: tweety es un pingüino, bob es una ave, todos los pingüinos son aves y cada ave que no sea un pingüino puede volar.

Ejemplo 3.21 (Programa-Even). Sea Even el programa que consiste de las siguientes cláusulas.

$$\begin{aligned}
 \text{par}(\text{a}) &\leftarrow \\
 \text{par}(\text{s}(X)) &\leftarrow \neg \text{par}(X)
 \end{aligned}$$

El significado interpretado de este programa es el siguiente: “ a ” es el número natural 0 (cero) y “ s ” es la función sucesor sobre los números naturales. Así, el programa representa los siguientes hechos; “0” es par y si algún número no es par, entonces su sucesor es par.

Ejemplo 3.22 (Programa-Lenght). Sea Lenght el programa que consiste de las siguientes cláusulas.

$$\begin{aligned} \text{longitud}([\], a) &\leftarrow \\ \text{longitud}([H \mid T], s(X)) &\leftarrow \text{longitud}(T, X) \end{aligned}$$

Siguiendo la convención de Prolog, $[\]$ denota la lista vacía y $[\cdot \mid \cdot]$ denota una función binaria cuyo significado deseado es el constructor lista y donde el primer argumento es la cabeza de la lista y el segundo argumento es la cola. Así, el programa Lenght se puede entender como una forma recursiva de definir la longitud de una lista, usando la notación sucesor para números naturales del programa 3.21. Más aún, Lenght es un ejemplo de un programa defínite.

Consideremos ahora el estudio semántico de los programas.

Definición 3.23. Sean P un programa con lenguaje base \mathcal{L}_P y D un conjunto no vacío. Una **preinterpretación J para P con dominio D** , es una preinterpretación J para \mathcal{L}_P con dominio D .

Sean J una preinterpretación para el programa P con dominio D y θ una asignación J -variable. Dada una cláusula C en P con $C = A \leftarrow A_1, \dots, A_n, \neg B_1, \dots,$ se define $(C\theta)^J$ como,

$$(A\theta)^J \leftarrow (A_1\theta)^J, \dots, (A_n\theta)^J, \neg(B_1\theta)^J, \dots, \neg(B_m\theta)^J.$$

Usualmente a $(C\theta)^J$ se le llama una **instancia J -básica de C** . Se denotará al conjunto de todas las instancias J -básicas de cláusulas en P por $\mathbf{Base}_J(\mathbf{P})$. Por último, se denotará por $\mathbf{B}_{\mathbf{P},J}$ al conjunto $B_{\mathcal{L}_P,J}$ de todas las instancias J -base de átomos en \mathcal{L}_P , es decir, la colección de todos los elementos de la forma $\mathbf{p}(d_1, \dots, d_n)$, donde p es un símbolo predicado n -ario en \mathcal{L}_P y $d_1, \dots, d_n \in D$.

En general, se trabajará sobre una preinterpretación fija J elegida arbitrariamente y omitiremos hacer referencia a ella, si no causa confusión. Así,

se escribirá únicamente; B_P , $Base(P)$, instancia básica, ... en lugar de lo ya mencionado. De la misma manera uno se referirá a los elementos de $Base_J(P)$ como cláusulas (base) y se aplicará la terminología ya definida para cláusulas de programas a las cláusulas base, tales como “definite”.

Una de las principales interpretaciones para el estudio de programas lógicos son las llamadas **preinterpretaciones de Herbrand**, las cuales son suficientes para el estudio de programas lógicos [véase [19]]. Por tanto, en este trabajo formularemos las definiciones básicas en completa generalidad dado que ello no produce ningún trabajo extra y consideraremos la preinterpretación de Herbrand a no ser que se mencione lo contrario.

Definición 3.24. Sea un programa P con lenguaje base \mathcal{L}_P . Entonces: (1) El **universo de Herbrand** \mathcal{U}_P de P , es el conjunto de todos los términos base en \mathcal{L}_P . (2) La **preinterpretación de Herbrand**, dígase J para P , tiene como dominio a \mathcal{U}_P y se define sobre los símbolos funcionales y constantes como sigue:

- Para cada símbolo constante $c \in \mathcal{L}_P$, $c^J = c$.
- Para cada símbolo funcional n -ario $f \in \mathcal{L}_P$, J le asigna a f el mapeo $f^J : \mathcal{U}_P^n \rightarrow \mathcal{U}_P$ definido por, $f^J(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$.

Ejemplo 3.25. Para el programa Tweety1(Ejemplo 3.20), se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{Tweety1} &= \{\text{bob}, \text{tweety}\}, \\ B_{Tweety1} &= \{\text{pingüino}(\text{bob}), \text{pingüino}(\text{tweety}), \\ &\quad \text{ave}(\text{bob}), \text{ave}(\text{tweety}), \\ &\quad \text{vuela}(\text{bob}), \text{vuela}(\text{tweety})\}, \end{aligned}$$

Y $Base(Tweety1)$ consiste de las siguientes cláusulas.

$$\begin{aligned} \text{pingüino}(\text{tweety}) &\leftarrow \\ \text{ave}(\text{bob}) &\leftarrow \\ \text{ave}(\text{tweety}) &\leftarrow \text{pingüino}(\text{tweety}) \\ \text{ave}(\text{bob}) &\leftarrow \text{pingüino}(\text{bob}) \\ \text{vuela}(\text{tweety}) &\leftarrow \text{ave}(\text{tweety}), \neg \text{pingüino}(\text{tweety}) \\ \text{vuela}(\text{bob}) &\leftarrow \text{ave}(\text{bob}), \neg \text{pingüino}(\text{bob}) \end{aligned}$$

Consideremos de nueva cuenta el programa Even (Ejemplo 3.21) e introduzcamos la siguiente notación: para cada $n \in \mathbb{N}$, $s^n(x)$ denota al término $s(s(\dots s(x)\dots))$ con n ocurrencias de s .

Ejemplo 3.26. Se tiene para el programa Even, lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{\text{Even}} &= \{s^n(a) \mid a \in \mathbb{N}\}, \\ B_{\text{Even}} &= \{\text{par}(s^n(a)) \mid n \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Además, $\text{Base}(\text{Even})$ consiste de las siguientes cláusulas para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\text{par}(a) &\leftarrow \\ \text{par}(s^{n+1}(a)) &\leftarrow \neg \text{par}(s^n(a)).\end{aligned}$$

Nótese que el conjunto $\text{Base}(\text{Even})$ es infinito, de hecho es más sencillo tomar al conjunto $\text{Base}(P)$ como un programa proposicional infinito (contable) y estudiarlo de esta manera en lugar de P mismo. Por tanto, se tomará ventaja de su notación como sigue.

Ejemplo 3.27. Sea P el siguiente programa.

$$\begin{aligned}p &\leftarrow \neg q \\ q &\leftarrow \neg p\end{aligned}$$

Entonces $B_P = \{p, q\}$ y $\text{Base}(P) = P$. Nótese que en este caso la preinterpretación no juega algún rol.

Ahora, se darán las nociones básicas sobre interpretación y modelo para programas.

Definición 3.28. Sean P un programa, J una pre-interpretación para P con dominio D y \mathcal{T} una lógica. Una **interpretación** (o valuación) para P con valores en \mathcal{T} (basada sobre J), es una interpretación o valuación definida sobre $B_{P,J}$ con valores en \mathcal{T} . Una interpretación I para P es un **modelo para P** , si para cada cláusula $C \in \text{Base}_J(P)$; $I(C) = \mathbf{t}$.

Los tres conjuntos arriba definidos poseén la estructura teórica de orden descritas en el Teorema 3.16 relativa a los ordenes que se discutieron en 3.

El operador de un solo paso y modelos soportados

Recordemos que la semántica declarativa para programas lógicos se da mediante la selección de modelos adecuados. Tal selección puede ser descrita mediante un operador, el cual mapea interpretaciones en interpretaciones y cuyos puntos fijos serán los modelos ideales para el programa. En esta sección se introducirá el primero de dos operadores que se estudiarán en el contexto de la semántica declarativa, llamado el **operador de un solo paso** u **operador de consecuencia inmediata** debido a Kowalski y Van Emden [véase [25]].

Definición 3.29. Sean P un programa lógico normal y J una preinterpretación para P . El **operador de un solo paso** u **operador consecuencia inmediata** $T_{P,J} : I_{P,J} \rightarrow I_{P,J}$ está definido de la siguiente forma; dado $I \in I_{P,J}$, $T_P(I)$ es el conjunto de todos los básicos $A \in B_{P,J}$ para los cuales existe una cláusula $A \leftarrow L_1, \dots, L_n \in \text{Base}_J(P)$ que satisfaga $I \models \{L_1 \wedge \dots \wedge L_n\}$, es decir, $I(L_1 \wedge \dots \wedge L_n) = \mathbf{t}$.

Trabajaremos con la lógica clásica 2-valuada, por tanto I_P o $I_{P,2}$ se entiende por $I_{P,J,2}$ donde J es una preinterpretación dada.

La importancia del operador de un solo paso es clara a partir de la siguiente proposición.

Proposición 3.30. *Sea P un programa. Entonces, I es modelo para P si, y solo si, I es un punto pre-fijo del operador T_P .*

Demostración. \Rightarrow] Sean $I \in I_P$ un modelo para P y $A \in T_P(I)$. Entonces, existe una cláusula $C = A \leftarrow L_1, \dots, L_n \in \text{Base}(P)$ donde $I \models (\text{cuerpo}) = \mathbf{t}$. Como I es un modelo, $I(C) = \mathbf{t}$. Por tanto, $I(A) = \mathbf{t}$ y de ahí que, $A \in I$. Así, $T_P(I) \subseteq I$.

\Leftarrow] Supóngase que $T_P(I) \subseteq I$ y considere la cláusula $C = A \leftarrow L_1, \dots, L_n \in \text{Base}(P)$ tal que $I \models L_1 \wedge \dots \wedge L_n$. Entonces, $A \in T_P(I) \subseteq I$. Así, $I(A) = \mathbf{t}$. Por tanto, $I(C) = \mathbf{t}$. \square

Observemos que B_P siempre es un modelo para P , pero en general B_P no es adecuado para capturar la semántica declarativa de los programas, es decir, el “significado deseado” de los programas dado que B_P contiene muchos elementos. Por tanto, un enfoque estándar para la semántica declarativa involucra la imposición de ciertas condiciones adicionales que los modelos deben

satisfacer para calificar como “modelos adecuados”. Sin embargo, es razonable pensar que las condiciones que se elijan, en este contexto, dependen sobre la comprensión particular que uno le puede dar, de lo que podría significar. Por ello, nos dedicaremos a la presentación y al estudio de las diferentes condiciones que han sido propuestas por diversos autores para resolver este problema.

La observación anterior sugiere pensar en la búsqueda de modelos minimales. Por tanto, los casos donde exista un modelo mínimo serán de particular interés para este trabajo.

Teorema 3.31. *Sean P un programa definite y J una preinterpretación fija para \mathcal{L}_P . Entonces se cumplen los siguientes resultados.*

- (a) T_P es un orden continuo sobre I_P .
- (b) P posee un (J -)modelo mínimo, el cual coincide con el mínimo punto fijo de T_P y es igual a $T_P \uparrow \omega$.
- (c) La intersección de cualquier colección no vacía de (J -) modelos para P , es un modelo para P . Por lo tanto, un programa definite no puede tener dos modelos minimales distintos para P . Más aún, la intersección de la colección de todos los modelos para P coincide con el modelo mínimo para P .

Demostración. (a) Véase primero que T_P es monótono. Sean $I, K \in I_P$ con $I \subseteq K$ y supongamos que $A \in T_P(I)$. Entonces existe una cláusula $A \leftarrow \text{cuerpo} \in \text{Base}(P)$ con $\text{cuerpo} \subseteq I$. Así, $\text{cuerpo} \subseteq K$, y de ahí que $A \in T_P(K)$.

Ahora, sean $\mathcal{I} = \{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia dirigida de interpretaciones 2-valuadas e $I = \bigsqcup \mathcal{I} = \bigcup \mathcal{I}$. Como el orden que se está considerando es la inclusión de conjuntos usual y por la definición de T_P , se sigue de manera inmediata que $T_P(\mathcal{I})$ es dirigido. Por la observación 3 únicamente resta mostrar que $T_P(I) \subseteq \bigcup T_P(\mathcal{I})$. Para ello, supongamos que $A \in T_P(I)$. Entonces hay una cláusula (definite) $C = A \leftarrow A_1, \dots, A_n \in \text{Base}(P)$ tal que $A_1, \dots, A_n \in I$. Por tanto, existen I_{λ_i} con $A_i \in I_{\lambda_i}$ para $i = 1, \dots, n$. Como \mathcal{I} es dirigido, existe $I_\lambda \in \mathcal{I}$ con $I_{\lambda_i} \subseteq I_\lambda$ con $i = 1, \dots, n$. Por tanto, el cuerpo de C está en I_λ , es decir, $I_\lambda(\text{cuerpo}) = \mathbf{t}$, y de lo anterior se tiene que $A \in T_P(I_\lambda)$. Por tanto, $A \in \bigcup T_P(\mathcal{I})$.

(b) Por la condición (a), es posible aplicar el Teorema de Kleene [Véase 3.9] para asegurarse que T_P tiene un mínimo punto fijo, el cual coincide con,

$T_P \uparrow \omega$. Más aún, es el menor punto pre-fijo de T_P . Así, por la proposición 3.30, $T_P \uparrow \omega$ es el modelo mínimo para P .

(c) Es claro. □

En conclusión, la semántica de modelos mínimos es muy satisfactoria para los programas lógicos definite desde varios puntos de vista dado que se puede mostrar, por ejemplo, que el mínimo modelo para un programa definite se corresponde bastante bien con el “procedural interpretation” de los programas lógicos⁵. Por ello, se ha tratado de generalizar el Teorema 3.31, sin embargo tales propuestas siguen fallando de distintas maneras. Por ejemplo, véase el siguiente programa.

Ejemplo 3.32. Sea P el programa que consiste de las siguientes cláusulas.

$$\begin{aligned} p &\leftarrow \neg q \\ q &\leftarrow \neg p \\ r &\leftarrow \neg r \end{aligned}$$

Entonces $\{p, r\}$ y $\{q, r\}$ son modelos minimales para P , pero incomparables. Por tanto, P no tiene modelo mínimo y por ello, P no tiene puntos fijos. Por último, sin ninguna dificultad se puede verificar que $T_P(\emptyset) = \{p, q, r\}$ y $T_P(p, q, r) = \emptyset$. Por tanto T_P no es monótono.

En la literatura en cuestión se ha abordado el problema relativo a la ausencia de modelos minimos de distintas maneras, que sugieren el uso de modelos específicos. Así, de esta manera, revisaremos dos de estos enfoques iniciando con el siguiente ejemplo, el cual se empleará para establecer el primer modelo que se trabajará.

Ejemplo 3.33. Sea el programa Even 3.21 con los modelos siguientes:

$$\begin{aligned} K_1 &= \{par(s^{2n}(a)) \mid n \in \mathbb{N}\}, \\ K_2 &= \{par(s^{2n+1}(a)) \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Se verifica sin mucha dificultad que ambos modelos son minimales pero K_1 resulta ser un modelo más adecuado dado que logra captar el significado deseado que intenta dar Even, mientras que K_2 no lo hace. En esencia, lo anterior se relaciona con el siguiente hecho; $par(s(a)) = \mathbf{t}$ respecto a K_2 pese

⁵Para más detalles sobre esto véase [19] y [1].

a que el programa no da una justificación para ello. Así, de manera intuitiva, es razonable decir que siempre que un átomo tome el valor “true” en algún modelo deseado para el programa, entonces éste debería tomar el mismo valor por una razón provista por el programa mismo.

Definición 3.34. Una interpretación I para un programa P es llamada **soportada**, si para cada $A \in I$ existe un cláusula $A \leftarrow \text{cuerpo} \in \text{Base}(P)$ con $I(\text{cuerpo}) = \mathbf{t}$.

En el ejemplo 3.33, K_1 es soportado mientras que K_2 no lo es. De hecho, en una sección posterior mostraremos que K_1 es el único modelo soportado para Even. Así, para algunos programas ser soportado es un requerimiento apropiado de los modelos.

Ahora, veamos la relación que hay entre los modelos soportados y el operador de un solo paso.

Proposición 3.35. Sea P un programa normal. Entonces, I es una interpretación soportada para P si, y solo si, I es un punto post-fijo del operador T_P . Además, I es un modelo soportado para P si, y solo si, I es un punto fijo del operador T_P .

Demostración. Sea I una interpretación soportada para P y supongamos que $A \in I$. Entonces, existe $A \leftarrow \text{cuerpo} \in \text{Base}(P)$ con $I(\text{cuerpo}) = \mathbf{t}$, por tanto $A \in T_P(I)$. Lo anterior muestra que, $I \subseteq T_P(I)$. Por tanto, I es un punto post-fijo de T_P . Supongamos, por otro lado, que I es un punto post-fijo y $A \in I$. Entonces $A \in T_P(I)$, por ser I post-fijo. Por tanto, existe una cláusula en la base del programa, $A \leftarrow \text{cuerpo} \in \text{Base}(P)$ con $I(\text{cuerpo}) = \mathbf{t}$, lo cual muestra que I es un modelo soportado para P . Finalmente, usando la proposición 3.30, se tiene que una interpretación para P es un modelo soportado para P si, y solo si, la interpretación es tanto un punto post y pre-fijo del operador T_P , es decir, si, y solo si, es un punto fijo de T_P . \square

Ejemplo 3.36. Considérese el programa Tweety1 del ejemplo 3.20. Entonces, se puede verificar sin ninguna dificultad que Tweety1 tiene como modelo soportado al siguiente conjunto:

$$M = \{\text{pingüino}(\text{tweety}), \text{ave}(\text{bob}), \text{ave}(\text{tweety}), \text{vuela}(\text{bob})\}.$$

Es posible mostrar que M es el único modelo soportado para Tweety1.

En el contexto de programación lógica basada en resolución, los modelos soportados son mejores que aquellos que únicamente son minimales, dado que ellos representan mejor la idea del programador, quien define a una cláusula como una forma de equivalencia mas que, como una implicación [véase [3]].

Observación 3. Dado que los modelos mínimos para un programa definite son los puntos fijos del operador de un solo paso, por el Teorema 3.31 se obtiene de manera inmediata que todo modelo mínimo es soportado.

En conclusión, el Teorema 3.9 y 3.10 no son válidos en general para todo programa normal, debido a la no monotonía del operador de un solo paso en estos programas. Así, para la obtención de los puntos fijos del operador de un solo paso es natural el empleo de teoremas sobre puntos fijos, en los cuales no es necesario la monotonía del operador.

El operador de Gelfond- Lifschitz y modelos estables

Un inconveniente que se presenta en la semántica para modelos soportados es el hecho que los programas definite pueden tener más de un modelo soportado. Para ello, véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.37. Sea P el programa que consiste de la siguiente cláusula, $p \leftarrow p$. Entonces, tanto \emptyset como $\{p\}$ son modelos soportados para P .

Tal inconveniente puede ser resuelto mediante la introducción de los modelos estables, para los cuales será necesario el siguiente resultado auxiliar.

Proposición 3.38. *El mínimo modelo, $T_P \uparrow \omega$, para un programa definite P , es el único modelo M para P que satisface la siguiente condición: existe un mapeo $l : B_P \rightarrow \alpha$, para algún ordinal α , tal que para cada $A \in M$, existe una cláusula $A \rightarrow \text{cuerpo} \in \text{Base}(P)$ con $M(\text{cuerpo}) = \mathbf{t}$, y para cada $B \in \text{cuerpo}$; $l(B) < l(A)$.*

Demostración. \Rightarrow] Supóngase que el modelo mínimo es $T_P \uparrow \omega = M$. Tómesese $\alpha = \omega$ y defínase $l : B_P \rightarrow \alpha$ por medio de $l(A) = \min\{n \mid A \in T_P \uparrow (n+1)\}$ si, $A \in M$ y $l(A) = 0$ si, $A \notin M$. Para cada n ocurre que $\emptyset \subseteq T_P \uparrow 1 \subseteq \dots \subseteq T_P \uparrow n \subseteq \dots \subseteq T_P \uparrow \omega = \bigcup_{m < \omega} T_P \uparrow m$, con lo cual se observa que l está bien definida y el mínimo modelo, $T_P \uparrow \omega$, para P tiene las propiedades requeridas.

\Leftarrow] Supongamos que M es un modelo para P que satisface las condiciones dadas para algún mapeo $l : B_P \rightarrow \alpha$. Entonces, afirmese lo siguiente: $A \in$

$M \Rightarrow A \in T_P \uparrow (l(A) + 1)$. Si, $l(A) = 0$ entonces, es claro que $A \in T_P \uparrow 1$. Ahora supongamos que, la afirmación se cumple para todo A con $l(A) < n$. Véase que también se cumple si $l(A) = n$. En efecto, sea $A \in M$, existe $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ tal que $M(cuerpo) = \mathbf{t}$ y $\forall B \in cuerpo, l(B) < l(A)$. Entonces, $B \in T_P \uparrow (l(B) + 1)$ para todo $B \in cuerpo$, por hipótesis inductiva. De ahí que, $cuerpo \in \bigcup_{B \in cuerpo} T_P \uparrow (l(B) + 1) \subseteq T_P \uparrow (l(A))$. Por tanto, existe $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ tal que $cuerpo \in T_P \uparrow (l(A))$, es decir, $A \in T_P \uparrow (l(A) + 1)$. De la afirmación probada, se sigue que $M \subseteq T_P \uparrow \omega$ y por ello que $M = T_P \uparrow \omega$, ya que de la minimalidad del modelo $T_P \uparrow \omega$ se tiene que $T_P \uparrow \omega \subseteq M$. \square

Los mapeos l , mencionados en la Proposición anterior, comúnmente son llamados **mapeos de nivel**. En ocasiones será necesario extender tales mapeos a literales asumiendo que tales extensiones satisfacen que $l(\neg A) = l(A)$, para cada átomo A .

La siguiente definición de modelo estable relaciona la propiedad recién establecida sobre el operador T_P y la de modelo soportado ⁶.

Definición 3.39. Una interpretación I para un programa P es llamada una **interpretación bien soportada** si existe un mapeo de nivel $l : B_P \rightarrow \alpha$, para algún ordinal α , tal que para cada $A \in I$, existe una cláusula $C \in Base(P)$ de la forma $A \leftarrow A_1, \dots, A_n, \neg B_1, \dots, \neg B_k$ de tal manera que el *cuerpo* de C cumple: $I(cuerpo) = \mathbf{t}$ y $l(A_i) < l(A)$ para todo $i = 1, \dots, n$.

En particular, un modelo bien-soportado será llamado un **modelo estable**.

Teorema 3.40. (1) Cada modelo estable es soportado y minimal. (2) Cada programa definite tiene un único modelo estable, el cual es su modelo mínimo.

Demostración. (1) Sean P un programa, M un modelo estable para P y l un mapeo de nivel con el cual M es estable. Que M es soportado es inmediato a partir de la Definición. Veamos que M es minimal. Supóngase que K es un modelo para P con $K \subset M$. Entonces, existe $A \in M \setminus K$. Sin pérdida de generalidad, supongamos también que A es tal que $l(A)$ es minimal. Dado que M es bien-soportado, existe una cláusula C de la forma

⁶Véase [4], donde se exhibe que los modelos estables pueden ser introducidos de esta manera.

$A \leftarrow A_1, \dots, A_n, \neg B_1, \dots, \neg B_k \in \text{Base}(P)$ tal que para cada $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, k$ se tiene que $A_i \in M$, $l(A_i) < l(A)$ y $B_j \notin M \supset K$. Entonces, $B_j \notin K$ para cada j y por la minimalidad de $l(A)$ se tiene que $A_i \in K$ para cada i . Luego, como K es modelo de P y el cuerpo de C toma el valor \mathbf{t} con respecto a K , entonces $A \in K$, lo cual es falso ya que contradice el hecho que $A \in M \setminus K$. Por tanto, M es un modelo minimal.

(2) Por la Proposición 3.38, se observa que todo modelo mínimo es un modelo estable para un programa. Por último, la unicidad se sigue de (2) y de la parte (c) del Teorema 3.31. \square

En general, los recíprocos del Teorema anterior (3.40) no se cumplen.

Ejemplo 3.41. Sea P el programa que consiste de las siguientes cláusulas.

$$\begin{aligned} p &\leftarrow q \\ p &\leftarrow \neg p \end{aligned}$$

Es sencillo ver que $\{p\}$ es el único modelo soportado para P . Sin embargo, este modelo no es estable.

Por el Teorema 3.40 (2), la unicidad de los modelos estables nos garantiza que dichos modelos sean mínimos. Por otro lado, si un programa tiene un modelo mínimo, entonces no hay garantía de que tal modelo sea estable para el programa, como lo muestra el ejemplo anterior y donde dicho ejemplo sirve para probar que el recíproco del inciso (2) del Teorema 3.40 no se cumple en general. De la misma manera, se puede exhibir que el recíproco del inciso (1) del Teorema 3.40 es falso, para ello considérese el Ejemplo 3.37 con modelo soportado $\{p\}$, donde $\{p\}$ no es un modelo estable para P .

El siguiente resultado muestra una caracterización de los modelos estables como puntos fijos de un operador.

Definición 3.42. Sean P un programa e $I \in I_P$. Entonces, la **transformada Gelfond-Lifschitz P/I** de P es el conjunto de todas las cláusulas $A \leftarrow A_1, \dots, A_n$ para las cuales existe una cláusula $A \leftarrow A_1, \dots, A_n, \neg B_1, \dots, \neg B_k \in \text{Base}(P)$ con $B_j \in I$ y $j = 1, \dots, k$.

Nótese que la transformada de Gelfond-Lifschitz P/I de un programa P es definite (como un conjunto de cláusulas básicas) y por tanto, por el Teorema 3.31, tiene un modelo mínimo, dígase $T_{P/I} \uparrow \omega$. Una vez definida la transformada de Gelfond-Lifschitz, se puede definir el **operador de Gelfond-Lifschitz** [véase [7]] asociado con P como, $\mathbf{GL}_P : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{T}_{P/I} \uparrow \omega$.

Teorema 3.43.

1. El operador GL_P es antitono y en general no es monótono.
2. Una interpretación I es un modelo estable para un programa P si, y solo si, I es un punto fijo del operador GL_P .

Demostración. (1) Sea P un programa y sean I, K interpretaciones para P con $I \subseteq K$. Entonces, es fácil ver que $P/k \subseteq P/I$. Afírmese lo siguiente, para todo $n \in \mathbb{N} : T_{P/K} \uparrow n \subseteq T_{P/I} \uparrow n$. En efecto, para $n = 1$. Sea $A \in T_{P/K} \uparrow 1$. Entonces, existe una cláusula $C = A \leftarrow A_1, \dots, A_m \in \text{Base}(P/K) \subseteq \text{Base}(P/I)$ tal que $\emptyset \models A_1 \wedge \dots \wedge A_m$. Entonces, $C \in T_{P/I} \uparrow 1$. Ahora, supongamos que la afirmación se cumple para algún n y véase que se satisface para $n+1$. Sea $A \in T_{P/K} \uparrow (n+1) = T_{P/K}(T_{P/K} \uparrow (n))$, entonces por hipótesis inductiva y el caso $n = 1$ se tiene que, $A \in T_{P/I}(T_{P/I} \uparrow (n)) = T_{P/I} \uparrow (n+1)$. Por tanto, se tiene la afirmación. De lo anterior, se sigue que $GL_P(K) = T_{P/K} \uparrow \omega \subseteq T_{P/I} \uparrow \omega = GL_P(I)$. Por tanto, GL_P es un operador antitono.

Para probarse que GL_P en general no es monótono, considérese el programa del Ejemplo 3.41. Tómese $I = \emptyset$, se observa que $P/I = \{p \leftarrow p, p \leftarrow\}$ (sin mucha dificultad). De ahí, es claro que $GL_P(I) = \{p\}$. Ahora, tomando $I = \{p\}$, se observa que $P/I\{p \leftarrow p\}$ y $GL_P(I) = \emptyset$. De lo cual se sigue (1).

(2) [\Leftarrow Supóngase que $GL_P(I) = T_{P/I} \uparrow \omega = I$. Entonces I es un modelo mínimo para P/I , por tanto I es un modelo para P . Y por la Proposición 3.38, I es bien-soportado con respecto a cualquier mapeo de nivel, l , que satisface: $l(A) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid A \in T_{P/I} \uparrow (n+1)\}$ para cada $A \in I$.

\Rightarrow] Supóngase que I es un modelo estable para P . Entonces, I es bien-soportado relativo a algún mapeo de nivel, dígase l . Así, para cada $A \in I$, existe una cláusula $C = A \leftarrow A_1, \dots, A_n, \neg B_1, \dots, \neg B_k \in \text{Base}(P)$ de tal forma que, $I(\text{cuerpo}) = \mathbf{t}$ y $l(A_i) < l(A)$ para cada $i = 1, \dots, n$. Entonces, para cada $A \in I$, existe una cláusula de la forma $A \leftarrow A_1, \dots, A_n \in P/I$, donde $I(\text{cuerpo}') = \mathbf{t}$ y $l(A_i) < l(A)$, para cada i . Por tanto, se sigue de la Proposición 3.38 que I es un modelo mínimo para P/I , de ahí que, $I = T_{P/I} \uparrow \omega = GL_P(I)$. Por tanto se tiene (2). \square

La transformada de Gelfond-Lifschitz puede ser considerada como un proceso de dos pasos: (1) Elimina cada cláusula-base que posea literales negadas, dígase $\neg B$, en el “cuerpo” de la cláusula y con $B \in I$. (2) Elimina todas las literales negadas en el “cuerpo” de las cláusulas restantes. En otras palabras, el proceso se entiende de la siguiente manera: se considera a P como

un conjunto de premisas y a I como un conjunto de creencias que un agente racional podría sostener y quisiera probar dadas las premisas en P . Cualquier cláusula-base que contenga elementos de la forma $\neg B$ en el “*cuervo*” de la cláusula, donde $B \in I$, son inútiles para el agente y pueden ser descartadas. Luego, entre las restantes cláusulas-base, una ocurrencia de la forma $\neg B$ con $B \notin I$ son triviales. Así, se puede simplificar el conjunto de premisas P al conjunto P/I . Por último, si sucede que I sea el conjunto átomos que se siguen lógicamente de P/I , entonces el agente es racional. Para dejar en claro las líneas anteriores, véanse los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.44. Consideremos el Programa Tweety1 del Ejemplo 3.20 y su modelo soportado M dado en el Ejemplo 3.36. Se afirma que M es estable para Tweety1. En efecto, para ello véase que $Tweety1/M$ consiste de las siguientes cláusulas:

```
pingüino(tweety) ←
ave(bob) ←
ave(tweety) ← pingüino(tweety)
ave(bob) ← pingüino(bob)
vuela(bob) ← ave(bob)
```

Donde, de la Proposición 3.38 se sigue que M es un modelo mínimo para $Tweety1/M$. Por tanto, M es estable para Tweety1.

En la semántica de modelos soportados al añadir cláusulas de la forma $p \leftarrow p$ se puede cambiar la semántica del programa. Como ejemplo de ello, considérese el siguiente programa.

Ejemplo 3.45 (Tweety2). Considérese el siguiente programa llamado *Tweety2*.

```
pingüino(tweety) ←
ave(bob) ←
ave(X) ← pingüino(X)
vuela(X) ← ave(X), ¬pingüino(X)
pingüino(bob) ← pingüino(bob)
```

El programa Tweety2 resulta de Tweety1 por la adición de la última cláusula, la cual es suficiente para modificar la semántica del programa como se muestra a continuación:

- Tweety2 posee como modelos soportados tanto a M del Ejemplo 3.36 y a M' que consiste de los siguientes básicos $\{\text{pingüino}(\text{tweety}), \text{pingüino}(\text{bob}), \text{ave}(\text{tweety}), \text{ave}(\text{bob})\}$.
- M es un modelo soportado para Tweety2, mientras que M' no lo es. En efecto, sea $\text{Tweety2}/M'$ que consta de las siguientes cláusulas:

$$\begin{array}{ll} \text{pingüino}(\text{tweety}) & \leftarrow \\ \text{ave}(\text{bob}) & \leftarrow \\ \text{ave}(\text{tweety}) & \leftarrow \text{pingüino}(\text{tweety}) \\ \text{ave}(\text{bob}) & \leftarrow \text{pingüino}(\text{bob}) \\ \text{pingüino}(\text{bob}) & \leftarrow \text{pingüino}(\text{bob}) \end{array}$$

Y tiene como modelo mínimo: $\{\text{pingüino}(\text{tweety}), \text{ave}(\text{tweety}), \text{ave}(\text{bob})\} \neq M'$.

Por último, veamos que la semántica de modelos estables sirve para modelar la elección en el sentido de delimitar el dominio de estudio correspondiente al contexto del problema.

Ejemplo 3.46 (Tweety3). Sea Tweety3 que consta de las siguientes cláusulas.

$$\begin{array}{ll} \text{aguila}(\text{tweety}) & \leftarrow \neg \text{pingüino}(\text{tweety}) \\ \text{pingüino}(\text{tweety}) & \leftarrow \neg \text{aguila}(\text{tweety}) \\ \text{ave}(X) & \leftarrow \text{aguila}(X) \\ \text{ave}(X) & \leftarrow \text{pingüino}(X) \\ \text{vuela}(X) & \leftarrow \text{ave}(X), \neg \text{pingüino}(X) \end{array}$$

Se garantiza que Tweety3 posee los siguientes modelos estables:

- $\{\text{aguila}(\text{tweety}), \text{ave}(\text{tweety}), \text{vuela}(\text{tweety})\}$ y
- $\{\text{pingüino}(\text{tweety}), \text{ave}(\text{tweety})\}$.

Conclusiones

En este trabajo hemos realizado una presentación de modelos para ciertos programas lógicos. En particular, se han considerado los programas definite, normales y lógico proposicionales. Para ello, se definieron los elementos

básicos de la Teoría de Programación Lógica, algunos resultados relativos a conjuntos parcialmente ordenados y ciertas propiedades del punto fijo en los operadores mencionados. Como se puede constatar con los resultados presentados, la existencia de modelos para ciertos programas lógicos emplea de forma importante un teorema de punto fijo. Es posible obtener resultados similares para otros programas lógicos pero, para ello, es necesario extender el estudio a estructuras más generales que admiten propiedades de tipo punto fijo. En particular, en investigaciones recientes, diversos autores han obtenido modelos para otras clases de modelos, por ejemplo los programas aceptables y acíclicos. El anterior es un objetivo considerado para un trabajo futuro.

Agradecimientos

Los autores agradecen al revisor por sus valiosos comentarios y sugerencias para mejorar este capítulo. El presente trabajo ha sido apoyado por el Proyecto 100018967-VIEP2019.

Bibliografía

- [1] Apt K. R., *From logic programming to Prolog*, London: Prentice Hall, **Vol. 362**(1997).
- [2] Bowen K. A., *Programming with full first order logic*, School of Computer and Information Science, Syracuse University, (1980).
- [3] Clark K. L., *Negation as failure. In Logic and data bases*, Springer, Boston MA., (1978), pp. 293-322.
- [4] Fages F., *Consistency of Clark's completion and existence of stable models*, Journal of Methods of logic in computer science, **1(1)** (1994), 51-60.
- [5] Colmerauer A., Kanoui H., Pasero R. & Roussel P. *Un système de communication homme-machine en français*. Technical report, Groupe de Intelligence Artificielle Université de Aix-Marseille II, (1973).
- [6] Davis M., & Putnam H., *A computing procedure for quantification theory*, Journal of the ACM (JACM), **7(3)**(1960), 201-215.

- [7] Gelfond M. & Lifschitz V., *The stable model semantics for logic programming*, In ICLP/SLP, **Vol. 88** (1988, August), pp. 1070-1080.
- [8] Gilmore P. C., *A proof method for quantification theory: its justification and realization*, IBM Journal of research and development, **4(1)** (1960), 28-35.
- [9] Green C., *Application of theorem proving to problem solving*, In Readings in Artificial Intelligence, pp. 202-222.
- [10] Hansson Å., Haridi S. & Tärnlund S. Å., *Properties of a logic programming language*, Labor., Department, Univ., (1981).
- [11] Haridi S., & Sahlin D., *Evaluation of logic programs based on natural deduction*, In Proc. 2nd Workshop on Logic Programming, (1983).
- [12] Hayes P. J., *Computation and deduction*, (1972).
- [13] Hewitt C., *Description and theoretical analysis of PLANNER: A language for proving theorems and manipulating models in a robot*, MASSACHUSETTS INST OF TECH CAMBRIDGE ARTIFICIAL INTELLIGENCE LAB, **No. AI-TR-258** (1972).
- [14] Hitzler P., & Seda A., *Mathematical Aspects of Logic Programming Semantics*, CRC Press (2011).
- [15] Iranzo P. J., & Frasnado M. A., *Programación lógica*, Pearson Educación, (2007).
- [16] Kowalski R., *Predicate logic as programming language*, In IFIP congress **Vol. 74**(1974, August), pp. 569-544.
- [17] Kowalski R., *Logic for problem solving*, Department of Computational Logic, Edinburgh University, (**pp. 8-9**)(1974).
- [18] Kowalski R., *Algorithm = logic + control*, Communications of the ACM, **22(7)**(1979), 424-436.
- [19] Lloyd J. W., *Foundations of logic programming*, Second Edition, Springer, Berlin (1987).

- [20] Mendelson E., *Introduction to mathematical logic*, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books and Software-CA, (1987).
- [21] Prawitz D., *An improved proof procedure*. *Theoria*, **26(2)** (1960), 102-139.
- [22] Robinson J. A., *A machine-oriented logic based on the resolution principle*, *Journal of the ACM (JACM)*, **12(1)** (1965), 23-41.
- [23] Stoltenberg-Hansen V., Lindström I. & Griffor E. R., *Mathematical theory of domains*, Cambridge University Press, **Vol. 22** (1994).
- [24] Tarski A., *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications*, *Pacific journal of Mathematics*, **5(2)**(1955), 285-309.
- [25] Van Emden M. H. & Kowalski R. A., *The semantics of predicate logic as a programming language*, *Journal of the ACM (JACM)*, **23(4)**(1976), 733-742.
- [26] Van Heijenoort J., *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic*, Harvard University Press, (**Vol. 9**)(1967), 1879-1931.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

erisama.quid19@gmail.com

imartinez@fcfm.buap.mx

aparamo@ece.buap.mx

Probabilidad y estadística

Capítulo 4

Valuación de opciones asiáticas mediante ecuaciones diferenciales parciales y simulación Monte Carlo

Araceli Matías González¹, Ambrosio Ortiz Ramírez¹
Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional¹

Resumen

En este trabajo se describen las funciones de pago que caracterizan la prima de una opción asiática, así como los diferentes tipos de promedio aritmético o geométrico en tiempo discreto y continuo. Asimismo, mediante portafolios replicantes se obtiene la ecuación diferencial parcial (EDP) que caracteriza la prima de una opción asiática con precio de ejercicio variable sobre un subyacente sin pago de dividendos. La EDP obtenida es similar a la EDP de Black-Scholes, excepto que hay un término adicional que modela el promedio, además que no es parabólica. Posteriormente, se calculan precios de opciones europeas y asiáticas de compra y de venta por simulación Monte Carlo con subyacente el precio de AMXL. Las opciones asiáticas son con subyacente promedio y media aritmética. Los parámetros se han calibrado con una adaptación del modelo de Cox, Ingersoll y Ross con volatilidad realizada. Los precios obtenidos se comparan con los precios de opciones publicadas en el boletín del mercado Mexicano de derivados MexDer del día quince de junio de dos mil dieciocho. La evidencia empírica muestra que para el corto plazo los precios son muy cercanos, pero conforme el plazo de vencimiento se incrementa, la diferencia entre las europeas y las asiáticas aumenta ya que la prima es menor.

1 Introducción

Los mercados financieros son una combinación de fenómenos aleatorios y eventos impredecibles. La creciente participación de los agentes que en ellos operan y su complejidad, hace patente el desarrollo de productos derivados que satisfagan los requerimientos de administración de riesgos financieros, establecer estrategias de cobertura en posiciones ante posibles variaciones de precios, operaciones de arbitraje, entre otros. Es por ello que la innovación en la negociación de derivados exóticos como las opciones asiáticas represente una alternativa en momentos de extrema volatilidad y con costos de transacción accesibles. Las opciones asiáticas se negocian activamente en los mercados de divisas, de tasas de interés y materias primas, son derivados dependientes de la trayectoria del subyacente cuyo pago depende explícitamente de los precios promedio del subyacente. Su principal ventaja es que disminuye posibles manipulaciones del mercado que pueden suceder cerca de la fecha de vencimiento. En general, cuanto mayor sea el período del promedio, más suave será la trayectoria. En el mercado cambiario, estas opciones proporcionan a la tesorería un instrumento de cobertura para una serie de flujos cuyo ejercicio se liquide en efectivo. Para materias primas, como metales industriales, combustibles o granos, entre otros, el promedio también es útil como recurso para eliminar la sensibilidad extrema del valor al vencimiento de la opción al precio en efectivo del subyacente en ese día en particular. En [9] se muestra un ejemplo de cómo las opciones asiáticas desempeñan un papel importante en la administración del riesgo de precios realizada por empresas locales de distribución en el mercado del gas. Asimismo, en los mercados petroleros se emiten con frecuencia este tipo de derivados para estabilizar flujos de efectivo que surgen del cumplimiento de las obligaciones con los clientes. En [10] los autores muestran un modelo de equilibrio general para el mercado de electricidad mediante teoría de tasas de interés y opciones asiáticas de promedio aritmético con propósitos de pronóstico sobre la demanda futura de electricidad y ajuste de precios como un efecto de la eficiencia de mercado.

