



David Herrera Carrasco

Nació en Tapanatepec, Oaxaca, el 21 de abril de 1955. Llegó a la ciudad de Puebla a los seis años junto con su familia en una situación precaria.

Es un prestigioso profesor e investigador que estudió la licenciatura en Matemáticas en la segunda generación de la refundación de la Escuela de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla (UAP). En 1975 inició su labor docente como profesor de matemáticas en la Preparatoria Alfonso Calderón (UAP).

Desde 1981 a la fecha es profesor de Tiempo Completo en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Muchas universidades lo han acogido debido al entusiasmo con que investiga las matemáticas. Además, ha concluido la dirección de tesis: dos de doctorado, siete de maestría y varias de licenciatura; todas en matemáticas a excepción de una en electrónica, y actualmente tiene en proceso varias asesorías de tesis.



Los capítulos del presente libro son creados por los autores en el marco de su participación en el International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA). Los CIMA emanan de la fortuna de contar con el mejor comité organizador que ha puesto la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. He aquí los resultados que promueven la riqueza matemática, trabajos tenaces que lograron sobreponerse a los inexorables jueces y fueron autorizados después de un arbitraje riguroso.

BUAP

FCFM

C8MA



Matemáticas y sus aplicaciones 11



Matemáticas y sus aplicaciones 11

David Herrera Carrasco
Fernando Macías Romero

Editores



Fernando Macías Romero

Es profesor e investigador en el área de las matemáticas. Nació el 11 de noviembre de 1961 en Huauchinango, Puebla, México. Su pasión por las matemáticas lo llevó a estudiar la licenciatura, maestría y doctorado en esta noble área. Llegó a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP en el año 1979.

Además de contar con el reconocimiento y respeto de la comunidad de su facultad, recurrentemente es solicitado como árbitro de publicaciones y evaluador de proyectos, así como de programas como el ESDEPED y elaborador de programas de estudio. Como formador de nuevo talento matemático ha dirigido 33 tesis de licenciatura, 7 de maestría y 3 de doctorado, todas ellas concluidas con éxito, así como varias tesis en proceso. Actualmente es Investigador Nacional reconocido por el SNI.

Durante varios años ha sido el organizador de las International Conference on Mathematics and its Applications, que brindan un espacio de encuentro a un vasto número de expositores, asistentes y expertos internacionales de todas las áreas de la matemática y también es editor y autor de varios libros de matemáticas como los libros de *Matemáticas y sus aplicaciones*.

Matemáticas y sus aplicaciones *11*



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

David Herrera Carrasco
Fernando Macías Romero
Coordinadores

Primera edición: 2019

ISBN: 978-607-525-615-3

DR © Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
4 Sur 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfono: 01 (222) 2 29 55 00
www.buap.mx

Dirección General de Publicaciones
2 Norte 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfonos: 01 (222) 246 85 59 y 01 (222) 229 55 00 ext. 5768 y 5764
www.dgp.buap.mx

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Av. San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel, Edificio FM1-101B
Ciudad Universitaria, Puebla, Pue. México. CP. 72570
Teléfonos: 01 (222) 229 55 00 ext. 7552
www.fcfm.buap.mx

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA • *Rector*: José Alfonso Esparza Ortiz • *Secretario General*: José Jaime Vázquez López • *Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura*: José Carlos Bernal Suárez • *Director General de Publicaciones*: Hugo Vargas Comsille • *Directora de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas*: Martha Alicia Palomino Ovando

Hecho en México
Made in Mexico

Matemáticas y sus aplicaciones 11

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de investigación presentados en el International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA), FCFM, BUAP.

Coordinadores

David Herrera Carrasco
Fernando Macías Romero

Comité científico internacional

Emilio Angulo Perkins (BUAP), Ermínia de Lourdes Campello Fanti (UNESP, BRA), Miguel Ángel García Ariza (ASUCQ), Fernando Hernández Hernández (UNACH), Gerardo Hernández Valdez (BUAP), Judy Kennedy (LU, USA), Christian Lehn (TUC,DE), Antonio de Jesús Libreros López (BUAP), Fernando Macías Romero (BUAP), Germán Montero Rodríguez (BUAP), José Gregorio Rodríguez Nieto (UNC, CO), Azucena Tochimani Tiro (UVA, ES).

Contenido

Presentación 1

Álgebra

Capítulo 1. Fundamentos matemáticos y computacionales de la criptología (Mathematical and computing basis of cryptography) 5

Juana Elisa Escalante Vega, Francisco Sergio Salem Silva, Luis Abraham Tlapa García

Análisis matemático

Capítulo 2. A new approach to the Bernstein problem 25

Jorge Bustamante González

Capítulo 3. Axiomas de completación equivalentes 39

Manuel Ibarra Contreras, Armando Martínez García

Ecuaciones Diferenciales

Capítulo 4. Criterio para la aplicación del método de factorización a sistemas cuánticos 67

Mario Alberto Maya Mendieta, José Jacobo Oliveros Oliveros, Guadalupe Sandoval Moreno, Evelia Teniza Tetlalmatzi