Desde el punto de vista teórico, las opciones asiáticas con promedio aritmético han recibido un interés creciente debido a la complejidad de los problemas relacionados con la determinación de una fórmula cerrada para el precio de estas opciones. Por ejemplo, en el modelo de Black y Scholes (1973) (BS) [3] y Merton [18], se supone que el activo subyacente es conducido por un movimiento browniano geométrico, sin embargo, la distribución del promedio

aritmético no es lognormal y es todo un reto caracterizar tal distribución de manera analítica. Una representación fue propuesta en los trabajos seminales de Yor [24] y [25] pero con un uso práctico limitado en la valoración de opciones asiáticas. [7] proporcionan fórmulas cerradas para opciones asiáticas con precio de ejercicio fijo con promedio aritmético con el rendimiento del subyacente conducido por un proceso de raíz cuadrada. Además, obtienen resultados sobre la distribución del proceso de raíz cuadrada y su promedio temporal, incluyendo fórmulas analíticas para su densidad conjunta y momentos.

Diversos métodos de valoración se han propuesto para determinar precios de opciones asiáticas, los cuales se pueden clasificar en analíticos y numéricos. En cuanto a métodos analíticos el enfoque de ecuaciones diferenciales parciales ha sido muy utilizado para valorar instrumentos derivados, particularmente opciones, por ejemplo, en [22] se propone la valuación de la opción asiática resolviendo una ecuación diferencial parcial parabólica en dos variables además de proporcionar un límite inferior que es tan preciso que es esencialmente el precio real. Por otra parte, [26], [27], [16] y [11] obtienen el precio de la opción asiática con el modelo de Black-Scholes, las ecuaciones diferenciales parciales resultantes son de tipo parabólico en una dimensión espacial y el cálculo numérico se realiza mediante el uso de un método de elemento finito adaptado.

Dentro de los métodos numéricos se encuentra la simulación Monte Carlo, es utilizado frecuentemente en finanzas computacionales, porque permite encontrar soluciones aproximadas de problemas matemáticos que involucran variables aleatorias dependientes del tiempo. El primer trabajo que recurre a este método está plasmado en [21], en el que se valoran opciones, para lo cual se simula el proceso que generan los rendimientos en el activo subyacente suponiendo neutralidad de riesgo para derivar el valor de la opción e introduce una variable de control apropiada con la cual se aumenta significativamente la precisión de los resultados. En trabajos más recientes se combina la simulación con variables de control para opciones asiáticas, lo cual, según los hallazgos mejora sustancialmente la precisión, como por ejemplo en [2], [8], [17], [23], entre otros.

Este trabajo está organizado como sigue, en la siguiente sección se obtiene una ecuación diferencial parcial que caracteriza el precio de una opción cuando el valor intrínseco del contrato no sólo depende del precio del activo subyacente en la fecha de vencimiento, sino también del valor medio del

subyacente durante la vida del contrato, ya sea aritmético o geométrico. En la sección tres se propone una metodología mediante simulación Monte Carlo con remuestreo cuadrático propuesto en [1] para determinar precios de opciones asiáticas y europeas con volatilidad estocástica. Se supone que las distribuciones de los precios del subyacente y la volatilidad son modeladas con un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas con correlación. La volatilidad del subyacente y sus parámetros se calibran mediante una adaptación del modelo de tasa corta desarrollado en [6] (en adelante CIR) a volatilidad realizada. Los precios obtenidos se comparan con los de AMXL publicados en el boletín la página web del Mercado Mexicano de Derivados (MexDer) del día 15 de junio de 2018, la tasa de interés libre de riesgo se obtiene de proveedor de precios los cuatro plazos de las opciones del boletín. Por último se concluye en la cuarta sección.

2 Valuación de opciones asiáticas: enfoque de Ecuaciones diferenciales parciales

Para satisfacer las necesidades de algunos participantes de los mercados de derivados, las instituciones financieras emiten opciones exóticas además de opciones europeas o americanas sobre diversos subyacentes. Una opción exótica es una opción cuya función de pago es no estándar. Por lo general, no se cotiza en una bolsa ya que se negocian directamente entre empresas y bancos. En este caso, se dice que se comercializa en el mercado sobre el mostrador (*Over The Counter*). La mayoría de las opciones exóticas tienen funciones de pago complicadas y sus valores finales dependen no solo del precio del activo al vencimiento sino también de la evolución del precio del activo durante su vigencia. Su precio se fija por una parte o la totalidad de la trayectoria del precio del activo durante la vigencia de la opción por lo que también se denominan como opciones dependientes de la trayectoria. Las opciones barrera, opciones asiáticas y opciones *lookback* son algunos ejemplos de opciones exóticas dependientes de la trayectoria.

Una opción asiática es aquella cuyo pago depende del promedio del precio del activo subyacente durante una parte o todo el plazo al vencimiento de la opción. El pago de una opción asiática con fecha de vencimiento T depende del promedio del precio del activo subyacente S_1, \dots, S_n medido en fechas predeterminadas $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$. Por ejemplo, se puede elegir

alguna de las definiciones de promedio para establecer el pago de una opción asiática:

$$M_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i.$$

$$M_g = \left(\prod_{i=1}^n S_i \right)^{1/n}.$$

De la misma manera, se pueden definir las correspondientes versiones continuas de promedios. Si se asignan pesos iguales al calcular el promedio se tienen cuatro tipos de promedios [19], como se indica en el siguiente cuadro:

Cuadro 1: Definiciones del promedio para opciones asiáticas.

Promedio	Tiempo discreto	Tiempo continuo
Aritmético	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i}$	$\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt$
Geométrico	$(S_{t_1} \cdots S_{t_n})^{1/n}$	$\exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln S_t dt\right)$

Fuente: elaboración propia.

A continuación se obtiene la EDP que caracteriza el precio de una opción asiática, para ello se hacen los siguientes supuestos:

1. El precio del subyacente es conducido por la ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

donde W_t es un proceso de Wiener o movimiento browniano, definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^{W_t})_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ con su filtración aumentada¹ [15], donde $\mu \in \mathbb{R}$ representa el parámetro de tendencia del activo y $0 < \sigma \in \mathbb{R}$ la volatilidad del activo.

¹Se interpreta a σ -álgebra \mathcal{F}_t como la información disponible para los inversionistas al tiempo t , en el sentido de que si $\omega \in \Omega$ es el verdadero estado de la naturaleza y si $O \in \mathcal{F}_t$, entonces al tiempo t todos los inversionistas saben si $\omega \in O$, es decir, no hay “sorpresas” en el mercado: el precio de la acción al tiempo t se puede predecir perfectamente si conoce su precio en instantes estrictamente anteriores a t .

2. Existe un sistema bancario en el que se puede prestar y pedir prestado a un tasa de interés constante continuamente capitalizable $r > 0$. Si se deposita en el banco un monto $B_0 = B(0)$, entonces satisface la ecuación diferencial:

$$dB_t = rB_t dt, \quad 0 < t < T.$$

3. El activo subyacente no paga dividendos.
4. Se negocia en un mercado donde no existen oportunidades de arbitraje, es líquido y no existen impuestos o comisiones. Todos los participantes poseen la misma información y se pueden negociar fracciones del activo, en particular, se permiten las ventas en corto.

En la práctica cuando se trata de modelar opciones cuyo precio depende de la trayectoria del activo subyacente tal como el promedio del precio del activo el enfoque de Black-Scholes no es apropiado. La razón es la siguiente, aunque hay muchas trayectorias de la caminata aleatoria del precio del activo que la conducen a su valor actual, en general, cualquiera de ellas da como resultado un valor diferente para la magnitud dependiente de la trayectoria. Por lo tanto, se debe introducir una variable independiente, además de S_t y t , cuya función es modelar una medida cuyo valor dependa de las trayectorias, esto permitirá valorar opciones asiáticas con promedio aritmético o geométrico y con diferentes funciones de pago [29].

En este orden de ideas, considere la función de pago de una opción con precio promedio de ejercicio con muestreo continuo, es decir, el promedio depende de una integral. En el caso de una opción de compra con precio promedio de ejercicio con media aritmética la función de pago es:

$$\max \left(S_t - \frac{1}{T} \int_0^T S(\tau) d\tau, 0 \right).$$

Observe que el promedio aritmético medido en forma continua del precio del activo durante el período de 0 a T es simplemente la integral del precio del activo como función del tiempo, dividido por el período de tiempo T , aunque existen otras formas de calcular el promedio. Un contrato de este tipo se denomina opción promedio porque el promedio reemplaza a el precio de ejercicio en una opción *plain vanilla*.

Ahora considere una clase general de opciones europeas con pago que depende de S y de:

$$\int_0^T f(S(\tau), \tau) d\tau, \quad (1)$$

donde f es una función en las variables S_t y t . La integral en (1) contempla desde el inicio del promedio en $t = 0$ hasta el vencimiento en $t = T$ sobre la trayectoria de S_t . Para la opción de compra con precio de ejercicio promedio, el pago al vencimiento es:

$$\max\left(S_t - \frac{1}{T} \int_0^T S(\tau) d\tau, 0\right),$$

En este caso $f(S, t) = S_t$. Considere una nueva variable:

$$I_t = \int_0^t f(S(\tau), \tau) d\tau \quad (2)$$

dado que la serie de precios del activo es independiente del precio actual se hace el supuesto que I_t, S_t y t son variables independientes, esto es, diferentes realizaciones del proceso que conduce a S_t resultan en diferentes valores de I_t . Observe que la definición en (2) es (1) con la fecha de vencimiento T reemplazada por t . Dado que la función de pago depende tanto de I_t como de S_t , entonces el precio de una opción exótica se puede escribir como $V(S_t, I_t, t)$, esto es, el precio de la opción es una función de tres variables independientes: tiempo t , precio actual del activo S_t y una integral del precio del activo I_t .

Al aplicar el lema de Itô a V se requiere la ecuación diferencial estocástica para I_t , para esto considere un cambio en I_t dado que t y S_t también cambian:

$$I(t + dt) = I_t + dI_t = \int_0^{t+dt} f(S(\tau), \tau) d\tau \quad (3)$$

de donde:

$$\begin{aligned} I_t + dI_t &= \int_0^t f(S(\tau), \tau) d\tau + f(S(t), t) dt, \\ &= I_t + f(S(t), t) dt + O(dt). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la diferencial de I_t es igual a:

$$dI_t = f(s, t)dt. \quad (4)$$

(4) es una ecuación diferencial estocástica para I_t , observe además que la parte estocástica se ha eliminado. Ahora es factible modelar cualquier opción que dependa de las variables S_t, t e I_t , para ello, se aplica el lema de Itô a la función $V(S_t, I_t, t)$:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial I_t} dI_t + \frac{\partial V}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} dS_t^2$$

a partir de la ecuación anterior y de (4) resulta que:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial I_t} f(S_t, t) dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt \quad (5) \\ &= \frac{\partial V}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial V}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial V}{\partial t} + f(S_t, t) \frac{\partial V}{\partial I_t} \right) dt. \end{aligned}$$

Observe que el nuevo término es proporcional a la derivada parcial de V con respecto a I_t no tiene algún término estocástico en V , esto es, dado que dI_t no agrega una nueva fuente de riesgo entonces la opción puede cubrirse utilizando sólo el subyacente.

Para obtener la ecuación diferencial sea un portafolio Π compuesto por una posición larga de ω_1 unidades del activo subyacente de precio S_t y ω_2 unidades de la opción V sobre S_t :

$$\Pi_t = \omega_1 S_t + \omega_2 V. \quad (6)$$

El cambio en el valor del portafolio, durante el instante dt , debido a variaciones propias del mercado es:

$$d\Pi_t = \omega_1 dV + \omega_2 dS_t \quad (7)$$

Al sustituir las expresiones para dV y dS_t en la ecuación anterior se obtiene una expresión para el cambio de valor en el portafolio:

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \omega_1 (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) \\ &+ \omega_2 \left[\frac{\partial V}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial V}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial I_t} f(S_t, t) \right) dt \right] \\ &= \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial V}{\partial S_t} \right) \sigma S_t dW_t + \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial V}{\partial S_t} \right) \mu S_t dt \\ &+ \omega_2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial I_t} f(S_t, t) \right) dt. \end{aligned} \quad (8)$$

La ecuación (8) contiene dos tipos de términos. El término estocástico multiplicado por dW_t y los términos de tendencia multiplicados por dt . El término estocástico modela el riesgo de mercado del portafolio, el cual se puede eliminar si se eligen cantidades ω_1 y ω_2 en la conformación del portafolio de la siguiente manera:

$$\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial V}{\partial S_t} = 0, \Rightarrow \omega_1 = -\frac{\partial V}{\partial S_t} := \Delta \quad \text{y} \quad \omega_2 = 1. \quad (9)$$

Al sustituir las cantidades elegidas en (8) resulta:

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial I_t} f(S_t, t) \right) dt. \quad (10)$$

Es frecuente denominar a la elección $\omega_2 = 1$ y $\omega_1 = -\Delta$ como cobertura Delta, por lo que a partir de (6) se tiene que:

$$\Pi_t^{(\Delta)} = V - \Delta S_t,$$

lo que significa que se está cubriendo una venta en corto de Δ unidades del subyacente con una opción. Si esta cantidad es depositada en un banco que paga una tasa de interés r , entonces el cambio en el valor del portafolio durante dt es:

$$d\Pi_t^{(r)} = \Pi_t^{(\Delta)} r dt = (V - \Delta S_t) r dt. \quad (11)$$

Dado el supuesto de no arbitraje el portafolio debe ganar la tasa libre de riesgo o el mismo rendimiento que se obtendría en un depósito bancario, es decir, los mercados están en equilibrio [28], entonces $d\Pi_t^{(r)} = d\Pi_t^{(\Delta)}$, por lo tanto:

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial I_t} f(S_t, t) \right) dt = r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t \right) dt \quad (12)$$

Al simplificar términos se obtiene la ecuación diferencial parcial que caracteriza el precio de la opción $V(S_t, I_t, t)$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial I_t} f(S_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial V}{\partial S_t} r S_t - rV = 0. \quad (13)$$

Observe que esta ecuación es similar a la EDP de Black-Scholes, excepto que hay un término adicional, la derivada parcial de V con respecto a I_t

multiplicada por la función $f(S_t, t)$, además de que no es una EDP parabólica ya que el término $\partial^2 V / \partial I_t^2$ no está. Como cualquier derivado se debe incluir en la ecuación con una condición final al vencimiento. Dada una función de pago el valor de la opción está en función de S_t e I_t , entonces:

$$V(S_t, I_t, T) = \Gamma(S_t, I_t, T)$$

donde la función Γ es la función de pago conocida. En el caso de una opción de compra precio de ejercicio flexible igual a la media aritmética:

$$\Gamma(S_t, I_t, T) = \max\left(S_t - \frac{1}{T} \int_0^t S_t(\tau) d\tau, 0\right)$$

y para una opción de venta:

$$\Gamma(S_t, I_t, T) = \max\left(\frac{1}{T} \int_0^t S_t(\tau) d\tau - S_t, 0\right).$$

Reducción de dimensión

Cuando se considera la media aritmética y una función de pago particular, se puede reducir la EDP en dos variables (S_t, I_t) a una ecuación parabólica de una variable mediante una técnica de reducción de dimensión. Sea V una solución a (13) con $f(S_t, t) = S_t$, y sea el valor final dado por $V_T(S_t, I_t) = S_t^\alpha F(S_t/I_t)$, donde $\alpha \in (0, 1)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, y la función $F = F(R)$ con $R = I_t/S_t$ dadas. Entonces $A(R, t) = S_t^{-\alpha} V$ satisface la ecuación:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 R^2 \frac{\partial^2 A}{\partial R^2} + (1 - \sigma^2(\alpha - 1)R - rR) \frac{\partial A}{\partial R} + (\alpha - 1) \left(\frac{\alpha}{2} \sigma^2 + r \right) A = 0. \quad (14)$$

donde $R > 0$, $t \in (0, T)$, y la condición final $A(R, T) = F(R)$. El resultado se obtiene al calcular las derivadas indicadas con $V(S_t, I_t, t) = S_t^\alpha A(I_t/S_t, t)$

como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &= S_t \frac{\partial A}{\partial t}, \\ \frac{\partial V}{\partial I_t} &= S_t^{\alpha-1} \frac{\partial A}{\partial R}, \\ \frac{\partial V}{\partial S_t} &= \alpha S_t^{\alpha-1} A - S_t^{\alpha-2} I_t \frac{\partial A}{\partial R} = S_t^{\alpha-1} \left(\alpha A - R \frac{\partial A}{\partial R} \right), \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} &= \alpha(\alpha-1) S_t^{\alpha-2} A - \alpha S_t^{\alpha-3} I_t \frac{\partial A}{\partial R} - (\alpha-2) S_t^{\alpha-3} I_t \frac{\partial A}{\partial R} + S_t^{\alpha-4} I_t^2 \frac{\partial^2 A}{\partial R^2} \\ &= S_t^{\alpha-2} \left(\alpha(\alpha-1) A - 2(\alpha-1) R \frac{\partial A}{\partial R} + R^2 \frac{\partial^2 A}{\partial R^2} \right).\end{aligned}$$

Al sustituir las derivadas indicadas en (13) se verifica el resultado en (14).

3 Calibración del modelo con volatilidad estocástica realizada y Simulación Monte Carlo

En esta sección se describe un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas que conducen la dinámica de los rendimientos y la volatilidad del activo subyacente, además se propone un procedimiento para calibrar sus parámetros con datos históricos y de mercado. Se supone que el precio del subyacente y su volatilidad son conducidos por movimientos geométricos brownianos con o sin correlación, con la característica de que la ecuación que conduce la volatilidad es con un proceso de tipo CIR, posteriormente se simulan trayectorias del subyacente con la función de pago de la opción y se descuenta con la tasa libre de riesgo el valor final del promedio de las trayectorias. De esta manera se determina el precio de una opción asiática de tipo europea. La simulación de Monte Carlo es muy útil, en especial cuando no se tiene una fórmula cerrada para la valuación.

Una manera de considerar la naturaleza estocástica en los rendimientos de los activos financieros es modelarla por medio de procesos de reversión a la media, como por ejemplo con modelos de volatilidad estocástica en [13], [12], entre otros. La calibración de los parámetros de estos modelos puede hacerse por series de tiempo, modelos con funciones de pérdida, diversos modelos de la familia GARCH, y con volatilidad realizada, entre otros.

A continuación, se propone un modelo para determinar el precio de una opción asiática con subyacente promedio sin pago de dividendos mediante simulación Monte Carlo. Suponga que el precio del subyacente S_t es conducido por un movimiento geométrico browniano con volatilidad estocástica $\sigma_t^2 = v_t$ conducida por un proceso de reversión a la media:

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= rdt + \sqrt{v_t}dW_{S_t} \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t)dt + \lambda\sqrt{v_t}dW_{v_t}\end{aligned}$$

W_{S_t} es un proceso de Wiener correlacionado con W_{v_t} , es decir $\text{Cov}(dW_{S_t}, dW_{v_t}) = \rho dt$. $\kappa > 0$, $\theta \geq 0$ y $\lambda \geq 0$ con valores constantes. Cuando v_t es menor (mayor) que θ , la tendencia $\kappa(\theta - v_t)$ es positiva (negativa) y se espera una volatilidad creciente (decreciente). Esto significa que hay una tendencia hacia un valor medio θ (independientemente de fluctuaciones estocásticas). Este fenómeno se conoce como reversión a la media.

Para ejecutar la simulación de ambos procesos se generan trayectorias con una estructura de relación dada por:

$$d\widetilde{W} = \begin{pmatrix} dW_{S_t} \\ dW_{v_t} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma), \quad \text{con} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Delta t & \rho_{v_t, S_t} \Delta t \\ \rho_{S_t, v_t} \Delta t & \Delta t \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Para hacer lo anterior, se calcula L dado que $\Sigma = LL^\top$ y simular $dZ \sim \mathcal{N}(0, I_2)$ para obtener $d\widetilde{W} = LdZ$, se elige un número para la partición del plazo al vencimiento de la opción, por ejemplo 252, entonces $\Delta t = \frac{T}{252}$ y mediante el método de remuestreo cuadrático de [1] generar dZ , que involucra a $d\widetilde{W}$ por construcción. Sean μ_Z y Σ_Z , la media teórica y la matriz de covarianza de dZ respectivamente:

$$\mu_Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con las ecuaciones anteriores se generan las trayectorias del sistema de ecuaciones diferencial estocásticas planteado en (15). El precio de una opción de compra con subyacente promedio y precios de ejercicio K está dado por la función de pago:

$$C(S_T) = \max\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_\tau d\tau - K, 0\right), \quad (16)$$

y el precio de una opción de venta con subyacente promedio está dado por:

$$P(S_T) = \max \left(K - \frac{1}{T} \int_0^T S_\tau d\tau, 0 \right). \quad (17)$$

Si el subyacente es conducido por el sistema dado en (15), entonces el algoritmo para determinar los precios de las opciones de compra y de venta es:

(1) Generar dW_{S_t} y dW_{v_t} como:

$$\begin{aligned} dW_{S_t}^{(k)} &= Z_{S_t}^{(k)} \sqrt{\Delta t}, \\ dW_{v_t}^{(k)} &= \rho Z_{v_t}^{(k)} \sqrt{\Delta t} + \sqrt{1 - \rho^2} Z_{v_t}^{(k)} \sqrt{\Delta t}, \end{aligned}$$

(2) Discretizar el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas como:

$$\begin{aligned} v_{i+1}^{(k)} &= v_i^{(k)} + \kappa \left(\theta - v_i^{(k)} \right) \Delta t + \lambda \sqrt{v_i^{(k)}} dW_{v_t}^{(k)} \\ S_{i+1}^{(k)} &= S_i^{(k)} \left(1 + v(t_i) \Delta t + v_i^{(k)} dW_{S_t}^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

donde k hace referencia a la k -ésima simulación.

(3) Definir la media aritmética de las trayectorias generadas:

$$\bar{S}^{(k)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i^{(k)},$$

(4) Calcular el precio de una opción de compra con:

$$C = e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \max (\bar{S}^{(k)} - K, 0)$$

y para una opción de venta:

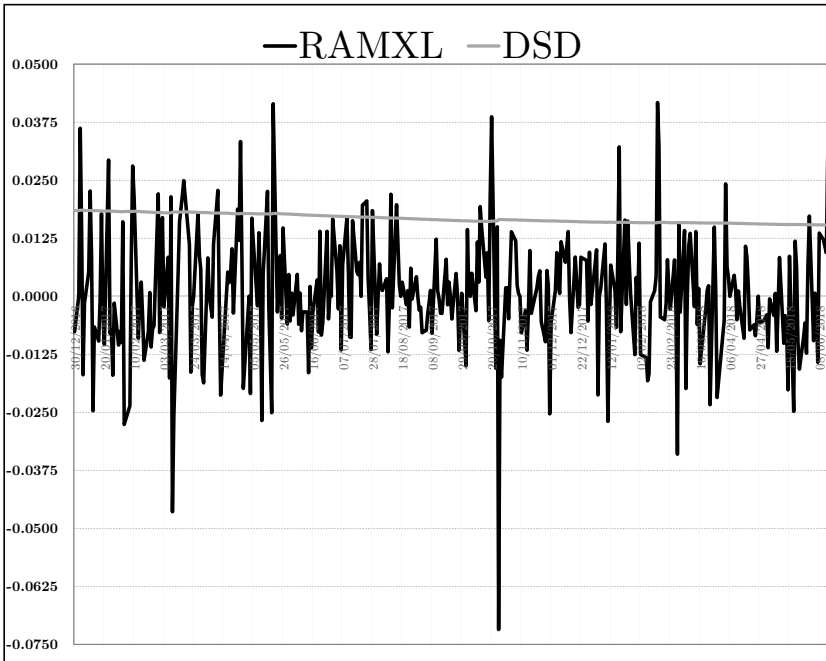
$$P = e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \max (K - \bar{S}^{(k)}, 0).$$

donde M denota el número de trayectorias simuladas y N el número de precios generados.

Análisis y discusión de resultados

En este apartado se calculan por medio de simulación Monte Carlo precios de opciones asiáticas con subyacente promedio, el subyacente es el precio de la acción de AMXL y se comparan con los precios de opciones publicadas en el boletín de MexDer del día 15/06/2018. La tasa de interés se obtiene de la página del proveedor de precios (Valmer) para los cuatro plazos de las opciones del boletín. Se supone que los parámetros de volatilidad estocástica se calculan mediante una adaptación del modelo de CIR a volatilidad realizada. El método para la estimación de los parámetros es el propuesto en [20], en términos simples este método consiste en la estimación de un conjunto de parámetros dentro de la esperanza condicional de un proceso estocástico: $E[X_t|X_{t-1}]$, posteriormente los valores estimados se usan como valores iniciales en un enfoque de máxima verosimilitud, lo que acelera la convergencia a un óptimo global.

Figura 1: Serie de rendimientos diarios de AMXL y comportamiento de la volatilidad diaria del periodo 30/12/2016 al 15/06/2018.



Fuente: elaboración propia.

La muestra de la volatilidad realizada para calibrar los modelos comprende del 30 de diciembre de 2016 al 15 de junio de 2018. En la figura 1 se muestran los rendimientos de la serie de AMXL y el comportamiento de la volatilidad diaria durante el periodo de estudio. Se observa una serie con variaciones significativas, tanto a la alza como a la baja. Las mayores variaciones hacia la baja son las siguientes: el 9/03/2017 la acción tuvo un rendimiento negativo de 4.6 %, el 9/03/2017 de -7.2 % y el 28/02/2018 de -3.4 %.

Los parámetros estimados con el modelo de CIR mediante máxima verosimilitud se observan en el cuadro siguiente:

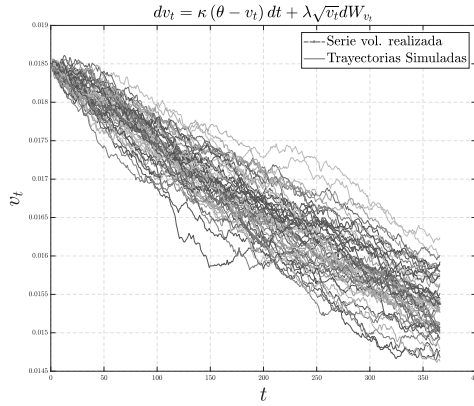
Cuadro 2: Resumen de estimación de parámetros de volatilidad realizada con el modelo CIR por el método de máxima verosimilitud.

Parámetros	CIR
κ	0.512834
θ	0.012573
λ	0.003363
No. Obs.	366
Likelihood Ratio	9.065502

Fuente: elaboración propia.

De los resultados del cuadro anterior, se puede verificar que se cumple la condición de Feller, es decir: las trayectorias del proceso que conduce la volatilidad de la volatilidad son siempre positivas. Los resultados de la simulación se muestran en la figura 2, en la cual se muestran la serie original de la volatilidad realizada y cincuenta trayectorias simuladas con los parámetros dados por el modelo CIR. Se observa la tendencia de la volatilidad hacia la baja, explicado por la misma dinámica del precio de la acción de AMXL.

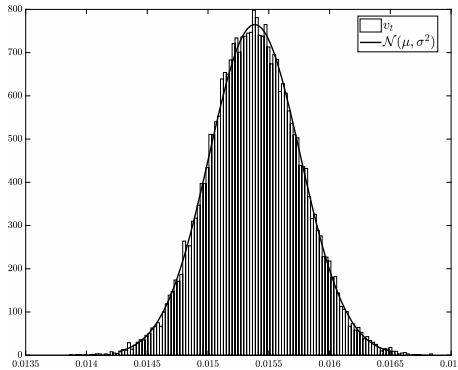
Figura 2: Serie original y 50 trayectorias simuladas con parámetros calibrados con el modelo CIR, con $\kappa = 0.512834, \theta = 0.012573$ y $\lambda = 0.003363$.



Fuente: elaboración propia.

En la figura 3 se muestra el histograma de los valores finales de v_t con un ajuste de la distribución normal con $\mu = 0.0153812$ y $\sigma = 0.000369222$, con 30000 trayectorias generadas con parámetros del cuadro 1.

Figura 3: Histograma de valores finales de σ_t .

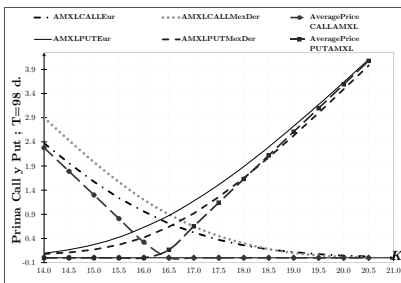


Fuente: elaboración propia.

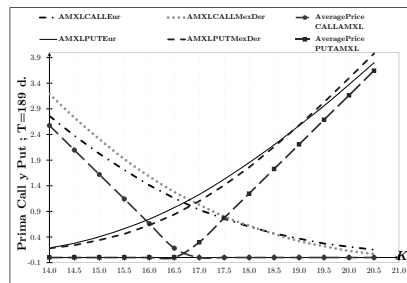
La figura 4 muestra los precios de opciones de compra y de venta europeas, y precios de opciones con subyacente promedio ambas con volatilidad estocástica con parámetros calibrados con volatilidad realizada conducida por

el modelo de CIR, en ambos casos los plazos son desde $T=98, 189, 273$ y 371 días y los precios de ejercicio varían desde $\$14$ hasta $\$20.5$ con incrementos de $\$0.50$, tales precios se comparan con los publicados por MexDer el día 15/06/2018. El precio de $AMXL=\$15.97$ y número de trayectorias que se simularon para determinar los precios de las opciones fue de 20,000 con $\rho = -0.5$.

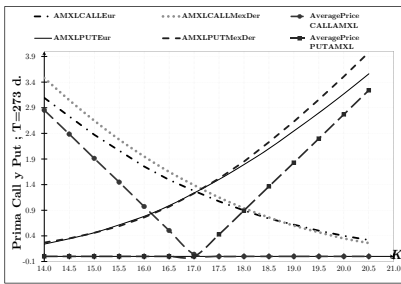
Figura 4: Comparación entre precios de opciones de MexDer, opciones europeas y asiáticas con parámetros calibrados con el modelo de CIR a volatilidad realizada.



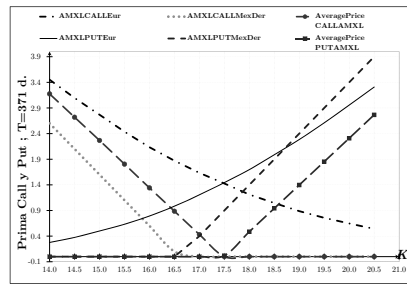
(a) Opciones al plazo de $T = 98$ días.



(b) Opciones al plazo de $T = 189$ días.



(c) Opciones al plazo de $T = 273$ días.



(d) Opciones al plazo de $T = 371$ días.

Fuente: elaboración propia.

Se tienen catorce precios de ejercicio de los cuales cuatro están dentro del dinero para opciones de compra y diez están dentro del dinero para opciones de venta. Se observa que para los cuatro plazos, los precios de opciones

de compra y de venta con subyacente promedio resultaron menores que los precios publicados por MexDer y los obtenidos por simulación para opciones europeas, tanto de compra como de venta. En el plazo de 371 días se observan primas muy cercanas a cero para opciones de compra y de compra fuera del dinero. Para opciones de venta al plazo de 98 días y primeros cuatro precios de ejercicio los precios de opciones asiáticas son cero comparados con los publicados por MexDer que son ligeramente mayores a cero, mientras que para opciones de venta muy dentro del dinero los precios son muy cercanos para ambos tipos de opciones. En resumen, el análisis de los cuadros 3 y 4 en el apéndice 5 y la figura 4 resulta que los precios de opciones asiáticas con subyacente promedio son en general menores para los primeros tres plazos considerados, pero para el último plazo este hecho no se cumple.

4 Conclusiones

Las opciones asiáticas son opciones cuyo pago depende de la trayectoria del subyacente durante la vigencia de la opción, en particular, puede ser el promedio aritmético o geométrico al vencimiento. En la función de pago S_t o el precio de ejercicio K pueden ser el promedio del subyacente que tome durante la vigencia del contrato. Dado que la serie histórica de precios del activo es independiente del precio actual, se plantea una nueva variable I_t que modele el promedio, bajo estas condiciones se hace el supuesto de tratar a S_t , I_t y t como variables independientes, de esta manera el precio de una opción asiática se modela con una función que depende de esas tres variables. Con estos supuestos se obtiene una EDP que caracteriza el precio de una opción asiática en la que el precio depende tanto del comportamiento del subyacente y su valor medio durante la vigencia del contrato.

Se desarrolla una metodología para calcular precios de opciones europeas y asiáticas de compra, y de venta por simulación Monte Carlo con subyacente el precio de AMXL. Las opciones asiáticas son con subyacente promedio y media aritmética. La simulación comprende el remuestreo cuadrático propuesto en [1] el cual disminuye el uso de recursos computacionales, específicamente al construir la matriz de varianza-covarianza. Los supuestos del modelo son: la volatilidad del subyacente es estocástica, los parámetros se obtienen partir de la volatilidad histórica del subyacente. El precio del subyacente S_t y la volatilidad v_t son conducidos por movimientos geométricos brownianos corre-

lacionados. Se comparan con los precios de opciones publicadas en el boletín del mercado Mexicano de derivados (MexDer) del día quince de junio de dos mil dieciocho. Se supone que los parámetros de volatilidad estocástica se calibran mediante una adaptación del modelo de CIR al método de volatilidad realizada. La tasa de interés se obtiene del proveedor de precios (Valmer) para los cuatro plazos de las opciones del boletín.

La evidencia empírica muestra que al comparar los precios de opciones europeas, tanto simulados como con los publicados por MexDer con sus análogas asiáticas, los precios de opciones asiáticas son muy cercanos en el caso de opciones de compra y de venta dentro del dinero, en el dinero y fuera del dinero para el corto plazo, pero conforme el plazo al vencimiento de la opción se incrementa, la diferencia entre las europeas y las asiáticas aumenta ya que la prima es menor, incluso se observan primas de cero para el largo plazo. Lo anterior se debe a que dado el supuesto de volatilidad estocástica y que además la volatilidad del promedio aritmético tenga variaciones menos significativas, entonces esa diferencia de precios sea acentúa más en el largo plazo. Esto muestra que las opciones asiáticas presentan ventaja respecto a las opciones europeas.

Agradecimientos

El presente trabajo ha sido apoyado por el proyecto de investigación: “*Valuación de opciones asiáticas bajo un enfoque de control óptimo estocástico*” clave SIP-20180211 de la Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional. De la misma manera, los autores agradecemos a los árbitros sus valiosas observaciones y recomendaciones.

Bibliografía

- [1] Barraquand, J. (1995). *Numerical valuation of high dimensional multivariate European securities*, Management Science, **41**(12) , 1882–1891. <https://doi.org/10.1287/mnsc.41.12.1882>
- [2] Ben A. y Kebaier, A. (2014). *Multilevel Monte Carlo for Asian options and limit theorems*, Monte Carlo methods and applications, **20**(3), 181-194. <https://doi.org/10.1515/mcma-2013-0025>

- [3] Black, F. y M. Scholes, (1973). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, The Journal of Political Economy, **81**(3), 637–654. <https://doi.org/10.1086/260062>
- [4] Brigo, D. y Mercurio, F. (2006). *Interest rate models: Theory and practice: With smile, inflation, and credit* (2nd ed.). New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-34604-3>
- [5] Cai, N., Song, Y. y Kou, S. (2015). *A general framework for pricing asian options under Markov processes*, Operations Research, **63**(3), 540-554.
- [6] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., y Ross, S. A. (1985). *A theory of the term structure of interest rates*, Econometrica, **53**(2), 385-407. doi:10.2307/1911242
- [7] Dassios, A., y Nagaradjasarma, J. (2006). *The square-root process and Asian options*, Quantitative Finance, **6**(4), 337-347. <https://doi.org/10.1080/14697680600724775>
- [8] Dinguç K. D., H. Sak y Hörmann, W. (2013). *Control variates and conditional Monte Carlo for basket and Asian options*, Insurance: Mathematics and Economics, **52**(3) (2013), 421-434. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.03.002>
- [9] Eydeland, A., y Wolyniec, K. (2003). *Energy and power risk management*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- [10] Fanelli, V., Maddalena, L. y Musti, S. (2016). *Asian options pricing in the day-ahead electricity market*, Sustainable Cities and Society, **27**, 196-202. <https://doi.org/10.1016/j.scs.2016.06.025>
- [11] Foufas, G. y Larson, M. G. (2008). *Valuing Asian options using the finite element method and duality techniques*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **222**(1), 144-158. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2007.10.031>
- [12] Heston, S. L. (1993). *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options*, Review of Financial Studies, **6**(2), 327–343.

- [13] Hull, J. y White, A. (1987). *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*, The Journal of Finance, **42**(2), 281-300.
- [14] Hull, J. C. (2014). *Options, Futures, and Other Derivatives*, 9th edition, Pearson.
- [15] Karatzas, I. y Shreve, S. E. (1998). *Methods of Mathematical Finance*, Springer Verlag, New York, corrected 4th printing 2016.
- [16] Marcozzi, M. (2003). *On the valuation of Asian options by variational methods*, SIAM Journal on Scientific Computing, **24**(4), 1124-1140. <https://doi.org/10.1137/S1064827501388169>
- [17] Mehrdoust, F. (2015). *A new hybrid Monte Carlo simulation for Asian options pricing*, Journal of Statistical Computation and Simulation, **85**(3), 507-516. <https://doi.org/10.1080/00949655.2013.827681>
- [18] Merton, R. C. *Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics, **4**(1) (1973), 141-183.
- [19] Ortiz-Ramírez, A., Martínez-Palacios, María Teresa V. (2016). *Valuación de opciones con subyacente promedio y europeas sobre AMXL con tasa de interés estocástica mediante simulación Monte Carlo: un análisis comparativo*, Revista Contaduría y Administración, **61**(4), 629-648. <https://doi.org/10.1016/j.cya.2016.06.002>
- [20] Overbeck, L. y Rydn, T. (1997). *Estimation in the Cox-Ingersoll-Ross model*, Econometric Theory, **13**(3), 430-461.
- [21] Boyle, P.P., (1977), *Options: A Monte Carlo approach*, Journal of Financial Economics, **4**(3) 323-338. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(77\)90005-8](https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90005-8)
- [22] Rogers, L. y Shi, Z. (1995). *The value of an Asian option*, Journal of Applied Probability, **32**(4), 1077-1088. <https://doi.org/10.2307/3215221>
- [23] Shirakaya, K. y Takahashi, A. (2017). *A general control variate method for multi-dimensional SDEs: An application to multi-asset options under local stochastic volatility with jumps models in finance*, European Journal of Operational Research, **258**(1), 358-371. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.08.060>

- [24] Yor, M. (1992a). *On some exponential functionals of Brownian motion*, *Advances in Applied Probability*, **24**(3), 509-531. <https://doi.org/10.2307/1427477>
- [25] Yor, M. (1992b). *Sur certaines fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien réel*, *Journal of Applied Probability*, **29**(1), 202-208. <https://doi.org/10.2307/3214805>
- [26] Vecer, J. (2001). *A new PDE approach for pricing arithmetic average Asian options*, *Journal of Computational Finance*, **4**(4), 105-113. doi:10.21314/JCF.2001.064
- [27] Vecer, J. (2002). *Unified Asian pricing*. *Risk*. **15**(6), 113-116.
- [28] Venegas-Martínez, F., *Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Segunda edición, Cengage, México (2008).
- [29] Wilmott, P., Howison, S., y Dewynne, J. (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511812545>

Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional
Plan de Agua Prieta no. 66, Col. Plutarco Elías Calles, Delegación Miguel Hidalgo
Ciudad de México, C.P. 11340

araceli_matiasg@hotmail.com
amortiz@ipn.mx

5 Precios de opciones europeas, asiáticas y de MexDer del día 15/06/2018.

Cuadro 3: Precios de opciones europeas de compra y de venta sobre AMXL, obtenidos con parámetros calibrados para la volatilidad con adaptación del modelo de CIR para los plazos $T = 98$ y $T = 189$.

Días por vencer	K	CallEur	PutEur	Average Price Call	Average Price Put	Call MexDer	Put MexDer
T=98	14.00	2.3727	0.0946	2.2781	0.0000	2.90	0.08
	14.50	1.9577	0.1676	1.7900	0.0000	2.43	0.11
	15.00	1.5745	0.2745	1.3000	0.0000	1.98	0.17
	15.50	1.2354	0.4245	0.8109	0.0000	1.57	0.27
	16.00	0.9580	0.6336	0.3244	0.0000	1.20	0.42
	16.50	0.7089	0.8753	0.0000	0.1665	0.90	0.64
	17.00	0.5239	1.1775	0.0000	0.6536	0.65	0.92
	17.50	0.3715	1.5146	0.0000	1.1431	0.45	1.26
	18.00	0.2580	1.8896	0.0000	1.6316	0.30	1.65
	18.50	0.1722	2.2939	0.0000	2.1217	0.18	2.08
	19.00	0.1187	2.7277	0.0000	2.6090	0.10	2.53
	19.50	0.0757	3.1728	0.0000	3.0972	0.05	3.00
	20.00	0.0450	3.6347	0.0000	3.5896	0.02	3.49
20.50	0.0286	4.1049	0.0000	4.0763	0.01	3.98	
T=189	14.00	2.7617	0.1860	2.5757	0.0000	3.19	0.18
	14.50	2.3762	0.2795	2.0967	0.0000	2.73	0.24
	15.00	2.0226	0.4036	1.6191	0.0000	2.31	0.34
	15.50	1.7066	0.5641	1.1425	0.0000	1.92	0.46
	16.00	1.4106	0.7492	0.6614	0.0000	1.58	0.63
	16.50	1.1576	0.9744	0.1831	0.0000	1.28	0.84
	17.00	0.9311	1.2293	0.0000	0.2982	1.03	1.10
	17.50	0.7560	1.5278	0.0000	0.7718	0.80	1.41
	18.00	0.6032	1.8519	0.0000	1.2486	0.62	1.76
	18.50	0.4700	2.1983	0.0000	1.7283	0.46	2.16
	19.00	0.3681	2.5738	0.0000	2.2057	0.32	2.58
	19.50	0.2722	2.9596	0.0000	2.6873	0.22	3.03
	20.00	0.2103	3.3746	0.0000	3.1644	0.13	3.50
20.50	0.1520	3.7984	0.0000	3.6464	0.07	3.98	

Fuente: elaboración propia.

Cuadro 4: Precios de opciones europeas de compra y de venta sobre AMXL, obtenidos con parámetros calibrados para la volatilidad con adaptación del modelo de CIR para los plazos $T = 273$ y $T = 371$.

Días por vencer	K	CallEur	PutEur	Average Price Call	Average Price Put	Call MexDer	Put MexDer
T=273	14.00	3.0930	0.2399	2.8531	0.0000	3.48	0.27
	14.50	2.7307	0.3444	2.3863	0.0000	3.05	0.35
	15.00	2.3746	0.4614	1.9132	0.0000	2.65	0.46
	15.50	2.0638	0.6152	1.4486	0.0000	2.28	0.59
	16.00	1.7544	0.7811	0.9733	0.0000	1.95	0.76
	16.50	1.4935	0.9884	0.5051	0.0000	1.65	0.97
	17.00	1.2787	1.2368	0.0419	0.0000	1.39	1.23
	17.50	1.0736	1.5009	0.0000	0.4273	1.15	1.52
	18.00	0.8962	1.7913	0.0000	0.8951	0.94	1.85
	18.50	0.7365	2.1014	0.0000	1.3649	0.76	2.23
	19.00	0.6186	2.4476	0.0000	1.8291	0.60	2.63
	19.50	0.5008	2.7998	0.0000	2.2990	0.47	3.06
	20.00	0.4012	3.1711	0.0000	2.7699	0.35	3.51
20.50	0.3200	3.5608	0.0000	3.2408	0.26	3.98	
T=371	14.00	3.4517	0.2765	3.1751	0.0000	2.60	0.00
	14.50	3.0951	0.3750	2.7202	0.0000	2.10	0.00
	15.00	2.7673	0.5003	2.2670	0.0000	1.60	0.00
	15.50	2.4371	0.6319	1.8051	0.0000	1.10	0.00
	16.00	2.1343	0.7926	1.3417	0.0000	0.60	0.00
	16.50	1.8707	0.9841	0.8866	0.0000	0.10	0.00
	17.00	1.6345	1.2032	0.4313	0.0000	0.00	0.40
	17.50	1.4264	1.4460	0.0000	0.0196	0.00	0.90
	18.00	1.2112	1.6973	0.0000	0.4861	0.00	1.40
	18.50	1.0462	1.9882	0.0000	0.9421	0.00	1.90
	19.00	0.8874	2.2846	0.0000	1.3972	0.00	2.40
	19.50	0.7573	2.6104	0.0000	1.8530	0.00	2.90
	20.00	0.6472	2.9565	0.0000	2.3092	0.00	3.40
20.50	0.5418	3.3077	0.0000	2.7660	0.00	3.90	

Fuente: elaboración propia.

Topología

Capítulo 5

Dendritas, su relación con el conjunto de Julia de algunas funciones holomorfas y ejemplos

Mauricio Esteban Chacón Tirado, Patricia Domínguez Soto, María de Jesús López Toriz
FCFM, BUAP

Resumen

En este trabajo se definen dendritas y el conjunto de Julia para las clases de funciones racionales y enteras trascendentes. Con las definiciones anteriores, se estudian ejemplos en el área de sistemas dinámicos holomorfos, donde los conjuntos de Julia son continuos, en particular dendritas. Para funciones enteras trascendentes se enuncia una conjetura para una familia en particular y algunas preguntas abiertas, relacionadas con dendritas y los conjuntos de Julia de la familia.

1 Introducción

La teoría de los continuos trata sobre el estudio de espacios métricos compactos y conexos. La metrizabilidad, la conexidad y la compacidad son invariantes topológicos así, la noción de continuo es un invariante topológico. En este capítulo, estamos interesados en los objetos llamados dendritas que son continuos localmente conexos que no contienen curvas cerradas simples. Recordemos que la palabra dendrita proviene del antiguo vocablo griego dendron que significa árbol. En la teoría de continuos existen ejemplos de dendritas como F_w el punto peludo, peine nulo, etc.

Por otra parte el estudio de los sistemas dinámicos holomorfos generados por la iteración de funciones holomorfas tiene su inicio a finales del siglo XIX, motivado por el análisis de la convergencia para el método de Newton. Pero fueron los trabajos de Pierre Fatou [3], [4] y de Gaston Julia [6], en los alrede-

dores de los años 20 del siglo pasado, los que impulsaron el estudio intenso de la teoría global. Estos dos matemáticos estudiaron principalmente la iteración de funciones racionales de la esfera de Riemann. Pierre Fatou fue el primero en estudiar, en 1926, las funciones enteras trascendentes (funciones con una singularidad esencial en infinito). La innovación más importante en los trabajos de Fatou y Julia fue, sin duda, el uso de la teoría de familias normales para dividir la esfera en dos conjuntos de comportamiento dinámico totalmente diferente; estos conjuntos son conocidos como los conjuntos de Fatou y de Julia.

Uno de los problemas en dinámica compleja es caracterizar la topología de los conjuntos de Julia o al menos determinar algunas propiedades topológicas y si es posible investigar la dinámica caótica del conjunto de Julia cuando iteramos la función. Depende de la función dada, el conjunto de Julia puede ser un espacio sencillo (por ejemplo el círculo) o complicado como un continuo, una dendrita, un conjunto de Cantor, etc. En este capítulo daremos dos ejemplos de funciones racionales que tienen como conjuntos de Julia dendritas en el sentido estricto de la topología de continuos. Para funciones enteras trascendentes se gráfica la función $2i \operatorname{sen} z$ y se observa que es una dendrita. Sin embargo, aunque el conjunto de Julia asociado a la función $2i \operatorname{sen} z$ cumple las condiciones de ser un continuo no se sabe si en realidad es una dendrita, por lo tanto, es un conjetura que se enuncia en el capítulo.

El capítulo consta de dos secciones: la Sección 2 trata sobre la dinámica de funciones racionales y enteras trascendentes y la Sección 3 contiene dos ejemplos de funciones polinomiales donde sus conjuntos de Julia son dendritas. También, se estudia una familia de funciones enteras trascendentes que tienen para ciertos parámetros conjuntos de Julia que parecen ser dendritas y por lo tanto, enunciamos una conjetura y algunas preguntas abiertas.

2 Dinámica de funciones racionales y enteras trascendentes

En esta sección enunciaremos algunas definiciones básicas relacionadas con la dinámica holomorfa. Denotamos el plano complejo por \mathbb{C} y la esfera de Riemann por $\widehat{\mathbb{C}}$. Hacemos la observación que la topología en \mathbb{C} y $\widehat{\mathbb{C}}$, respectivamente, que define términos como convergencia es la inducida por la métrica

euclidiana y esférica, respectivamente.

En adelante trabajaremos con función de variable compleja. Denotamos $\Delta(z_0, r)$ como el disco con centro $z_0 \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$.

(i) Una función f es *analítica* en un conjunto abierto $V \subset \mathbb{C}$ si para cualquier $z_0 \in V$ existe $r > 0$ con $\Delta(z_0, r) \subset V$ y una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ convergente en $\Delta(z_0, r)$, tal que para todo $z \in \Delta(z_0, r)$ se tiene:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

(ii) Sea $V \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y f una función $f : V \rightarrow \mathbb{C}$, decimos que f es *diferenciable* en un punto $z_0 \in V$ si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existe; el valor del límite se denota por $f'(z_0)$ y se llama la *derivada* de f en z_0 . Si f es una función compleja diferenciable en cada punto de V , decimos que f es *holomorfa*.

Con las definiciones anteriores podemos enunciar el siguiente teorema, véase [7] para una demostración.

Teorema 2.1. *Sea $V \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y sea f una función de variable compleja $f : V \rightarrow \mathbb{C}$. La función f es analítica si, y sólo si es holomorfa.*

Cuando una función de variable compleja deja de ser analítica, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.2. Se dice que una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tiene una singularidad en $z_0 \in \mathbb{C}$, si f no es analítica en z_0 y en todo entorno de z_0 existen puntos donde la función f es analítica.

Existen singularidades aisladas y no aisladas, en particular estamos interesados en las singularidades aisladas por ello a continuación enunciamos su definición.

Singularidad aislada. El punto $z = z_0$ es una singularidad aislada o un punto singular aislado de f , si podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ no encierre puntos singulares distintos de z_0 . Si tal δ no puede ser encontrado, decimos que z_0 es una singularidad no aislada.

Las singularidades aisladas pueden ser de las siguiente forma:

- (i) *Singularidad removible.* Si la función f tiene una singularidad aislada en z_0 , entonces el punto z_0 es una singularidad removible si, y sólo si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$$

- (ii) *Polo.* Si podemos encontrar un entero positivo n tal que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = c,$$

con $c \neq 0$, entonces $z = z_0$ es llamado un polo de orden n . Si $n = 1$, z_0 es un polo simple.

Si $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$, donde $f(z_0) \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $z = z_0$ es llamado un cero de orden n de $g(z)$. Si $n = 1$, z_0 es llamado un cero simple. En tal caso z_0 es un polo de la función $\frac{1}{g(z)}$.

- (iii) *Singularidad esencial.* Una singularidad que no es polo ni singularidad removible es llamada una singularidad esencial. De forma equivalente $z = z_0$ es una singularidad esencial si no podemos encontrar algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = c$.

Definición 2.3. Una función meromorfa es analítica excepto en polos.

El objeto de estudio en este capítulo son las funciones racionales y enteras trascendentes que se definen en el siguiente apartado.

Funciones racionales y enteras trascendentes

Las funciones racionales son funciones holomorfas $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ que se expresan como el cociente de dos polinomios complejos $p(z)$ y $q(z)$, es decir

$f(z) = p(z)/q(z)$ sin factores comunes. El grado de la función racional f se define como $grad(f) = \max\{grad(p), grad(q)\}$. Mientras que las funciones enteras trascendentes son analíticas en todo el plano complejo, excepto en el punto al infinito (que es una singularidad esencial aislada). A estas clases de funciones las denotamos como se enuncia a continuación:

$$\mathcal{R} = \{f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} : f \text{ es racional de grado mayor igual que } 2\}.$$

$$\mathcal{E} = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es entera trascendente}\}.$$

Ejemplos de funciones en las clases antes mencionadas son:

En clase \mathcal{R} : $g(z) = z^2/(z^3 + z + 1)$.

En clase \mathcal{E} : $f(z) = e^z$ y $h(z) = \text{sen}(z)$.

Iteración de funciones en las clases \mathcal{R} y \mathcal{E}

En adelante asumiremos siempre que $X = \mathbb{C}$ o $\widehat{\mathbb{C}}$ y que la función f es racional o entera trascendente, es decir, $f : X \rightarrow X$, donde f no es constante.

Definición 2.4. Se define la n -ésima iterada de la función como la composición $f^n = f \circ f^{n-1}$, $n \geq 2$, donde, $f^1 = f$.

Se puede demostrar como ejercicio que funciones en la clases \mathcal{R} y \mathcal{E} cumplen:

Si $f \in \mathcal{R}$, entonces $f^n \in \mathcal{R}$, para $n \in \mathbb{N}$.

Si $f \in \mathcal{E}$, entonces $f^n \in \mathcal{E}$, para $n \in \mathbb{N}$.

Sea z_0 un punto en X , se definen los siguientes conjuntos:

La *órbita hacia adelante* de z_0 se define como:

$$O^+(z_0) = \{z : f^n(z_0) = z, n \in \mathbb{N}\}.$$

La *órbita hacia atrás* de z_0 se define como:

$$O^-(z_0) = \{z : f^n(z) = z_0, n \in \mathbb{N}\}.$$

La *gran órbita* de z_0 se define como:

$$O(z_0) = O^+(z_0) \cup O^-(z_0).$$

Definición 2.5. Decimos que $f : X \rightarrow X$ es topológicamente conjugado a $g : Y \rightarrow Y$ si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $h \circ f \circ h^{-1} = g$.

La conjugación topológica es una relación de equivalencia. Si dos aplicaciones f y g son topológicamente conjugadas, también lo son f^n y g^n . Las órbitas de una de las aplicaciones pueden ser estudiadas a partir de las órbitas de la otra, lo que muchas veces facilita el análisis del comportamiento dinámico de la aplicación original.

Clasificación de puntos fijos

En este apartado definiremos punto fijo de una función $f \in \mathcal{R}$ (o en \mathcal{E}) y su clasificación en la dinámica holomorfa.

Definición 2.6. El punto $z_0 \in \mathbb{C}$ (o en $\widehat{\mathbb{C}}$) es un *punto fijo* de la función f si cumple $f(z_0) = z_0$.

Definición 2.7. El punto $z_0 \in \mathbb{C}$ (o en $\widehat{\mathbb{C}}$) es un *punto fijo periódico* de período n de la función f si n es el menor natural que cumple $f^n(z_0) = z_0$.

Definición 2.8. Sea z_0 un punto periódico de período n . A la órbita $O^+(z_0)$ se le llama *ciclo*.

Definición 2.9. Si z_0 es un punto fijo periódico de período n de la función f , se define el *multiplicador* como $\lambda = (f^n)'(z_0)$. Si $n = 1$, el multiplicador de z_0 es $\lambda = (f)'(z_0)$.

De la Definición 2.9 podemos hacer dos observaciones sobre el multiplicador.

Observación 1. Por la regla de la cadena

$$(f^n)'(z_0) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(z_0)).$$

Observación 2. Si $z = \infty$, el multiplicador λ es:

$$z \rightarrow \frac{1}{f^n\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Si z_0 es un punto periódico de la función f , su clasificación es la siguiente:

- z_0 es *super atractor* si $\lambda = 0$.
- z_0 es *atractor* si $0 < |\lambda| < 1$.
- z_0 es *repulsor* si $|\lambda| > 1$.
- z_0 es *indiferente* si $|\lambda| = 1$.

Los puntos fijos indiferentes se dividen en:

- (a) *racional indiferente* si $\lambda^m = 1$, para algún $m \in \mathbb{N}$.
- (b) *irracional indiferente* si $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Conjuntos de Fatou y Julia y sus propiedades

Para definir los conjuntos importantes en la dinámica holomorfa es importante enunciar la siguiente definición de familia normal y el Teorema de Montel, véase [1].

Recordemos que una función meromorfa es analítica excepto en polos con esto en mente podemos enunciar la siguiente definición.

Definición 2.10. Sea D un dominio de $\widehat{\mathbb{C}}$ y \mathcal{F} una familia de funciones meromorfas en D . Decimos que \mathcal{F} es una *familia normal* en D si para cualquier sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathcal{F} existe una subsucesión $\{f_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, tal que $\{f_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge localmente uniformemente en D a una función meromorfa o a ∞ .

Teorema 2.11. (Montel) Sea \mathcal{F} una familia de funciones meromorfas definidas en un dominio $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$, $a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$ distintos a pares. Si $f(z) \neq a, b, c$ para toda $z \in G$ y para toda $f \in \mathcal{F}$, entonces \mathcal{F} es una familia normal en G .

Para funciones en las clases \mathcal{R} y \mathcal{E} se definen los conjuntos de Fatou y Julia como sigue.

Definición 2.12. El conjunto de Fatou para $f \in \mathcal{R}$ (o en \mathcal{E}) se denota como $F(f)$ y se define como el conjunto de todos los $z \in \mathbb{C}$, tal que la sucesión de iteradas $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es normal en alguna vecindad de z . El complemento del conjunto de Fatou se define como el conjunto de Julia y se denota como $J(f)$.

En el siguiente teorema se enuncian algunas propiedades básicas importantes que tienen los conjuntos de Fatou y Julia para las funciones racionales y enteras transcendentales.

Teorema 2.13. Si $f \in \mathcal{R}$ (o en \mathcal{E}) se tiene las siguientes propiedades:

- (i) $F(f)$ es abierto y $J(f)$ es cerrado.
- (ii) $F(f)$ y $J(f)$ son completamente invariantes; es decir, $z \in F(f)$ si, y sólo si $f(z) \in F(f)$ y $z \in J(f)$ si y sólo si $f(z) \in J(f)$.
- (iii) $F(f^n) = F(f)$ y $J(f^n) = J(f)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.
- (iv) $J(f)$ es perfecto.

El Teorema 2.13 fue demostrado por Julia y Fatou para funciones en \mathcal{R} en [3] [6] y por Fatou en [4] para funciones en \mathcal{E} en 1926.

3 Conjuntos de Julia que son dendritas para funciones en \mathcal{R} y \mathcal{E}

Recordemos que un continuo es un espacio métrico, compacto y conexo con más de un punto. El ejemplo más simple es el intervalo $[0, 1]$. Una *dendrita* es un continuo localmente conexo que no contiene circunferencias, donde cualquier conjunto homeomorfo a S^1 es una circunferencia.

Los continuos que construiremos en esta sección, se podrán formar uniendo una cantidad numerable de arcos, teniendo cuidado de no formar ciclos y de obtener continuos con la propiedad de conexidad local. Los continuos con estas propiedades son dendritas que se pueden encajar en el plano complejo \mathbb{C} .

La familia $f_c(z) = z^2 + c$

En los sistemas dinámicos holomorfos a las funciones polinomio de una variable compleja con conjunto de Julia conexo y sólo con puntos periódicos repulsores se les llama dendritas. También, decimos que el conjunto de Julia es una dendrita cuando cada punto finito crítico del polinomio es pre-periódico pero no periódico.

Si tomemos la familia de polinomios $f_c(z) = z^2 + c$, que es una función racional con denominador la constante uno, se pueden demostrar los siguientes resultados, véase [5] para la demostración.

Teorema 3.1. *El conjunto de Julia de una función en $f_c(z) = z^2 + c$ es compacto para toda $c \in \mathbb{C}$.*

Por la propiedad (i) del Teorema 2.13 sabemos que $J(f_c)$ es cerrado y por Teorema 3.1 el conjunto de Julia $J(f_c)$ es acotado.

Teorema 3.2. *$z \in J(f_c)$ si, sólo si $-z \in J(f_c)$.*

En otras palabras, el Teorema 3.2 enuncia que el conjunto de Julia $J(f_c)$ es simétrico con respecto al origen.

Recordar que un subconjunto $Y \subset X$ es invariante por f si $f(Y) \subset Y$. Es evidente que tanto la unión como la intersección de conjuntos invariantes es invariante. Se puede demostrar, como ejercicio para el lector, que los conjunto de Julia $J(f_c)$ son invariantes bajo f y f^{-1} .

Ahora, analicemos a la familia $f_c(z) = z^2 + c$.

(i) $f_c(z)$ tiene puntos fijos en donde $z^2 + c = z$, es decir, hay dos puntos fijos z_1, z_2 .

(ii) $f_c(z)$ tiene puntos críticos donde la derivada de $f_c(z)$ es cero, es decir, cuando $2z = 0$ y tiene valor crítico en $f_c(0) = 0^2 + c = c$.

(iii) Los puntos fijos z_1 y z_2 serán repulsores cuando $|f'(z_1)| > 1$ y $|f'(z_2)| > 1$, véase definiciones en la Sección 2, es decir, cuando $|2z_1| > 1$ y $|2z_2| > 1$.

(iv) Por inciso (iii) es posible determinar cuando los dos puntos fijos son repulsores para un parámetro c dado.

(v) Decimos que el conjunto de Julia es una dendrita cuando cada punto finito crítico del polinomio es pre-periódico pero no periódico, véase [2] para su demostración. Un punto es pre-periódico cuando alguno de sus iterados es un punto periódico.

Los siguientes ejemplos muestran conjuntos de Julia que son dendritas para diferentes parámetros de la familia $f_c(z) = z^2 + c$.

Ejemplo 3.3. Sea $f_c(z) = z^2 + c$ y $c = i$. Haciendo cálculos básicos obtenemos que el punto crítico $z = 0$ es preperiódico pero no periódico.

$$\begin{aligned} f(0) &= -i, \\ f^2(0) &= -1 - i, \\ f^3(0) &= i, \\ f^4(0) &= -1 - i, \\ f^5(0) &= i. \end{aligned}$$

Así, el cero es un punto crítico preperiódico, pero no periódico y por (v) el conjunto de Julia es una dendrita, véase Figura 1.

Ejemplo 3.4. Sea $f_c(z) = z^2 + c$ y $c = -1.4$.

Por (i) y haciendo cálculos básicos obtenemos que los dos puntos fijo son:

$$z_i = \frac{1 \pm (5.6)^{1/2}}{2}, \quad i = 1, 2.$$

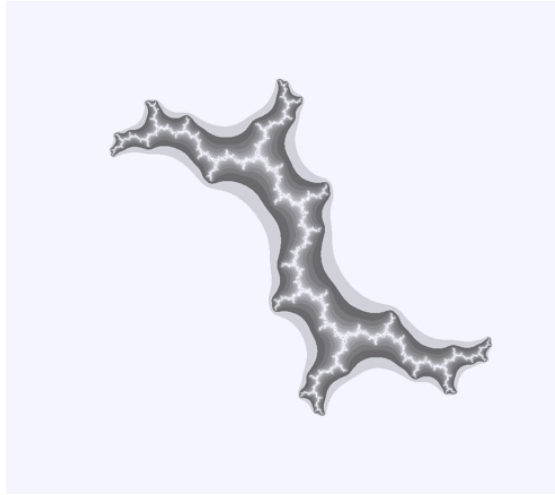


Figura 1: El conjunto de Julia de $f_i(z) = z^2 + i$

Por (iv) tenemos que $|2((1 + (5.6)^{1/2})/2)| > 1$ y $|2((1 - (5.6)^{1/2})/2)| > 1$.

Así, los dos puntos fijos son repulsivos, por lo tanto el conjunto de Julia es una dendrita, véase Figura 2.

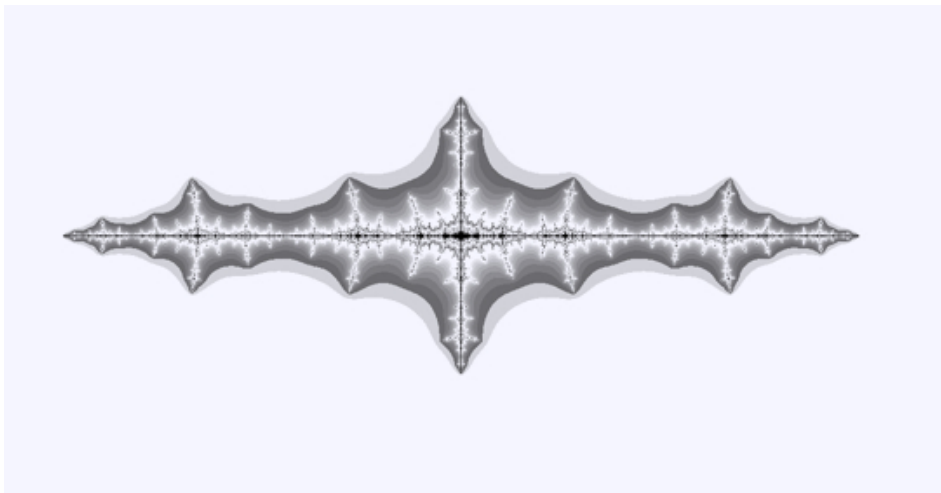


Figura 2: El conjunto de Julia de $f_i(z) = z^2 - 1.4$

Como en los dos ejemplos anteriores, es posible dar diferentes valores del parámetro c para los cuales el conjunto de Julia es una dendrita.

La familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z, \lambda \neq 0$

Para dar ejemplos de conjuntos de Julia de funciones enteras trascendentes que son dendritas, debemos tener presente que el infinito es una singularidad esencial, por lo tanto no se pueden utilizar los resultados de funciones polinomiales. También, hay que observar que los polinomios siempre tienen puntos fijos y críticos, mientras que las funciones en clase \mathcal{E} pueden no tener puntos fijos, por ejemplo, la función $e^z + z$.

Tomemos la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Lo que podemos decir de la familia $f_\lambda(z)$ es lo siguiente:

(i) Los puntos fijos de $f_\lambda(z)$ se obtienen solucionando la ecuación $\lambda \operatorname{sen} z - z = 0$, que tiene soluciones dependiendo del parámetro λ y que no son fáciles de calcular porque se tienen que usar métodos de aproximación. También, podemos ver geoméricamente las intersecciones de las funciones $\lambda \operatorname{sen} z$ y z para encontrar puntos fijos de la función para un parámetro λ dado.

(ii) Los puntos críticos de $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ son los puntos que cumplen $f'_\lambda(z) = 0$, es decir, $\lambda \cos z = 0$ si, y sólo si $z = (2k + 1)\pi/2$, con $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, los puntos críticos de f_λ son de la forma $z_k = (2k + 1)\pi/2$. A diferencia de los polinomios la familia f_λ tiene un conjunto contable infinito de puntos críticos. Sin embargo, al evaluar los puntos críticos en f_λ obtenemos sólo dos valores críticos $\{\lambda, -\lambda\}$.

(iii) La familia $f_\lambda(z)$ para λ un número real es simétrica con respecto al eje imaginario.

El siguiente ejemplo es una conjetura que es motivada por el gráfico obtenido con Fractal eXtreme de la función $f_\lambda(z) = 2i \operatorname{sen} z$.

Conjetura 3.5. *Si $f(z) = 2i \operatorname{sen} z$ el conjunto de Julia es una dendrita, véase Figura 3.*

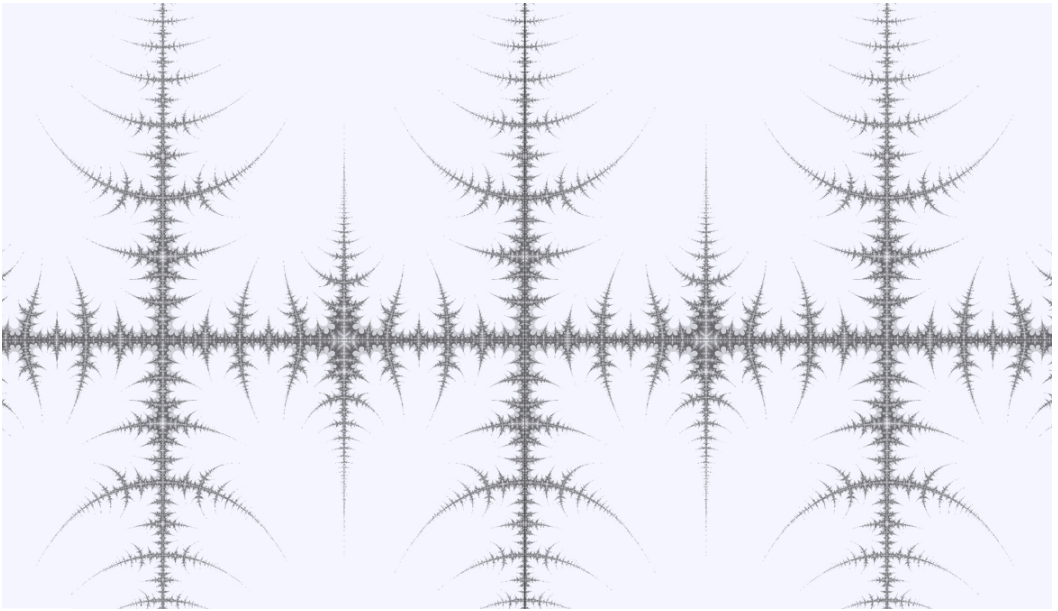


Figura 3: El conjunto de Julia de $f_{2i}(z) = 2i \operatorname{sen} z$

Concluimos este trabajo citando algunas preguntas abiertas.

Pregunta 1. Sea $\lambda \operatorname{sen} z$ con $\lambda > 0$. ¿Qué condiciones debe cumplir el parámetro λ para que el conjunto de Julia sea una dendrita?

Pregunta 2. ¿Es verdad que para un conjunto de valores λ la familia $\lambda \operatorname{sen} z$ con conjunto de Julia conexo y sólo con puntos periódicos repulsores son dendritas (casi análogo a polinomios)?

Pregunta 3. Si es verdad la Conjetura 3.5, ¿podemos obtener un conjunto de valores λ cercanos a $2i$, donde los conjuntos de Julia asociados a cada λ sean dendritas?

Pregunta 4. Si f es una función en clase \mathcal{E} tal que cada punto finito crítico es preperiódico, pero no periódico, ¿será su conjunto de Julia una dendrita? Para polinomios está demostrado en [2].

Agradecimientos

Los autores agradecen al revisor por sus comentarios y observaciones al trabajo.

Bibliografía

- [1] Ahlfors L.V., *Complex analysis*, McGraw-Hill, 1979.
- [2] Beardon A.F., *Iteration of rational functions*, volume 132 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991. Complex Analytic Dynamical Systems.
- [3] Fatou P., Sur les équations fonctionelles, *Bull. Soc. Math. France.* 47 (1919), 161-271 and 48 (1920), 33-94, 208-314.
- [4] Fatou P., Sur l'itération des fonctions transcendentes entières, *Acta Math.* 47 (1926), 337-370.
- [5] Fraser J., An introduction to Julia sets. April 16, 2009. <http://www.gvp.cz>.
- [6] Julia G., Sur l'itération des fonctions rationnelles, *J. Math.Pures Appl.* 4 (1918), 47-245.
- [7] Noguchi J., *Introduction to complex analysis*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 168, American Mathematical Society , 1993.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

maeschacon@fcfm.buap.mx

pdsoto@fcfm.buap.mx,

mjlopez@fcfm.buap.mx

Capítulo 6

El arco y la curva cerrada simple, únicos continuos localmente conexos sin triodos simples

David Herrera Carrasco, Antonio de Jesús Libreros
López, Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP

Resumen

En este capítulo probaremos un resultado bien conocido en la teoría de continuos, y bastante útil, que es el siguiente: si X es un continuo localmente conexo sin triodos simples, entonces X es un arco o una curva cerrada simple. Además, se verá la importancia de que el continuo debe ser localmente conexo para que se cumpla este resultado.

1 Introducción

Si le pidieran pensar en un continuo lo más seguro es que pensarían en uno que sea localmente conexo, véase la Definición 5.1, no sería hasta saber de la existencia de continuos como el continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$, véase el Ejemplo 7.1, para que uno pudiera pensar en espacios más complejos. Ahora, es claro que el intervalo cerrado $[0, 1]$ y la circunferencia unitaria S^1 en \mathbb{R}^2 no contienen al espacio con la forma de T , surgiendo la pregunta: ¿habrá otros espacios que cumplan con esta condición? A lo cual podría responder uno sin pensar tanto que no hay otro espacio con esta propiedad, cometiendo el mismo error al no saber de la existencia de espacios como el continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$. Sin embargo, si esto lo reducimos a espacios que sean continuos localmente conexos el resultado es cierto, no obstante la prueba de este hecho no es sencilla.

En este capítulo dedicaremos a exponer la teoría y resultados necesarios para poder pobrar le resultado que lleva por título este trabajo, empezando con la definición de *arco*, *curva cerrada simple* y *triodo simple*, luego intro-

duciendo lo que es un *punto de no corte* junto con la existencia de estos en continuos con más de un punto, y finalmente, antes de llegar a nuestro objetivo, revisaremos varios resultados sobre continuos localmente conexos. Por último, daremos algunos ejemplos de continuos con propiedades particulares que nos ayudaran a entender la importancia de que el continuo sea localmente conexo y que esta propiedad no puede ser sustituida por otra que cumplan el arco y la curva cerrada simple.

2 Preliminares

Dado un espacio topológico X y Y subconjunto de X , usaremos $\text{int}_X(Y)$, $\text{cl}_X(Y)$ y $\text{Fr}_X(Y)$ para denotar al interior, la cerradura y la frontera de Y en X , respectivamente. Recordemos que los abiertos de Y son los abiertos de X intersectados con Y . Diremos que un espacio topológico es no degenerado si tiene más de un punto. Si \mathcal{A} es una colección de subconjuntos, la unión de sus elementos y la intersección de estos lo denotaremos por $\bigcup \mathcal{A}$ y $\bigcap \mathcal{A}$, respectivamente. Si X es un espacio y \mathcal{A} es una colección de subconjuntos de X , diremos que \mathcal{A} es una cubierta para X si $X \subset \bigcup \mathcal{A}$.

Definición 2.1. Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Un subconjunto de un continuo que también es un continuo le llamaremos **subcontinuo**.

La definición de conexo y compacto, al igual que muchos resultados sencillos pero importantes sobre estos temas, pueden ser encontradas en muchos libro de topología, por mencionar algunos [1] y [9], para quien guste ahondar más sobre el tema. En la mayoría de los resultados estaremos trabajando con continuos no degenerados, que al ser estos conexos no solo tendrán dos puntos sino tantos como los números reales. Para terminar con estos preliminares, veamos una equivalencia de conexidad que nos será útil más adelante.

Definición 2.2. Sean X un espacio topológico y A, B subconjuntos de X . Decimos que A y B están **separados** si $\text{cl}_X(A) \cap B = \emptyset$ y $A \cap \text{cl}_X(B) = \emptyset$.

En ocasiones contruir conjuntos abiertos con condiciones específicas es muy laborioso, por esto es importante conocer otros métodos como el siguiente teorema que nos proporciona una alternativa de como saber si un espacio es desconexo sin la necesidad de usar abiertos.

Teorema 2.3. Sean X un espacio topológico y $Z \subset X$ no vacío. Z es disconexo si y solo si existen A y B subconjuntos de X no vacíos y separados tales que $Z = A \cup B$.

Demostración. Supongamos que Z es disconexo. Entonces existen U y V abiertos de X tales que $Z \cap U$ y $Z \cap V$ son no vacíos, ajenos y $Z \subset U \cup V$. Sean $A = Z \cap U$ y $B = Z \cap V$. Notemos que $Z = A \cup B$ y A, B son no vacíos. Veamos que A y B están separados. Supongamos que existe $p \in \text{cl}_X(A) \cap B$. Entonces $p \in \text{cl}_X(A)$ y $p \in V$, y por tanto, $V \cap A \neq \emptyset$. Luego, $A \cap B \neq \emptyset$, lo cual contradice que A y B sean ajenos. Así, $\text{cl}_X(A) \cap B = \emptyset$. De manera análoga, se prueba que $A \cap \text{cl}_X(B) = \emptyset$. Por lo tanto, A y B están separados.

Ahora supongamos que existen A y B subconjuntos de X no vacíos y separados tales que $Z = A \cup B$. Sean $U = X - \text{cl}_X(B)$ y $V = X - \text{cl}_X(A)$. Notemos que U y V son abiertos en X que contienen a A y B , respectivamente. Más aún, $A = Z \cap U$, $B = Z \cap V$ y $Z \subset U \cup V$. Por lo tanto, Z es disconexo. \square

3 El arco, la curva cerrada simple y el triodo simple

Antes que todo, empecemos por presentar los continuos que estaremos estudiando, así como algunas propiedades interesantes de estos.

Definición 3.1. Un **arco** es un espacio homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow A$ un homeomorfismo, diremos que $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ son los puntos extremos del arco A .

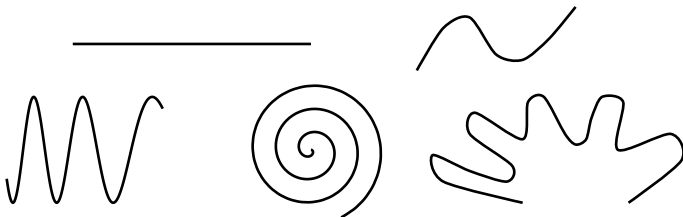


Figura 1: Ejemplos de arcos

Lema 3.2. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ no degenerado. I es conexo si y solo si I es un intervalo.*

Demostración. Sea I conexo. Supongamos por el contrario, que I no es un intervalo. Entonces existen $a, b \in I$ tales que $[a, b] \not\subset I$. Sea $z \in (a, b)$ tal que $z \notin I$. Luego, $U = \{x \in I : x < z\}$ y $V = \{y \in I : z < y\}$ son abiertos de I ajenos y no vacíos tales que $I = U \cup V$, lo cual contradice la conexidad de I . Por lo tanto, I es un intervalo.

Ahora, sea I un intervalo. Supongamos por el contrario, que I es desconexo, es decir, existen U y V abiertos de \mathbb{R} tales que $U \cap I$ y $V \cap I$ son no vacíos, ajenos y $I \subset U \cup V$. Sean $A = U \cap I$ y $B = V \cap I$, entonces $I = A \cup B$. Sean $a \in A$ y $b \in B$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a < b$. Como I es un intervalo, tenemos que $[a, b] \subset I$. Sea $D = [a, b] \cap A$. Como D está acotado superiormente por b , existe $\beta = \sup D$. Notemos que $\beta \in I$. Luego, $\beta \in A$ o $\beta \in B$.

Caso 1. $\beta \in A$. Así, $b - \beta > 0$. Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < b - \beta$ y $(\beta - 2\varepsilon, \beta + 2\varepsilon) \subset U$. Notemos que $\beta + \varepsilon < b$. De esto, $\beta + \varepsilon \in D$, lo cual es una contradicción al ser β el supremo de D .

Caso 2. $\beta \in B$. Luego, existe $\delta > 0$ tal que $(\beta - \delta, \beta + \delta) \subset V$. Puesto que β es el supremo de D , existe $d \in D$ tal que $\beta - \delta < d < \beta$. De esto, $d \in B$, lo cual contradice que A y B sean ajenos.

Por lo tanto, I es conexo. □

Un hecho muy importante y bastante útil en la topología es el hecho de que la conexidad y la compacidad son invariantes topológicos, es decir, que si dos espacios son homeomorfos y uno de ellos es conexo (o compacto), entonces el otro es conexo (o compacto).

Teorema 3.3. *Sea X un espacio métrico. Si A es un arco en X , entonces A es un continuo.*

Demostración. Sea A arco en X . Como $[0, 1]$ es cerrado y acotado, tenemos que $[0, 1]$ es compacto. Además, por el lema 3.2, $[0, 1]$ es conexo. Puesto que A es homeomorfo a $[0, 1]$, concluimos que A es conexo y compacto. Por lo tanto, A es un continuo. □

Definición 3.4. Un **curva cerrada simple** es un espacio homeomorfo a la circunferencia unitaria en el plano S^1 .