Geometría

Capítulo 5. Estudio iconológico y geométrico de la escultura de San Cristóbal ubicada en el Museo Regional de Puebla	93
<i>Emma Garrido Sánchez</i>	
Topología	
Capítulo 6. Generalizaciones de Teoremas de Urysohn y Katětov	113
<i>Luz del Carmen Álvarez Marín, José Margarito Hernández Morales</i>	
Capítulo 7. Progresiones aritméticas como base para algunos espacios topológicos	135
<i>Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Fernando Mauricio Rivera Vega</i>	
Capítulo 8. Haces equivariantes y G-fibraciones	149
<i>Alexander Bykov, Mauricio Esteban Chacón Tirado, Patricia Domínguez Soto</i>	
Capítulo 9. Modelo del hiperespacio suspensión del continuo de Knaster	177
<i>Gerardo Hernández Valdez, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero</i>	
Índice de autores	199

Presentación

Tenemos la fortuna de hacer un recorrido hacia un proceso creativo sin precedentes. Ha llegado el momento de compartir esta sabiduría, de invitar a todo el mundo a embarcarse en el navío que nos conduce hacia la Fuente de todo lo creado. Esta es la razón por la cual editamos el libro que tienen en sus manos. La felicidad que propone este libro por su divulgación, investigación e intercambio de ideas se debe a la generosidad de muchísimos matemáticos que participaron en el denominado *Fifth International Conference on Mathematics and its Applications* (5CIMA, 2018), un esfuerzo profesional consolidado que ha permitido la participación de grandes personajes de diversas universidades, nacionales y extranjeras, tanto en el desarrollo del 5CIMA como en su memoria escrita, que es el presente libro. La base ha sido un comité organizador especializado, entusiasta y vigoroso emanado de la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. Este producto no es ni siquiera sietemesino, es normal, de por lo menos nueve meses de trabajo constante. Por el amor a la matemática es que ha nacido este ejemplar que nos brinda la sabiduría necesaria para mostrarles parte de nuestros quehaceres cotidianos.

Los capítulos de este libro están agrupados por secciones de acuerdo al área temática en el 5CIMA. Dichos capítulos fueron sometidos a arbitraje riguroso.

Agradecemos, con toda el alma, a todos los árbitros su amabilidad, gentileza, dedicación y trabajo científico. Un agradecimiento especial a Antonio de Jesús Libreros López por su apoyo en la edición de esta obra. Gracias por dejar huella.

*David Herrera Carrasco
Fernando Macías Romero
Coordinadores*

Álgebra

Capítulo 1

Fundamentos matemáticos y computacionales de la criptología (Mathematical and computing basis of cryptology)

Juana Elisa Escalante Vega¹, Francisco Sergio Salem Silva², Luis Abraham Tlapa García
¹FEI, ²FM, Universidad Veracruzana

Resumen

RSA es el criptosistema más utilizado actualmente. Con el fin de facilitar la comprensión de su funcionamiento a los estudiantes de criptografía se analizaron e implementaron tres algoritmos que muestran cada uno de los pasos del funcionamiento del criptosistema: generación de primos grandes, elevación a una potencia módulo n y determinación del inverso multiplicativo módulo N . Los algoritmos mostraron la eficiencia de la generación de claves de hasta 600 dígitos. Se comprobó la calidad de las claves generadas utilizando una implementación del RSA .

Palabras Clave: Criptosistema, RSA, números primos, Seguridad.

Abstract

Nowadays the RSA is the most used cryptosystem. In order to facilitate the understanding of its function to cryptography students, three algorithms were analyzed and implemented, showing each of the steps of the cryptosystem operation: generation of large primes, elevation to a power module n and determination of the multiplicative inverse module N . The algorithms showed the efficiency of key generation up to 600 digits. The quality of the generating keys was verified using an RSA ad hoc implementation.

Keywords: Cryptosystem, RSA, prime numbers, Security.

1 INTRODUCCIÓN

La criptología se ocupa del estudio de los algoritmos y sistemas utilizados para proteger la información y proporcionar seguridad a las comunicaciones. Actualmente, el criptosistema más utilizado es el RSA (Baig, 2001). Este sistema utiliza métodos para cifrar un mensaje transformándolo en bloques de números (Beissinger & Pless, 2006). A pesar de que existen varias implementaciones de este sistema como en Philippe Aumasson 2018, cada vez hay más formas de romper este sistema de seguridad, por lo cual es importante tener elementos que aumenten su seguridad. Esta tarea es imposible sin entender a profundidad el funcionamiento del criptosistema. Se pretende contribuir a dicho entendimiento analizando los algoritmos de los que consta el sistema, a saber:

- La generación de números primos con una gran cantidad de dígitos.
- La elevación de un número dado a una potencia n .
- La determinación del inverso multiplicativo de un número dado.

El conocimiento de estos métodos permite analizar las debilidades y fortalezas del criptosistema RSA. Para lograrlo se analizaron los algoritmos junto con sus resultados valorando la eficiencia de los algoritmos en términos del tiempo de ejecución y exactitud.

2 MARCO TEÓRICO

Actualmente el criptosistema más utilizado es el RSA (Fujisaki *et. al.* 2001). RSA permite encriptar y desencriptar mensajes basado en la factorización en primos. Debe su nombre a sus creadores Ron Rivest, Ad Shamir y Len Adleman (Rivest & Shamir & Adleman, 1978). En este sistema se utiliza una clave para encriptar y una clave diferente para desencriptar, lo que mejora la seguridad. El sistema RSA es el primer ejemplo de un criptosistema asimétrico (Diffie & Hellman 1976). El funcionamiento de RSA está basado en la exponenciación modular, especialmente los teoremas de Euler y Fermat.