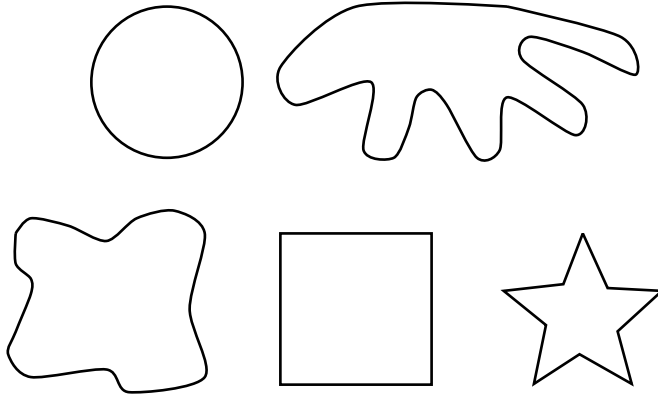


Figura 2: Ejemplos de curvas cerradas simples

Teorema 3.5. *Sea X un espacio métrico. Si C es un curva cerrada simple en X , entonces C es un continuo.*

Demostración. Sea C curva cerrada simple en X . Como S^1 es cerrado y acotado, tenemos que S^1 es compacto. Sean $p = (1, 0)$ y $q = (-1, 0)$. Entonces $S^1 - \{p\}$ y $S^1 - \{q\}$ son homeomorfos a un intervalo abierto de \mathbb{R} . Luego, por el Teorema 3.2, $S^1 - \{p\}$ y $S^1 - \{q\}$ son conexos. Como $(S^1 - \{p\}) \cap (S^1 - \{q\}) \neq \emptyset$, tenemos que $(S^1 - \{p\}) \cup (S^1 - \{q\})$ es conexo. En consecuencia, S^1 es conexo. Puesto que C es homeomorfo a S^1 , concluimos que C es conexo y compacto. Por lo tanto, C es un continuo. \square

Definición 3.6. Un **triodo simple** T es la unión de 3 arcos que únicamente se intersectan en un punto extremo v de dichos arcos. El punto v es llamado el **vértice** de T .

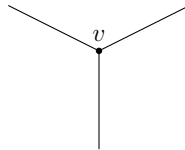


Figura 3: Triodo simple

Un resultado sobre conexidad que usaremos en el siguiente teorema, y en muchos otros resultados más adelante, es que la unión de conjuntos conexos es un conexo si la intersección de estos es no vacía.

Teorema 3.7. *Sea X un espacio métrico. Si T es un triodo simple en X , entonces T es un continuo.*

Demostración. Sea $T = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ un triodo simple en X con vértice v , donde A_1 , A_2 y A_3 son arcos tales que la intersección dos a dos es $\{v\}$. Como los arcos son continuos, tenemos que A_1 , A_2 y A_3 son compactos y conexos. Luego, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ es conexo, porque $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{v\}$. Más aún, como la unión finita de compactos es un compacto, tenemos que $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ es compacto. Por lo tanto, T es un continuo. \square

Una propiedad que comparten el arco y la curva cerrada simple, y que no tiene el triodo simple, es que todo subcontinuo propio no degenerado es un arco, lo cual se prueba a continuación.

Teorema 3.8. *Sea A un arco. Si S es un subcontinuo propio no degenerado de A , entonces S es un arco.*

Demostración. Sea S subcontinuo propio no degenerado de A . Como A es un arco, existe $\alpha : A \rightarrow [0, 1]$ homeomorfismo. Como S es conexo, por el lema 3.2, tenemos que $\alpha(S)$ es un intervalo. Más aún, al ser S compacto, tenemos que $\alpha(S)$ es un intervalo cerrado. Así, $\alpha(S)$ es homeomorfo a $[0, 1]$. Luego, por transitividad, S es un arco. \square

Teorema 3.9. *Sea C una curva cerrada simple. Si S es un subcontinuo propio no degenerado de C , entonces S es un arco.*

Demostración. Sea S subcontinuo propio no degenerado de C y $p \in C - S$. Entonces existe $h : C - \{p\} \rightarrow (0, 1)$ homeomorfismo. Como S es conexo, por el lema 3.2, tenemos que $h(S)$ es un intervalo. Más aún, al ser S compacto, tenemos que $h(S)$ es un intervalo cerrado. Así, $h(S)$ es homeomorfo a $[0, 1]$. Luego, por transitividad, S es un arco. \square

4 Puntos de no corte

Definición 4.1. Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que p es un **punto de corte** de X si $X - \{p\}$ no es conexo y p es un **punto de no corte** de X si $X - \{p\}$ es conexo.

Un hecho muy útil y no complicado de probar es que si A , B y Z son subconjuntos del espacio X tales que A y B están separados, Z es conexo y $Z \subset A \cup B$, entonces $Z \subset A$ o $Z \subset B$, mismo que usaremos en el siguiente lema.

Lema 4.2. *Sean X un espacio conexo y $Z \subset X$ conexo. Si $X - Z = A \cup B$ con A y B subconjuntos de X no vacíos que están separados, entonces $Z \cup A$ y $Z \cup B$ son conexos.*

Demostración. Sean A y B subconjuntos de X no vacíos tales que A y B están separados y $X - Z = A \cup B$. Supongamos que $Z \cup A$ es desconexo. Entonces existen K y L subconjuntos de X no vacíos y separados tales que $Z \cup A = K \cup L$. Como Z es conexo, tenemos que Z está contenido en K o en L . Sin pérdida de generalidad, supongamos que $Z \subset K$. Luego, $L \subset A$. De esto, L y B están separados. Notemos que $X = (B \cup K) \cup L$. Más aún, $B \cup K$ y L están separados, lo cual contradice la conexidad de X . Por lo tanto, $Z \cup A$ es conexo. Análogamente, $Z \cup B$ es conexo. \square

Lema 4.3. *Sea X un espacio conexo. Supongamos que para $a, b \in X$ existen K, L, M y N subconjuntos de X no vacíos tales que K y L están separados, M y N están separados, $X - \{a\} = K \cup L$ y $X - \{b\} = M \cup N$. Si $a \in M$ y $b \in K$, entonces $N \cup \{b\} \subset K$.*

Demostración. Por el Lema 4.2, $N \cup \{b\}$ es conexo. Como $a \in M$, tenemos que $N \cup \{b\} \subset K \cup L$. Luego, $N \cup \{b\} \subset K$ o $N \cup \{b\} \subset L$. Dado que $a \in K$, concluimos que $N \cup \{b\} \subset K$. \square

Teorema 4.4. (Principio Maximal de Hausdorff). *Si \mathcal{L} una colección de conjuntos, entonces todo nido de \mathcal{L} esta contenido en un nido maximal. (Un subcolección \mathcal{N} de \mathcal{L} es un nido, si para cada $A, B \in \mathcal{N}$, tenemos que $A \subset B$ o $B \subset A$).*

El siguiente teorema nos ayudará a probar el resultado que tiene como objetivo este capítulo, y aún que parezca sencillo el enunciado, la ideas que se usan para probarlo no lo son.

Teorema 4.5. *Si X un continuo no degenerado, entonces X tiene al menos dos puntos de no corte.*

Demostración. Sean $a, q \in X$. Si a y q son puntos de no corte de X , se cumple el resultado. Supongamos que a es un punto de corte de X . Entonces existen U y V abiertos de X ajenos y no vacíos tales que $X - \{a\} = U \cup V$.

Supongamos que todo elemento de V es punto de corte de X . Luego, para cada $b \in V$, existen U_b y V_b abiertos de X ajenos y no vacíos tales que $X - \{b\} = U_b \cup V_b$ y $a \in U_b$. Luego, por el Lema 4.3, para cada $b \in V$, $V_b \cup \{b\} \subset V$. Más aún, por el Lema 4.2, para cada $b \in V$, $V_b \cup \{b\}$ y $U_b \cup \{b\}$ son conexos.

Afirmación: Si $b \in V$ y $p \in V_b$, entonces $V_p \cup \{p\} \subset V_b$.

En efecto, sea $b \in V$ y $p \in V_b$. Supongamos que $b \in V_p$, es decir, $U_p \subset X - b$. Como $U_p \cup \{p\}$ es conexo y $p \in V_b$, tenemos que $U_p \cup \{p\} \subset V_b$. Puesto que $a \in U_p$, concluimos que $a \in V_b$, lo cual contradice que V_b y U_b sean ajenos. De esto, $V_p \subset X - \{b\}$, y por tanto, $V_p \cup \{p\} \subset V_b$. Concluyendo así la prueba de la afirmación.

Sea $\mathcal{L} = \{V_b \cup \{b\} : b \in V\}$. Luego, por el Teorema 4.4, existe un nido maximal \mathcal{C} de \mathcal{L} . Supongamos que $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$. Luego, $X = \bigcup \{V_b : U_b \cup \{b\} \in \mathcal{C}\}$. Como X es compacto, tenemos que $X = V_{b_1} \cup \dots \cup V_{b_n}$. En consecuencia, $(U_{b_1} \cup \{b_1\}) \cup \dots \cup (U_{b_n} \cup \{b_n\}) = \emptyset$, lo cual contradice que \mathcal{C} es un nido. Por lo tanto, $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Sea $c \in \bigcap \mathcal{C}$. Notemos que $c \in V$. Más aún, dado $V_b \cup \{b\} \in \mathcal{C}$, $c \in V_b \cup \{b\}$. Si $c = b$, entonces $V_c \cup \{c\} = V_b \cup \{b\}$, y si $c \in V_b$, por la afirmación, $V_c \cup \{c\} \subset V_b$. En cualquier caso, concluimos que $V_c \cup \{c\} \subset V_b \cup \{b\}$. En consecuencia, $V_c \cup \{c\} \subset \bigcap \mathcal{C}$.

Ahora bien, sea $z \in V_c$. Notemos que $z \in V$, y por tanto, $V_z \cup \{z\} \in \mathcal{L}$. Por la afirmación, $V_z \cup \{z\}$ es subconjunto propio de $V_c \cup \{c\}$. De esto, $\mathcal{C} \cup \{V_z \cup \{z\}\}$ un nido de \mathcal{L} que contiene propiamente a \mathcal{C} , lo cual contradice la maximalidad de \mathcal{C} . Por lo tanto, V tiene un punto de no corte de X . Análogamente se prueba que U tiene un punto de no corte de X . Por lo tanto, X tiene al menos dos puntos de no corte. \square

5 Continuos localmente conexos

Habiendo probado la existencia de puntos de no corte, aún no es suficiente para proceder al resultado principal porque aún nos falta analizar la propiedad de ser localmente conexo, la cual definimos a continuación.

Definición 5.1. Un espacio topológico X es **localmente conexo** si para cada punto $p \in X$ y cualquier abierto U de X que contenga a p , existe V

abierto y conexo tal que $p \in V \subset U$.

Como se ha mencionado anteriormente, en ocasiones la construcción de abiertos con propiedades particulares no es sencilla, por lo que los Lemas 5.2 y 5.5 serán muy útiles en posteriores resultados.

Lema 5.2. *Sea X un espacio topológico. Si para cada punto $p \in X$ y cualquier abierto U de X que contenga a p , existe N subconjunto conexo de X tal que $p \in \text{int}_X(N) \subset N \subset U$, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Sea $p \in X$ y U abierto de X que contiene a p . Sea C la componente de U que contiene a p . Veamos que C es abierto de X . Sea $q \in C$. Por hipótesis, existe N_q subconjunto conexo de X tal que $q \in \text{int}_X(N_q) \subset N_q \subset U$. Luego, por la maximalidad de C , $N_q \subset C$. Así, $q \in \text{int}_X(N_q) \subset C$. Por lo tanto, C es abierto y conexo tal que $p \in C \subset U$. \square

Otras definiciones que necesitamos para poder continuar son la siguientes.

Definición 5.3. Un espacio topológico X es **arco-conexo** si para cada par de puntos $a, b \in X$ existe un arco en X con puntos extremos a y b .

Definición 5.4. Un X espacio topológico es **localmente arco-conexo** si para cada punto $p \in X$ y cualquier abierto U de X que contenga a p , existe V abierto y arco-conexo tal que $p \in V \subset U$.

No es difícil probar que si un espacio es arco-conexo, entonces este es conexo (el recíproco no es cierto), y de esto podemos notar que un espacio que es localmente arco-conexo es localmente conexo (nuevamente el recíproco es válido). Aunque estos resultados no sean usados en lo que estaremos probando es bueno saber que relación hay entre estos tipos de conexidad.

Lema 5.5. *Sea X un espacio topológico. Si para cada punto $p \in X$ y cualquier abierto U de X que contenga a p , existe N subconjunto arco-conexo de X tal que $p \in \text{int}_X(N) \subset N \subset U$, entonces X es localmente arco-conexo.*

Demostración. Sea $p \in X$ y U abierto de X que contiene a p . Entonces existe N subconjunto arco-conexo de X tal que $p \in \text{int}_X(N) \subset N \subset U$. Sea

$$V = \bigcup \{A \subset U : p \in A \text{ con } A \text{ arco-conexo}\}.$$

Notemos que V es arco-conexo y $p \in V \subset U$. Para terminar la prueba, bastará probar que V es abierto de X . Sea $q \in V$. Entonces existe $A_q \subset U$ arco-conexo tal que $p, q \in A_q$. Además, por hipótesis, existe N_q subconjunto arco-conexo de X tal que $q \in \text{int}_X(N_q) \subset N_q \subset U$. Sea $V_q = A_q \cup N_q$. Luego, $q \in \text{int}_X(V_q) \subset V_q \subset V$. Por lo tanto, V es abierto. \square

El siguiente teorema es muy importante en la teoría de continuos y será muy útil para probar resultados posteriores, así como el resultado principal, sin embargo por la gran cantidad de material que se necesita para probarlo, solo daremos la referencia en la que puede encontrar su prueba para el interesado.

Teorema 5.6. [9, Teorema 8.23] *Todo continuo no degenerado localmente conexo es arco-conexo.*

Definición 5.7. Sea X un espacio métrico y Z un subconjunto no vacío de X . El **diámetro** de Z , el cual denotaremos por $\text{diám}(Z)$, es el supremo de las distancias entre los puntos de Z , es decir, $\text{diám}(Z) = \sup\{d(p, q) : p, q \in Z\}$.

Con la finalidad de poder probar el Teorema 5.13, introduciremos la siguiente definición, la cual tiene relación con la conexidad local y que satisface una propiedad que nos será útil.

Definición 5.8. Sea X un espacio métrico. Un subconjunto no vacío Z de X se dice que tiene la **propiedad S** si para todo $\varepsilon > 0$, existen subconjuntos conexos A_1, \dots, A_n de Z con diámetro menor que ε tales que $Z = A_1 \cup \dots \cup A_n$.

Veamos la relación que hay entre la conexidad local y la propiedad S.

Teorema 5.9. *Sea X un espacio métrico. Si X tiene la propiedad S, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Usaremos el Lema 5.2 para probar esto. Dado $p \in X$ y U abierto de X que contiene a p . Sea $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset U$. Como X tiene la propiedad S, existen A_1, \dots, A_n subconjunto conexos de X con diámetro menor que $\frac{r}{2}$ tales que $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Sea $N = \bigcup\{A_i : p \in \text{cl}_X(A_i)\}$. Notemos que N es un subconjunto conexo de U . Como

$$\text{cl}_X(X - N) \subset \text{cl}_X\left(\bigcup\{A_j : p \notin \text{cl}_X(A_j)\}\right) = \bigcup\{\text{cl}_X(A_j) : p \notin \text{cl}_X(A_j)\},$$

tenemos que $p \notin \text{cl}_X(X - N)$, y en consecuencia, $p \in \text{int}_X(N)$. Por lo tanto, X es localmente conexo. \square

El recíproco del teorema anterior no siempre se cumple, para ejemplificar $S = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x \in (0, 1]\}$ es localmente conexo pero no tiene la propiedad S. No obstante, el teorema siguiente nos da condiciones suficientes para que esto se cumpla, y dado que los continuos satisfacen esta condición, la propiedad S y ser localmente conexo serán equivalentes en los continuos.

Teorema 5.10. *Sea X un espacio métrico compacto. Si X es localmente conexo, entonces X tiene la propiedad S.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como X es localmente conexo, tenemos que para cada $p \in X$ existe V_p abierto y conexo tal que $p \in V_p \subset B(p, \frac{\varepsilon}{2})$. Notemos que el diámetro de cada V_p es menor a ε . Luego, por la compacidad de X , existen V_{p_1}, \dots, V_{p_n} tales que $X = V_{p_1} \cup \dots \cup V_{p_n}$. Por lo tanto, X tiene la propiedad S. \square

A diferencia de la conexidad, la propiedad de ser localmente conexo no se mantiene en la cerradura, es decir, si Y es un subespacio localmente conexo de X , entonces $\text{cl}_X(Y)$ no necesariamente es localmente conexo, un ejemplo que sirve es el continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$, véase el Ejemplo 7.1 y tomar a $Y = S$. Sin embargo, la propiedad S sí se mantiene en la cerradura como se prueba a continuación.

Teorema 5.11. *Sean X un espacio métrico y $Y \subset X$ que tiene la propiedad S. Si $Z \subset X$ tal que $Y \subset Z \subset \text{cl}_X(Y)$, entonces Z tiene la propiedad S.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como Y tiene la propiedad S, existen subconjuntos conexos A_1, \dots, A_n de Y con diámetro menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ tales que $Y = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sea $B_i = \text{cl}_Z(A_i)$. Notemos que B_1, \dots, B_n son subconjuntos conexos de Z con diámetro menor que ε . Como $\text{cl}_X(Y) = \text{cl}_X(A_1) \cup \dots \cup \text{cl}_X(A_n)$, tenemos que $Z = [\text{cl}_X(A_1) \cup \dots \cup \text{cl}_X(A_n)] \cap Z = B_1 \cup \dots \cup B_n$. Por lo tanto, Z tiene la propiedad S. \square

La siguiente definición nos ayudará a definir conjuntos que sean abiertos y conexos que tengan la propiedad S, como se verá en la prueba del Teorema 5.13.

Definición 5.12. Sean X un espacio métrico, L_1, \dots, L_n subconjuntos de X y $\varepsilon > 0$. Diremos que $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ es una $S(\varepsilon)$ -cadena si se satisface lo siguiente:

- (1) para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$,
- (2) para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, L_i es conexo,
- (3) para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $\text{diám}(L_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$.

A los elementos de \mathcal{L} los llamaremos enlaces. Si $p \in L_1$ y $q \in L_n$, diremos que \mathcal{L} es una $S(\varepsilon)$ -cadena de p a q .

Teorema 5.13. *Todo subconjunto abierto de un continuo localmente conexo es localmente arco-conexo.*

Demostración. Sean X un continuo localmente conexo y W subconjunto abierto de X . Sea $p \in W$ y U abierto de X tal que $p \in U$. Luego, existe $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset U$. Sea

$$V = \{q \in X : \text{existe una } S(r)\text{-cadena de } p \text{ a } q\}.$$

Notemos que V es un subconjunto conexo de U . Más aún, dado $q \in V$ existe una $S(r)$ -cadena $\{L_1, \dots, L_m\}$ de p a q . Como X es localmente conexo, existe L_{m+1} abierto y conexo de X tal que $q \in L_{m+1} \subset B(q, \frac{r}{2^{m+2}})$. Así, $\{L_1, \dots, L_m, L_{m+1}\}$ es una $S(r)$ -cadena, y en consecuencia, $q \in L_{m+1} \subset V$. De esto, V es abierto de X .

Afirmación. V tiene la propiedad S.

Para esto sea $\delta > 0$. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{r}{2^{k-1}} < \frac{\delta}{4}$. Definamos a

$$K = \{q \in X : \text{existe una } S(r)\text{-cadena con a lo más } k \text{ enlaces de } p \text{ a } q\}.$$

Notemos que $p \in K \subset V$. Por el Teorema 5.10, X tiene la propiedad S, y por tanto, existe una cubierta finita para X de conjuntos conexos con diámetro menor que $\frac{r}{2^{k+1}}$. Sean E_1, \dots, E_n los miembros de esta cubierta que intersectan a K . Es claro que $K \subset E_1 \cup \dots \cup E_n$. Sean $i \in \{1, \dots, n\}$ y $q_i \in E_i \cap K$. Entonces existe una $S(r)$ -cadena \mathcal{L}_i con a lo más k enlaces de p a q_i . Luego, $\mathcal{L}_i \cup \{E_i\}$ es una $S(r)$ -cadena. Por la definición de V , tenemos que $E_i \subset V$. Por lo tanto, E_1, \dots, E_n son subconjuntos conexos de V de diámetro menor que $\frac{\delta}{4}$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sea

$$B_i = \bigcup \{M \subset V : M \text{ es conexo, } M \cap E_i \neq \emptyset \text{ y } \text{diám}(M) < \frac{\delta}{4}\}.$$

Notemos que cada B_i es un subconjunto conexo de V con diámetro menor que δ que contiene a E_i . Para terminar la prueba de la afirmación, veamos que $V \subset B_1 \cup \dots \cup B_n$. Como $K \subset E_1 \cup \dots \cup E_n \subset B_1 \cup \dots \cup B_n$, bastará tomar a

$v \in V - K$. Sea $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_m\}$ una $S(r)$ -cadena de p a v . Dado que $v \notin K$, tenemos que $m > k$. Sea $H = L_k \cup \dots \cup L_m$. Como \mathcal{L} es una $S(r)$ -cadena, tenemos que H es conexo y $\text{diám}(H) \leq \text{diám}(L_k) + \dots + \text{diám}(L_m) = r \left[\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^m} \right] < \frac{\delta}{4}$. Más aún, por la definición de K , $L_k \subset K$, y por tanto, $H \cap \bar{E}_j \neq \emptyset$ para algún $j \in \{1, \dots, n\}$. Así, $H \subset B_j$. Por lo tanto, $V \subset B_1 \cup \dots \cup B_n$, concluyendo así la prueba de la afirmación.

Resumiendo, V es un subconjunto abierto y conexo de U que tiene la propiedad S. Luego, por el Teorema 5.11, $\text{cl}_X(V)$ es un continuo que tiene la propiedad S. Por los Teoremas 5.9 y 5.6, $\text{cl}_X(V)$ es arco-conexo. Así, p está en el interior de un conjunto arco-conexo contenido en U . Como esto se da para cada elemento de W , por el Lema 5.5, tenemos que W es localmente arco-conexo. □

El teorema siguiente es el que usaremos para poder probar nuestro resultado principal.

Teorema 5.14. *Cualquier subconjunto abierto y conexo de un continuo localmente conexo es arco-conexo.*

Demostración. Sean X un continuo localmente conexo y W subconjunto abierto de X conexo. Sea $p \in W$ y definamos E como sigue:

$$E = \{p\} \cup \{a \in W : \text{existe un arco en } W \text{ con extremos } a \text{ y } p\}.$$

Supongamos que $W - E \neq \emptyset$. Por el Teorema 5.13, W es localmente arco-conexo. Sea $a \in E$, en particular, $a \in W$. Luego, existe U subconjunto abierto de X arco-conexo tal que $a \in U \subset W$. Así, $a \in U \subset E$, concluyendo que E es abierto de X .

Por otro lado, sea $b \in W - E$. Entonces, existe V subconjunto abierto de X arco-conexo tal que $b \in V \subset W$. Notemos que $V \cap E = \emptyset$, ya que en caso contrario por la arco-conexidad de V habría un arco en W con extremos b y p , lo cual es una contradicción al hecho de que $b \in W - E$. Así, $b \in V \subset W - E$, concluyendo que $W - E$ es abierto de X . Esto contradice la conexidad de W . En consecuencia, $W - E = \emptyset$. Por lo tanto, W es arco-conexo. □

6 Continuos localmente conexos sin triodos simples

Finalmente hemos llegado con los recursos necesarios para poder probar nuestro resultado principal, véase el Teorema 6.4, pero antes de comenzar veamos el siguiente lema que nos facilitará la prueba del Teorema 6.2.

Lema 6.1. *Sean X un continuo, A_1 y A_2 dos arcos de X diferentes. Si A_1 y A_2 coinciden en sus puntos extremos, entonces existe una curva cerrada simple C contenida en X tal que $C \subset A_1 \cup A_2$.*

Demostración. Sean $\alpha: [0, 1] \rightarrow A_1$ y $\beta: [0, 1] \rightarrow A_2$ homeomorfismos tales que $\alpha(0) = p = \beta(0)$, $\alpha(1) = q = \beta(1)$. Notemos que $\alpha \neq \beta$, es decir, existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que $\alpha(t_0) \neq \beta(t_0)$.

Sea $t_p < t_0$ tal que $\alpha(t_p) = \beta(t_p)$, y para cada $t \in (t_p, t_0]$, $\alpha(t) \neq \beta(t)$ y sea $t_0 < t_q$ tal que $\alpha(t_q) = \beta(t_q)$ y para cada $t \in [t_0, t_q)$, $\alpha(t) \neq \beta(t)$.

Sea $C = \alpha([t_p, t_q]) \cup \beta([t_p, t_q])$. Veamos que C es una curva cerrada simple. Sean $h_1: [t_p, t_q] \rightarrow [0, \pi]$, donde $h_1(t) = \pi \left(\frac{t-t_p}{t_q-t_p} \right)$ y $h_2: [t_p, t_q] \rightarrow [\pi, 2\pi]$, donde $h_2(t) = \pi \left(1 + \frac{t_q-t}{t_q-t_p} \right)$. Notemos que h_1 y h_2 son homeomorfismos.

Definimos a la función $h: C \rightarrow S^1$ dada por

$$h(a) = \begin{cases} (\cos(h_1(\alpha^{-1}(a))), \text{sen}(h_1(\alpha^{-1}(a)))) & , a \in \alpha([t_p, t_q]) \\ (\cos(h_2(\beta^{-1}(a))), \text{sen}(h_2(\beta^{-1}(a)))) & , a \in \beta([t_p, t_q]) \end{cases}$$

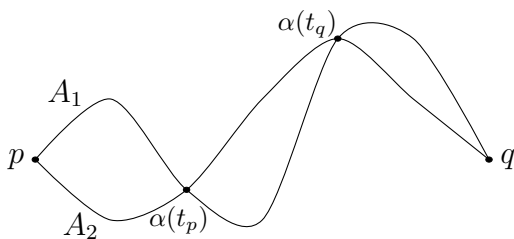


Figura 4: $C \subset A_1 \cup A_2$

Como h es composición de funciones continuas, tenemos que h es continua. Más aún, h es biyectiva. Así, h es un homeomorfismo. Por lo tanto, C es una curva cerrada simple contenida en $A_1 \cup A_2$. □

El resultado que a continuación probamos es donde usaremos todo el material antes expuesto y que nos ayudará a llegar a nuestro objetivo.

Teorema 6.2. *Sea X un continuo localmente conexo y no degenerado. Si X no es un arco, entonces X contiene una curva cerrada simple o un triodo simple.*

Demostración. Como X es un continuo no degenerado, por el Teorema 4.5, tenemos que X contiene al menos dos puntos de no corte, a saber, p y q . Sea A_1 un arco que une a p y q . Como X no es un arco, existe $t \in X - A_1$. Al ser p de no corte, tenemos que $X - \{p\}$ es abierto de X y conexo. Luego, por el Teorema 5.14, $X - \{p\}$ es arco-conexo. Sea A_2 un arco en $X - \{p\}$ que une a t y q .

Caso 1. $A_1 \cap A_2 = \{q\}$.

Como q es de no corte, tenemos que $X - \{q\}$ es abierto de X y conexo. Luego, por el Teorema 5.14, $X - \{q\}$ es arco-conexo. Sea A_3 un arco en $X - \{q\}$ que une a t y p . Notemos que A_3 es distinto al arco $A_1 \cup A_2$, más aún, coinciden en sus puntos extremos. Por el Lema 6.1, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ contiene una curva cerrada simple. En consecuencia, X contiene una curva cerrada simple. Véase la Figura 5.

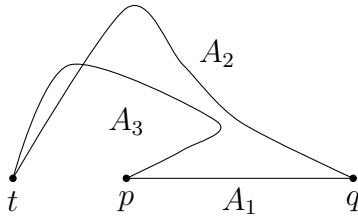


Figura 5: $A_1 \cap A_2 = \{q\}$.

Caso 2. $A_1 \cap A_2$ tiene más de un punto.

Sean $\alpha_1 : [0, 1] \rightarrow A_1$ y $\alpha_2 : [0, 1] \rightarrow A_2$ homeomorfismos tales que $\alpha_1(0) = p$, $\alpha_1(1) = q = \alpha_2(0)$ y $\alpha_2(1) = t$. Sea $F = \{l \in [0, 1] : \alpha_2(l) \in A_1\}$. Notemos que $F = \alpha_2^{-1}(A_1 \cap A_2)$. Como α_2 es continua y, A_1 y A_2 son cerrados, tenemos que F es cerrado, acotado y no vacío. Entonces F tiene máximo, a saber, L . Sea $v = \alpha_2(L)$. Sean $A_p \subset A_1$ el arco que une a p y v , $A_q \subset A_1$ el arco que une a q y v y $A_t \subset A_2$ el arco que une a t y v . Notemos que $A_p \cap A_q = \{v\}$. Veamos

que $A_p \cap A_t = \{v\}$. Sea $a \in A_p \cap A_t$. Así, $a \in A_1 \cap A_2$. Luego, existe $l \leq L$ tal que $\alpha_2(l) = a$. Dado que $\alpha_2(l) \in A_t$, tenemos que $l \geq L$. En consecuencia, $l = L$, y por tanto, $a = v$. Análogamente se prueba que $A_q \cap A_t = \{v\}$. Por lo tanto, $A_p \cup A_q \cup A_t$ es un triodo simple con vértice v contenido en X . Véase la Figura 6. □

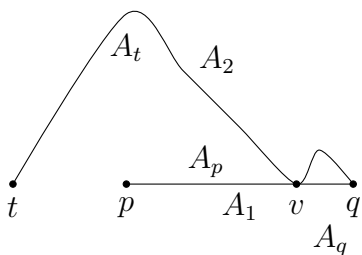


Figura 6: $A_1 \cap A_2$ tiene más de un punto.

Por último, con ayuda del teorema anterior, probemos el siguiente resultado con el que concluiremos de manera inmediata el resultado principal.

Teorema 6.3. *Sea X es un continuo localmente conexo y no degenerado distinto del arco. Si X no contiene triodos simples, entonces X es una curva cerrada simple.*

Demostración. Por el Teorema 6.2, X contiene una curva cerrada simple C . Supongamos que $X \neq C$. Sea $p \in X - C$ y $a \in C$. Como X es localmente conexo, existe un arco A que une a p y a . Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow A$ un homeomorfismo tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = a$. Sea $F = \{l \in [0, 1] : \alpha(l) \in C\}$. Notemos que $F = \alpha^{-1}(A \cap C)$. Como α es continua y, A y C son cerrados, tenemos que F es cerrado, acotado y no vacío. Entonces F tiene mínimo, a saber, l_0 . Sea $q = \alpha(l_0)$. Sea $A_1 \subset A$ el arco que une a p y q . Notemos que $A_1 \cap C = \{q\}$. Como C es una curva cerrada simple, existen arcos A_2 y A_3 tales que $A_2 \cap A_3 = \{q\}$. Luego, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ es un triodo simple contenido en X , contradicción. Por lo tanto, $X = C$, es decir, X es una curva cerrada simple. □

Por este teorema se obtiene de manera inmediata el resultado principal que deseábamos probar.

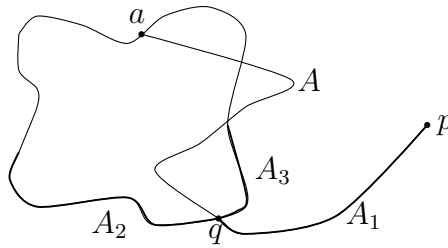


Figura 7: $X \neq C$.

Teorema 6.4. *Si X es un continuo localmente conexo sin triodos simples, entonces X es un arco o una curva cerrada simple.*

Aunque uno pudiera pensar desde un inicio que el resultado no es muy importante, tiene muchas aplicaciones y usos en varias investigaciones recientes por mencionar una [2].

7 Continuos sin triodos simples que no son localmente conexos

Ahora analizaremos, mediante algunos ejemplos, que la conexidad local es necesaria para la implicación del resultado y no puede ser cambiada por otra propiedad (no equivalente a la conexidad local) que cumplan el arco y la curva cerrada simple. El Teorema 5.6 lo estaremos usando en esta sección para demostrar que un continuo no es localmente conexo, probando que no es arco-conexo.

Ejemplo 7.1. Sean $J = \{0\} \times [-1, 1]$ y $S = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x \in (0, 1]\}$. Como S es conexo, tenemos que $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(S)$ es conexo. Más aún, $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(S) = J \cup S$ es cerrado y acotado, y por tanto, compacto. Así, $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(S)$ es un continuo, al cual se le conoce como el **continuo** $\sin(\frac{1}{x})$, véase la Figura 9.

Este continuo es obvio que no es un arco ni una curva cerrada simple, sin embargo no es localmente conexo y no contiene triodos simples como se muestra en los Lemas 7.2 y 7.3, respectivamente. De esto, la condición de ser localmente conexo no puede ser eliminada del Teorema 6.4.

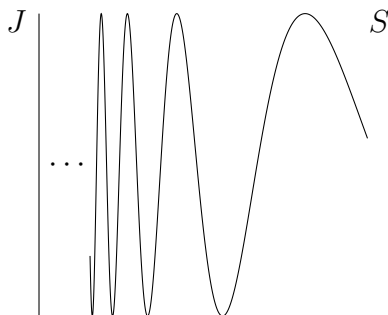


Figura 8: Continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$

Lema 7.2. *El continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$ no es arco-conexo.*

Demostración. Denotemos por \mathcal{S} al continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$. Supongamos por el contrario que \mathcal{S} es arco-conexo. Sean $p \in J$ y $q \in S$. Así, existe un arco A en \mathcal{S} que une a p y q . Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow A$ un homeomorfismo tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. Sea $L = \alpha^{-1}(J \cap A)$. Entonces L es un subconjunto cerrado de $[0, 1]$ y no vacío, porque α es continua y $J \cap A$ es cerrado en A . Veamos que L es abierto de $[0, 1]$. Sea $l \in L$, entonces $\alpha(l) = (0, a_l)$. Sean $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ y $U = [(-\varepsilon, \varepsilon) \times (a_l - \varepsilon, a_l + \varepsilon)] \cap A$. Notemos que $J \cap U$ es una componente de U . Por la continuidad de α , $\alpha^{-1}(U)$ es un abierto de $[0, 1]$ que contiene a l . Como $[0, 1]$ es localmente conexo, existe V abierto y conexo de $[0, 1]$ tal que $l \in V \subset \alpha^{-1}(U)$. Luego, $\alpha(V)$ es un subconjunto conexo de U que contiene a $\alpha(l)$. En consecuencia, $\alpha(V) \subset J \cap A$. Así, $V \subset \alpha^{-1}(J \cap A)$, es decir, $l \in V \subset L$. Lo cual implica que, L es abierto de $[0, 1]$. Esto contradice la conexidad de $[0, 1]$. Por lo tanto, \mathcal{S} no es arco-conexo. \square

Lema 7.3. *El continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$ no contiene triodos simples.*

Demostración. Supongamos por el contrario que existe un triodo simple T contenido en \mathcal{S} . Notemos que J y S son homeomorfos a intervalos de \mathbb{R} . Luego, por el Lema 3.2, T no puede estar contenido en J o en S , es decir, $T \cap J \neq \emptyset$ y $T \cap S \neq \emptyset$. Sea $p \in T \cap J$ y $q \in T \cap S$. Como T es arco-conexo, tenemos que existe un arco A en T con extremos p y q . Como $T \subset \mathcal{S}$, tenemos que A es un arco en \mathcal{S} que une un punto de J con uno de S , lo cual no es posible como se probó en el Lema 7.2. Por lo tanto, \mathcal{S} no contienen triodos simples. \square

Como ya hemos visto, sin la conexidad local el resultado principal no es cierto, pero ¿será posible cambiar esta propiedad por otra que cumplan el arco y la curva cerrada simple de tal manera que el resultado siga siendo válido? Como se puede notar en la prueba de los Teoremas 6.2 y 6.3, un hecho que se usa es la construcción de arcos, por lo que uno podría pensar que es posible cambiar la propiedad de localmente conexo por arco-conexo (propiedad que obviamente cumplen el arco y la curva cerrada simple) en el enunciado del Teorema 6.4. El ejemplo siguiente nos muestra que esto no es posible.

Ejemplo 7.4. Sea \mathcal{S} el continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$. Sea I un arco con extremos $(0, -1)$ y $(1, \text{sen}(1))$ tal que $\mathcal{S} \cap I = \{(0, -1), (1, \text{sen}(1))\}$. El **círculo de Varsovia**, al cual denotaremos por \mathcal{C} , es la unión de \mathcal{S} con I . Por sencillos argumentos, \mathcal{C} es un continuo.

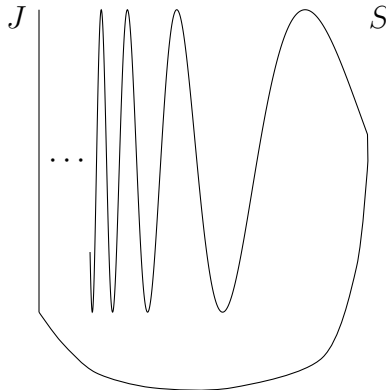


Figura 9: Círculo de Varsovia

El círculo de Varsovia claramente no es un arco ni una curva cerrada simple y, a diferencia del continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$, es arco-conexo, porque los puntos del segmento J y los puntos de la curva S pueden ser unidos por un arco con ayuda del arco I . Además, este continuo no es localmente conexo y no contiene triodos simples, véase los Lemas 7.5 y 7.6, respectivamente.

Lema 7.5. *El círculo de Varsovia no es localmente conexo.*

Demostración. Sea $U = B(\mathbf{0}, \frac{1}{2}) \cap \mathcal{C}$. Luego, si V es un subconjunto conexo de U que contiene a $\mathbf{0}$, entonces $V \subset U \cap J$. Como $\text{int}_{\mathcal{C}}(J) = \emptyset$, tenemos que V no es abierto. Por lo tanto, X no es localmente conexo. □

Lema 7.6. *El círculo de Varsovia no contiene triodos simples.*

Demostración. Supongamos que existe un triodo simple T contenido en \mathcal{C} . Como T es compacto, tenemos que T es cerrado en \mathcal{C} . Como el continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$ no contiene triodos simples, existe $b \in S$ tal que $T \subset J \cup I \cup S_b$, donde S_b es el arco en S con extremos b y $(1, \text{sen}(1))$. Al ser $J \cup I \cup S_b$ homeomorfo a un intervalo de \mathbb{R} , por el Lema 3.2, tenemos que T es un arco, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, \mathcal{C} no contiene triodos simples. \square

Con esto hemos visto que la arco-conexidad no es suficiente para que el Teorema 6.4 se cumpla. Sin embargo, el continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$ y el círculo de Varsovia tiene subcontinuos propios distintos del arco, a diferencia del arco y la curva cerrada simple. Esto podría llevarnos a pensar que es posible enunciar el Teorema 6.4 como sigue: “si X es un continuo tal que todo subcontinuo propio no degenerado es un arco, entonces X es un arco o un curva cerrada simple”. Un continuo muy interesante, introducido por Bronislaw Knaster en el artículo de Casimir Kuratowski [6], que cumple con las hipótesis de este enunciado pero no con la tesis es el siguiente.

Ejemplo 7.7. Denotemos por C_0 al conjunto de cantor y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $C_n = \{c \in C_0 : \frac{2}{3^n} \leq c \leq \frac{1}{3^{n-1}}\}$. Para cada $c \in C_0$, sea

$$S_{(0,c)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (c - \frac{1}{2})^2 \text{ y } y \geq 0\},$$

la semicircunferencia superior con centro $(\frac{1}{2}, 0)$ tal que $(c, 0)$ es un extremo de $S_{(0,c)}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $c \in C_n$, sea

$$S_{(n,c)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \frac{5}{2 \cdot 3^n})^2 + y^2 = (c - \frac{5}{2 \cdot 3^n})^2 \text{ y } y \leq 0\},$$

la semicircunferencia inferior con centro $(\frac{5}{2 \cdot 3^n}, 0)$ tal que $(c, 0)$ es un extremo de $S_{(n,c)}$. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a $S_n = \bigcup \{S_{(n,c)} : c \in C_n\}$. A la unión de los S_n se le conoce como el **Arcoiris de Knaster**, al cual denotaremos por \mathcal{K} , véase la Figura 10. Como para cada semicircunferencia superior existe una semicircunferencia inferior que lo intersecta y viceversa, tenemos \mathcal{K} es conexo. Más aún, es cerrado y acotado, puesto que $\text{Fr}_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. De esto, \mathcal{K} es compacto, y por lo tanto, un continuo.

Este continuo pertenece a una familia de espacios conocidos como continuos indescomponibles que definimos a continuación.

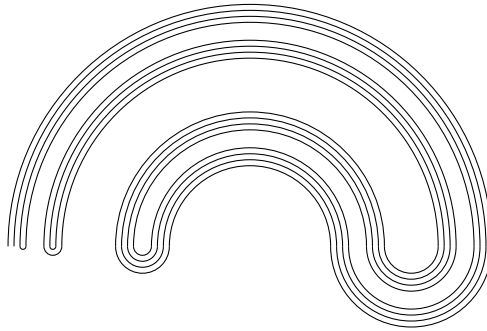


Figura 10: Arcoiris de Knaster

Definición 7.8. Sea X un continuo. Se dice que X es **descomponible** si existen A y B subcontinuos propios de X tales que $X = A \cup B$. Un continuo es **indescomponible** si no es descomponible.