Para comprender el sistema RSA es necesario conocer conceptos de Teoría de

números, enteros módulo (n) (denotados por: \mathbb{Z}_n), algoritmos implementados en Python, entre otras cosas. De acuerdo con (Bowne, 2018; Stein, 2009; Delfs & Knebl, 2015) para comprender el algoritmo RSA es fundamental lo siguiente:

- a) Conocer las propiedades algebraicas de los enteros y enteros positivos (denotados por: \mathbb{Z} y \mathbb{Z}^+ respectivamente) particularmente la multiplicación.
- b) Lo mismo que en el inciso a) para \mathbb{Z}_n .
- c) Tener un dispositivo para generar números primos grandes para poder construir las claves.

Se usarán las propiedades algebraicas usuales como las reglas de la aritmética ley conmutativa, ley asociativa, ley distributiva y divisibilidad (Hoffstein & Piper & Silverman, 2000).

Definición 1. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, con $a \neq 0$ se dice que a divide a b y se denota por $a|b$, si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que, $ak = b$, en este caso se dice que a es un divisor de b .

Entre los números enteros positivos hay una subclase muy importante, la clase de los primos.

Definición 2. Un número entero positivo p se llama primo si se cumple que:

- $p > 1$,
- p no tiene divisores positivos además de 1 y p .

Por ejemplo, los número 37, 199 son primos, es importante notar que 1 no se considera primo. Normalmente reservamos la letra p para los números primos.

La teoría de la divisibilidad ha sido estudiada durante aproximadamente 3000 años, cuando los antiguos griegos consideraron problemas sobre los números particularmente problemas sobre primos, algunos de los cuales aún no se han resuelto (Bessinger & Pless, 2006).

Definición 3. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ se dice que m es el máximo común divisor si:

- m divide a a y b .
- m es divisible por cualquier divisor común k de a y b .

El máximo común divisor de a y b se denota $MCD(a, b)$.

Algoritmo de la división

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $b \neq 0$, el algoritmo calcula enteros q y r tales que: $0 \leq r < |b|$ y $a = bq + r$.

Teorema 1. Dadas $a, b \in \mathbb{Z}$, tales que $a = bq + r$, entonces:

$$MCD(a, b) = MCD(r, b)$$

Para encontrar el MCD de dos números a, b aplicando repetidamente este resultado.

Algoritmo del Máximo Común Divisor

1. Ingrese $a, b \neq 0$.
2. Tenemos que $MCD(a, b) = MCD(|a|, |b|)$ podemos considerar que $a > b > 0$.
3. Si $a = b$ se termina. Si suponemos que $a > b$ y $b = 0$, $MCD = a$.
4. Usando el algoritmo de la división escriba $a = bq + r$, con $0 \leq r < b$ y $q \in \mathbb{Z}$.
5. Si $r = 0$ entonces $b \mid a$ entonces $MCD = b$.
6. Entonces sustituya $a \leftarrow b$ y $b \leftarrow r$ y regrese al paso 4.

Ahora calculamos $MCD(2024, 748)$ usando el algoritmo euclidiano, que es un método más rápido para calcular el MCD como demostraremos a continuación:

$$2024 = 748 \cdot 2 + 528$$

$$748 = 528 \cdot 1 + 220$$

$$528 = 220 \cdot 2 + 88$$

$$220 = 88 \cdot 2 + 44$$

$$88 = 44 \cdot 2 + 0$$

por lo tanto $MCD = 44$

Enteros módulo n

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ y $a, b \in \mathbb{Z}$ entonces a es congruente con b módulo n (denotado por: $a \equiv b \pmod{n}$), si a y b dejan el mismo residuo cuando se dividen por n o de manera equivalente si $n|(a - b)$.

La relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, definida por: $a \sim b$ si solo si $a \equiv b \pmod{n}$. Es una relación de equivalencia (Delfs & Knebl, 2015), al conjunto $[a] = \{x \mid x \equiv a \pmod{n}\}$ se le llama la clase de residuo módulo n , a es un representante de la clase. El conjunto de todas las clases de equivalencias $\{[a] \mid a \in \mathbb{Z}\}$ se le denomina los enteros módulo n y es denotado por \mathbb{Z}_n .

Para entender el concepto de inverso multiplicativo en \mathbb{Z}_n es necesario tener la noción de primos relativos:

Definición 4. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ se dice que son primos relativos si $MCD(a, b) = 1$.

En \mathbb{Z} los únicos elementos que satisfacen $a * b = 1$, son $a = b = 1$ y $a = b = -1$. Sin embargo en \mathbb{Z}_n tenemos lo siguiente:

Un elemento a en \mathbb{Z}_n tiene inverso multiplicativo b , si $a * b \equiv 1 \pmod{n}$, por lo tanto se cumple una ecuación de la forma $nm + ab = 1$ con m adecuada, esto implica que $MCD(a, n) = MCD(b, n) = 1$.

Definición 5. Decimos que $[a]$ es una unidad en \mathbb{Z}_n si tiene inverso multiplicativo.

El conjunto de unidades en \mathbb{Z}_n es:

$$\mathbb{Z}_n^* = \{[a] \mid 1 \leq a \leq n - 1 \text{ y } MCD(a, n) = 1\}$$

$|\mathbb{Z}_n^*|$, es igual al número de primos relativos con n en el intervalo $1, 2, \dots, n - 1$

(donde $|\mathbb{Z}_n^*|$ denota la cardinalidad \mathbb{Z}_n^*).

Definición 6. La función definida por: $\varphi(n) = |\mathbb{Z}_n^*|$ será llamada la función de Euler.

El grupo \mathbb{Z}_p^* es un grupo con $p-1$ elementos es ya que: $\mathbb{Z}_p^* = \{g, g^2, \dots, g^{p-1}\}$ cuando $g \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$

RSA

El algoritmo RSA, que de acuerdo con varios autores (Aumasson, 2018) (Talbot & Welsh, 2006) es el algoritmo de clave pública más utilizado en las aplicaciones, que fue inventado por Rivest, Shamir y Adleman en 1977, se ha convertido en la base de toda una generación de productos en tecnología de seguridad. RSA es un sistema de cifrado, se basa en hechos de la Teoría Números.

Dos personas quieren comunicarse a través de un mensaje, y quieren ocultar el contenido de un posible atacante externo ya que será mandado por un canal de comunicación inseguro. El emisor cifra el mensaje y el receptor tiene que descifrar el mensaje. Para lograr esto se deben de generar dos claves una de ellas es pública es decir cualquier persona puede verla, la otra clave es privada y solo la conoce el receptor del mensaje.

Descripción del funcionamiento del sistema RSA:

Lista 1 :

1. El Receptor genera la clave privada que consiste en (n, e) y es enviada al emisor.
 - (a) Para eso se seleccionan dos números primos muy grandes p, q y se obtiene $n = p * q$.
 - (b) Se escoge un $e \in \mathbb{Z}_n$ tal que $1 < e < \varphi(n)$, donde \mathbb{Z}_n son los enteros módulo n y la función $\varphi(n)$ es la función que determina cuantos primos relativos con n menores que n (función de Euler)(Stein, 2009)
2. Se calcula d el inverso multiplicativo de e mód $\varphi(n)$, d es la clave privada que solo conoce el receptor.
3. El Emisor cifra el mensaje M de la siguiente manera $C = M^e$ mód (n) (C es el mensaje cifrado).
4. El Receptor descifra el mensaje calculando $C^d = M^{ed}$ mód $(n) = M$ mód (n) .

Nota

En el punto 2 de la lista 1 se obtiene d tal que $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$ (*), en la proposición 3.3.1 de (Stein, 2009) se asegura que (*) es suficiente para que $M = M^{ed} \pmod{n}$. Y así recuperar el mensaje original.

3 METODOLOGÍA

Se analizaron los algoritmos de la criptología que son:

- a). Programa que genera números muy grandes y prueba si son primos, este programa es utilizado por *RSA* para generar parte de la clave pública.
- b). Programa de exponenciación rápida módulo n , se usa para obtener las claves en los puntos 3, 4 de la lista 1.
- c). Programa para calcular d , inverso multiplicativo de e módulo $\varphi(n)$, d es la clave privada que se utiliza para descifrar el mensaje ($M = C^{ed} \pmod{n}$).

Para analizar estos programas se desarrollaron los algoritmos principales de la criptología como, dado un número p decidir si es primo o no, dado $e \in \mathbb{Z}_n$ tal que e es primo relativo con n encontrar el inverso multiplicativo en \mathbb{Z}_n y exponenciación.

Generar números primos muy grandes

Rabin-Miller (vea Rabin 1980) es una prueba de primalidad probabilística y práctica que determina si un número n es primo con un error Probabilístico bajo, que puede ser reducido tanto como queramos, pero no a cero. El algoritmo se basa en los siguientes dos teoremas:

Teorema 2. sea p un primo. Entonces $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$

si solo si $x \equiv \pm 1 \pmod{p}$

Prueba: vea el (Yan & Yung & Rief, 2013) pag. 168

Teorema 3. (Rabin Miller) Sea n un número primo: $n = 1 + 2^j d$ donde d es impar. Entonces la b -secuencia definida por:

$$\{b^d, b^{2d}, b^{4d}, b^{8d} \dots, b^{2^{(j-1)}d}, b^{2^j d}\}_{\text{mód}(n)}$$

(1) tiene una de las siguientes dos formas:

$$(1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots, 1) \quad (2)$$

$$(? , ? , \dots , ? , -1, 1, 1 \dots, 1) \quad (3)$$

reducidas módulo n , para cualquier $1 < b < n$. Los símbolos de interrogación representan un número diferente de ± 1

. La prueba de primalidad va como sigue:

1. Escoja la base b , generalmente un primo pequeño.
2. Calcular la b secuencia de $n(1)$.
 - (a) Escriba $n - 1 = 2^j d$ donde d es impar.
 - (b) Calcule $b^d \text{mód}(n)$ y elevar al cuadrado repetidas veces hasta obtener la b secuencia definida en (1) todo reducido mód (n).
3. Si n es primo la b secuencia de n será de la forma 2 o 3.
4. Si la b secuencia es alguna de las 3 siguientes formas es:
 - (a) $(?, \dots, ?, 1, 1, \dots, 1)$
 - (b) $(?, \dots, ?, ?, ?, \dots, -1)$
 - (c) $(?, \dots, ?, ?, ?, \dots, ?)$

Entonces ciertamente n es compuesto.