La prueba de que el arcoiris de Knaster es un continuo indescomponible necesita de varios resultados, que de añadirlos este trabajo se extendería demasiado, sin embargo puede consultar la prueba de esto en [5] o una versión más reciente de la prueba y en español puede ser consultada en [8]. A continuación veremos el material necesario para poder probar que el Arcoiris de Knaster no es arco-conexo, y por tanto, no localmente conexo, resaltando así la importancia de la conexidad local en el Teorema 6.4.

Teorema 7.9. *Un continuo X es descomponible si y solo si existe un subcontinuo propio con interior no vacío.*

Demostración. Sea X un continuo. Supongamos que X es descomponible. Entonces existen A y B subcontinuos propios de X tales que $X = A \cup B$. Notemos que $X - B \subset A$. Como B es un subconjunto propio y cerrado de X , tenemos que $\emptyset \neq X - B \subset \text{int}_X(A)$. Así, A es un subcontinuo propio con interior no vacío.

Ahora, supongamos que existe A subcontinuo propio de X con interior no vacío. Consideremos los dos siguientes casos:

Caso 1. $X - A$ es conexo. Entonces $\text{cl}_X(X - A)$ es cerrado y conexo en X , y por tanto, un subcontinuo de X . Notemos que $\text{int}_X(A) \cap \text{cl}_X(X - A) = \emptyset$. Como $\text{int}_X(A) \neq \emptyset$, tenemos que $\text{cl}_X(X - A)$ es un subcontinuo propio de X . Luego, $X = A \cup \text{cl}_X(X - A)$.

Caso 2. $X - A$ es desconexo. Entonces existen K, L subconjuntos no vacíos de X separados tales que $X - A = K \cup L$. Por el Lema 4.2, $A \cup K$ y $A \cup L$ son subcontinuos propios de X tales que $X = (A \cup K) \cup (A \cup L)$.

En cada caso se tiene que X es la unión de dos subcontinuos propios de X . Por lo tanto, X es descomponible. □

Definición 7.10. Sean X un continuo y $p \in X$. La **composante** de p es

$$K(p) = \{q \in X : \text{existe } S \text{ subcontinuo propio de } X \text{ tal que } p, q \in S\}$$

Teorema 7.11. *Toda composante de un continuo es unión numerable de subcontinuos propios.*

Demostración. Sea X un continuo y $K(p)$ una composante de X . Como X es un continuo, entonces X posee un base numerable $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $U_n = B_n - \{p\}$ y C_n la componente de $X - U_n$ que contiene a p . Notemos que cada C_n es un subcontinuo propio de X que contiene a p . En consecuencia $\bigcup \{C_n : n \in \mathbb{N}\} \subset K(p)$. Ahora, dado $q \in K(p)$, existe S_q subcontinuo propio de X tal que $p, q \in S_q$. Luego, $X - S_q$ es un abierto de X , por lo que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_m \subset X - S_q$. Así, S_q es un subconjunto conexo de $X - U_m$ que contiene a p . En consecuencia, $S_q \subset C_m$, en particular, $q \in C_m$. De esto, $K(p) \subset \bigcup \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$. Concluyendo así la prueba. □

Teorema 7.12. (Teorema de Baire.) *Sean X un continuo y $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de subcontinuos propios de X . Si cada S_n tiene interior vacío, entonces $\bigcup S_n$ tiene interior vacío.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $U_n = X - S_n$. Como $\text{int}_X(S_n) = \emptyset$, entonces U_n es denso y abierto de X . Sea V abierto de X y no vacío. Así, existen $X_0 \in X$ y $r_0 > 0$ tal que $B(x_0, r_0) \subset V$.

Afirmación: existen $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ sucesión en X y $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ sucesión en \mathbb{R}^+ tales que $B(x_n, 2r_n) \subset U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$ y $r_n < \frac{1}{n}$.

En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que x_m y r_m ya están elegidos para $m < n$. Como U_n es denso, existe $x_n \in U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$. Al ser $U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$ abierto de X , existe $r_n > 0$ tal que $r_n < \frac{1}{n}$ y $B(x_n, 2r_n) \subset U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$. Concluyendo así la prueba de la afirmación.

Notemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $B(x_n, 2r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \subset V$. De esto, $d(x_n, x_{n+1}) < r_n < \frac{1}{n}$. Por tanto, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy.

Como X es compacto, existe $x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $r_n > 0$, por la convergencia de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, existe $n_0 > n$ tal que $d(x, x_{n_0}) < r_n$. En consecuencia, $d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_n) < r_n + r_n = 2r_n$, es decir, $x \in B(x_n, 2r_n)$. Como $B(x_n, 2r_n) \subset U_n$, tenemos que $x \in \bigcap U_n$. De esto, $x \in \bigcap U_n \cap V$. Por lo tanto, $\bigcap U_n$ es denso en X . Finalmente, como $X - \bigcap U_n = \bigcup (X - U_n) = \bigcup S_n$, $\bigcup S_n$ tiene interior vacío. \square

Teorema 7.13. *Sea X un continuo. X es descomponible si y solo si X es composante de alguno de sus puntos.*

Demostración. Supongamos que X es descomponible. Entonces existen A y B subcontinuos propios de X tales que $X = A \cup B$. Por la conexidad de X , tenemos que $A \cap B \neq \emptyset$. Sea $p \in A \cap B$. Luego, $A \subset K(p)$ y $B \subset K(p)$. Por lo tanto, $K(p) = X$.

Ahora, supongamos que existe $p \in X$ tal que $K(p) = X$. Luego, por el Teorema 7.11, $X = \bigcup S_n$, donde cada S_n es un subcontinuo propio de X . Por el Teorema 7.12, S_m tiene interior no vacío, para algún $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, por el Teorema 7.9, X es descomponible. \square

Teorema 7.14. *Si X es un continuo indescomponible y $K(p)$ una composante de X , entonces $K(p)$ es composante de cada uno de sus elementos.*

Demostración. Sea $q \in K(p)$, entonces existe S_q subcontinuo propio de X tal que $p, q \in S_q$. Veamos que $K(q) = K(p)$. Dado $a \in K(q)$, existe S_a subcontinuo propio de X tal que $q, a \in S_a$. Luego, $S_q \cup S_a$ es un subcontinuo de X . Más aún, por la indescomponibilidad de X , $S_q \cup S_a$ es un subcontinuo propio de X que contiene a p y a a . En consecuencia, $K(q) \subset K(p)$. Similarmente se tiene la otra contención, concluyendo así la prueba. \square

Corolario 7.15. *Si X es un continuo indescomponible, entonces las componentes de X son ajenas dos a dos.*

Demostración. Sean $K(p)$ y $K(q)$ componentes de X distintas. Supongamos que $K(p) \cap K(q) \neq \emptyset$. Sea $a \in K(p) \cap K(q)$. Por el Teorema 7.14, $K(p) = K(a) = K(q)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $K(p)$ y $K(q)$ son ajenas. \square

Teorema 7.16. *Si X es un continuo indescomponible, entonces X no es arco-conexo.*

Demostración. Supongamos por el contrario, que X es arco-conexo. Como X es indescomponible, por el Teorema 7.13, existen $p, q \in X$ tal que $K(p) \neq K(q)$. Como X es arco-conexo, existe un arco A que une a p y q . Como X no es un arco, por ser indescomponible, tenemos que A es un subcontinuo propio que contiene a p y q . En consecuencia, $p \in K(q)$. Por el Teorema 7.14, $K(p) = K(q)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X no es arco-conexo. \square

De esto, el arcoiris de Knaster no es arco-conexo, y por lo tanto, no es localmente conexo.

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por haber dedicado su valioso tiempo y empeño para la revisión de este trabajo, gracias a sus sugerencias y comentarios es como se obtuvo la calidad del contenido de este material.

Bibliografía

- [1] J. Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1978.
- [2] R. Hernández Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez de la Vega, *Rigidity of hyperspaces*, Rocky Mt. J. Math. 45 (1) (2015) 213–236.
- [3] R. Hernández Gutiérrez, V. Martínez de la Vega, *Rigidity of symmetric products*, Topol. Appl. 160 (2013) 1577–1587.
- [4] A. Illanes, S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [5] Bronislaw Knaster, *Sur les continus non-bornés*, Fundamenta Mathematicae, Vol. 5 (1924) 23–58.
- [6] C. Kuratowski, *Théorie des Continus Irréductibles Entre Deux Points I*, Fundamenta Mathematicae, Vol. 3 (1922) 200–231.
- [7] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Academic Press, New York, N.Y., 1968.

- [8] F. Leon Jones, *Historia y desarrollo de la teoría de los continuos indecomponibles*, Aportaciones Matemáticas, Vol. 27, ISBN:968-36-3591-1, 2004.
- [9] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory. An introduction*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx
218570567@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx

Capítulo 7

Los continuos enrejados tienen (n, m) -ésimo hiperespacio suspensión único

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero,
Germán Montero Rodríguez
FCFM, BUAP

Resumen

Sean X un continuo métrico y $n \in \mathbb{N}$. Consideramos los hiperespacios $C_n(X) = \{A \subset X : A \text{ es no vacío, cerrado de } X \text{ con a lo más } n \text{ componentes}\}$ y $F_n(X) = \{A \subset X : A \text{ es no vacío, cerrado de } X \text{ con a lo más } n \text{ puntos}\}$, con la métrica de Hausdorff. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m \leq n$, sea $HS_m^n(X)$ el espacio cociente $C_n(X)/F_m(X)$ con la topología cociente. Aquí demostramos que si $m, n \in \mathbb{N} - \{1\}$, tal que $m \leq n$, X es un continuo enrejado y Y un continuo tal que $HS_m^n(X)$ es homeomorfo a $HS_m^n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y .

1 Introducción

Uno de los conceptos principales a lo largo de este trabajo es el de **continuo** el cual es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Un hiperespacio es una familia de subconjuntos de un continuo con ciertas características en particular. Dado un continuo X los primeros hiperespacios que se comenzaron a estudiar fueron 2^X , $C(X)$, $C_n(X)$ y $F_n(X)$ y que seguirán siendo objeto de estudio en este trabajo.

En 1979, S. B. Nadler Jr. introduce el concepto de hiperespacio suspensión de un continuo, véase [18, Pág. 125]. En 2004, Sergio Macías lo generaliza al n -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo y es definido como el espacio cociente $C_n(X)/F_n(X)$ el cual se obtiene de $C_n(X)$ al identificar a $F_n(X)$ en un punto y se denota como $HS_n(X)$, véase [13, Pág. 127]. El

(n, m) -ésimo **hiperespacio suspensión** de un continuo X es el espacio cociente $C_n(X)/F_m(X)$ que se obtiene de $C_n(X)$ al identificar a $F_m(X)$ a un punto, donde $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, y lo denotamos por $HS_m^n(X)$. La prueba de que $HS_m^n(X)$ es un continuo se encuentra en [7, Capítulo 3, Corolario 4.15].

Sean X un continuo y $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio de X , decimos que X tiene **hiperespacio único** $\mathcal{H}(X)$ si se cumple lo siguiente: si Y es un continuo tal que $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y .

El estudio de la unicidad de hiperespacios ha sido estudiada para algunas familias de continuos; gráficas finitas, continuos enrejados, dendritas, etc.

En [8, Teorema 3.8], se demuestra que si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, entonces X tiene hiperespacio $C_n(X)$ único. Posteriormente, en [3, Corolario 5.9], se demuestra que si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, entonces X tiene hiperespacio $F_n(X)$ único. También, en [4, Teorem 37], se demuestra la unicidad del hiperespacio $C_n(X)$ para cuando X es un continuo enrejado.

En [5, Teorem 3.4], se demuestra que si X es un continuo enrejado y $n \in \mathbb{N}$, entonces X tiene hiperespacio $HS_n(X)$ único. Aquí generalizamos este resultado al $HS_m^n(X)$, véase el Teorema 6.4.

En [2, Teorema 3.6], se demuestra que si X es una gráfica finita y $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $m \leq n$, entonces X tienen hiperespacio $HS_m^n(X)$ único. Como las gráficas finitas son continuos enrejados, el Teorema 6.4, que originalmente se encuentra en [6, Teorema 4.4], extiende este resultado a una familia mas grande.

2 Preliminares

Dado un subconjunto A de un continuo X , el **interior**, la **cerradura** y la **frontera** de A en X , son denotados por $\text{int}_X(A)$, $\text{cl}_X(A)$ y $\text{Bd}_X(A)$, respectivamente. Si d es la métrica de X , $t \in X$ y $\varepsilon > 0$, sea $B_X(t, \varepsilon) = \{x \in X : d(t, x) < \varepsilon\}$. Como es usual, los símbolos \emptyset , \mathbb{N} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{R}^+ y \mathbb{R}^2 , representan el conjunto vacío, los números naturales, los números racionales, los números reales, los números reales positivos y el plano euclidiano, respectivamente. La cardinalidad de un conjunto A se representa por $|A|$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. Una **n-celda** es un espacio topológico homeomorfo a la bola unitaria $B_n(\mathbf{0}, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_n \leq 1\}$. Una **curva cerrada simple** es

un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$. Un **n-odo simple** es la unión de n arcos que se intersectan solamente en un punto extremo v . El punto v es llamado el **vértice**. Un 3-odo simple es llamado **triodo simple**.

Sean X un continuo y $x \in X$. Decimos que X es **localmente conexo** en x , si para cada abierto U de X tal que $x \in U$, existe un abierto y conexo V en X tal que $x \in V \subset U$. El continuo X es localmente conexo, si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Teorema 2.1. *Un espacio X es localmente conexo si y solo si las componentes de cada subconjunto abierto en X son abiertas en X .*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sean U abierto en X y C componente de U . Sea $p \in C \subset U$. Como X es localmente conexo, tenemos que existe V abierto y conexo en X tal que $p \in V \subset U$. Luego, por la maximalidad de C , $p \in V \subset C$. Por lo tanto, C es abierto en X .

Ahora, supongamos que las componentes de cada subconjunto abierto de X son abiertas. Dados $p \in X$ y U abierto en X que contiene a p . Sea C la componente de U que contiene a p . Luego, C es abierto y conexo en X tal que $p \in C \subset U$. Por lo tanto, X es localmente conexo. \square

Con ayuda del Teorema 2.1 se puede demostrar el siguiente resultado.

Teorema 2.2. *Sea X un espacio localmente conexo. Si U es un subconjunto abierto de X , entonces U es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que U es un subconjunto abierto de X y $x \in U$. Sea V un abierto de U tal que $x \in V$. Como U es abierto de X , entonces V es un abierto de X . Como X es localmente conexo, existe V' abierto de X y conexo tal que $x \in V' \subset V$. Como U es abierto, entonces V' es abierto de U . Por tanto, U es localmente conexo. \square

Lema 2.3. *Sean X, Y continuos y $f: X \rightarrow Y$ una función continua. Si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo.*

Demostración. Sea U un abierto de Y y C una componente de U . Consideramos $x \in f^{-1}(C)$ y C_x la componente de $f^{-1}(U)$ tal que $x \in C_x$. Como X es localmente conexo y $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de X , por el Teorema 2.1, C_x es abierto de X . Como f es continua, entonces $f(C_x)$ es conexo. Además, $f(x) \in f(C_x) \subset U$. Como C es componente de U y $f(x) \in C$, entonces

$f(C_x) \subset C$. Así, $C_x \subset f^{-1}(C)$. Es decir, $f^{-1}(C)$ es un subconjunto abierto de X . Luego, $X - f^{-1}(C)$ es un subconjunto cerrado de X y dado que f es cerrada, entonces $f(X - f^{-1}(C)) = Y - C$ es un subconjunto cerrado de Y . Así, C es abierto de Y . Por el Teorema 2.1, Y es localmente conexo. \square

Otro tipo de conexidad es la de espacio conexo en pequeño, la cual nos ayuda en la prueba del Teorema 5.2.

Definición 2.4. Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Decimos que X es **conexo en pequeño** en p si para cada subconjunto abierto U de X tal que $p \in U$, existe un subconjunto V de X conexo tal que $p \in \text{int}_X(V) \subset V \subset U$. El espacio X es conexo en pequeño, si X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.

De las definiciones se puede observar que si un espacio es localmente conexo en un punto, entonces es conexo en pequeño en ese mismo punto. Pero el regreso no siempre es cierto. Sin embargo, de manera global las dos nociones de conexidad coinciden, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 2.5. *Un espacio X es localmente conexo si y solo si X es conexo en pequeño.*

Demostración. Sean U un abierto de X y C una componente de U . Sea $y \in C$. Como $y \in U$ y X es conexo en pequeño en y , existe un conjunto conexo V de X tal que $y \in \text{int}_X(V) \subset V \subset U$. Como C es conexo maximal, entonces $V \subset C$. Así, $y \in \text{int}_X(V) \subset C$. Por tanto, C es abierto de X . Por el Teorema 2.1, se tiene que X es localmente conexo. La otra parte es inmediata. \square

Sean X un continuo, $p \in X$ y β un número cardinal. Decimos que p **tiene orden en X** menor o igual a β , denotado por $\text{ord}(p, X) \leq \beta$, si p tiene una base de vecindades \mathfrak{B} en X tal que $|Bd_X(U)| \leq \beta$, para cada $U \in \mathfrak{B}$. Decimos que p **tiene orden en X** igual a β ($\text{ord}(p, X) = \beta$) si $\text{ord}(p, X) \leq \beta$ y $\text{ord}(p, X) \not\leq \alpha$ para todo número cardinal $\alpha < \beta$. Sean $E(X) = \{x \in X : \text{ord}(x, X) = 1\}$, $O(X) = \{x \in X : \text{ord}(x, X) = 2\}$ y $R(X) = \{x \in X : \text{ord}(x, X) \geq 3\}$. Los elementos de $E(X)$ (respectivamente, $O(X)$ y $R(X)$) son llamados **puntos extremos** (respectivamente, **puntos ordinarios** y **puntos de ramificación**) de X .

Una **gráfica finita** es un continuo que puede ser expresado como la unión de un número finito de arcos tales que la intersección de cualesquiera dos de ellos es un conjunto finito.

Teorema 2.6. Sean X un continuo y $x \in X$. Si U es un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$, existe un subconjunto abierto V de X tal que $x \in V \subset \text{cl}_X(V) \subset U$.

Demostración. Como U es un subconjunto abierto en X y $x \in U$, entonces $X - U$ es cerrado de X y $x \notin X - U$. Como X es un espacio métrico, se puede probar que existen V, W abiertos X ajenos tales que $x \in V$ y $X - U \subset W$. Además, como $V \subset X - W$ y $X - W$ es cerrado de X , entonces $\text{cl}_X(V) \subset X - W$. Como $X - U \subset W$, se tiene que $X - W \subset U$. Así, $x \in V \subset \text{cl}_X(V) \subset U$. \square

Dado cualquier número entero n mayor o igual que -1 , vamos a definir recursivamente cuándo un espacio métrico separable X tiene **dimensión** menor o igual que n , lo cual denotamos por $\text{dim}[X] \leq n$, de la siguiente forma:

- (a) Para cualquier espacio métrico separable X , $\text{dim}[X] \leq -1$ si y solo si $X = \emptyset$.
- (b) Dada $n \geq 0$, supongamos que hemos definido cuándo un espacio métrico separable tiene dimensión menor o igual que $n - 1$. Entonces, para cualquier espacio métrico separable X y cualquier $p \in X$, $\text{dim}_p[X] \leq n$ si X tiene una base local de vecindades de p cuyas fronteras tienen dimensión menor o igual a $n - 1$. Además, si para cada $p \in X$ se satisface que $\text{dim}_p[X] \leq n$, entonces $\text{dim}[X] \leq n$.

Definimos también lo siguiente:

- (a) Para cualquier espacio métrico separable X y cualesquiera $p \in X$ y $n \geq 0$, $\text{dim}_p[X] = n$ si $\text{dim}_p[X] \leq n$ y es falso que $\text{dim}_p[X] \leq n - 1$.
- (b) Para cualquier espacio métrico separable X y cualquier $n \geq 0$, la dimensión de X es n , denotada por $\text{dim}[X] = n$, si $\text{dim}[X] \leq n$ y es falso que $\text{dim}[X] \leq n - 1$.
- (c) Para cualquier espacio métrico separable X , la dimensión de X es ∞ , denotada por $\text{dim}[X] = \infty$, si $\text{dim}[X] \leq n$ es falso para cada $n \in \mathbb{N}$.

El siguiente resultado refleja cómo se comporta la dimensión con respecto a subespacios.

Teorema 2.7. [1, Teorema 1.68] Si X es un continuo, A un subespacio de X y $p \in A$, entonces

- (a) $\dim[A] \leq \dim[X]$.
- (b) $\dim_p[A] \leq \dim_p[X]$.
- (c) Si $p \in \text{int}_X(A)$, entonces $\dim_p[A] = \dim_p[X]$.

Dado un continuo X , un **ciclo** en X es una curva cerrada simple S en X tal que $|\text{Bd}_X(S)| \leq 1$. Un **arco libre** en X es un arco α tal que $\text{Bd}_X(\alpha) \subset E(\alpha)$. Un **arco libre maximal** en X es un arco libre en X que es maximal, con respecto a la inclusión. Un **arco exterior** en X es un arco libre maximal α tal que $\text{Bd}_X(\alpha) \subsetneq E(\alpha)$. Sean

$$\mathcal{A}_R(X) = \{J \subset X : J \text{ es un ciclo en } X\}.$$

$$\mathcal{A}_E(X) = \{J \subset X : J \text{ es un arco exterior en } X\}.$$

$$\mathcal{A}_S(X) = \{J \subset X : J \text{ es un arco libre maximal en } X\} \cup \mathcal{A}_R(X).$$

Definición 2.8. Dado un continuo X , sean

$$\mathcal{G}(X) = \{p \in X : p \text{ tiene una vecindad } W \text{ en } X \text{ tal que } W \text{ es una gráfica finita}\}, \text{ y}$$

$$\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X).$$

El continuo X es **casi enrejado** si el conjunto $\mathcal{G}(X)$ es denso en X , y un continuo casi enrejado es **enrejado** si X tiene una base de vecindades \mathfrak{B} tal que para cada $U \in \mathfrak{B}$, $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo.

Observación 2.9. Si X es un continuo casi enrejado, para cada $U \neq \emptyset$ abierto de X , se tiene $U \cap \mathcal{G}(X) \neq \emptyset$, es decir, $U \not\subset \mathcal{P}(X)$. Así, $\text{int}_X(\mathcal{P}(X)) = \emptyset$.

Cabe mencionar que un continuo enrejado es localmente conexo, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 2.10. Si X es un continuo enrejado, entonces X es localmente conexo.

Demostración. Sea \mathfrak{B} una base de vecindades de X tal que para cada $U \in \mathfrak{B}$, $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo. Como X es casi enrejado, por la Observación 2.9, $\text{int}_X(\mathcal{P}(X)) = \emptyset$. Así, para cada $U \in \mathfrak{B}$, $\text{int}_X(U) \subset \text{cl}_X(U - \mathcal{P}(X))$. Por lo tanto, la familia $\mathfrak{B}' = \{\text{cl}_X(U - \mathcal{P}(X)) : U \in \mathfrak{B}\}$ es una base de vecindades conexas para X . Luego, X es localmente conexo. □

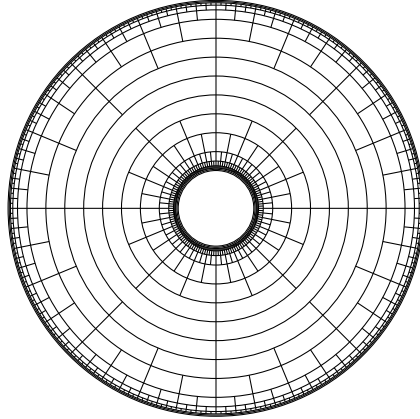


Figura 1: Continuo enrejado

3 Hiperespacios

Dados un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, consideremos los hiperespacios de X siguientes.

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : A \text{ es no vacío y es cerrado de } X\}. \\ F_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}. \\ C_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}. \end{aligned}$$

Definición 3.1. Sea X un continuo con métrica d . Para cualesquiera $A \subset X$ y $\varepsilon > 0$, definimos la **nube** de radio ε alrededor de A , denotada por $N(\varepsilon, A)$, como el conjunto

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon, \text{ para algún } a \in A\}.$$

Escribiremos $N_X(\varepsilon, A)$ cuando el espacio topológico X necesite ser mencionado.

Definición 3.2. Sea X un continuo con métrica d . Definimos la función $H: 2^X \times 2^X \rightarrow [0, \infty)$ como

$$H(A, B) = \inf \{r > 0 : A \subset N(r, B) \text{ y } B \subset N(r, A)\}.$$

Teorema 3.3. [21, Teorema 0.2] Si X es un continuo, entonces la función H es una métrica para 2^X , conocida como la **métrica de Hausdorff**.

Dado que $C_n(X)$ y $F_n(X)$ son subespacios de 2^X , los consideramos con la métrica de Hausdorff heredada de 2^X .

Definición 3.4. Sean X un continuo con métrica d , $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$ definimos

$$B^H(\varepsilon, A) = \{B \in 2^X : H(B, A) < \varepsilon\}.$$

Definición 3.5. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y A_1, \dots, A_n subconjuntos no vacíos de X . El **vietórico** de A_1, \dots, A_n , denotado por $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$, es el conjunto

$$\{B \in 2^X : B \subset \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ y } B \cap A_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Teorema 3.6. [21, Teorema 0.11] Si X es un continuo con una topología τ , entonces la colección

$$\{\langle S_1, \dots, S_n \rangle : S_i \in \tau \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}\},$$

es una base para una topología para 2^X .

La topología generada por la base mencionada en el Teorema 3.6 es conocida como la **topología de Vietoris**.

Teorema 3.7. [21, Teorema 0.13] Si X es un continuo, entonces la topología inducida por la métrica de Hausdorff sobre 2^X coincide con la topología de Vietoris.

Para un continuo X , el hiperespacio $F_n(X)$ es el **n -ésimo producto simétrico** de X y $C_n(X)$ es el **n -ésimo hiperespacio** de X . Escribimos simplemente $C(X)$ para denotar a $C_1(X)$. A $C(X)$ se le conoce como el **hiperespacio de los subcontinuos** de X . Note que $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$ es una copia isométrica de X . Definimos $F_0(X) = \emptyset$.

Definición 3.8. Sean X un continuo y $\mathcal{A} \subset 2^X$, denotamos a la unión de los elementos de \mathcal{A} como $\bigcup \mathcal{A}$ y es el conjunto

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x \in X : \text{ existe } A \in \mathcal{A} \text{ tal que } x \in A\}.$$

Lema 3.9. [21, Lema 1.49] Sean X un continuo y \mathcal{A} un subcontinuo de 2^X tal que $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es un subcontinuo de X .

4 El (n, m) -ésimo hiperespacio suspensión

Una forma de obtener continuos a partir de uno dado, es mediante el proceso de pegar o identificar algunos de sus puntos. Se puede decir que esa es la idea intuitiva del espacio cociente. Para llegar a esto necesitamos las siguientes definiciones.

Definición 4.1. Una **descomposición** \mathcal{D} de un continuo X es una familia de subconjuntos no vacíos de X ajenos entre sí tal que $\bigcup \mathcal{D} = X$.

Para un continuo X , dada una descomposición de X el **espacio cociente**, denotado por X/\mathcal{D} , es el espacio cuyos puntos son los elementos de \mathcal{D} . La función $q: X \rightarrow X/\mathcal{D}$ definida como $q(x) = D$ donde D es el único elemento de \mathcal{D} tal que $x \in D$, se conoce como la función cociente. La topología para X/\mathcal{D} definida como $\tau(\mathcal{D}) = \{U \subset X/\mathcal{D}: q^{-1}(U) \text{ es subconjunto abierto de } X\}$, se conoce como la topología cociente. Véase [11, Teorema 2.2]. No es muy difícil de convencerse de que $\tau(\mathcal{D})$ es la topología más grande para X/\mathcal{D} que hace continua a la función cociente q véase [11, Teorema 2.2].

Definición 4.2. Sean X un continuo y \mathcal{D} una descomposición de X . Decimos que \mathcal{D} es **semicontinua superiormente** si para cada elemento $D \in \mathcal{D}$ y cada abierto U de X tal que $D \subset U$ existe un abierto V de X tal que $D \subset V$ y además si $W \in \mathcal{D}$ tal que $W \cap V \neq \emptyset$, entonces $W \subset U$.

Por [20, Teorema 3.10] si X es un continuo y \mathcal{D} es una descomposición semicontinua superiormente de X , entonces el espacio cociente $(X/\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es un continuo.

Nuestro interés específico, de los espacios cociente se centra en un caso particular, como a continuación lo definimos. Sean X un continuo y $A \subset X$ cerrado no vacío. Consideramos la siguiente descomposición de X ;

$$\mathcal{D} = \{\{x\}: x \in X - A\} \cup \{A\}.$$

En este caso, el espacio cociente X/\mathcal{D} lo denotamos por X/A . Como \mathcal{D} es semicontinua superiormente, el espacio cociente X/A es un continuo. Intuitivamente, el espacio cociente X/A se obtiene de X al identificar a A con un punto.

En [15, Sección 1.8] se prueba que si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $2^X, C_n(X)$ y $F_n(X)$ son continuos. Además, $F_1(X) \subset F_n(X) \subset C_n(X) \subset$

2^X . Así, el (n, m) -ésimo **hiperespacio suspensión** de X , denotado por $HS_m^n(X)$ y que es el objeto de estudio de este trabajo, es el espacio cociente $C_n(X)/F_m(X)$ con la topología cociente, que intuitivamente es identificar $F_m(X)$ con un punto.

Dados X un continuo, $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, q_X denota la proyección natural $q_X: C_n(X) \rightarrow HS_m^n(X)$ y F_X^m denota el elemento $q_X(F_m(X))$. Note lo siguiente:

$$q_X|_{C_n(X)-F_m(X)}: C_n(X) - F_m(X) \longrightarrow HS_m^n(X) - \{F_X^m\}$$

es un homeomorfismo.

Los siguiente ejemplos ilustran a un continuo X con sus respectivos hiperespacios $C(X)$ y $HS_1^1(X)$.

Ejemplo 1. Sea $X = [0, 1]$. En [9, Pág. 23] se demuestra que un modelo para el hiperespacio $C(X)$ es un triángulo T en el plano con vértices en $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$, (una 2-celda). donde los elementos de $F_1(X)$ quedan representados por el un lado de T (la diagonal). Así, el hiperespacio suspensión $HS_1^1(X)$, que se obtiene de $C(X)$ al comprimir a $F_1(X)$ en un punto, también es una 2-celda. La Figura 2 ilustra lo dicho.

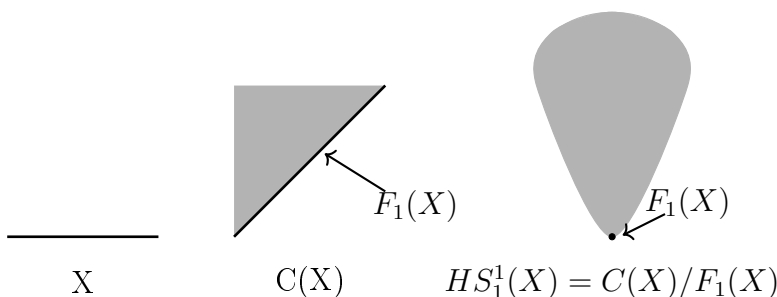


Figura 2: Hacia el hiperespacio suspensión del arco.

Ejemplo 2. Sea T el triodo simple. En [9, Pág. 24] se demuestra que un modelo para el hiperespacio $C(T)$ es la unión de un cubo sólido en \mathbb{R}^3 con tres triángulos sólidos, donde los elementos de $F_1(T)$ quedan representados por la unión de los lados de los triángulos que se intersectan únicamente en el punto $(0, 0, 0)$. Así, al comprimir a $F_1(T)$ de $C(T)$ en un punto, se obtiene

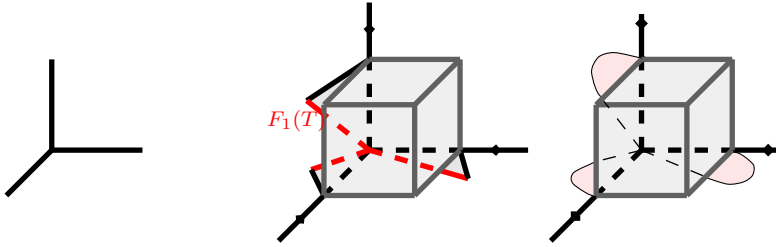


Figura 3: Hacia el hiperespacio suspensión de T .

un modelo para el hiperespacio suspensión $HS_1^1(T)$ el cual es homeomorfo a $C(T)$. La Figura 3 ilustra lo dicho.

En los Ejemplos 1 y 2 se puede observar que el hiperespacio $C(X)$ es homeomorfo al hiperespacio suspensión $HS_1^1(X)$. Se puede uno preguntar si eso sucede siempre. En el Ejemplo 3 se ilustra que no siempre pasa eso.

Ejemplo 3. Sea S^1 la circunferencia unitaria en el plano centrada en el origen. En [9, Pág. 23] se demuestra que un modelo para $C(S^1)$ es el disco en el plano centrado en el origen, donde $F_1(X)$ queda representado por la frontera de dicho disco. Así, tenemos que $HS_1^1(S^1)$ es una 2-esfera. La Figura 4 muestra lo dicho.

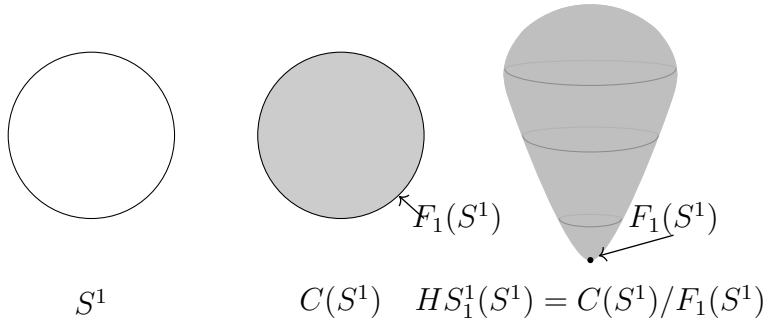


Figura 4: Hacia el hiperespacio suspensión de S^1

5 Resultados previos

En esta sección presentamos algunos resultados que son necesarios para obtener el resultado principal.

Teorema 5.1. [14, Teorema 3.2] *Sea $n \in \mathbb{N}$. Un continuo X es localmente conexo si y solo si $C_n(X)$ es localmente conexo.*

Teorema 5.2. *Sean X un continuo y $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$. Si $C_n(X) - F_m(X)$ es localmente conexo, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Sean $x \in X$ y U abierto de X tal que $x \in U$. Como U es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(x, \varepsilon) \subset U$. Sea K la componente de $\text{cl}_X(B(x, \varepsilon))$ tal que $x \in K$. Así, K es un subcontinuo no degenerado de X tal que $x \in K \subset U$. Luego $K \in \langle U \rangle$. Más aún, $K \in \langle U \rangle - F_m(X)$.

Como $C_n(X) - C_m(X)$ es localmente conexo, existe V' abierto y conexo de $C_n(X) - F_m(X)$ tal que $K \in V' \subset \langle U \rangle - F_m(X)$. Como $C_n(X)$ es regular, por el Teorema 2.6, existe V'' abierto de $C_n(X)$ tal que $K \in V'' \subset \text{cl}_{C_n(X)}(V'') \subset V'$. Sea V la componente de V'' tal que $K \in V$, luego $K \in V \subset \text{cl}_{C_n(X)}(V) \subset \langle U \rangle - F_m(X)$.

Note que $K \in \text{cl}_{C_n(X)}(V) \cap C(X)$. Por el Teorema 3.9, se tiene que $\bigcup(\text{cl}_{C_n(X)}(V))$ es un subcontinuo de X . Sea $C = \bigcup(\text{cl}_{C_n(X)}(V))$. Como V es abierto en $C_n(X)$ existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $B_{H_d}(K, \varepsilon_1) \subset V$. Sea $y \in B_d(x, \varepsilon_1)$, entonces $K \cup \{y\} \in B_{H_d}(K, \varepsilon_1)$. Luego $K \cup \{y\} \in \text{cl}_{C_n(X)}(V)$, lo cual implica que $y \in C$. Por tanto $B_d(x, \varepsilon_1) \subset C$. Así, $x \in \text{int}_X(C) \subset C$. Sea $h \in C$, entonces $\{h\} \in \text{cl}_{C_n(X)}(V) \subset \langle U \rangle - F_m(X)$ lo que implica $\{h\} \subset U$ es decir, $h \in U$. Por tanto $x \in \text{int}_X(C) \subset C \subset U$, es decir, X es conexo en pequeño en x . Como x fue arbitrario, entonces X es conexo en pequeño. Por el Teorema 2.5, se tiene X es localmente conexo. \square

6 Resultados principales

Sea X un continuo, $m, n \in \mathbb{N}$, y $m < n$. Sea λ una clase de continuos y $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, F_n(X), C_n(X), HS_m^n(X)\}$. La clase de continuos λ es \mathcal{H} -Determinada si prueba que: si $X, Y \in \lambda$ y $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y .

Teorema 6.1. [6, Corolario 4.2] *Los elementos de la clase de continuos casi enrejados localmente conexos son HS_m^n -Determinado, para cada $m \in \mathbb{N} - \{1\}$, $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ tales que $m \leq n$.*

Dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, consideramos el siguiente subespacio de $C_n(X)$.

$$\mathcal{F}_n(X) = \{A \in C_n(X) : \dim_A[C_n(X)] < \infty\}.$$

El siguiente resultado nos ayuda en la prueba del Teorema 6.3.

Teorema 6.2. [4, Teorema 5] *Sea X un continuo localmente conexo. Las siguientes son equivalentes:*

- (a) X es enrejado.
- (b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n(X)$ es denso en $C_n(X)$.
- (c) Existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\mathcal{F}_n(X)$ es denso en $C_n(X)$.

Teorema 6.3. *Sean X un continuo enrejado y $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$. Si Y es un continuo tal que $HS_m^n(X)$ es homeomorfo a $HS_m^n(Y)$, entonces Y es enrejado.*

Demostración. Como X es localmente conexo, por el Teorema 5.1, $C_n(X)$ es localmente conexo para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $HS_m^n(X) = q_X(C_n(X))$ y la propiedad de ser localmente conexo es invariante bajo funciones continuas, véase [12, Teorema 5, Pág. 257], se tiene $HS_m^n(X)$ es localmente conexo. Luego, $HS_m^n(Y)$ es localmente conexo. Así, $HS_m^n(Y) - \{F_Y^m\}$ es localmente conexo, véase [12, Teorema 3, Pág. 230]. Como $q_Y|_{C_n(Y) - F_m(Y)} : C_n(Y) - F_m(Y) \rightarrow HS_m^n(Y) - \{F_Y^m\}$ es un homeomorfismo, tenemos que $C_n(Y) - F_m(Y)$ es localmente conexo. Por el Teorema 5.2 Y es un continuo localmente conexo.

Sean $h : HS_m^n(X) \rightarrow HS_m^n(Y)$ un homeomorfismo, $A \in C_n(X)$ y $B \in C_n(Y)$ tales que $h(q_X(A)) = F_Y^m$ y $h^{-1}(q_Y(B)) = F_X^m$. Definimos los siguientes conjuntos

$$\mathcal{K} = C_n(X) - (F_m(X) \cup \{A\}),$$

$$\mathcal{L} = C_n(Y) - (F_m(Y) \cup \{B\}),$$

También definimos la función $g: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ por $g = (q_Y)^{-1} \circ h \circ q_X|_{\mathcal{K}}$, la cual resulta ser un homeomorfismo.

Como \mathcal{K} y \mathcal{L} son abiertos en $C_n(X)$ y $C_n(Y)$, respectivamente, para cada $W \in \mathcal{K}$, se tiene $\dim_W[C_n(X)] = \dim_W[\mathcal{K}] = \dim_{g(W)}[\mathcal{L}] = \dim_{g(W)}[C_n(Y)]$, por el Teorema 2.7. Lo cual implica $g(\mathcal{F}_n(X) \cap \mathcal{K}) = \mathcal{F}_n(Y) \cap \mathcal{L}$. Por el Teorema 6.2, $\mathcal{F}_n(X)$ es denso en $C_n(X)$ y como \mathcal{K} es abierto en $C_n(X)$, entonces $\mathcal{F}_n(X) \cap \mathcal{K}$ es denso en \mathcal{K} , lo cual implica que $\mathcal{F}_n(Y) \cap \mathcal{L}$ es denso en \mathcal{L} . Como \mathcal{L} es denso en $C_n(Y)$, entonces $\mathcal{F}_n(Y)$ es denso en $C_n(Y)$. Por el Teorema 6.2, Y es un continuo enrejado. \square

El siguiente resultado es el principal objetivo de este trabajo.