Un número compuesto n puede ser reportado como primo para algunas cuantas selecciones de la base b . De hecho el siguiente teorema nos da una cota para el número de bases que un número compuesto impar puede pasar.

Teorema 4. Sea $n > 1$ un número impar compuesto. Entonces n pasa la prueba de Rabin-Miller a lo más para $n - 1/4$ bases b con $1 \leq b < n$ demostración sección 8.4 del (Rosen, 2005)

En la figura 1 se puede observar el código de la implementación de **Rabin-Miller** y una corrida de éste.

```

1 import random, sys, time
2 def RM(numero):
3     #print("Numero: " +str(numero))
4     if numero % 2 == 0 or numero < 2:
5         return False
6     if numero == 3:
7         return True
8         p=True
9
10    menos = numero -1
11    veces = 0
12
13
14    while menos % 2 == 0:
15        menos = menos// 2
16        veces += 1
17
18    for checa in range(5):
19        NewNum = random.randrange(2,numero-1)
20        expRap = pow(NewNum,menos,numero)
21        if expRap != 1:
22            i = 0
23            while expRap != (numero-1):
24
25                if i == veces-1:
26
27                    return False
28                else:
29                    i = i + 1
30                    expRap = (expRap ** 2)%numero
31
32            return True
33            p = True
34
35 p=False
36 tamañoclave= int(input("Ingresa el tamaño de la clave: "))
37 inicio_de_tiempo = time.time()
38 while p== False:
39     numero = random.randrange(2**(tamañoclave-1), 2**(tamañoclave))
40     if RM(numero):
41         p= True
42         print("Total de digitos: ",len(str(numero)))
43         print("Numero Primo: " +str(numero))
44
45 tiempo_final = time.time()
46 tiempo_transcurrido = tiempo_final - inicio_de_tiempo
47 print ("\nTomó %d segundos." % (tiempo_transcurrido))

```

```

Ingresa el tamaño de la clave: 1024
Total de digitos: 309
Numero Primo: 17095590402289174504323358936348742834428598124877889837285715086396928433706923028375
881208617162154657436898176267948404040748499296083756161419972293709346884190179536836204424133158451
5501502100168741886571643144498764974372361133795324848864917714545119086256873053780068421106889370
10286532654959269927247

```

Tomó 6 segundos.

Figura 1: Algoritmo de primalidad probabilístico

El programa anterior, genero un número primo de 309 dígitos y solo tardo alrededor 6 segundos. El sistema RSA corre este programa dos veces en la primera genera p y la segunda vez genera q . En la línea 4 de la función RM se determina que el número generado no sea par. En la línea 10 al número le resta 1 y empieza a reducir dividiendo por 2 repetidamente hasta que sea impar, posteriormente prueba con 5 números aleatorios su primalidad.

Exponenciación Rápida

A continuación se describe un algoritmo para calcular grandes potencias de un número módulo n ($a^k \equiv b \pmod{n}$):

1. Se transforma el exponente k a binario ($(k)_{bit}$).
2. La base a se guarda en una variable x .
3. El programa recorre de izquierda a derecha cada uno de los bits de $((k)_{bit})$.
4. El programa entra en un ciclo para conocer si el bit es igual a 0 o 1.
5. x se actualiza de la siguiente manera:
 - (a) Si el bit es igual a 0 entonces calcula: $x = x^2 \pmod{n}$
 - (b) Pero si el bit es 1 entonces $x = (x^2 * a) \pmod{n}$.
6. El algoritmo termina cuando se prueba el último bit de $(k)_{bit}$.

En la figura 2 se puede apreciar el código elaborado con apoyo del pseudocódigo en (Yan & Yung & Rief, 2013) junto con una corrida.

```

1  ### Algoritmo de exponenciacion Rapida
2  import sys,time
3  print("Algoritmo de exponenciación rápida\n")
4  a= int(input("a = Ingresa la base "))
5  b= int(input("b = Ingresa el numero exponente "))
6  n= int(input("n = Ingresa el modulo n"))
7  inicio_de_tiempo = time.time()
8  def exp(x, y,n):
9      exp = bin(y)
10     print("(1).- El exponente se pasa a binario$")
11     value = x
12     print("(2).- Si el bit es 0 entonces = X = (x* 2 modulo (n))")
13     print("(3).- Si el bit es 1 entonces = X = (x**2)*a modulo (n)")
14     print("(4).- Entra en un ciclo hasta el ultimo bit")
15     print("\n")
16     print ("el numero en binario es:",exp[2:])
17     print ("Bit\tResultado")
18
19     print(1,":\t", "x = ",value)
20     for i in range(3, len(exp)):
21         if(exp[i:i+1]!='0'):
22             o=value
23             value = (value * value)%n

```

```

24         z = (o * o)
25         t=z%n
26         print(i-1,":\t", "x = ",o,"**2", "mod",n , "=",z,"mod",n , "=",value)
27     else:
28         if(exp[i:i+1]=='1'):
29             e=value
30             value=((value ** 2)*x)%n
31             q=(e**2)
32             q1=(q*x)
33             q3=(q1%n)
34             #value = (value*x)%mod
35             print (i-1,":\t", "x = (",e,"**2)**",x,"mod",n , "=",q1,"mod",n , "=",value)
36     return value
37
38 print ("\n Calculamos a^b mod (n)")
39 print ("a=",a)
40 print ("b=",b)
41 print ("n=",n)
42 print ("===== Pasos =====")
43 res=exp(a,b,n)
44 print ("Resultado:",res)
45
46 print ("=====")
47
48 tiempo_final = time.time()
49 tiempo_transcurrido = tiempo_final - inicio_de_tiempo
50 print ("\nTomó %d segundos." % (tiempo_transcurrido))
    
```

Algoritmo de exponenciación rápida
 a = Ingresa la base :29
 b = Ingresa el numero exponente :37
 n = Ingresa el modulo n :221

Calculamos a^b mod (n)
 a= 29
 b= 37
 n= 221

===== Pasos =====
 (1).- El exponente se pasa a binario\$
 (2).- Si el bit es 0 entonces = X = (x* 2 modulo (n)
 (3).- Si el bit es 1 entonces = X = (x**2)*a modulo (n)
 (4).- Entra en un ciclo hasta el ultimo bit

el numero en binario es: 100101
 Bit Resultado
 1 : x = 29
 2 : x = 29 **2 mod 221 = 841 mod 221 = 178
 3 : x = 178 **2 mod 221 = 31684 mod 221 = 81
 4 : x = (81 **2)* 29 mod 221 = 190269 mod 221 = 209
 5 : x = 209 **2 mod 221 = 43681 mod 221 = 144
 6 : x = (144 **2)* 29 mod 221 = 601344 mod 221 = 3
 Resultado: 3
 =====

Tomó 0 segundos.

Figura 2: Algoritmo de exponenciación rápida paso a paso

En la sección anterior se ha ejemplificado el algoritmo de exponenciación rápida, donde se utilizaron números pequeños para simplificar el procedimiento. Aunque generalmente se necesita ingresar números muy grandes para la base, el exponente y el módulo, para este caso el código del algoritmo sigue funcionando de manera eficiente. En estos casos el despliegue del algoritmo se puede volver confuso para el lector, por lo que se recomienda quitar las impresiones

de cada paso para solo observar el resultado como se muestra en la figura 3.

```

1 run exp.py

Algoritmo de exponenciación rápida
b = Ingresar la base 89345787887478248757476538258356473467345774567345
e = Ingresar el número exponente 87236532765234563757634563785782378236785723562387537852385328752376
793473
n = Ingresar el modulo n7863457738563528368346893248626734672739647943868923467438684367343498738688

Calculamos b^e mod (n)
===== Pasos =====
(1).- El exponente se pasa a binario$
(2).- Si el bit es 0 entonces = X = (x* 2 modulo (n)
(3).- Si el bit es 1 entonces = X = (x**2)*a modulo (n)
(4).- Entra en un ciclo hasta el ultimo bit

El número en binario es: 11000101011111100011011011011011000111000010001110000001001011011000101100
10011000100101000110011101100100111100100001001001101101001111111100010111111001001101010100100010
0101010000101111101000100110001101011010111100010011001110010011000100110000001

El número en binario es: 11000101011111100011011011011011000111000010001110000001001011011000101100
100110001001010001100111011001001111001000010010011101101001111111100010111111001001101010100100010
0101010000101111101000100110001101011010111100010011001110010011000100110000001

b^e mod (n) : 2697707690708234150846590946112876070159690228640224228995046431807568371633
=====

Tomó 0 segundos.

```

Figura 3: Algoritmo de exponenciación rápida sin pasos

Inverso multiplicativo

Para finalizar se analizó el algoritmo que: Dado e mód (n) encuentra d tal que

$$ed \equiv 1 \text{mód}(n)$$

A continuación se describe el algoritmo de Euclides extendido.

1. Se ingresan dos números $a, n \neq 0$ aplicando repetidas veces el algoritmo de la división se obtiene:

$$n = aq_1 + r_1$$

$$a = r_1q_1 + r_2$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3$$

⋮

$$r_{n-2} = r_{n-3}q_{n-1} + r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = r_{n-2}q_{n-2} + 0$$

2. Si $r_{n-1} = 1$ entonces a es primo relativo con n . siga al paso 3.
3. Se despejan los residuos

$$r_1 = n - aq_1$$

$$r_2 = a - r_1q_2$$

⋮

$$1 = r_{n-1} = r_{n-2} - r_{n-3}q_{n-1}$$

4. Realizando un ciclo que sustituye para cada i , el valor de r_i , en la expresión de r_{i+1} al final obtendremos $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $1 = k_1a + k_2n$
5. k_1 , es el inverso multiplicativo de a ya que $1 - k_1a = k_2n \Rightarrow k_1 \equiv \text{mód}(n)$

En la figura 4 se muestra la implementación y una corrida con un número y módulo con mas de 100 dígitos, esta implementación fue obtenida de un trabajo anterior (Tlapa, 2019).

```

1 import random, sys, os, time
2 def MCD(a, b):
3     # Devuelve su MCD de a y b usando el algoritmo de Euclides extendido
4     while a != 0:
5         (a, b) = (b % a, a)
6     return b
7
8
9 def Inverso(a, m):
10    # Devuelve el inverso modular de a% m, que es
11    # el número x tal que a * x% m = 1
12
13    if MCD(a, m) != 1:
14        print("No son primos relativos")
15        return None #si a y m no son primos
16
17    # Calcular utilizando el algoritmo euclidiano extendido:
18
19    u1, u2, u3 = 1, 0, a
20    v1, v2, v3 = 0, 1, m
    
```

```

21
22     while v3 != 0:
23         D = u3 // v3 # // es el operador de división entera
24         v1,u1=(u1 - D * v1),v1
25         v2,u2=(u2 - D * v2),v2
26         v3,u3=(u3 - D * v3),v3
27
28
29     t=u1%m
30     print("\n El inverso multiplicativo del número es",t)
31
32
33 if __name__ == '__main__':
34     x =int(input("\n Ingresar el numero para conocer su inversa: "))
35     n =int(input("\n Ingresar un numero para el modulo: "))
36     inicio_de_tiempo = time.time()
37     Inverso(x,n)
38     tiempo_final = time.time()
39     tiempo_transcurrido = tiempo_final - inicio_de_tiempo
40     print ("Tomó %d segundos." % (tiempo_transcurrido))
41