Teorema 6.4. *Sean X un continuo enrejado, $m, n \in \mathbb{N} - \{1\}$, con $m \leq n$. Entonces X tiene hiperespacio $HS_m^n(X)$ único.*

Demostración. Sean Y un continuo y $h: HS_m^n(X) \rightarrow HS_m^n(Y)$ un homeomorfismo. El caso $m = n$ se obtiene de [5, Teorema 3.4]. Supongamos que $m < n$.

Como X es enrejado, por el Teorema 6.3, Y es enrejado. Por el Teorema 6.1, Y es homeomorfo a X . Por tanto, X tiene hiperespacio $HS_m^n(X)$ único. \square

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros el tiempo dedicado a la minuciosa revisión de este trabajo. Las sugerencias dieron como resultado la calidad de este material.

Bibliografía

- [1] J. G. Ahuatzi Reyes, *Los continuos enrejados tienen n -ésimo hiperespacio único*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014.
<http://www.fcfm.buap.mx/docencia/docs/tesis/matematicas/JoseGerardoAhuatziReyes.pdf>
- [2] J. G. Anaya, D. Maya, F. Vázquez Juárez, *The hyperspace $HS_m^n(X)$ for a finite graph X is unique*, *Topology Appl.* 157 (2018), 428-439.

- [3] E. Castañeda, A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topology Appl. 153 (2006), 1434–1450.
- [4] R. Hernández Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez de la Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, Rocky Mt. J. Math. 43 (5) (2013) 1583-1624.
- [5] D. Herrera Carrasco, M. de J. López y F. Macías Romero, *Framed continua have unique n -fold hyperspace suspension* Topol. Appl. 196 (2015) 652-667.
- [6] D. Herrera Carrasco, M. de J. López Toriz , F. Macías Romero, *On the (n,m) -fold hyperspace suspension of continua*, enviado 4 marzo de 2019 a Colloquium Mathematicum.
- [7] G. Hernández, D. Herrera, F. Macías, *Génesis del $(n-m)$ -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo* (Capítulo 3), Matemáticas Y Sus Aplicaciones 10, Colección Manuales y textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 51-71. Primera Edición 2018, ISBN: 978-607-525-521-7. Tiraje de 500 ejemplares. 176 Páginas. Publicado el 26 de octubre de 2018.
- [8] A. Illanes, *Finite graphs X have unique hyperspaces $C_n(X)$* , Topology Proc. 27 (2003) 179–188.
- [9] A. Illanes, *Uniqueness of Hyperspaces*, Questions Answers Gen. Topology, 30 (2012) 21–44.
- [10] A. Illanes, S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [11] A. de J. Libreros López, *Espacios cociente y encajes*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2016.
<https://www.fcm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/AntonioDeJesusLibrerosLopez.pdf>
- [12] K. Kuratowsk, *Topology*, vol. II, Academic Press, New York, 1968.

- [13] S. Macías, *On the n -fold hyperspace suspension of continua*, Topol . Appl. 138 (2004) 125–138.
- [14] S. Macías, *On the hyperspace $C_n(X)$ of a continuum X* , Topology Appl. 109 (2001), 237–256.
- [15] S. Macías, *Topics on continua*, Second Edition, Springer, 2018.
- [16] V. Martínez-de-la-Vega, *Dimension of n -fold hyperspaces of graphs*, Houston J. Math. 32 (2006), 783–799.
- [17] G. Montero Rodríguez, *Rigidez del n -ésimo hiperespacio de un continuo*, Tesis de maestría, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2015.
- [18] S. B. Nadler Jr, *A fixed point theorem for hyperspace suspensions*, Houston J. Math. 5 (1979) 125–132.
- [19] S. B. Nadler, Jr., *Dimension Theory: An introduction with exercises*, Aportaciones Matemáticas Serie Textos 18, Soc. Mat. Mexicana, 2002.
- [20] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An introduction*, Monographs and Text books in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.
- [21] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx

fmacias@fcfm.buap.mx

218570078@alumnos.fcfm.buap.mx

Capítulo 8

Una introducción a la categoría $\mathcal{T}op$, a los espacios Fréchet y límites inferiores

José Juan Angoa Amador, Agustín Contreras Carreto,
Manuel Ibarra Contreras
FCFM, BUAP

Resumen

En un principio se pensó, después de dar una definición de límite de una sucesión, que los espacios secuenciales eran la posible definición de espacio topológico. Posteriormente se observó que existían otros espacios que no eran de este tipo. Aquí presentamos algún tipo de universalidad que sí cumplen los espacios Fréchet y secuenciales, y es la teoría de categorías la que nos proveerá las herramientas para entender que estos espacios son “universales”.

En este trabajo recordaremos los conceptos categóricos necesarios, así como sus versiones topológicas, para obtener al final los Teoremas 9.1 y 9.2 y el Corolario 9.3.

1 Preludio topológico

Algunas nociones fundamentales en un espacio topológico son:

Definición 1.1. 1. Para todo espacio topológico X y $A \subseteq X$, definimos el conjunto

$$Suc(A) = \{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \text{para todo } n \in \mathbb{N}, x_n \in A\}.$$

2. Dado X un espacio topológico y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in Suc(X)$, diremos que $x \in \lim\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si y sólo si para toda vecindad abierta de x existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$.

3. $\lim(Suc(A)) = \{x : x \text{ es límite de alguna sucesión } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in Suc(A)\}$.

Con estas nociones, se pueden definir dos clases de espacios topológicos importantes:

Definición 1.2. 1. Un espacio Fréchet (también conocidos como Fréchet-Uryshon) es un espacio topológico X que cumple que para todo $A \subseteq X$, $cl_X(A) = \lim(Suc(A))$.

2. Un espacio X es secuencial si para todo $A \subseteq X$ se tiene que A es cerrado si y solo si $\lim(Suc(A)) \subseteq A$.

2 Preliminares categóricos

Para este trabajo daremos la noción de categoría más adecuada a nuestro interés.

Definición 2.1. Una categoría \mathcal{A} consta de:

(1) Un par de clases, $Ob(\mathcal{A})$ y $Mor(\mathcal{A})$, llamadas clase de objetos de \mathcal{A} y clase de morfismos de \mathcal{A} , respectivamente.

(2) Un par de funciones $Dom : Mor(\mathcal{A}) \rightarrow Ob(\mathcal{A})$ y $Cod : Mor(\mathcal{A}) \rightarrow Ob(\mathcal{A})$ tales que:

(a) Para todo $A, B \in Ob(\mathcal{A})$, la colección

$$Hom_{\mathcal{A}}(A, B) = \{f \in Mor(\mathcal{A}) : Dom(f) = A \text{ y } Cod(f) = B\}$$

es un conjunto.

(b) Si $\mathcal{C} = \{(f, g) \in Mor(\mathcal{A}) \times Mor(\mathcal{A}) : Dom(f) = Cod(g)\}$, existe una función $\circ : \mathcal{C} \rightarrow Mor(\mathcal{A})$, tal que

(i) $Dom(\circ((f, g))) = Dom(g)$ y $Cod(\circ((f, g))) = Cod(f)$.

(ii) Sean $(f, g), (g, h) \in \mathcal{C}$; entonces $(\circ((f, g), h), (f, \circ((g, h)))) \in \mathcal{C}$. Se cumple que

$$\circ((\circ((f, g), h)), (f, \circ((g, h)))) = \circ((f, \circ((g, h))))).$$

(iii) Para todo $X \in Ob(\mathcal{A})$, existe $I_X \in Hom_{\mathcal{A}}(X, X)$, tal que para todo $Y \in Ob(\mathcal{A})$, se cumple que si $f \in Hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$ y $g \in Hom_{\mathcal{A}}(Y, X)$, entonces

$$\circ((I_X, g)) = g \text{ y } \circ((f, I_X)) = f.$$

Observemos que si denotamos $\circ((f, g))$ por $f \circ g$, la propiedad (ii) de la Definición 2.1, (2), (b) se escribe como:

$$\text{si } (f, g), (g, h) \in \mathcal{C}, \text{ entonces } (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

También, la propiedad (iii) de la Definición 2.1, se escribe como: para todo $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, existe $I_X \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X)$, tal que para todo $Y \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, se cumple que si $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ y $g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, X)$, entonces $I_X \circ f = f$ y $I_X \circ g = g$.

Definición 2.2. Sea \mathcal{A} una categoría y $\mathcal{H} = (\mathcal{B}, \mathcal{M})$ una dupla de clases, tales que $\mathcal{B} \subseteq \text{Ob}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{M} \subseteq \text{Mor}(\mathcal{A})$. Si

1. $\text{Dom}(g) \in \mathcal{B}$ para todo $g \in \mathcal{M}$,
2. $\text{Cod}(g) \in \mathcal{B}$ para todo $g \in \mathcal{M}$, y
3. Si $\mathcal{C}' = \{(f, g) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} : \text{Cod}(g) = \text{Dom}(f)\}$ y para todo $(f, g) \in \mathcal{C}'$,

se cumple que $\circ(f, g) \in \mathcal{M}$.

Entonces $\text{Dom}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{B}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $\text{Cod}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{B}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $\circ_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{M}} : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{M}$ están bien definidas como las respectivas restricciones de Dom , Cod , \circ y le dan estructura de categoría a la dupla $(\mathcal{B}, \mathcal{M})$. Diremos que \mathcal{H} es una subcategoría de \mathcal{A} .

Definición 2.3. Dada $\mathcal{H} = (B, N)$ subcategoría de $\mathcal{A} = (A, M)$, diremos que \mathcal{H} es una subcategoría plena se \mathcal{A} , si para todo $W, V \in B$, se cumple que

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}}(W, V) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(W, V)$$

Observación 2.4. Sean \mathcal{A} una categoría y B una subclase de $\text{Ob}(\mathcal{A})$, siempre se puede construir una subcategoría \mathcal{B} de \mathcal{A} , donde $\text{Ob}(\mathcal{B}) = B$ y $\text{Mor}(\mathcal{B}) = \bigcup_{(X, Y) \in B \times B} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$. Notar que \mathcal{B} es una subcategoría plena de \mathcal{A} . En lo que sigue, dada una subclase B de $\text{Ob}(\mathcal{A})$, diremos que B es una subcategoría de \mathcal{A} , con la estructura dada para \mathcal{A} .

Nota 2.5. Denotamos por \mathcal{Top} , a la categoría de los espacios topológicos como objetos y las funciones continuas como morfismos.

Se pueden definir, como subcategorías plenas de \mathcal{Top} , las categorías \mathcal{Top}_i , donde los objetos son los espacios T_i con $i \in \{0, 1, 2, 3\}$; también las subcategorías plenas \mathcal{Com} , de los espacios compactos, la de los espacios Thychonoff, que denotaremos por \mathcal{Tych} , la de los espacios Fréchet, que denotaremos por \mathcal{Frech} , y la de los espacios secuenciales, que denotaremos por \mathcal{Sec} .

Definición 2.6. Si \mathcal{A} es una categoría, definimos \mathcal{A}^{op} (la categoría opuesta de \mathcal{A}) como la categoría que satisface las siguientes condiciones:

1. $Ob(\mathcal{A}^{op}) = Ob(\mathcal{A})$.
2. $Mor(\mathcal{A}^{op}) = Mor(\mathcal{A})$.
3. $Dom^{op} : Mor(\mathcal{A}^{op}) \rightarrow Ob(\mathcal{A}^{op})$, definida como $Dom^{op}(f) = Cod(f)$.
4. $Cod^{op} : Mor(\mathcal{A}^{op}) \rightarrow Ob(\mathcal{A}^{op})$, definida como $Cod^{op}(f) = Dom(f)$.
5. Si $\mathcal{C}^{op} = \{(f, g) : Cod^{op}(g) = Dom^{op}(f)\} = \{(g, f) : (g, f) \in \mathcal{C}\}$, definimos $\circ^{op} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow Mor(\mathcal{A}^{op})$ como $\circ^{op}(f, g) = \circ(g, f)$.
6. Tenemos que para todo $A, B \in Ob(\mathcal{A}^{op})$, $Hom_{\mathcal{A}^{op}}(A, B) = Hom_{\mathcal{A}}(B, A)$ y $I_X^{op} = I_X$.

Así, dada una propiedad P en una categoría \mathcal{A} , la propiedad P^{op} es la propiedad P , enunciada con las correspondientes relaciones, pero en \mathcal{A}^{op} . A veces se enuncia P^{op} como la propiedad co- P o la propiedad dual a P . Una herramienta muy útil en el trabajo con categorías es el llamado Principio de Dualidad, que dice: *Si una propiedad P , escrita en el lenguaje de la teoría de categorías, es verdadera en toda categoría, es decir, es un teorema de la teoría de categorías, entonces también es verdadera P^{op} en toda categoría (es decir, también es un teorema de la teoría).*

3 Algunos tipos de morfismos

Podemos definir algunos tipos de morfismos por medio de las propiedades generales de los morfismos de una categoría.

Definición 3.1. Sean \mathcal{A} una categoría, $X, Y \in Ob(\mathcal{A})$ y $f \in Hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$.

(1) Diremos que f es monomorfismo, si para todo $Z \in Ob(\mathcal{A})$ y $u, v \in Hom_{\mathcal{A}}(Z, X)$, si $f \circ u = f \circ v$ entonces $u = v$.

(2) Diremos que f es epimorfismo, si para todo $Z \in Ob(\mathcal{A})$ y $u, v \in Hom_{\mathcal{A}}(Y, Z)$, si $u \circ f = v \circ f$ entonces $u = v$.

(3) Diremos que f es bimorfismo, si f es monomorfismo y epimorfismo.

(4) Diremos que f es sección, si existe $g \in Hom_{\mathcal{A}}(Y, X)$ tal que $g \circ f = I_X$.

(5) Diremos que f es retracción, si existe $h \in Hom_{\mathcal{A}}(Y, X)$ tal que $f \circ h = I_Y$.

(6) Diremos que f es isomorfismo si existe $t \in Hom_{\mathcal{A}}(Y, X)$ tal que $f \circ t = I_Y$ y $t \circ f = I_X$.

(7) Si f es monomorfismo, diremos que f es monomorfismo extremo, si siempre que $f = h \circ g$, con $h, g \in \text{Mor}(\mathcal{A})$ y g es epimorfismo, podemos implicar que g es isomorfismo.

(8) Si f es epimorfismo, diremos que f es epimorfismo extremo, si siempre que $f = h \circ g$, con $h, g \in \text{Mor}(\mathcal{A})$ y h es monomorfismo, podemos implicar que h es isomorfismo.

Si $f \in \text{Mor}(\mathcal{A})$ es isomorfismo, entonces existe $t \in \text{Mor}(\mathcal{A})$ tal que $t \circ f = \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$ y $f \circ t = \text{Id}_{\text{Cod}(f)}$. Se puede demostrar fácilmente que t es único, con lo que podemos acordar la notación $t = f^{-1}$, y que f^{-1} es isomorfismo.

No es difícil demostrar que:

Proposición 3.2. *Si \mathcal{A} es una categoría y $f \in \text{Mor}(\mathcal{A})$, entonces:*

- (i) *Si f es sección, entonces f es monomorfismo.*
- (ii) *Si f es retracción, entonces f es epimorfismo.*
- (iii) *Si f es sección y epimorfismo, entonces f es isomorfismo.*
- (iv) *Si f es retracción y monomorfismo, entonces f es isomorfismo.*
- (v) *Si f es isomorfismo, entonces f es biformismo.*

Si además $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C)$ y $h = g \circ f$, entonces:

- (vi) *Si f y g son monomorfismos (respect. secciones), entonces h es monomorfismo (respect. sección).*
- (vii) *Si f y g son epimorfismos (respect. retracciones), entonces h es epimorfismo (retracción).*
- (viii) *Si h es monomorfismo (respect. sección), entonces f es monomorfismo (respect. sección).*
- (ix) *Si h es epimorfismo (respect. retracción), entonces g es epimorfismo (respect. retracción).*

Demostración. Demostremos algunas afirmaciones. Las otras se cumplirán por el Principio de Dualidad.

(i) Supongamos que f es sección. Sea $f \circ u = f \circ v$ y supongamos que existe $h \in \text{Mor}(\mathcal{A})$ tal que $h \circ f = \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$, luego $(h \circ f) \circ u = (h \circ f) \circ v$, entonces $\text{Id}_{\text{Dom}(f)} \circ u = \text{Id}_{\text{Dom}(f)} \circ v$, por tanto $u = v$, es decir f es monomorfismo.

(iii) Supongamos que f es sección y epimorfismo, entonces existe $h \in \text{Mor}(\mathcal{A})$, tal que $h \circ f = \text{Id}_{\text{Dom}(f)}$, luego $(f \circ h) \circ f = f \circ \text{Id}_{\text{Dom}(f)} = \text{Id}_{\text{Cod}(f)} \circ f$, por ser f epimorfismo, $f \circ h = \text{Id}_{\text{Cod}(f)}$, luego f es isomorfismo.

(vii) Supongamos que f y g son epimorfismos y que $u \circ h = v \circ h$, entonces $u \circ (g \circ f) = v \circ (g \circ f)$, como f es epimorfismo entonces $u \circ g = v \circ f$, como g es epimorfismo, tenemos que $u = v$.

(viii) Si h es monomorfismo y $f \circ u = f \circ v$, entonces $g \circ (f \circ u) = g \circ (f \circ v)$, es decir $h \circ u = h \circ v$, luego $u = v$. \square

Recordemos el concepto de objeto separador en una categoría.

Definición 3.3. Sean \mathcal{A} una categoría y $S \in Ob(\mathcal{A})$. El objeto S es un separador de la categoría \mathcal{A} si para $X, Y \in Ob(\mathcal{A})$ y $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$ con $f \neq g$, entonces existe $s \in Hom_{\mathcal{A}}(S, X)$, tal que $f \circ s \neq g \circ s$.

Definición 3.4. Si \mathcal{A} es una categoría, definimos las relaciones:

(i) Para todo $f, g \in Mor(\mathcal{A})$, diremos que f es isomorfo a g , si existe un isomorfismo $h \in Mor(\mathcal{A})$ tal que $f = h \circ g$ o $f = g \circ h$.

(ii) Para todo $A, B \in Ob(\mathcal{A})$, diremos que A es isomorfo a B , si existe $h \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ tal que h es isomorfismo.

Se puede demostrar que tales relaciones son de equivalencia en las clase $Mor(\mathcal{A})$ y $Ob(\mathcal{A})$ respectivamente, y también que todas las propiedades enunciadas en las definiciones 3.1 y 3.3, son invariantes respecto a estas relaciones. En la proposición siguiente aclaramos esta afirmación.

Proposición 3.5. (i) Sean $f, l \in Mor(\mathcal{A})$. Si f cumple alguna propiedad definida en la Definición 3.1 y l es isomorfo a f , entonces l cumple la misma propiedad.

(ii) Si $A, B \in Ob(Mor)$, B es isomorfo a A y A es separador, entonces B es separador.

Demostración. (i) Veamos algunos casos, por ejemplo:

(1) Si f y l son isomorfos y f es monomorfismo, entonces l es monomorfismo. En efecto, si $f = t \circ l$ con t isomorfismo, entonces $t^{-1} \circ f = l$, es claro que t^{-1} es monomorfismo, así que $t^{-1} \circ f$ es monomorfismo, (usar la Proposición 3.2). Análogamente, si $f = l \circ t$.

(2) Si f y l son isomorfos, digamos $f = t \circ l$, con t isomorfismo, y f es epimorfismo extremo, entonces l es epimorfismo extremo. En efecto, sea $l = h \circ g$ con h monomorfismo; notemos que usando $l = t^{-1} \circ f$, tenemos que l es epimorfismo. Por otro lado, $f = t \circ (h \circ g) = (t \circ h) \circ g$; como $t \circ h$ es monomorfismo, tenemos que $t \circ h$ es isomorfismo; por lo tanto $h = t^{-1} \circ t \circ h$ es isomorfismo.

Así concluimos que l es epimorfismo extremo. En el caso en que $f = l \circ t$, con t isomorfismo, y si $l = h \circ g$, con h monomorfismo, entonces, como f es epimorfismo y $f = l \circ t$, l es epimorfismo, y, como $f = l \circ t = (h \circ g) \circ t = h \circ (g \circ t)$ y f es epimorfismo extremo, h es isomorfismo.

(ii) Sean $A, B \in Ob(\mathcal{A})$, A objeto separador de \mathcal{A} , A isomorfo a B . Sea $h \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ isomorfismo, es decir $h^{-1} \in Hom_{\mathcal{A}}(B, A)$ es un isomorfismo. Por otro lado, sean $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(D, C)$ con $f \neq g$, entonces existe $l \in Hom_{\mathcal{A}}(A, D)$ tal que $f \circ l \neq g \circ l$, notar que $l \circ h^{-1} \in Hom_{\mathcal{A}}(B, D)$, y si $f \circ (l \circ h^{-1}) = g \circ (l \circ h^{-1})$, entonces $(f \circ (l \circ h^{-1})) \circ h = (g \circ (l \circ h^{-1})) \circ h$, luego $f \circ l = g \circ l$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $f \circ (l \circ h^{-1}) \neq g \circ (l \circ h^{-1})$ con $l \circ h^{-1} : B \rightarrow D$, así que B es un objeto separador de \mathcal{A} . \square

En $\mathcal{T}op$, tenemos algunos conceptos básicos muy importantes: Un isomorfismo en $\mathcal{T}op$, es una función continua abierta y biyectiva, es decir un homeomorfismo.

Asimismo, toda función $f \in Hom_{\mathcal{T}op}((X, \tau), (Y, \sigma))$ tiene dos factorizaciones canónicas:

a) $f = i \circ f|^{f[X]}$, donde $f|^{f[X]} : (X, \tau) \rightarrow (f[X], \sigma|_{f[X]})$ es la restricción del codominio de f , e $i : (f[X], \sigma|_{f[X]}) \rightarrow (Y, \sigma)$ es la inclusión. Ambas son continuas. A esta factorización le llamaremos, por el momento, la primera factorización canónica de f .

b) $f = \bar{f} \circ \pi_{\sim}$, donde \sim es la relación de equivalencia en X dada por: $x \sim y$ si, y sólo si, $f(x) = f(y)$; $\pi_{\sim} : (X, \tau) \rightarrow (X/\sim, \tau_{X/\sim})$ es la función cociente, donde $\tau_{X/\sim} = \{O \subseteq X/\sim : \pi_{\sim}^{-1}(O) \in \tau\}$. La función $\bar{f} : (X/\sim, \tau_{X/\sim}) \rightarrow (Y, \sigma)$, es la función tal que, para toda elemento $[x] \in X/\sim$, $\bar{f}([x]) = f(x)$. Ésta última está bien definida, por la naturaleza de la relación \sim , y es continua pues, si $U \in \sigma$, entonces $\pi_{\sim}^{-1}(\bar{f}^{-1}(U)) = (\bar{f} \circ \pi_{\sim})^{-1}(U) = f^{-1}(U) \in \tau$, lo cual implica que $\bar{f}^{-1}(U) \in \tau_{X/\sim}$. A esta factorización le llamaremos, también por el momento, la segunda factorización canónica de f .

Definición 3.6. Si $f \in Hom_{\mathcal{T}op}(X, Y)$, diremos que:

1. f es encaje o inmersión si es inyectiva y $f|^{f[X]} : X \rightarrow f[X]$, la restricción de f a su codominio, que aparece en la primera factorización canónica de ella, es isomorfismo.

2. f es cociente o identificación si es suprayectiva y $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$, la función que aparece en la segunda factorización canónica de f , es isomorfismo.

Tenemos los siguientes equivalencias:

Lema 3.7. *Sea $f \in \text{Hom}_{\text{Top}}((X, \tau), (Y, \sigma))$.*

1. *Si f es inyectiva, entonces son equivalentes:*

a) f es encaje,

b) $\tau = \{f^{-1}(V) : V \in \sigma\}$ (la topología inicial de X respecto a $((X, \tau), f)$),

c) para todo $(Z, \eta) \in \text{Ob}(\text{Top})$ y para toda función $g : Z \rightarrow X$, si $f \circ g : (Z, \eta) \rightarrow (Y, \sigma)$ es continua, entonces $g : (Z, \eta) \rightarrow (X, \tau)$ es continua,

d) si τ' es una topología de X tal que $f : (X, \tau') \rightarrow (Y, \sigma)$ es continua, entonces $\tau \subseteq \tau'$.

2. *Si f es sobreyectiva, entonces son equivalentes:*

a) f es cociente,

b) $\sigma = \{V \subseteq Y : f^{-1}(V) \in \tau\}$,

c) para todo espacio topológico (Z, η) y para cualquier función $g : Y \rightarrow Z$, si $g \circ f : (X, \tau) \rightarrow (Z, \eta)$ es continua, entonces $g : (Y, \sigma) \rightarrow (Z, \eta)$ es continua,

d) si σ' es una topología de Y para la cual $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma')$ es continua, entonces $\sigma' \subseteq \sigma$.

Demostración. 1. a) \Rightarrow b) Como f es encaje, $h = f|^{f[X]}$, de la primera factorización canónica de f , es homeomorfismo. Sea $\tau' = \{f^{-1}(V) : V \in \sigma\}$. Como $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ es continua, entonces $\tau' \subseteq \tau$. Pero si $U \in \tau$, entonces $f(U) = h(U) \in \sigma|^{f[X]}$, así que existe $V \in \sigma$ tal que $h(U) = V \cap f[X]$. Pero, dado que f es inyectiva, $U = f^{-1}(f(U)) = f^{-1}(V \cap f[X]) = f^{-1}(V) \in \tau'$.

b) \Rightarrow c) Sean (Z, η) un espacio topológico y $g : Z \rightarrow X$ una función tal que $f \circ g : (Z, \eta) \rightarrow (Y, \sigma)$ es continua. Para ver que $g : (Z, \eta) \rightarrow (X, \tau)$ es continua, sea $U \in \tau$, entonces existe $V \in \sigma$ tal que $U = f^{-1}(V)$, con lo cual

$$g^{-1}(U) = g^{-1}(f^{-1}(V)) = (f \circ g)^{-1}(V) \in \eta.$$

$c) \Rightarrow d)$ $I_X : (X, \tau') \rightarrow (X, \tau)$ es continua ya que $f \circ I_X : (X, \tau') \rightarrow (Y, \sigma)$ es continua. Así $\tau \subseteq \tau'$.

$d) \Rightarrow a)$ Sea $h = f|^{f[X]}$ la función que aparece en la primera factorización canónica de f . Para probar que h es isomorfismo basta probar que es una función abierta. Sea $\tau' = \{U \subseteq X : h(U) \in \sigma[f[X]]\}$. Como h es biyectiva τ' es topología de X . Además, la función $f : (X, \tau') \rightarrow (Y, \sigma)$ es continua pues si $V \in \sigma$, entonces $h(f^{-1}(V)) = h((i \circ h)^{-1}(V)) = h(h^{-1}(i^{-1}(V))) = i^{-1}(V) \in \sigma[f[X]]$. Por lo tanto $f^{-1}(V) \in \tau'$ y por $d)$, $\tau \subseteq \tau'$ lo cual implica que h es abierta.

2. $a) \Rightarrow b)$ Sea $\sigma' = \{V \subseteq Y : f^{-1}(V) \in \tau\}$. Como $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ es continua, entonces $\sigma \subseteq \sigma'$. Por otro lado, si $f = \bar{f} \circ \pi$ es la segunda factorización canónica de f , \bar{f} es homeomorfismo, así que, si $V \in \sigma'$, $\pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(V)) = f^{-1}(V) \in \tau$. Por la definición de τ / \sim , $\bar{f}^{-1}(V) \in \tau / \sim$ y, como \bar{f} es homeomorfismo, $V \in \sigma$.

$b) \Rightarrow c)$ Sean (Z, η) y $g : Y \rightarrow Z$ como en el enunciado de $c)$ y sea $W \in \eta$. Como $g \circ f$ es continua, $(g \circ f)^{-1}(W) \in \tau$ lo cual implica que $g^{-1}(W) \in \sigma$. Por lo tanto g es continua.

$c) \Rightarrow d)$ $I_Y : (Y, \sigma) \rightarrow (Y, \sigma')$ es continua ya que la composición $I_Y \circ f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma')$ es continua y así, $\sigma' \subseteq \sigma$.

$d) \Rightarrow a)$ Como \bar{f} es continua y biyectiva basta ver que es abierta. Definamos $\sigma' = \{\bar{f}(U) : U \in \tau / \sim\}$ que es una topología sobre Y tal que $\bar{f} : (X / \sim, \tau / \sim) \rightarrow (Y, \sigma')$ es continua. Por $d)$, $\sigma' \subseteq \sigma$ y por lo tanto, \bar{f} es abierta. \square

Teorema 3.8. (1) En \mathcal{Top} , todo objeto no vacío es un objeto separador.

Si $f \in \text{Hom}_{\mathcal{Top}}(X, Y)$, entonces:

- (2) f es epimorfismo si y sólo si f es sobreyectiva.
- (3) f es monomorfismo si y sólo si f es inyectiva.
- (4) f es monomorfismo extremo si y sólo si f es encaje.
- (5) f es epimorfismo extremo si y sólo si f es identificación.

Demostración. (1) Sean $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y)$ con $f \neq g$; $S \neq \emptyset$ con $S \in \text{Ob}(\mathcal{T}op)$ y $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Definimos $s : S \rightarrow X$, tal que $s(l) = x$ para toda $l \in S$; es claro que $s \in \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(S, X)$, ya que es una función constante y también que $f \circ s(l) = f(x)$ y $g \circ s(l) = g(x)$ para todo $l \in S$; como $S \neq \emptyset$, podemos concluir que existe $l \in S$, tal que $f \circ s(l) \neq g \circ s(l)$; luego, $f \circ s \neq g \circ s$.

(2) Sean $f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y)$ sobreyectiva y $u, v \in \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(Y, Z)$, tales que $u \circ f = v \circ f$. Supongamos que $u \neq v$, entonces existe $y \in Y$, tal que $u(y) \neq v(y)$; como f es sobreyectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, luego $u \circ f(x) = v \circ f(x)$, pero $u \circ f(x) = u(y)$ y $v \circ f(x) = v(y)$ los cuales son diferentes, lo cual es una contradicción.

Ahora supongamos que $f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y)$ es epimorfismo y que existe $y_0 \in Y \setminus f[X]$. Denotamos por $\bar{2}$ al espacio topológico $\{0, 1\}$ con la topología indiscreta, es decir $\tau_{\bar{2}} = \{\{0, 1\}, \emptyset\}$. Sea la función $u : Y \rightarrow \bar{2}$, definida como:

$$u(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in f[X] \\ 0 & \text{si } y \notin f[X] \end{cases}$$

la cual es continua, y $v : Y \rightarrow \bar{2}$, definida como $v(y) = 1$ para todo $y \in Y$. Notar que $u \circ f(x) = 1$ y $v \circ f(x) = 1$ para todo $x \in X$. Sin embargo $u(y_0) = 0$ y $v(y_0) = 1$, o sea $u \neq v$ lo que contradice la hipótesis de que f sea epimorfismo. Por tanto $Y = f[X]$, es decir f es sobreyectiva.

3. Sean $f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y)$ inyectiva, y $u, v \in \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(Z, X)$, tales que $f \circ u = g \circ v$. Supongamos que $u \neq v$, entonces existe $x \in Z$ tal que $u(x) \neq v(x)$; como f es inyectiva $f(u(x)) \neq f(v(x))$, luego $f \circ u(x) \neq f \circ v(x)$, lo cual es una contradicción.

Ahora, supongamos que $f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y)$ es un monomorfismo y que existen $x_1, x_2 \in X$ tales $f(x_1) = f(x_2)$ pero $x_1 \neq x_2$. Sea $u : Z \rightarrow X$ tal que $u(z) = x_1$ para todo $z \in Z$ y $v : Z \rightarrow X$ tal que $v(z) = x_2$ para todo $z \in Z$ y $Z \in \text{Ob}(\mathcal{T}op)$. Notemos que u, v son continuas y $f \circ u(z) = f(x_1)$ y $f \circ v(z) = f(x_2)$ para todo $z \in Z$; luego $f \circ u = f \circ v$, pero $u \neq v$, contradiciendo la hipótesis de que f es monomorfismo.

4. Si $f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y)$ es un monomorfismo extremo y $f = i \circ h$ es la primera factorización canónica de f , donde h es el epimorfismo $f|^{f[X]}$,

entonces h es homeomorfismo porque f es monomorfismo extremo, así que f es composición de encajes.

Ahora, supongamos que f es encaje y $f = h \circ g$ con g epimorfismo; entonces g es encaje suprayectivo y, por lo tanto, homeomorfismo. Por lo tanto, f es monomorfismo extremo.

5. Sea $f = \bar{f} \circ \pi$ la segunda factorización canónica de f . Como $f = \bar{f}$ es monomorfismo, si f es epimorfismo extremo, $f = \bar{f}$ es homeomorfismo y por lo tanto identificación, así que f es composición de identificaciones.

Ahora supongamos que f es identificación y que $f = h \circ g$ donde h es monomorfismo; entonces h es identificación inyectiva y por lo tanto homeomorfismo. \square

Sin embargo en \mathcal{Top}_2 falla 2., ya que f es un epimorfismo si y sólo si f es una función continua con imagen densa (ver [1], **Proposición 1.65**, página 42). Terminamos esta sección demostrando que en \mathcal{Top} , los epimorfismos extremos son en esencia los morfismos a un cociente y los monomorfismos extremos son en esencia las inclusiones.

Teorema 3.9. *Si $f \in \text{Hom}_{\mathcal{Top}}(X, Y)$, entonces:*

1. *f es epimorfismo extremo en \mathcal{Top} si y sólo si existe una relación de equivalencia \sim en X tal que f es isomorfa a la función cociente $p : X \rightarrow X/\sim$.*
2. *f es monomorfismo extremo en \mathcal{Top} si y sólo si f es isomorfo a una inclusión.*

Demostración. 1. Si f es epimorfismo extremo en \mathcal{Top} y $f = \bar{f} \circ \pi$ es la segunda factorización canónica de f , entonces \bar{f} es isomorfismo. Así, f es isomorfa a π .

Ahora supongamos que existe una relación de equivalencia \sim en X tal que f es isomorfa a la función cociente $p : X \rightarrow X/\sim$. Entonces existe un isomorfismo $h : X/\sim \rightarrow Y$ tal que $f = h \circ p$. Como p es epimorfismo extremo, f también lo es (ver Proposición 3.5).

2. Si f es monomorfismo extremo y $f = i \circ h$, donde $h = f|^{f[X]}$, entonces esta función es isomorfismo, así que f es isomorfa a la inclusión.

Inversamente, si existe $Z \subseteq Y$ tal que f es isomorfa a la inclusión $j : Z \rightarrow Y$, entonces, como j es encaje, es monomorfismo extremo y, por la Proposición 3.5, f es monomorfismo extremo. \square

4 Funtores

Dadas las categorías \mathcal{A} y \mathcal{B} , un functor es una “función” entre categorías que preserva la estructura de categoría.

Definición 4.1. Dadas las categorías \mathcal{A} y \mathcal{B} , un functor F entre \mathcal{A} y \mathcal{B} es una función $F : Mor(\mathcal{A}) \rightarrow Mor(\mathcal{B})$ tal que:

1. Si $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$, $g \in Hom_{\mathcal{A}}(B, C)$, entonces
 - (i) $Cod_{\mathcal{B}}F(f) = Dom_{\mathcal{B}}F(g)$.
 - (ii) $F(g \circ_{\mathcal{A}} f) = F(g) \circ_{\mathcal{B}} F(f)$.
2. Para todo $A \in Ob(\mathcal{A})$, $F(I_A) = I_{Dom_{\mathcal{B}}F(I_A)}$.

Un functor F genera una función $F_1 : Ob(\mathcal{A}) \rightarrow Ob(\mathcal{B})$, definida como $F_1(A) = Dom_{\mathcal{B}}(F(I_A))$ y otra función $F_2 : Mor(\mathcal{A}) \rightarrow Mor(\mathcal{B})$, definida por $F_2(f) = F(f)$. Recíprocamente, si tenemos dos funciones $F_1 : Ob(\mathcal{A}) \rightarrow Ob(\mathcal{B})$ y $F_2 : Mor(\mathcal{A}) \rightarrow Mor(\mathcal{B})$ tales que:

1. Si $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$, entonces $F_2(f) \in Hom_{\mathcal{B}}(F_1(A), F_1(B))$;
2. Si $A \in Ob(\mathcal{A})$, entonces $F_2(I_A) = I_{F_1(A)}$;
3. Si $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ y $g \in Hom_{\mathcal{A}}(B, C)$, entonces $F_2(g \circ_{\mathcal{A}} f) = F_2(g) \circ_{\mathcal{B}} F_2(f)$, entonces F_2 es un functor en el sentido de la Definición 4.1. Por cierto, ésta es la forma más común de presentar un functor: proponiendo dos reglas de asociación, una para los objetos y otra para los morfismos, no distinguiendo los nombres de las funciones y operando en functor indistintamente con el mismo nombre en los objetos o en los morfismos.

Ejemplo 4.2. 1. Si \mathcal{B} es una subcategoría de \mathcal{A} , $I : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ definido como $i(f) = f$ es un functor.

2. $Id : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, definido como $Id(f) = f$, es un functor.

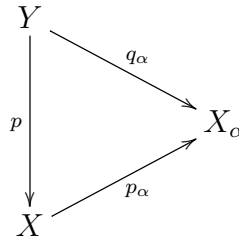
3. Si denotamos por Con la categoría de conjuntos, definimos el functor $F : Con \rightarrow Con$, si $f : A \rightarrow B$ es una función entre los conjuntos A y B , entonces $F(f) : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$, es una función entre los conjuntos potencia de A y B respectivamente, donde $F(f)(W) = f[W]$ (aquí $W \subseteq A$ y $f[W] = \{b \in B : \text{existe } a \in A \text{ tal que } f(a) = b\}$, es decir $f[W]$ es la imagen directa de W bajo f).

4. Definimos el funtor $G : \mathcal{Con}^{op} \rightarrow \mathcal{Con}^{op}$, donde si $f \in \text{Hom}_{\mathcal{Con}^{op}}(X, Y)$, entonces $G(f) : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$, definida como $G(f)(V) = f^{-1}(V)$, donde $V \subseteq B$ y $f^{-1}(V)$ es la imagen inversa de V bajo f .

5 Productos y co-productos

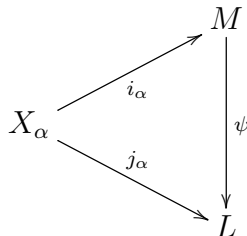
Definición 5.1. Sean \mathcal{A} una categoría.

1. Una \mathcal{A} -fuente es una familia $\{p_\alpha : X \rightarrow X_\alpha : \alpha \in I\}$ de \mathcal{A} -morfismos indicada por un conjunto I .
2. Si I es un conjunto, $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia de objetos de \mathcal{A} . Diremos que la \mathcal{A} -fuente $\{p_\alpha : X \rightarrow X_\alpha : \alpha \in I\}$ es un producto de la familia $\{X_\alpha \in \text{Ob}(\mathcal{A}) : \alpha \in I\}$ si dada cualquier \mathcal{A} -fuente $\{q_\alpha : Y \rightarrow X_\alpha : \alpha \in I\}$, existe un único morfismo $p : Y \rightarrow X$ tal que para todo $\alpha \in I$, el diagrama



conmuta.

3. Un \mathcal{A} -pozo es una familia $\{i_\alpha : X_\alpha \rightarrow M : \alpha \in I\}$ de \mathcal{A} -morfismos indicada por un conjunto I .
4. Si I es un conjunto, $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia de objetos de \mathcal{A} , diremos que el \mathcal{A} -pozo $\{i_\alpha : X_\alpha \rightarrow M : \alpha \in I\}$ es un co-producto en \mathcal{A} de la familia $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ si dado cualquier \mathcal{A} -pozo $\{j_\alpha : X_\alpha \rightarrow L : \alpha \in I\}$, existe un único morfismo $\psi : M \rightarrow L$ tal que para todo $\alpha \in I$, el diagrama en \mathcal{A}



conmuta.

5. Diremos \mathcal{A} tiene productos (co-productos) si dada cualquier familia $\{X_\alpha \in Ob(\mathcal{A}) : \alpha \in I\}$, existe un producto (co-producto) en \mathcal{A} .

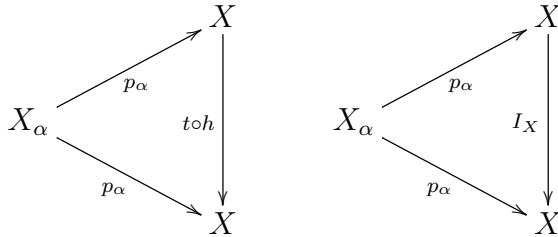
Observemos que la \mathcal{A} -fuente $\{p_\alpha : X \rightarrow X_\alpha : \alpha \in I\}$ es un producto en \mathcal{A} de la familia $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ si y sólo si $\{p_\alpha : X_\alpha \rightarrow X : \alpha \in I\}$ es un co-producto en \mathcal{A}^{op} de $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$.