```

Ingresar el numero para conocer su inversa: 14496788378468488557687722015569718224559178423687636694641274637308420615109422132884166793961942274333546813968230618436879241636506006084929889567620947437773152327567026341154632623909051721121768371666646093479005632889037642376925654130341457809037905032841031841878199829895955335316623668948737452599

Ingresar un numero para el modulo: 19112778733563662157882625754185733792652806909840224411226686792321558939481887497816606226520628613561684534187534242501061180428660973364299346359247054655389491217640997241425292944706802507825728384519191466288101093468322105068541771120948548192607351642649999643121018165196297985364781599649911875911515666671960118110613603078135804934150245007069845208141831218496600216505377786105849492616304067240630315408525447954855686738306286226660336832270722592866457485395946574803161054138305872098742933006771899074025464975236201457954271525292577278699126747434474725210198840626320556447655758969359827261611

El inverso multiplicativo del número es 161130799166889856043442487104705657580973358919659469374839990372478539478265865899533547787269161439912276313491657389149606348681593854708097490493630404398490904376242337482567764496588176692821603150049221969072702018355785473128119245428829646176826266555611279136811619827097028984107976060574845721852604119639745625390849307182275616864086597852215971511672621948648562969093464689137807684450888706997872852598939402114885290787934157670112296092730589029879669337259294279120978794766347626213605958461025574016652947530950533977629162880743867798244863065693844544381125763957552303602275027299285483245
Tomó 0 segundos.

Figura 4: Algoritmo para encontrar inverso multiplicativo

EL programa anterior es sencillo y además eficiente porque encuentra el inverso multiplicativo en muy pocos pasos.

RESULTADOS

A lo largo de la presente investigación se analizaron tres algoritmos fundamentales que son utilizados por el sistema de seguridad RSA., estos fueron:

- Algoritmo para generar números primos muy grandes basado en Rabin-Miller, la implementación de este algoritmo se corrió ingresando un número de 1024 bits y genero un número de más de 300 dígitos tardando muy poco tiempo.

- Algoritmo de exponenciación rápida módulo n . La parte fundamental de este algoritmo es expresar el exponente en sistema binario, la implementación de este algoritmo funcionó aún con números muy grandes en muy pocos segundos.
- Encontrar el inverso multiplicativo de un número. Dado dos números que sean primos relativos (e,n) , aplica el algoritmo de Euclides extendido, para poder expresar 1 en la combinación lineal entera de $1 = e * x + n * y$. Que fue probado con números muy grandes y sus tiempo de ejecución fue mínimo.

Se observó que el sistema RSA utiliza una parte teoría de números relativamente sencillas. Por otro lado la seguridad de RSA depende de la dificultad en factorizar n . De acuerdo con el autor (Castro & Cipriano & Malvacio, 2013) este problema es muy difícil. En un trabajo posterior se abordará el problema de factorizar n , usando un algoritmo probabilístico y con esto crackear el sistema RSA cuando las claves no son excesivamente grandes.

Bibliografía

- [1] Baig, M. (2001). Criptografía Cuántica. Universitat Autònoma de Barcelona. Spain.
- [2] Beissinger, J., & Pless, V. (2006). The cryptoclub : using mathematics to make and break secret codes. Wellesley, Massachusetts: CRC Press.
- [3] Bowne, S. (2018). Hands-On Cryptography with Python. Birmingham: Packt Publishing.
- [4] Castro L, Cipriano, M., & Malvacio, E. (2013). Detección de Anomalías en Oráculos Criptográficos tipo RSA por medio de análisis probabilísticas y estadísticos. In XV Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación.
- [5] Delfs, H., & Knebl, H. (2015). Introduction to Cryptography. Heidelberg: Board.
- [6] Diffie, W., & Hellman, M. (1976). New directions in cryptography. IEEE transactions on Information Theory, 22(6), 644-654.