Lema 5.2. Sea $\{X_\alpha \in Ob(\mathcal{A}) : \alpha \in I\}$ con I conjunto.

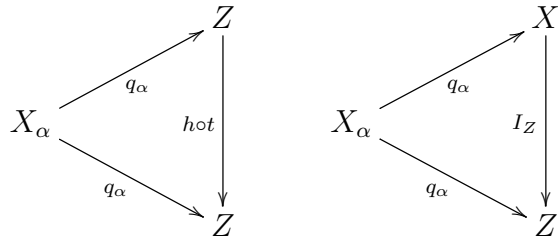
1. Si $\{p_\alpha : X \rightarrow X_\alpha : \alpha \in I\}$ y $\{q_\alpha : Z \rightarrow X_\alpha : \alpha \in I\}$ son dos productos, entonces existe $h : Z \rightarrow X$ isomorfismo tal que $p_\alpha \circ h = q_\alpha$.

2. Si $\{i_\alpha : X_\alpha \rightarrow X : \alpha \in I\}$ y $\{j_\alpha : X_\alpha \rightarrow Z : \alpha \in I\}$ son dos co-productos, entonces existe $h : Z \rightarrow X$ isomorfismo tal que $h \circ j_\alpha = i_\alpha$.

Demostración. 1. Sean $\{p_\alpha : X \rightarrow X_\alpha : \alpha \in I\}$ y $\{q_\alpha : Z \rightarrow X_\alpha : \alpha \in I\}$ dos productos, por definición existen $h : X \rightarrow Z$ y $t : Z \rightarrow X$ morfismos tales que: $q_\alpha \circ h = p_\alpha$ y $p_\alpha \circ t = q_\alpha$. Así que los diagramas siguientes conmutan:



Por la unicidad del morfismo, tenemos que $t \circ h = I_X$. Análogamente los diagramas siguientes conmutan:



y por la unicidad se tiene que $h \circ t = I_Z$.

2. Se establece de forma análoga a 1 o por el Principio de Dualidad. \square

La categoría \mathcal{Top} tiene productos y co-productos. Dado un conjunto de espacios topológicos el producto Thychonoff coincide con el producto en la categoría \mathcal{Top} y la suma topológica es el co-producto. Se sabe que dada $\{X_i : X_i \in Ob(\mathcal{Top}), i \in I\}$, entonces $\prod_{i \in I} X_i$ el producto cartesiano tiene como topología la generada por los sub-básicos $\{\pi_i^{-1}(O) : O \in \tau_{X_i}\}$, donde $\pi_i(x) = x_i$ para todo $x \in \prod_{i \in I} X_i$ y x_i es la i -ésima coordenada de x , es decir π_i es la i -ésima proyección del producto cartesiano. Ahora, si $\{q_i : Y \rightarrow X_i : i \in I\}$ es una \mathcal{Top} -fuente, entonces existe una única función continua $\psi : Y \rightarrow X$ tal que $\pi_i \circ \psi = q_i$. Así que la \mathcal{Top} -fuente $\{\pi_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i : i \in I\}$, es un \mathcal{Top} -producto.

Análogamente, si $\{X_i : X_i \in Ob(\mathcal{Top}), i \in I\}$, se consideran los conjuntos ajenos $X_i \times \{i\}$, se denota $\coprod_{i \in I} X_i = \cup_{i \in I} X_i \times \{i\}$ con la topología con base $\{O \times \{i\} : i \in I, O \in \tau_i\}$ y se define $j_i : X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$ como $j_i(x) = (x, i)$, entonces el \mathcal{Top} -pozo $\{j_i : X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i : i \in I\}$ cumple que dada otro \mathcal{Top} -pozo $\{t_i : X_i \rightarrow Z : i \in I\}$, existe una única función continua $F : \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow Z$ tal que $F \circ j_i = t_i$, es decir el \mathcal{Top} -pozo $\{j_i : X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i : i \in I\}$ es un \mathcal{Top} -co-producto.

6 Reflexiones y co-reflexiones

Dada una categoría \mathcal{A} y una subcategoría \mathcal{B} de \mathcal{A} , vamos a definir una relación entre estas dos categorías. Esta relación tiene un aire bastante topológico, pero en general, estas son relaciones que describen como incide la subcategoría dada en la categoría grande.

Definición 6.1. 1. Si \mathcal{B} es una subcategoría de \mathcal{A} , diremos que \mathcal{B} es reflexiva en \mathcal{A} , si para todo $X \in Ob(\mathcal{A})$, existe $RX \in Ob(\mathcal{B})$, llamado la \mathcal{B} -reflexión de X , y $R_X \in Hom_{\mathcal{B}}(X, RX)$, llamado el \mathcal{B} -reflector de X , tal que para todo $Y \in Ob(\mathcal{B})$ y $f \in Hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$, existe un único $f^\circ \in Hom_{\mathcal{B}}(RX, Y)$ tal que $f^\circ \circ R_X = f$. Describimos esta relación mediante el diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc}
 RX & \overset{f^\circ}{\dashrightarrow} & Y \\
 & \swarrow R_X & \nearrow f \\
 & X &
 \end{array}$$

2. Si \mathcal{B} es una subcategoría de \mathcal{A} , diremos que \mathcal{B} es co-reflexiva en \mathcal{A} , si

para todo $X \in Ob(\mathcal{A})$, existe $CX \in Ob(\mathcal{B})$, llamada la \mathcal{B} -co-reflexión de X , y $c_X \in Hom_{\mathcal{B}}(CX, X)$, llamado el \mathcal{B} -co-reflector de X , tal que para todo $Y \in Ob(\mathcal{B})$ y $f \in Hom_{\mathcal{A}}(Y, X)$, existe un único $f^\circ \in Hom_{\mathcal{B}}(Y, CX)$ tal que $CX \circ f^\circ = f$. Describimos esta relación mediante el diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} Y & \overset{f^\circ}{\dashrightarrow} & CX \\ & \searrow f & \swarrow c_X \\ & X & \end{array}$$

Observemos que \mathcal{B} es subcategoría reflexiva en \mathcal{A} si y sólo si \mathcal{B}^{op} es subcategoría co-reflexiva en \mathcal{A}^{op} .

Definición 6.2. Sea $\mathcal{E} \subseteq Mor(\mathcal{A})$

1. Diremos que \mathcal{E} es cerrada bajo isomorfismo de \mathcal{A} , si dado un isomorfismo de \mathcal{A} y un elemento de \mathcal{E} , su composición, si es posible, es un elemento de \mathcal{E} .

2. Sean \mathcal{B} una categoría reflexiva (co-reflexiva) en \mathcal{A} y $\mathcal{E} \subseteq Mor(\mathcal{A})$ cerrada bajo isomorfismo de \mathcal{A} . Diremos que \mathcal{B} es \mathcal{E} -reflexiva (\mathcal{E} -co-reflexiva) sobre \mathcal{A} si es reflexiva (co-reflexiva) y además el reflector $R_X \in \mathcal{E}$ (el co-reflector $C_X \in \mathcal{E}$), para todo $X \in Ob(\mathcal{A})$.

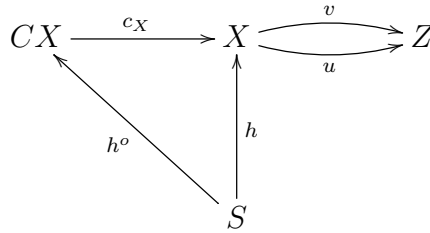
Así, si \mathcal{E} es la clase de epimorfismos de \mathcal{A} y si \mathcal{B} es \mathcal{E} -reflexiva (\mathcal{E} -co-reflexiva) en \mathcal{A} , diremos que \mathcal{B} es epi-reflexiva (epi-co-reflexiva) en \mathcal{A} . De igual manera si \mathcal{E} es la clase de los monomorfismos, diremos que \mathcal{B} es mono-reflexiva en \mathcal{A} (mono-co-reflexiva), y si \mathcal{E} es la clase de los bimorfismos de \mathcal{A} , diremos que \mathcal{B} es bi-reflexiva en \mathcal{A} (bi-co-reflexiva).

Veamos la siguiente propiedad:

Teorema 6.3. Si \mathcal{B} es una subcategoría de \mathcal{A} y S un objeto separador de \mathcal{A} tal que $S \in \mathcal{B}$, entonces \mathcal{B} es bi-co-reflexiva en \mathcal{A} si y sólo si \mathcal{B} es co-reflexiva en \mathcal{A} .

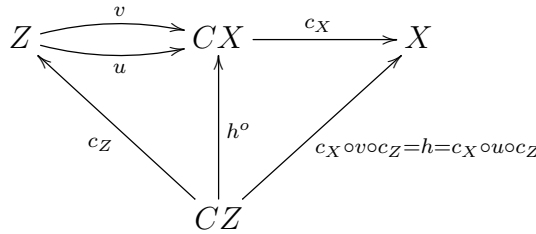
Demostración. Es claro que bastará demostrar que si \mathcal{B} es co-reflexiva, entonces \mathcal{B} es bi-co-reflexiva. Sean $X \in Ob(\mathcal{A})$ y c_X el co-reflector de X . demostraremos que c_X es bimorfismo, es decir que c_X es epimorfismo y monomorfismo.

Primero, sean $u, v \in Hom_{\mathcal{A}}(X, Z)$, tales que $u \circ c_X = v \circ c_X$ y supongamos que $u \neq v$; entonces existe $h : S \rightarrow X$, tal que $h \circ u \neq h \circ v$. Como $S \in Ob(\mathcal{B})$, existe $h^\circ : S \rightarrow CX$ tal que $c_X \circ h^\circ = h$. Describamos estas relaciones con el diagrama:



Tenemos $(u \circ c_X) \circ h^\circ = (v \circ c_X) \circ h^\circ$, entonces $u \circ h = v \circ h$, lo cual es una contradicción, por tanto $u = v$ y c_X es epimorfismo.

Ahora veamos que c_X es monomorfismo; supongamos que $c_X \circ u = c_X \circ v$, como en el caso anterior describamos las relaciones mediante un diagrama:



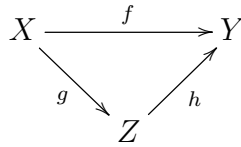
donde h° es el único morfismo tal que $c_X \circ h^\circ = h$, con $h = c_X \circ (u \circ c_Z) = c_X \circ (v \circ c_Z)$. Entonces $u \circ c_Z = h^\circ = v \circ c_Z$ y, como ya demostramos que \mathcal{B} es epi-co-reflexiva, entonces tenemos que $u = v$; por tanto \mathcal{B} es mono-co-reflexiva y así, \mathcal{B} es bi-co-reflexiva. \square

Si aplicamos el Teorema 6.3, obtenemos que toda subcategoría co-reflexiva de \mathcal{Top} que tenga un objeto no vacío es automáticamente bi-co-reflexiva. Es decir, en \mathcal{Top} tenemos el siguiente teorema.

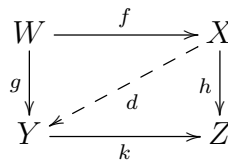
Teorema 6.4. *Si \mathcal{U} es co-reflexiva en \mathcal{Top} y tiene un objeto no vacío, entonces cada co-reflexión c_X es biyectiva.*

Definición 6.5. Sean \mathcal{A} una categoría, \mathcal{E} y \mathcal{M} subclases de morfismos de \mathcal{A} . Diremos que:

1. \mathcal{A} es $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorizable si, para cada \mathcal{A} -morfismo $f : X \rightarrow Y$, existe una terna (Z, g, h) que consiste de un \mathcal{A} -objeto Z y morfismos $g : X \rightarrow Z$ en \mathcal{E} , $h : Z \rightarrow Y$ en \mathcal{M} tales que $f = h \circ g$. La terna (Z, g, h) se llama $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorización de f .



2. \mathcal{A} tiene la **propiedad de la $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -diagonalización** si siempre que los morfismos $f : W \rightarrow X$, $g : W \rightarrow Y$, $h : X \rightarrow Z$ y $k : Y \rightarrow Z$ satisfacen que $h \circ f = k \circ g$, $f \in \mathcal{E}$ y $k \in \mathcal{M}$, entonces existe un único morfismo $d : X \rightarrow Y$ tal que $g = d \circ f$ y $h = k \circ d$.



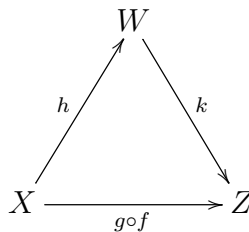
Al morfismo d se le llama un **morfismo diagonal** (o una **diagonal**) del cuadrado (f, g, h, k) .

3. Si una categoría cumple 1., 2. diremos que es una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoría

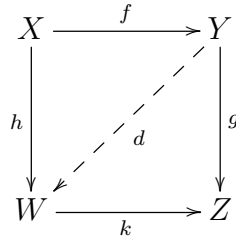
Veamos algunas importantes propiedades de las $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categorías.

Lema 6.6. *Sea \mathcal{A} una categoría y $\mathcal{E} \subset \text{Epi}(\mathcal{A})$ o $\mathcal{M} \subset \text{Mono}(\mathcal{A})$. Si \mathcal{A} es una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoría, entonces \mathcal{E} y \mathcal{M} son cerrados bajo composición.*

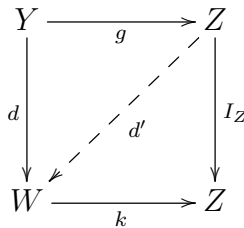
Demostración. Sean $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, tales que $f, g \in \mathcal{E}$. Sea (W, h, k) una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorización de $g \circ f$, es decir el diagrama



es conmutativo, con $h \in \mathcal{E}$ y $k \in \mathcal{M}$. Usando la propiedad de la $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -diagonalización para



ya que $f \in \mathcal{E}$ y $k \in \mathcal{M}$, entonces existe $d : Y \rightarrow W$, tal que $d \circ f = h$ y $k \circ d = g$. Nuevamente, usando la $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -diagonalización para



ya que $g \in \mathcal{E}$ y $k \in \mathcal{M}$, obtenemos d' tal que $d' \circ g = d$ y $k \circ d' = I_Z$. Por lo tanto k es retracción y, como es monomorfismo, es isomorfismo. Como $g \circ f = k \circ h$, $h \in \mathcal{E}$ y \mathcal{E} es cerrada bajo composición de isomorfismos, entonces $f \circ g \in \mathcal{E}$.

Ahora veamos que \mathcal{M} es cerrada bajo composición. Dualizando el anterior resultado, tenemos que si \mathcal{A} es una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoría con $\mathcal{E} \subseteq \text{Epi}(\mathcal{A})$ o $\mathcal{M} \subseteq \text{Mono}(\mathcal{A})$, entonces \mathcal{A}^{op} es una $(\mathcal{M}^{op}, \mathcal{E}^{op})$ -categoría con $\mathcal{M}^{op} \subseteq \text{Epi}(\mathcal{A}^{op})$ o $\mathcal{E}^{op} \subseteq \text{Mono}(\mathcal{A}^{op})$, por lo anterior tenemos que \mathcal{M}^{op} es cerrada bajo composición en \mathcal{A}^{op} , por tanto \mathcal{M} es cerrada bajo composición en \mathcal{A} . \square

En el lema que sigue veremos otra importante propiedad de las $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categorías. Recordemos que, si \mathcal{A} es una categoría, diremos que $\mathcal{N} \subseteq \text{Mor}(\mathcal{A})$ es cerrada bajo coproductos si, dadas las familias $\{X_i : i \in I\}, \{Y_i : i \in I\} \subseteq \text{Ob}(\mathcal{A})$ y sus respectivos co-productos $(\coprod_{i \in I} X_i, (j_i : X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i)_{i \in I})$, $(\coprod_{i \in I} Y_i, (s_i : X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} Y_i)_{i \in I})$, y la familia $\{f_i : X_i \rightarrow Y_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{N}$, si $\coprod f_i : \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} Y_i$ denota al único morfismo tal que $\coprod f_i \circ j_i = s_i \circ f_i$, entonces $\coprod f_i \in \mathcal{N}$. Dualizando se define que \mathcal{N} es cerrada bajo productos.

Lema 6.7. *Si \mathcal{A} es una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoría, entonces*

- (1) *si $\mathcal{M} \subseteq \text{Mono}(\mathcal{A})$, la clase \mathcal{E} es cerrada bajo coproductos y*
- (2) *si $\mathcal{E} \subseteq \text{Epi}(\mathcal{A})$, la clase \mathcal{M} es cerrada bajo productos.*

Demostración. Sean $\{X_i : i \in I\}, \{Y_i : i \in I\} \subseteq Ob(\mathcal{A})$ con coproductos $(\coprod_{i \in I} X_i, (j_i : X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i)_{i \in I}), (\coprod_{i \in I} Y_i, (s_i : Y_i \rightarrow \coprod_{i \in I} Y_i)_{i \in I})$. Dada la familia $\{f_i : X_i \rightarrow Y_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{E}$ y $f = \coprod f_i$, para todo $i \in I$ los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{i \in I} X_i & \xrightarrow{f} & \coprod_{i \in I} Y_i \\
 \uparrow j_i & & \uparrow s_i \\
 X_i & \xrightarrow{f_i} & Y_i
 \end{array}$$

Si (M, h, k) es una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorización de f , es decir

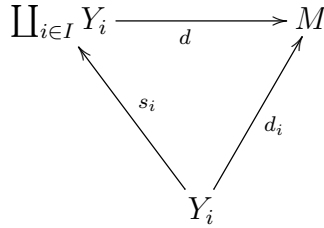
$$\begin{array}{ccc}
 & M & \\
 h \nearrow & & \searrow k \\
 \coprod_{i \in I} X_i & \xrightarrow{f} & \coprod_{i \in I} Y_i
 \end{array}
 ,$$

es conmutativo con $h \in \mathcal{E}$ y $k \in \mathcal{M}$. Usando la propiedad de $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -diagonalización tenemos que para cada $i \in I$, existe $d_i : Y_i \rightarrow M \in Mor(\mathcal{A})$ tal que

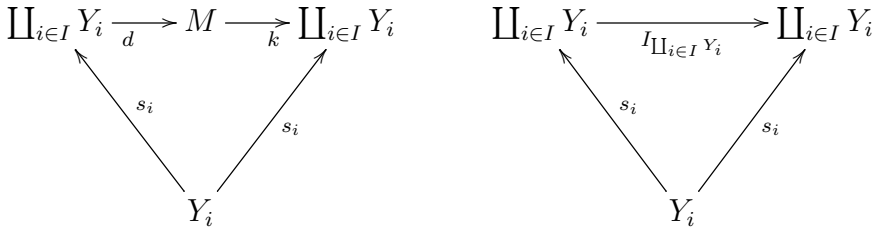
$$\begin{array}{ccc}
 X_i & \xrightarrow{f_i} & Y_i \\
 j_i \downarrow & & \downarrow s_i \\
 \coprod_{i \in I} X_i & & \\
 h \downarrow & \swarrow d_i & \downarrow s_i \\
 M & \xrightarrow{k} & \coprod_{i \in I} Y_i
 \end{array}$$

conmuta. Sea $d : \coprod_{i \in I} Y_i \rightarrow M$, el único morfismo que hace conmutar, para

cada $i \in I$, el diagrama:



Los siguientes diagramas conmutan:



En efecto, $(k \circ d) \circ s_i = k \circ d_i = s_i$. La conmutatividad del segundo es trivial. Como es único el morfismo con esta propiedad, concluimos que $k \circ d = I_{\coprod_{i \in I} Y_i}$; como k es monomorfismo, entonces k es isomorfismo y, como $h \in \mathcal{E}$, que es cerrada bajo composición de isomorfismos, se tiene que $f = k \circ h \in \mathcal{E}$.

(2) Se obtiene dualizando (1). □

Veamos estos conceptos en \mathcal{Top} .

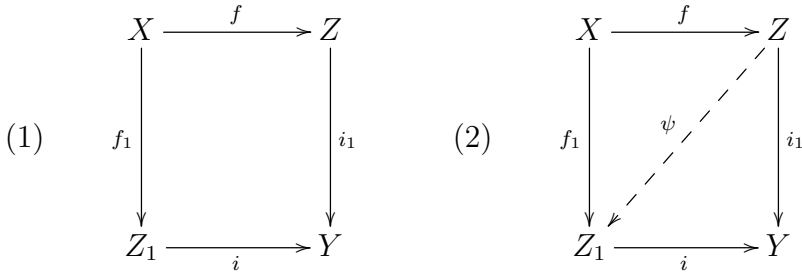
Teorema 6.8. 1. \mathcal{Top} es una (Epi ex, Mono)-categoría.

2. \mathcal{Top} es una (Epi, Mono ex)-categoría.

Demostración. 1. \mathcal{Top} es (Epi ex, Mono)-factorizable pues toda función continua $f : X \rightarrow Y$ tiene una segunda factorización canónica $f = \bar{f} \circ \pi$ donde π es una función cociente (epimorfismo extremo) y $f = \bar{f}$ es monomorfismo.

Ahora veamos que \mathcal{Top} satisface la propiedad de (Epi ex, Mono)-diagonalización. Sean $f : X \rightarrow Z$, epimorfismo extremo e $i : Z \rightarrow Y$ monomorfismo,

tales que conmuta el diagrama (1) en \mathcal{Top} :

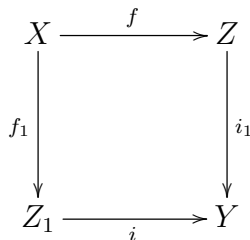


Definamos $\psi : Z \rightarrow Z_1$, como $\psi(z) = f_1(x)$ tal que $f(x) = z$ (recordemos que f es epimorfismo). Veamos que ψ está bien definida: supongamos que $f(x_1) = z$ y $f(x) = z$; entonces $f(x) = f(x_1)$ implica que $i_1(f(x)) = i_1(f(x_1))$, es decir, por la conmutatividad del cuadrado (1), $i(f_1(x)) = i(f_1(x_1))$ y, como i es inyectiva, $f_1(x) = f_1(x_1)$. Por otro lado, dado que f es cociente y $f_1 = \psi \circ f$, entonces ψ es continua.

La unicidad se sigue de que i es monomorfismo.

2. \mathcal{Top} es (Epi, Mono ex)-factorizable, pues toda función continua $f : X \rightarrow Y$ tiene una primera factorización canónica $f = i \circ f|^{f[X]}$, donde la inclusión i es monomorfismo extremo y la restricción $f|^{f[X]}$ es epimorfismo.

Veamos que \mathcal{Top} satisface la propiedad de (Epi, Mono ex)-diagonalización: Sean $f : X \rightarrow Z$ epimorfismo e $i : Z \rightarrow Y$, monomorfismo extremo, tales que el diagrama en \mathcal{Top} conmuta:



Definamos $\psi : Z \rightarrow Z_1$, como $\psi(z) = f_1(x)$ tal que $f(x) = z$. La existencia de esta x se sigue de que f es epimorfismo. Veamos que ψ está bien definida: supongamos que $f(x_1) = z$ y $f(x) = z$; entonces $f(x) = f(x_1)$ implica que $i_1(f(x)) = i_1(f(x_1))$, es decir, por la conmutatividad del cuadrado anterior,

$i(f_1(x)) = i(f_1(x_1))$ y, como i es inyectiva, $f_1(x) = f_1(x_1)$. Ahora, como i es encaje e $i_1 = i \circ \psi$, entonces ψ es continua.

De nuevo, la unicidad se sigue de que i es monomorfismo. \square

Definición 6.9. Una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoría (respectivamente, $(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ -categoría) se llama **\mathcal{E} -co-bien potenciada** (respectivamente, **\mathcal{E} -bien potenciada**) si para cada objeto X de \mathcal{A} , la clase de todos los morfismos que pertenecen a \mathcal{E} , que tienen como dominio (respectivamente, como codominio) a X , tiene un conjunto de representantes respecto a las relaciones de equivalencia $f \sim_1 g$ si y sólo si existe h isomorfismo tal que $f = h \circ g$ (respectivamente $f \sim_2 g$ si y sólo si existe h isomorfismo tal que $f = g \circ h$).

Notemos que $f \sim_1 g$ en una categoría \mathcal{A} si, y sólo si $f \sim_2 g$ en \mathcal{A}^{op} .

Teorema 6.10. \mathcal{Top} , es

1. $(Epi\ ex, Mono)$ -categoría *Epi ex-co-bien potenciada*,
2. $(Epi, Mono\ ex)$ -categoría *Epi-co-bien potenciada*,
3. $(Epi\ ex, Mono)$ -categoría *Mono-bien potenciada*,
4. $(Epi, Mono\ ex)$ -categoría *Mono ex-bien potenciada*.

Demostración. 1. Dado $X \in Ob(\mathcal{Top})$ denotamos por τ_X la topología de X . Por el Teorema 3.9, dado $f : X \rightarrow Y$ epimorfismo extremo, existe \sim relación de equivalencia en X y $\pi_\sim : (X, \tau_X) \rightarrow (X/\sim, \tau_\sim)$ con $\pi_\sim(x) = [x] = \{z : z \sim x\}$ y $\tau_\sim = \{O \subseteq X/\sim : \pi_\sim^{-1}(O) \in \tau_X\}$, tal que f es isomorfo a π_\sim .

Sean $Sim = \{\sim : \sim \text{ es relación de equivalencia en } X\}$ y $TCO = \{\tau_\sim : \sim \in Sim\}$. Las colecciones Sim y TCO son conjuntos, así que $\Pi_{Sim} = \{\pi_\sim : \sim \in Sim\}$ es conjunto; por lo tanto, la clase de los epimorfismos extremos con dominio X , tiene como conjunto de representantes al conjunto Π_{Sim} .

2. Si $X \in Ob(\mathcal{Top})$, denotamos por τ_X a la topología de X y la cardinalidad de X por $|X|$. Por propiedades de la teoría de cardinales, para todo conjunto Y , existe $\psi_Y : Y \rightarrow |Y|$ función biyectiva. Si $Y \in Ob(\mathcal{Top})$, definimos una topología en $|Y|$ como $\tau_{|Y|} = \{\psi_Y(O) : O \in \tau_Y\}$. Usando la biyectividad de ψ_Y , se puede demostrar que es homeomorfismo.

Se sabe que $|X| = \{\beta : \beta \text{ es cardinal y } \beta \leq |X|\}$ es un conjunto, así que $C = \bigcup_{\beta \in |X|} hom_{Set}(X, \beta)$ es un conjunto.

Sea $f : X \rightarrow Y$ un epimorfismo en \mathcal{Top} . También es \mathcal{Top} -epimorfismo la función $g = \psi_Y \circ f : (X, \tau_X) \rightarrow (|Y|, \tau_{|Y|})$ y es isomorfa a f , pues $f = (\psi_Y)^{-1} \circ g$. Pero $g \in hom_{\mathcal{Top}}((X, \tau_X), (|Y|, \tau_{|Y|})) \subseteq hom_{Set}(X, |Y|) \subseteq C$. Así que todo \mathcal{Top} -epimorfismo con dominio X es isomorfo a un elemento de un conjunto

de $\mathcal{T}op$ -epimorfismos con dominio X .

3. Dualizando 2. Sean $X \in Ob(\mathcal{T}op)$

$$Mono^X(\mathcal{A}) = \{h : Y \rightarrow X : h \text{ es monomorfismo en } \mathcal{A}\},$$

$$Epi_X(\mathcal{A}^{op}) = \{g : X \rightarrow Y : g \text{ es epimorfismo en } \mathcal{A}^{op}\}.$$

Pero, por 2., $Epi_X(\mathcal{A}^{op})$ tiene una clase de representantes bajo la relación \sim_1 , que es un conjunto. Por tanto, $Mono^X(\mathcal{A})$ tiene una clase de representantes bajo la relación \sim_2 .

4. Dualizando 1. Si $X \in Ob(\mathcal{T}op)$:

$$MonoEx^X(\mathcal{A}) = \{h : Y \rightarrow X : h \text{ es monomorfismo extremo en } \mathcal{A}\},$$

$$EpiEx_X(\mathcal{A}^{op}) = \{g : X \rightarrow Y : g \text{ es epimorfismo extremo en } \mathcal{A}^{op}\}.$$

Entonces, por 1., $EpiEx_X(\mathcal{A}^{op})$ tiene una clase de representantes bajo la relación \sim_1 , que es un conjunto. Por tanto, $MonoEx^X(\mathcal{A})$ tiene una clase de representantes bajo la relación \sim_2 . \square

Definición 6.11. Sea \mathcal{B} una subcategoría de \mathcal{A} .

1. Diremos que \mathcal{B} cerrada bajo isomorfismos, si dado $X \in Ob(\mathcal{B})$ e $Y \in Ob(\mathcal{A})$, tal que X es isomorfo a Y , podemos concluir que $Y \in Ob(\mathcal{B})$.

2. Diremos que \mathcal{B} es cerrada bajo productos (co-productos) si dada $\{X_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq Ob(\mathcal{B})$ y $\{p_\alpha : X \rightarrow X_\alpha : \alpha \in I\}$ es un producto en \mathcal{A} , podemos concluir que $X \in Ob(\mathcal{B})$ (resp. $\{i_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y : \alpha \in I\}$ es un co-producto en \mathcal{A} , podemos concluir que $Y \in Ob(\mathcal{B})$).

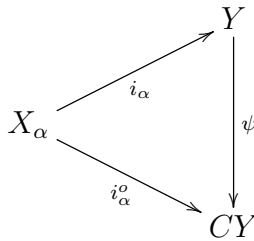
Enseguida presentamos una caracterización de subcategorías co-reflexivas, el cual será fundamental para nuestro trabajo en $\mathcal{T}op$.

Teorema 6.12. (*Caracterización de las subcategorías \mathcal{M} -co-reflexivas*) Supongamos que \mathcal{A} es una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoría \mathcal{M} -bien potenciada, con $\mathcal{M} \subset Mono(\mathcal{A})$, y que \mathcal{A} tiene co-productos. Entonces, para una subcategoría plena y cerrada bajo isomorfismos \mathcal{B} de \mathcal{A} , las siguientes condiciones son equivalentes:

1. \mathcal{B} es \mathcal{M} -co-reflexiva en \mathcal{A} .

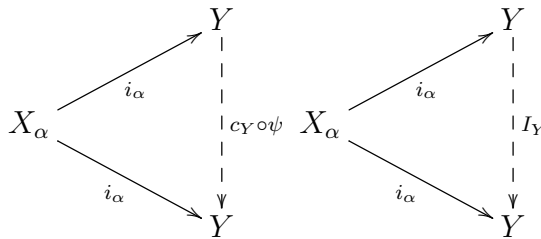
2. \mathcal{B} es cerrada bajo co-productos y satisface que si $f : X \rightarrow Y$ pertenece a \mathcal{E} y $X \in \text{Ob}(\mathcal{B})$, entonces $Y \in \text{Ob}(\mathcal{B})$.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Primero, sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \text{Ob}(\mathcal{B})$ y $\{i_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y : \alpha \in I\}$ un \mathcal{A} -co-producto, vamos a demostrar que $Y \in \text{Ob}(\mathcal{B})$. Para cada α , sean $i_\alpha^\circ : X_\alpha \rightarrow CY$ tales que $c_Y \circ i_\alpha^\circ = i_\alpha$, las cuales forman el \mathcal{A} -pozo $\{i_\alpha^\circ : X_\alpha \rightarrow CY\}$, por la propiedad del co-producto existe un único morfismo $\psi : Y \rightarrow CY$ tal que el diagrama



conmuta.

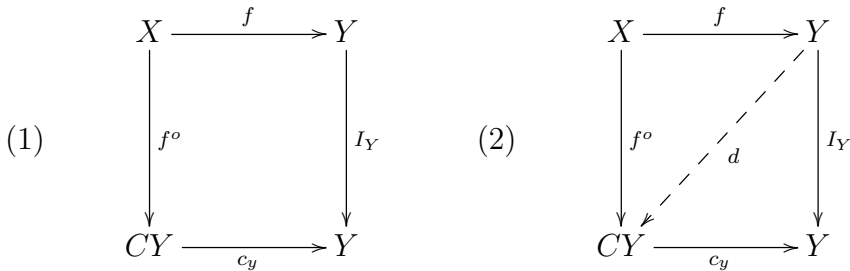
Pero $(c_Y \circ \psi) \circ i_\alpha = c_Y \circ i_\alpha^\circ = i_\alpha$, nuevamente por la propiedad del co-producto, como los diagramas



conmutan, la unicidad del morfismo, muestra que $c_Y \circ \psi = I_Y$, así que c_Y es retracción y monomorfismo, luego es isomorfismo, luego $Y \in \text{Ob}(\mathcal{B})$.

Ahora supongamos que $f : X \rightarrow Y$ con $f \in \mathcal{E}$, $X \in \text{Ob}(\mathcal{B})$, demostremos que $Y \in \text{Ob}(\mathcal{B})$. Como $X \in \text{Ob}(\mathcal{B})$, existe $f^\circ : X \rightarrow CY$, tal que $c_Y \circ f^\circ = f$. Como $c_Y \in \mathcal{M}$ y $f \in \mathcal{E}$, aplicamos la propiedad de la diagonalización, al

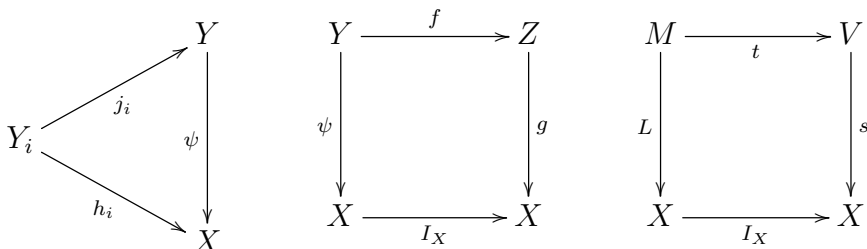
diagrama (1), obtenemos el diagrama conmutativo (2)



Es decir $c_Y \circ d = I_Y$, como c_Y es monomorfismo y retracción es isomorfismo, así que $Y \in Ob(\mathcal{B})$.

2. \Rightarrow 1. Sea $X \in Ob(\mathcal{T}op)$, la categoría es \mathcal{M} -bien-potenciada, existe $Mono^X$ conjunto de representantes de todos los morfismos de \mathcal{M} con codominio X respecto a la relación \sim_2 , tomamos la subfamilia $\overline{Mono}^X = \{h \in Mono^X : Dom(h) \in Ob(\mathcal{B})\}$, el cual es un conjunto. Sea $\{Y_i : \text{existe } h_i \in \overline{Mono}^X, Dom(h_i) = Y_i\}$. Ahora si $\{j_i : Y_i \rightarrow Y : Y \in Ob(\mathcal{A}), j_i \in Mor(\mathcal{A})\}$, es un co-producto en \mathcal{A} , ya que $\{Y_i : \text{existe } h_i \in \overline{Mono}^X, Dom(h_i) = Y_i\} \subseteq Ob(\mathcal{B})$ es un \mathcal{A} -pozo, por hipótesis $Y \in Ob(\mathcal{B})$, como $\{h_i : Y_i \rightarrow X : h_i \in \overline{Mono}^X\}$, entonces existe el único morfismo $\psi : Y \rightarrow X$ tal que $\psi \circ j_i = h_i$.

Usemos la propiedad de la $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorización, entonces existen $f : Y \rightarrow Z$ con $f \in \mathcal{E}$, $g : Z \rightarrow X$ con $g \in \mathcal{M}$ tales que $\psi = g \circ f$, por hipótesis tenemos que $Z \in Ob(\mathcal{B})$, afirmamos que g es el co-reflector y Z es la co-reflexión de X , para esto sea $M \in Ob(\mathcal{B})$ y $L : M \rightarrow X$, queremos hallar $L^o : M \rightarrow Z$ tal que $g \circ L^o = L$. Por otro lado existen $t \in \mathcal{E}$ y $s \in \mathcal{M}$ tal que $L = s \circ t$, sean $t : M \rightarrow V$ $s : V \rightarrow X$, por hipótesis $V \in Ob(\mathcal{B})$, entonces existe $h_i \in \overline{Mono}^X$ tal que $s \sim_2 h_i$, es decir existe un isomorfismo $n : V \rightarrow N$ tal que $s = h_i \circ n$, definimos $L^o = f \circ j_i \circ n \circ t : M \rightarrow Z$, tenemos que los siguientes diagramas conmutan



$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{n} & Y_i \\
 \downarrow s & & \downarrow h_i \\
 X & \xrightarrow{I_X} & X
 \end{array}$$

Calculemos: $g \circ L^\circ = g \circ (f \circ j_i \circ n \circ t) = (g \circ f) \circ (j_i \circ n \circ t) = \psi \circ j_i(n \circ t) = (h_i \circ n) \circ t = s \circ t = L$. Ahora la unicidad se logra ya que g es monomorfismo. \square

Usando los Teoremas 3.8 (5), 6.3, 6.8 1., 6.10 1. y 6.12, y como en \mathcal{Top} los co-productos son sumas topológicas, obtenemos.

Teorema 6.13. *Sea \mathcal{U} una subcategoría de \mathcal{Top} con por lo menos un objeto no vacío. \mathcal{U} es bi-co-reflexiva en \mathcal{Top} si, y sólo si es cerrada bajo sumas topológicas y funciones cocientes¹.*

Obtenemos nuevos corolarios del Teorema 6.12.

Corolario 6.14. *Si \mathcal{A} es una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoría \mathcal{M} -bien potenciada, con $\mathcal{M} \subset \text{Mono } \mathcal{A}$, que tiene co-productos, entonces se cumple lo siguiente.*

La intersección de cualquier clase de subcategorías \mathcal{M} -co-reflexivas plenas y cerradas bajo isomorfismos de \mathcal{A} es \mathcal{M} -co-reflexiva en \mathcal{A} .

Demostración. Sea $\{\mathcal{A}_\lambda : \lambda \in \mathcal{C}\}$ una clase de subcategorías de \mathcal{A} , tales que para todo $\lambda \in \mathcal{C}$, \mathcal{A}_λ es una subcategoría co-reflexiva, plena de \mathcal{A} y cerrada bajo isomorfismos. Queremos demostrar que $\bigcap \mathcal{A}_\lambda$ es co-reflexiva en \mathcal{A} . Recordemos que $Ob(\bigcap \mathcal{A}_\lambda) = \bigcap (Ob(\mathcal{A}_\lambda))$ y $Mor(\bigcap \mathcal{A}_\lambda) = \bigcap Mor(\mathcal{A}_\lambda)$. Veamos que $\bigcap \mathcal{A}_\lambda$ es plena y cerrada bajo isomorfismos: sean $A, B \in Ob(\bigcap \mathcal{A}_\lambda)$ y $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$; como para todo $\lambda \in \mathcal{C}$, $A, B \in Ob(\mathcal{A}_\lambda)$ y \mathcal{A}_λ es plena, entonces $f \in Hom_{\mathcal{A}_\lambda}(A, B)$ para todo $\lambda \in \mathcal{C}$, así que $f \in Hom_{\bigcap \mathcal{A}_\lambda}(A, B)$, por tanto $\bigcap \mathcal{A}_\lambda$ es plena en \mathcal{A} . Ahora, sean $A \in Ob(\bigcap \mathcal{A}_\lambda)$ y $B \in Ob(\mathcal{A})$, tales que A y B son isomorfos; como para todo $\lambda \in \mathcal{C}$, \mathcal{A}_λ es cerrada bajo isomorfismos, entonces $B \in Ob(\mathcal{A}_\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathcal{C}$, es decir, $B \in Ob(\bigcap \mathcal{A}_\lambda)$.

Por el Teorema 6.12, bastará demostrar que:

(1) $\bigcap \mathcal{A}_\lambda$ es cerrada bajo co-productos, y que

¹Una subcategoría \mathcal{U} de \mathcal{Top} , es cerrada bajo funciones cocientes si dado $X \in Ob(\mathcal{U})$ y $f : X \rightarrow Y$ una función cociente, podemos concluir que $Y \in Ob(\mathcal{U})$

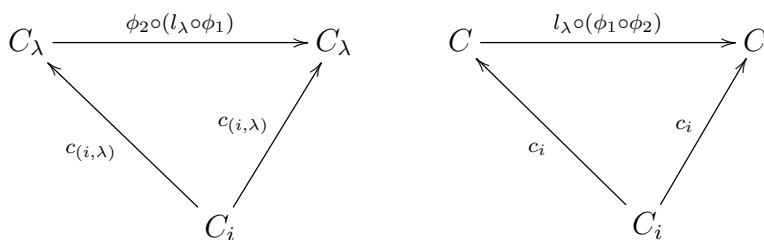
(2) si $f : X \rightarrow Y$ pertenece a \mathcal{E} y $X \in Ob(\bigcap \mathcal{A}_\lambda)$, entonces $Y \in Ob(\bigcap \mathcal{A}_\lambda)$.

(2) Si $f : X \rightarrow Y$ pertenece a \mathcal{E} y $X \in Ob(\bigcap \mathcal{A}_\lambda)$, entonces para todo $\lambda \in \mathcal{C}$, $X \in Ob(\mathcal{A}_\lambda)$; como \mathcal{A}_λ cumple las hipótesis del Teorema 6.12, tenemos que $Y \in Ob(\mathcal{A}_\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathcal{C}$, o sea $Y \in Ob(\bigcap \mathcal{A}_\lambda)$.

(1) Ahora sea $\{C_i : i \in I\} \subseteq Ob(\bigcap \mathcal{A}_\lambda)$, con I un conjunto. Como \mathcal{A} tiene co-productos, existe un \mathcal{A} -pozo $(C, (c_i : C_i \rightarrow C)_{i \in I})$ que es su \mathcal{A} -co-producto. Sabemos, que para todo $\lambda \in \mathcal{C}$, se cumple que $\{C_i : i \in I\} \subseteq Ob(\mathcal{A}_\lambda)$; nuevamente, como \mathcal{A}_λ cumple las hipótesis del Teorema 6.12, existe un \mathcal{A}_λ -pozo $(C_\lambda, (c_{(i,\lambda)} : C_i \rightarrow C_\lambda)_{i \in I})$ que es un \mathcal{A}_λ -co-producto de la familia $\{C_i : i \in I\}$.

Por otro lado, para cada $\lambda \in \mathcal{C}$, sean $l_\lambda : C_{l_\lambda} \rightarrow C$ las \mathcal{A}_λ -co-reflexiones con co-reflector C_{l_λ} para C . Como $C_i \in Ob(\mathcal{A}_\lambda)$, para $c_{(i,\lambda)}$, existe un único morfismo $c_{i,\lambda}^\circ$ tal que $l_\lambda \circ c_{i,\lambda}^\circ = c_i$. Por la propiedad universal de los co-productos en el co-producto $(C_\lambda, (c_{(i,\lambda)} : C_i \rightarrow C_\lambda)_{i \in I})$, existe $\phi_1 : C_\lambda \rightarrow C_{l_\lambda}$ tal que $\phi_1 \circ c_{(i,\lambda)} = c_{i,\lambda}^\circ$. Pero también por la propiedad universal del co-producto en el co-producto $(C, (c_i : C_i \rightarrow C)_{i \in I})$, existe $\phi_2 : C \rightarrow C_\lambda$ tal que $\phi_2 \circ c_i = c_{(i,\lambda)}$.

Como $\phi_2 \circ (l_\lambda \circ \phi_1) \circ c_{(i,\lambda)} = (\phi_2 \circ l_\lambda) \circ c_{i,\lambda}^\circ = \phi_2 \circ c_i = c_{(i,\lambda)}$ y, por otro lado $(l_\lambda \circ (\phi_1 \circ \phi_2)) \circ c_i = (l_\lambda \circ \phi_1) \circ c_{(i,\lambda)} = l_\lambda \circ c_{i,\lambda}^\circ = c_i$, tenemos que los siguientes diagramas conmutan.



Por la propiedad del co-producto tenemos que $\phi_2 \circ (l_\lambda \circ \phi_1) = I_{C_\lambda}$ y que $(l_\lambda \circ \phi_1) \circ \phi_2 = l_\lambda \circ (\phi_1 \circ \phi_2) = I_C$, luego ϕ_2 es un isomorfismo, así que C , es isomorfo a C_λ , por tanto $C \in Ob(\mathcal{A}_\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathcal{C}$, por tanto $C \in Ob(\bigcap \mathcal{A}_\lambda)$. Como $\bigcap \mathcal{A}_\lambda$ es subcategoría plena, entonces $c_i \in Mor(\bigcap \mathcal{A}_\lambda)$, por tanto el pozo $(C, (c_i : C_i \rightarrow C)_{i \in I})$ es un $\bigcap \mathcal{A}_\lambda$ -co-producto. \square

Antes de iniciar la demostración del siguiente corolario del Teorema 6.12,

subrayamos las siguientes propiedades de los productos y co-productos, que nos serán útiles en dicha demostración.

Lema 6.15. *Sean \mathcal{A} una categoría, $\{X_i : i \in I\} \subseteq \text{Ob}(\mathcal{A})$, tales que para cada $i \in I$, existe I_i tal que $\{X_{j_i} : j_i \in I_i\} \subseteq \text{Ob}(\mathcal{A})$. Si denotamos por $\coprod_{j_i \in I_i} X_{j_i}$ ($\prod_{j_i \in I_i} X_{j_i}$, respectivamente) al objeto coproducto (producto, respectivamente) de la familia $\{X_{j_i} : j_i \in I_i\} \subseteq \text{Ob}(\mathcal{A})$, entonces son ciertas las siguientes proposiciones.*

(1) *Si \mathcal{A} es una categoría que tiene co-productos y $X_i = \coprod_{j_i \in I_i} X_{j_i}$, entonces*

$$\coprod_{i \in I} X_i = \coprod_{i \in I} (\coprod_{j_i \in I_i} X_{j_i}) \text{ es isomorfo a } \coprod_{j_i \in I_i, i \in I} X_{j_i}.$$

(2) *Si \mathcal{A} es una categoría que tiene productos y $X_i = \prod_{j_i \in I_i} X_{j_i}$, entonces*

$$\prod_{i \in I} X_i = \prod_{i \in I} (\prod_{j_i \in I_i} X_{j_i}) \text{ es isomorfo a } \prod_{j_i \in I_i, i \in I} X_{j_i}.$$

Corolario 6.16. *Si \mathcal{A} es una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoría \mathcal{M} -bien potenciada, con $\mathcal{M} \subset \text{Mono } \mathcal{A}$, que tiene co-productos, entonces se cumple lo siguiente. Para cualquier subcategoría \mathcal{B} de \mathcal{A} , existe una subcategoría \mathcal{M} -co-reflexiva \mathcal{B}^* de \mathcal{A} que satisface las siguientes condiciones:*

1. $\mathcal{B}^* \supset \mathcal{B}$.
2. Si \mathcal{B}' es subcategoría plena, cerrada bajo isomorfismos, \mathcal{M} -co-reflexiva de \mathcal{A} y $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}^*$.
3. Un \mathcal{A} -objeto X pertenece a \mathcal{B}^* si, y sólo si existe un conjunto $\{X_i \mid i \in I\}$ de \mathcal{B} -objetos X_i y un morfismo $f : \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow X$ que pertenece a \mathcal{E} .

Demostración. Sea

$\mathcal{F} = \{\mathcal{C} \text{ subcategoría de } \mathcal{A} : \mathcal{C} \text{ es } \mathcal{M}\text{-co-reflexiva, plena, cerrada bajo isomorfismos y } \text{Ob}(\mathcal{B}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{C})\}$.

Por el Teorema 6.12, tenemos que \mathcal{A} es subcategoría \mathcal{M} -co-reflexiva de \mathcal{A} , así que $\mathcal{F} \neq \emptyset$; por el Corolario 6.14, tenemos que $\bigcap \mathcal{F}$ es \mathcal{M} -co-reflexiva; sea $\mathcal{B}^* = \bigcap \mathcal{F}$. Veamos que cumple lo pedido.

Trivialmente cumple (1) y (2), veamos que cumple (3). Sea $\bar{\mathcal{B}}$ la subcategoría plena de \mathcal{A} , tal que

$$\text{Ob}(\bar{\mathcal{B}}) = \{X \in \text{Ob}(\mathcal{A}) : \text{existen } \{X_i \in \text{Ob}(\mathcal{B}) : i \in I\}$$

y $f \in \mathcal{E}$ tal que

$$\text{Dom}(f) = \coprod_{i \in I} X_i$$

y $\text{Cod}(f) = X$.

Para que $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B}^*$ bastará ver que $\text{Ob}(\mathcal{B}^*) = \text{Ob}(\bar{\mathcal{B}})$. Como \mathcal{B}^* es \mathcal{M} -co-relexiva y $\text{Ob}(\mathcal{B}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{B}^*)$; si $X \in \text{Ob}(\bar{\mathcal{B}})$, entonces existe una familia $\{X_i : i \in I\} \subseteq \text{Ob}(\mathcal{B})$ y $f \in \mathcal{E}$ tal que $f : \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow X$, como $\coprod_{i \in I} X_i \in \text{Ob}(\mathcal{B}^*)$, entonces $X \in \text{Ob}(\mathcal{B}^*)$. O sea $\text{Ob}(\bar{\mathcal{B}}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{B}^*)$.

Ahora, veamos que $\bar{\mathcal{B}} \in \mathcal{F}$, con ello \mathcal{B}^* es subcategoría de $\bar{\mathcal{B}}$. Primero mostremos que $\text{Ob}(\mathcal{B}) \subseteq \text{Ob}(\bar{\mathcal{B}})$. Sean $Z \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ y (M, h, k) una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorización de I_Z , o sea $h \in \mathcal{E}, k \in \mathcal{M}$ y $I_Z = k \circ h$; como k es monomorfismo, entonces k es isomorfismo, por tanto $I_Z \in \mathcal{E}$; trivialmente $\coprod Z = Z$, entonces $I_Z : \coprod Z \rightarrow Z$ con $I_Z \in \mathcal{E}$, entonces $Z \in \text{Ob}(\bar{\mathcal{B}})$.

Ahora veamos que $\bar{\mathcal{B}}$ es cerrada bajo isomorfismos. Si $X \in \text{Ob}(\bar{\mathcal{B}})$ y $Z \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ tal que X y Z son isomorfos entonces existe una familia $\{X_i : i \in I\} \subseteq \text{Ob}(\mathcal{B})$, $f \in \mathcal{E}$ tal que $f : \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow X$ y $\phi : X \rightarrow Z$ isomorfismo, como $\phi \circ f \in \mathcal{E}$ y $\phi \circ f : \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow Z$, entonces $Z \in \text{Ob}(\bar{\mathcal{B}})$.

Finalmente veamos que $\bar{\mathcal{B}}$ es \mathcal{M} -co-reflexiva; por el Teorema 6.12, bastará demostrar lo siguiente:

- (i) Dado $X \in \text{Ob}(\bar{\mathcal{B}})$ y $f \in \mathcal{E}$ con $f : X \rightarrow Y$, entonces $Y \in \text{Ob}(\bar{\mathcal{B}})$ y
- (ii) dada $\{Z_i : i \in I\} \subset \text{Ob}(\bar{\mathcal{B}})$, entonces $\coprod_{i \in I} Z_i \in \text{Ob}(\bar{\mathcal{B}})$.

(i) Como $X \in \text{Ob}(\bar{\mathcal{B}})$, existen $\{X_i : i \in I\} \subset \text{Ob}(\mathcal{B})$ y $g : \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow X$ con $g \in \mathcal{E}$; por el Lema 6.6, tenemos que $f \circ g \in \mathcal{E}$, así que $Y \in \text{Ob}(\bar{\mathcal{B}})$.

(ii) Sea $\{Z_i : i \in I\} \subset \text{Ob}(\bar{\mathcal{B}})$; entonces, para cada $i \in I$, existen I_i y $\{Z_{j_i} : j_i \in I_i\} \subseteq \text{Ob}(\mathcal{B})$ y $f_i : \coprod_{j_i \in I_i} Z_{j_i} \rightarrow Z_i$ con $f_i \in \mathcal{E}$. Por el Lema 6.7, tenemos que $f = \coprod_{i \in I} f_i \in \mathcal{E}$. Si $Y_i = \coprod_{j_i \in I_i} Z_{j_i}$, por el Lema 6.15, $\coprod_{i \in I} Y_i$ es isomorfo a $\coprod_{j_i \in I_i, i \in I} Z_{j_i}$. Sea $\phi : \coprod_{j_i \in I_i, i \in I} Z_{j_i} \rightarrow \coprod_{i \in I} Y_i$ tal isomorfismo; como

$$f : \coprod_{i \in I} Y_i = \coprod_{i \in I} (\coprod_{j_i \in I_i} X_{j_i}) \rightarrow \coprod_{i \in I} Z_i,$$

entonces $f \circ \phi : \coprod_{j_i \in I_i, i \in I} Z_{j_i} \rightarrow \coprod_{i \in I} Z_i$, y además $f \circ \phi \in \mathcal{E}$, por tanto $\coprod_{i \in I} Z_i \in \text{Ob}(\bar{\mathcal{B}})$.

Para finalizar la demostración, como $\text{Ob}(\bar{\mathcal{B}}) \subseteq \mathcal{F}$, tenemos que $\text{Ob}(\mathcal{B}^*) \subseteq \text{Ob}(\bar{\mathcal{B}})$; por tanto, $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B}^*$. \square

Como aplicación de este corolario obtenemos su versión en \mathcal{Top} .

Teorema 6.17. *Si \mathcal{U} es cualquier subcategoría de \mathcal{Top} , entonces existe la subcategoría co-reflexiva más pequeña $\bar{\mathcal{U}}$ de \mathcal{Top} que contiene a \mathcal{U} . Además $\bar{\mathcal{U}}$ es la categoría de todos los cocientes en \mathcal{Top} de sumas topológicas de objetos de \mathcal{U} . A $\bar{\mathcal{U}}$ se le llama la envolvente co-reflexiva de \mathcal{Top} .*

7 Límites inferiores y límites superiores

En \mathcal{Top} , podemos generar la siguiente clase de funciones $\{cl_X : X \in Ob(\mathcal{Top})\}$, tal que $cl_X : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ donde denotamos por $\mathcal{P}(X)$ al conjunto potencia de X , es decir el conjunto de subconjuntos del conjunto X , y $cl_X(A)$ es la clausura del conjunto A .

Inspirados por este operador, el operador clausura, definimos los operadores límite.

Definición 7.1. 1. Un operador límite superior es una clase $\mathcal{L} = \{l_X : X \in Ob(\mathcal{Top}) \text{ y } l_X : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)\}$, tal que:

- (i) Para todo $X \in Ob(\mathcal{Top})$ y $Z \in \mathcal{P}(X)$, $cl_X(Z) \subseteq l_X(Z)$;
- (ii) Para todo $X \in Ob(\mathcal{Top})$ y $Z_1, Z_2 \in \mathcal{P}(X)$, $l_X(Z_1 \cup Z_2) = l_X(Z_1) \cup l_X(Z_2)$;
- (iii) Para todo $X \in Ob(\mathcal{Top})$, $l_X(\emptyset) = \emptyset$;
- (iv) Para todo $X, Y \in Ob(\mathcal{Top})$, $Z \in \mathcal{P}(X)$ y $f \in Hom_{\mathcal{Top}}(X, Y)$, se cumple que $f(l_X(Z)) \subseteq l_Y(f(Z))$.

2. Un operador límite inferior es una clase $\mathcal{S} = \{s_X : X \in Ob(\mathcal{Top}) \text{ y } s_X : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)\}$, tal que:

- (i) Para todo $X \in Ob(\mathcal{Top})$ y $Z \in \mathcal{P}(X)$, $Z \subseteq s_X(Z) \subseteq cl_X(Z)$;
- (ii) Para todo $X \in Ob(\mathcal{Top})$ y $Z_1, Z_2 \in \mathcal{P}(X)$, $s_X(Z_1 \cup Z_2) = s_X(Z_1) \cup s_X(Z_2)$;
- (iii) Para todo $X \in Ob(\mathcal{Top})$, $s_X(\emptyset) = \emptyset$;
- (iv) Para todo $X, Y \in Ob(\mathcal{Top})$, $Z \in \mathcal{P}(X)$ y $f \in Hom_{\mathcal{Top}}(X, Y)$, se cumple que $f(s_X(Z)) \subseteq s_Y(f(Z))$.

3. Dado \mathcal{L} , un operador límite superior y $X \in Ob(\mathcal{Top})$, diremos que X es \mathcal{L} -separable, si para todo $Z \in \mathcal{P}(X)$, se cumple que $l_X(Z) = cl_X(Z)$. A la subcategoría plena de \mathcal{Top} , con objetos los espacios \mathcal{L} -separables y morfismos las funciones continuas entre ellos, se denotará por $S(\mathcal{L})$.

4. Dado \mathcal{S} , un operador límite inferior y $X \in \text{Ob}(\mathcal{T}op)$, diremos que X es \mathcal{S} -separable, si para todo $Z \in \mathcal{P}(X)$ tal que $Z = s_X(Z)$, se cumple que $s_X(Z) = cl_X(Z)$. A la subcategoría plena de $\mathcal{T}op$, con objetos los espacios \mathcal{S} -separables y morfismos las funciones continuas entre ellos, se denotará por $S(\mathcal{S})$.

En el siguiente teorema, vemos la importante relación entre estas subcategorías y la co-reflexión. Recordemos que una subcategoría es cerrada bajo isomorfismos si dado un objeto de la subcategoría todo objeto isomorfo a él es objeto de la subcategoría.

Teorema 7.2. *Si \mathcal{B} es una subcategoría plena y cerrada bajo isomorfismos de $\mathcal{T}op$ con por lo menos un objeto no vacío, entonces*

\mathcal{B} es bi-co-reflexiva en $\mathcal{T}op$ si y sólo si existe \mathcal{S} un operador límite inferior tal que $\mathcal{B} = S(\mathcal{S})$.

Demostración. Probaremos primero que si $\mathcal{B} = S(\mathcal{S})$ para algún operador límite inferior \mathcal{S} , entonces \mathcal{B} es bi-co-reflexiva en $\mathcal{T}op$.

Sea \mathcal{S} un operador límite inferior. Por el Teorema 6.13 es suficiente demostrar que $S(\mathcal{S})$ es cerrada bajo co-productos y funciones cocientes.

Sea $\{X_i \mid i \in I\} \subset \text{Ob}(S(\mathcal{S}))$ y $(X = \coprod X_i, \{j_i : X_i \rightarrow X\})$ su co-producto topológico en $\mathcal{T}op$, notar que para todo $i \in I$, j_i es monomorfismo (ver la construcción de la página 181). Veamos que X es un $S(\mathcal{S})$ -objeto. Sea $Z \in \mathcal{P}(X)$ con $S_X(Z) = Z$, se tiene que

$j_i(\mathcal{S}_{X_i}(j_i^{-1}(Z))) \subseteq \mathcal{S}_X(j_i(j_i^{-1}(Z))) \subseteq \mathcal{S}_X(Z) = Z$ lo cual implica que $j_i^{-1}(Z) \subseteq \mathcal{S}_{X_i}(j_i^{-1}(Z)) = j_i^{-1}(j_i(\mathcal{S}_{X_i}(j_i^{-1}(Z)))) \subseteq j_i^{-1}(Z)$, luego $\mathcal{S}_{X_i}(j_i^{-1}(Z)) = j_i^{-1}(Z)$ para cada $i \in I$.

Como $j_i^{-1}(Z) \subseteq X_i \in \text{Ob}(S(\mathcal{S}))$ para cada $i \in I$ y $\mathcal{S}_{X_i}(j_i^{-1}(Z)) = j_i^{-1}(Z)$, entonces $j_i^{-1}(Z) = cl_{X_i}(j_i^{-1}(Z))$, es decir, para cada $i \in I$, $j_i^{-1}(Z)$ es cerrado en X_i . Por la topología en un co-producto en $\mathcal{T}op$, se tiene que Z es cerrado en X . O sea $Z \subseteq S_X(Z) \subseteq cl_X(Z) = Z$, luego $cl_X(Z) = S_X(Z)$. Por lo tanto, X es un $S(\mathcal{S})$ -objeto.

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función cociente con X un $S(\mathcal{S})$ -objeto. Veamos que Y es un $S(\mathcal{S})$ -objeto. Sea $Z \in \mathcal{P}(Y)$ con $\mathcal{S}_Y(Z) = Z$, se tiene que $f(\mathcal{S}_X(f^{-1}(Z))) \subseteq \mathcal{S}_Y(f(f^{-1}(Z))) \subseteq \mathcal{S}_Y(Z) = Z$, tenemos que $\mathcal{S}_X(f^{-1}(Z)) \subseteq f^{-1}(f(\mathcal{S}_X(f^{-1}(Z)))) \subseteq f^{-1}(Z)$, por lo tanto, $\mathcal{S}_X(f^{-1}(Z)) \subseteq f^{-1}(Z)$, de donde

$$\mathcal{S}_X(f^{-1}(Z)) = f^{-1}(Z).$$

Como $X \in \text{Ob } S(\mathcal{S})$, entonces $f^{-1}(Z) = cl_X(Z)$ y puesto que f es una función cociente, se tiene que Z es cerrado en X . Por lo tanto, Y es un $S(\mathcal{S})$ -objeto.

Ahora supóngase que \mathcal{B} es co-reflexiva en \mathcal{Top} . Sea $c_{\mathcal{B}} : X_{\mathcal{B}} \rightarrow X$ la \mathcal{B} -co-reflexión de X . Probaremos que $s_X(A) = c_{\mathcal{B}}(Cl_{X_{\mathcal{B}}}(c_{\mathcal{B}}^{-1}(A)))$ es un operador límite inferior.

$$1. \text{ Probaremos primero que: } A \subseteq c_{\mathcal{B}}(Cl_{X_{\mathcal{B}}}(c_{\mathcal{B}}^{-1}(A))) = s_X(A) \subseteq Cl_X(A).$$

Recordemos que $c_{\mathcal{B}}$ es biyectiva y continua. Sea $A \in \mathcal{P}(X)$. Entonces:

$$A = c_{\mathcal{B}}(c_{\mathcal{B}}^{-1}(A)) \subseteq c_{\mathcal{B}}(cl_{X_{\mathcal{B}}}(c_{\mathcal{B}}^{-1}(A))) = s_X(A)$$

También:

$$s_X(A) = c_{\mathcal{B}}(Cl_{X_{\mathcal{B}}}(c_{\mathcal{B}}^{-1}(A))) \subset Cl_X(c_{\mathcal{B}}(c_{\mathcal{B}}^{-1}(A))) = Cl_X(A).$$

2. Ahora probaremos la aditividad de s_X :

Sean A_1 y A_2 en $\mathcal{P}(X)$. Entonces:

$$\begin{aligned} s_X(A_1 \cup A_2) &= c_{\mathcal{B}}(Cl_{X_{\mathcal{B}}}(c_{\mathcal{B}}^{-1}(A_1 \cup A_2))) \\ &= c_{\mathcal{B}}(Cl_{X_{\mathcal{B}}}(c_{\mathcal{B}}^{-1}(A_1) \cup c_{\mathcal{B}}^{-1}(A_2))) = s_X(A_1) \cup s_X(A_2) \\ &= c_{\mathcal{B}}[(Cl_{X_{\mathcal{B}}}(c_{\mathcal{B}}^{-1}(A_1))) \cup (Cl_{X_{\mathcal{B}}}(c_{\mathcal{B}}^{-1}(A_2)))] \\ &= c_{\mathcal{B}}(Cl_{X_{\mathcal{B}}}(c_{\mathcal{B}}^{-1}(A_1))) \cup c_{\mathcal{B}}(Cl_{X_{\mathcal{B}}}(c_{\mathcal{B}}^{-1}(A_2))) \\ &= s_X(A_1) \cup s_X(A_2) \end{aligned}$$

3. Ahora, si $f : X \rightarrow Y$ un \mathcal{Top} -morfismo, probaremos que

$$f(c_{\mathcal{B}}(cl_{X_{\mathcal{B}}}(c_{\mathcal{B}}^{-1}(A)))) \subset d_{\mathcal{B}}(cl_{Y_{\mathcal{B}}}(d_{\mathcal{B}}^{-1}(f(A)))),$$

donde $d_{\mathcal{B}} : Y_{\mathcal{B}} \rightarrow Y$ es la \mathcal{B} -co-reflexión de Y .

Veamos que para cada A en $\mathcal{P}(X)$:

$$d_{\mathcal{B}}^{-1}(f(c_{\mathcal{B}}(cl_{X_{\mathcal{B}}}(c_{\mathcal{B}}^{-1}(A))))) \subseteq cl_{Y_{\mathcal{B}}}(d_{\mathcal{B}}^{-1}(f(A))).$$

Puesto que $d_{\mathcal{B}}$ es una \mathcal{B} -co-reflexión y $X_{\mathcal{B}}$ está en \mathcal{B} , para $h = f \circ c_{\mathcal{B}} : X_{\mathcal{B}} \rightarrow Y$ existe un único \mathcal{B} -morfismo $h^{\circ} : X_{\mathcal{B}} \rightarrow Y_{\mathcal{B}}$ tal que $f \circ c_{\mathcal{B}} = d_{\mathcal{B}} \circ h^{\circ}$. Como $d_{\mathcal{B}}$ es biyectiva, se tiene que $d_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ c_{\mathcal{B}} = h^{\circ}$. Sea A en $\mathcal{P}(X)$

$$d_{\mathcal{B}}^{-1}(f(c_{\mathcal{B}}(cl_{X_{\mathcal{B}}}(c_{\mathcal{B}}^{-1}(A)))))) = h^{\circ}(cl_{X_{\mathcal{B}}}(c_{\mathcal{B}}^{-1}(A))) \\ \subset cl_{Y_{\mathcal{B}}}(h^{\circ}(c_{\mathcal{B}}^{-1}(A))) = cl_{Y_{\mathcal{B}}}(d_{\mathcal{B}}^{-1}(f(A))),$$

Por tanto \mathcal{S} es un operador límite inferior. Sólo resta demostrar que $\mathcal{B} = S(\mathcal{S})$. Sea $X \in Ob(\mathcal{B})$, para $Id_X : X \rightarrow X$, existe $Id_X^{\circ} : X \rightarrow X_{\mathcal{B}}$, tal que

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{c_{\mathcal{B}}} & X \\ Id_X^{\circ} \uparrow & & \nearrow Id_X \\ X & & \end{array}$$

conmuta. Así que $c_{\mathcal{B}}$ es un homeomorfismo. Ahora, supongamos que $A \subseteq X$ es tal que $\mathcal{S}_X(A) = A$, es decir $c_{\mathcal{B}}(cl_{X_{\mathcal{B}}}(c_{\mathcal{B}}^{-1}(A))) = A$, luego $c_{\mathcal{B}}^{-1}(A) = cl_{X_{\mathcal{B}}}(c_{\mathcal{B}}^{-1}(A))$, es decir $c_{\mathcal{B}}^{-1}(A)$ es cerrado en $X_{\mathcal{B}}$, luego $A = c_{\mathcal{B}}(c_{\mathcal{B}}^{-1}(A))$ es cerrado en X , así que $X \in S(\mathcal{S})$.

Ahora, supongamos que $X \in S(\mathcal{S})$, veamos que $c_{\mathcal{B}} : X_{\mathcal{B}} \rightarrow X$ es un homeomorfismo, bastará demostrar que es abierta, ya que $c_{\mathcal{B}}$ es biyección. Sea $O \subseteq X_{\mathcal{B}}$ conjunto abierto, queremos demostrar que $c_{\mathcal{B}}[O]$ es abierto en X , es decir que $X \setminus c_{\mathcal{B}}[O]$ es cerrado en X , veamos que $\mathcal{S}_X(X \setminus c_{\mathcal{B}}[O]) = X \setminus c_{\mathcal{B}}[O]$. Para esto, como $c_{\mathcal{B}}$ es biyección, $c_{\mathcal{B}}^{-1}(X \setminus c_{\mathcal{B}}[O]) = X_{\mathcal{B}} \setminus O$ y $c_{\mathcal{B}}(X_{\mathcal{B}} \setminus O) = X \setminus c_{\mathcal{B}}[O]$.

Así que $\mathcal{S}_X(X \setminus c_{\mathcal{B}}[O]) = c_{\mathcal{B}}(cl_{X_{\mathcal{B}}}(c_{\mathcal{B}}^{-1}(X \setminus c_{\mathcal{B}}[O]))) = c_{\mathcal{B}}(cl_{X_{\mathcal{B}}}(X_{\mathcal{B}} \setminus O)) = c_{\mathcal{B}}(X_{\mathcal{B}} \setminus O) = X \setminus c_{\mathcal{B}}[O]$.

Luego $X_{\mathcal{B}}$ y X , son homeomorfos, por tanto $X \in \mathcal{B}$. Y finalmente $\mathcal{B} = S(\mathcal{S})$. \square

8 Espacios secuenciales

Un importante ejemplo de operador límite inferior es el siguiente:

Definición 8.1. Dado $X \in \mathcal{T}op$, y $Z \in \mathcal{P}(X)$, definimos

$$S_X(Z) = \{x : \text{existe una sucesión } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Z \text{ con } x \in \lim\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}\},$$

es decir:

$$x \in S_X(Z) \text{ si y sólo si } x \in \lim(Suc(Z)).$$

Lema 8.2. (1) $\mathcal{S} = \{S_X : X \in \mathcal{Top}\}$, es un operador límite inferior.
 (2) $S(\mathcal{S}) = \mathcal{Sec}$.

Demostración. (1) Sea $X \in \mathcal{Top}$ y $Z, W \subseteq X$,

(i) Si $S_X(\emptyset) \neq \emptyset$, sea $x \in S_X(\emptyset)$, existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Suc}(\emptyset) = \emptyset$, tal que $x \in \lim_{\mathcal{U}}\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, lo cual no es posible. Por tanto $S_X(\emptyset) = \emptyset$.

(ii) Veamos que $Z \subseteq S_X(Z) = \lim(\text{Suc}(Z)) \subseteq cl_X(Z)$.

Sea $x \in Z$, tomamos $x_n = x$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es claro que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Suc}(Z)$ y que $\lim\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = x$, así que $x \in \lim(\text{Suc}(Z)) = S_X(Z)$.

Ahora, sea $x \in \lim(\text{Suc}(Z))$, entonces existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Suc}(Z)$ tal que $\lim\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = x$. Por otro lado, sea V una vecindad abierta de x , entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\{n : n \geq n_0\} \subseteq \{n : x_n \in V\}$, como $\{n : n \geq n_0\}$ es no vacío, sea $r \geq n_0$, entonces $x_r \in Z \cap V$, por tanto $x \in cl_X(Z)$.

(iii) $S_X(Z \cup W) = S_X(Z) \cup S_X(W)$.

Sea $x \in S_X(Z \cup W)$, existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Suc}(Z \cup W)$ tal que $\lim\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = x$. Denotemos por $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in Z\}$ y $B = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in W \setminus Z\}$, es claro que $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = \mathbb{N}$. Si A o B es finito, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{n : n \geq n_0\}$ es subconjunto de A o de B (del que no es finito), definimos $y_n = x_{n+n_0}$, entonces:

(a) $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Suc}(Z)$ o $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Suc}(W)$ y

(b) $\lim\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} = x$.

Para esto, sea V una vecindad abierta de x , entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que $\{n : n \geq n_1\} \subseteq \{n : x_n \in V\}$. Tomamos $n_2 > \max\{n_0, n_1\}$, ahora si $n \geq n_2$, entonces $n > n_0$ y $n - n_0 = r \in \mathbb{N}$, o sea $n = r + n_0$, luego $y_n = x_{r+n_0}$, pero $n > n_1$, así que $x_{r+n_0} \in V$, luego $y_n \in V$, finalmente $\{n : n \geq n_2\} \subseteq \{n : y_n \in V\}$, luego $\lim\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} = x$.

Combinando lo anterior tenemos que $x \in S_X(Z) \cup S_X(W)$.

Ahora, si ambos, A y B , son infinitos, definimos por inducción:

$f : \mathbb{N} \rightarrow A$, $f(1) = \min A$, $f(n+1) = \min(A \setminus \{f(1), f(2), \dots, f(n)\})$, afirmamos que f es estrictamente creciente:

Demostremos que: para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $f(n) < f(n+1)$. Como $f(n+1) \in A \setminus \{f(1), \dots, f(n)\} \subseteq A \setminus \{f(1), \dots, f(n-1)\}$, entonces $f(n+1) \in A \setminus \{f(1), \dots, f(n-1)\}$, luego $f(n) \leq f(n+1)$, pero $f(n) \notin A \setminus \{f(1), \dots, f(n)\}$, es decir $f(n) \neq f(n+1)$, luego $f(n) < f(n+1)$.

Veamos que si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es monótona creciente entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n \leq f(n)$. Supongamos que $C = \{n : f(n) < n\}$

es no vacío, sea $n_0 = \min C$, como $n_0 \in C$, se cumple que $f(n_0) < n_0$, luego $f(f(n_0)) < f(n_0)$, así que $f(n_0) \in C$, luego $n_0 \leq f(n_0)$, lo cual es una contradicción.

Ahora, definimos para todo $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_{f(n)}$, esta sucesión cumple:

(a) $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Suc}(Z)$.

Esto es claro ya que $f(n) \in A$, luego $y_n = x_{f(n)} \in Z$.

(b) $\lim\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} = x$. Para esto sea V una vecindad abierta de x , entonces existe $r_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\{n : n \geq r_0\} \subseteq \{n : x_n \in V\}$. Sea $n \geq r_0$, entonces $r_0 \leq n < f(n)$, así que $x_{f(n)} \in V$, por tanto $y_n \in V$, luego $\lim\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} = x$.

Combinando lo anterior, tenemos que

$$x \in \lim(\text{Suc}(Z)) \subseteq \lim(\text{Suc}(Z)) \cup \lim(\text{Suc}(W)).$$

Para la otra contención. Si $x \in S_X(Z) \cup S_X(W)$, entonces $x \in S_X(Z)$ o $x \in S_X(W)$, entonces existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Suc}(Z) \subseteq \text{Suc}(Z \cup W)$ o $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Suc}(W) \subseteq \text{Suc}(Z \cup W)$ tal que $\lim\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = x$, por tanto $x \in \lim(\text{Suc}(Z \cup W))$.

(iv) Ahora sean $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{T}op)$ y $f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y)$, demostremos que

$$f(S_X(Z)) \subseteq S_Y(f(Z)).$$

Para esto, sea $x \in S_X(Z)$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Suc}(Z)$ tal que $\lim\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = x$, es claro que $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Suc}(f(Z))$. Si $\lim\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} = f(x)$, entonces $f(x) \in \lim \text{Suc}(f(Z))$, así que $f(S_X(Z)) \subseteq S_Y(f(Z))$. Sea W una vecindad abierta de $f(x)$, por la continuidad de f , existe V vecindad abierta de x tal que $f(V) \subseteq W$, como $\lim\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = x$, entonces existe $r_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\{n : n \geq r_0\} \subseteq \{n : x_n \in V\}$, veamos que $\{n : n \geq r_0\} \subseteq \{n : f(x_n) \in W\}$; sea $n \geq r_0$, entonces $x_n \in V$, luego $f(x_n) \in W$, por tanto $\lim\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} = f(x)$.

(2) Sea $X \in \text{Ob}(\mathcal{T}op)$ tal que X es \mathcal{S} -separable, veamos que X es un espacio secuencial, sea $Z \subseteq X$, supongamos que Z es cerrado, entonces $cl_X(Z) = Z$ pero $\lim(\text{Suc}(Z)) \subseteq cl_X(Z)$, así que $\lim(\text{Suc}(Z)) \subseteq Z$. Ahora supongamos que $\lim(\text{Suc}(Z)) \subseteq Z$, como $Z \subseteq \lim(\text{Suc}(Z))$, entonces $Z = \lim(\text{Suc}(Z))$, pero X es \mathcal{S} -separable, así que $cl_X(Z) = \lim(\text{Suc}(Z)) = Z$, por tanto Z es cerrado.

Ahora, supongamos que X es secuencial y que $Z \subseteq X$, tal que $Z = \lim(\text{Suc}(Z))$, en particular, de la igualdad tenemos que $\lim(\text{Suc}(Z)) \subseteq Z$, como X es secuencial, tenemos que $Z = cl_X(Z)$, nuevamente por la igualdad, $cl_X(Z) = \lim(\text{Suc}(Z))$, así que $X \in \text{Ob}(\mathcal{S})$. \square

Corolario 8.3. *Sec es una subcategoría bi-co-reflexiva.*

Demostración. Por el Teorema 7.2, ya que Sec es cerrada bajo isomorfismos, como $Sec = S(\mathcal{S})$, entonces Sec es bi-co-reflexiva. \square

Podemos interpretar estos resultados de la siguiente forma.

Proposición 8.4. *Dado $X \in \mathcal{Top}$, existe $CX \in Ob(Sec)$, tal que X es una condensación de CX .*

Demostración. Sabemos que Sec es co-reflexiva en \mathcal{Top} , como Sec , tiene un objeto separador, entonces Sec es bi-co-reflexiva en \mathcal{Top} . Sea f el bi-co-reflector de Sec en \mathcal{Top} , así que $f : CX \rightarrow X$, es una biyección continua en donde $CX \in Ob(Sec)$. \square

Proposición 8.5. (1) *Todo espacio topológico tiene una topología más fina con la cual es secuencial.*

(2) *Las sumas topológicas y los cocientes de espacios secuenciales son secuenciales.*

Demostración. (1) Sea $(X, \tau) \in Ob(\mathcal{Top})$, sea $CX \in Ob(Sec)$, por la Proposición 8.4, existe $f : CX \rightarrow X$ una biyección continua, entonces tomamos

$$\tau' = \{A \in X : f^{-1}(A) \text{ es un abierto en } CX\}.$$

No es difícil demostrar que τ' es una topología para X tal que $\tau \subseteq \tau'$ y además $f : CX \rightarrow (X, \tau')$ es homeomorfismo, por tanto (X, τ') es secuencial.

(2) Como Sec es co-reflexiva, por el Teorema 6.13, Las sumas topológicas y los cocientes de espacios secuenciales son secuenciales. \square

9 Espacios Fréchet

Ahora nos preguntamos si los espacios Fréchet tienen una propiedad análoga, tal cosa no sucede.

Es claro que todo espacio Fréchet es un espacio secuencial, y se tienen ejemplos de espacios secuenciales que no son Fréchet (ver [3]), así que los espacios Fréchet son una subcategoría propia de los secuenciales.

Teorema 9.1. (1) *La subcategoría de los cocientes de espacios Fréchet es una subcategoría co-reflexiva.*

(2) *Todo espacio topológico es condensación de un cociente de un espacio Fréchet.*

Demostración. (1) Como la envolvente co-reflexiva de los espacios Fréchet es la clase de cocientes de sumas directas de espacios Fréchet (ver Teorema 6.17) y toda suma directa de espacios Fréchet es Fréchet, así, se obtiene que la envolvente co-reflexiva de los espacios Fréchet es la clase de los cocientes de espacios Fréchet.

(2) De (1), es claro. □

Como todo espacio primero numerable es Fréchet usando Corolario 2.22 de [2], que dice que un espacio es secuencial si y sólo si es cociente de un primero numerable, tenemos que:

Teorema 9.2. *Todo espacio secuencial es cociente de un espacio Fréchet.*

Corolario 9.3. *La envolvente co-reflexiva de los espacios Fréchet es la clase de los espacios secuenciales*

Existe un Fréchet que no es secuencial, así que \mathcal{Frec} no es co-reflexiva en \mathcal{Top} . Así que $\mathcal{Frec} \subsetneq \overline{\mathcal{Frec}} = \mathcal{Sec}$.

Agradecimientos

Los autores de este capítulo agradecen la revisión y las sugerencias del árbitro, que nos permitieron mejorar este trabajo.

Bibliografía

- [1] Enrique Campos, *Topología categórica una introducción* Tesis de maestría, FCFM-BUAP, 2016.
- [2] Rafael E. García Becerra, *Espacios subsecuenciales*, Tesis de Licenciatura, FCFM-BUAP, 2013.
- [3] G. Delgadillo Piñon, M. López De Luna, *Espacios Fréchet Uryshon*, Revista Ciencias Básicas UAT, volumen 8, número 1, Junio 2009, p. 29-56.

- [4] R. Nakagawa, *Categorical Topology*, Topics in Topology General, Ed. K. Morita and J. Nagata Elsevier, 1989 .
- [5] R. Engelking, *General Topology*, Revised and completed edition. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [6] H. Herrlich, *Limit-operators and topological coreflections*, Trans. AMS 146, 203-210, 1969.
- [7] H. Herrlich and G. E. Strecker, *Category Theory*, Heldermann Verlag, Berlin, 1979.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

jangoa@fcfm.buap.mx
acontri@fcfm.buap.mx
mibarra@fcfm.buap.mx

Índice de autores

- Álvarez Marín, Luz del Carmen, 5
Angoa Amador, José Juan, 167
- Castañeda Álvarez, Diana Citlalli, 5
Chacón Tirado, Mauricio Esteban, 111
Contreras Carreto, Agustín, 167
- Domínguez Soto, Patricia, 111
- Montero Rodríguez, Germán, 151
- Hernández Morales, José Margarito, 5,31
Herrera Carrasco, David, 125, 151
- Ibarra Contreras, Manuel, 167
- Libreros López, Antonio de Jesús, 125
López Toriz, María de Jesús, 111
- Macías Romero, Fernando, 125, 151
Martínez Ruíz, Iván, 51
Matías González, Araceli, 85
- Ortiz Ramírez, Ambrosio, 85
- Ramírez Páramo, Alejandro, 51
- Salgado Matías, Erick, 51
- Tochihuitl Bueno, Vulfrano, 31

Matemáticas y sus aplicaciones 12

Coordinado por David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero

se terminó de imprimir el 26 de octubre de 2019

en los talleres de El Errante editor.

El cuidado de la edición

es de Antonio de Jesús Libreros López.

El tiraje es de 500 ejemplares.