- [7] Hoffstein, J., Pipher, J., & Silverman, J. (2008). *An Introduction to Mathematical Cryptography*. New York: Springer.
- [8] Fujisaki, E., Okamoto, T., Pointcheval, D., & Stern, J. (2001). RSA-OAEP is secure under the RSA assumption. In *Annual International Cryptology Conference* (pp. 260-274). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [9] Rosen, K. *Elementary Number Theory and its Applications*, 5th Edition, Addison-Wesley, 2000
- [10] Miller, G. "Riemann Hypothesis and test of primality". *Journal of systems and Computer Science*, 13, 1976, pp 300-317
- [11] Aumasson, P. (2018). *Serious Cryptography A Practical Introduction to Modern Encryption*. San Francisco: no starch press.
- [12] Rabin, M., O. "Probabilistic Algorithms for testing primality ".**Journal of number theory* ,12, 1980. pp 128-138
- [13] Rivest, R. L., Shamir, A., & Adleman, L. (1978). A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. *Communications of the ACM*, 21(2), 120-126.
- [14] Stein, W. (2009). *Elementary Number Theory: Primes, Congruences, and Secrets*. New York: Board.
- [15] Talbot, J., & Welsh, D. (2006). *Complexity and Cryptography*. New York: Cambridge University Press.
- [16] Tlapa, L. (2019). *Un análisis computacional del RSA*. (Tesis de licenciatura). Facultad de Estadística e Informática. Xalapa. Ver.
- [17] Yan & Yung, M. & Rief, J. (2013). *Computational Number Theory and Modern Cryptography*. New Delh: Wiley.

Facultad de Estadística e Informática, UV
Avenida Xalapa s/n, Obrero Campesino, Xalapa Enríquez, Ver. C.P. 91020.
Facultad de Matemáticas, UV. Gonzalo Aguirre Beltrán, Isleta, Xalapa
Enríquez, Ver.C.P. 91090.

jescalante@uv.mx
luis_tlapa@outlook.com
fsergios@gmail.com

Análisis matemático

Capítulo 2

A new approach to the Bernstein problem

Jorge Bustamante González
FCFM, BUAP

Resumen

For a weight W we present several conditions which characterize when the polynomials are dense in the weighted space $C_W(0, \infty)$. These conditions are used to provide a new proof of some known results.

1 Introduction

The problem of weighted polynomial approximation on the real axis was posed by Bernstein in 1924 and was solved by Achieser, Mergelyan and Pollard in a qualitative form. In particular, if $G : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1]$ is a continuous function and $C_G(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \|Gf\|_\infty < \infty, \lim_{|x| \rightarrow \infty} (Gf)(x) = 0\}$, then the polynomials are dense in $C_G(\mathbb{R})$ if and only if

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \Omega(t)}{1+t^2} dt = -\infty,$$

where

$$\Omega(z) = \sup \left\{ |P(z)| : P \text{ is a polynomial and } \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|P(t)G(t)|}{\sqrt{1+t^2}} \leq 1 \right\}.$$

This problem has been studied extensively by different authors (for a long survey see [6]). The above characterization and other ones can be found in [1] and [5]. A similar problem can be stated for weighted approximation in the semi axis $[0, \infty)$.

All known solutions of the Bernstein's approximation problem essentially make use of several results of complex analysis. In this paper we present new

characterizations of the weights which solves the Bernstein's problem using other arguments.

For a topological space Y , $C(Y)$ is the space of all continuous function $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ and $C_b(Y)$ is the space of bounded functions in $C(Y)$ with the norm $\|f\|_\infty = \sup_{y \in Y} |f(y)|$.

Throughout the paper we used the following notations. We set $X = (0, \infty)$. A weight is a continuous function $W : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ such that $W(0) = 0$, $W(x) > 0$ for $x > 0$ and, for each non negative integer n ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W(x)x^n = 0.$$

The weighted space $C_W(X)$ is the family of all $f \in C(X)$ such that

$$\lim_{x \rightarrow 0} (Wf)(x) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (Wf)(x) = 0.$$

In $C_W(X)$ we consider the norm $\|f\|_W = \|Wf\|_\infty$.

The Bernstein's approximation problem is presented as follows: when is it true that, for every function $f \in C_W$, there exists a sequence $\{P_n\}$ of polynomials such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(f - P_n)W\|_{[0, \infty)} = 0?$$

Section 2 is devoted to the problem of finding conditions equivalent to completeness of polynomials. We present several results. Condition (xv) in Theorem 2.3 is perhaps the most significant. In Section 3, we use it to present a new proof of completeness of polynomials for some classical weights. We believe the approach presented here is of intrinsic interest.

2 Characterizations

First we present a problem of approximation of continuous functions on a compact space which is equivalent to the Bernstein problem.

Let $\widehat{X} = [0, \infty) \cup \{\infty\}$ be the one point compactification of $[0, \infty)$ and $C_0(\widehat{X})$ be the family of all functions $g \in C(\widehat{X})$ such that $g(0) = g(\infty) = 0$. Notice that $C_W(X)$ can be identified with $C_0(\widehat{X})$ (as Banach spaces). In fact, if $h \in C_0(\widehat{X})$, by setting

$$g(x) = \frac{h(x)}{W(x)}, \quad x \in (0, \infty),$$

we obtain a function in $C_W(X)$. Moreover

$$\|h\|_\infty = \sup_{y \in \widehat{X}} |h(y)| = \sup_{x \in X} |W(x)g(x)| = \|g\|_W.$$

In what follows, given $f \in C_W(X)$ we denote by \widehat{f} the corresponding element in $C_0(\widehat{X})$.

Let X^* be the quotient space obtained from \widehat{X} by identifying 0 and ∞ and $\tau : \widehat{X} \rightarrow X^*$ be the quotient map. The space $C_W(X)$ is related with the subspace $C_0(X^*)$ of all $f \in C(X^*)$ such that $f(x_0) = 0$, where $x_0 = \tau(0)$. In fact, it follows from the properties of the quotient space that there exists a map $M : C_0(\widehat{X}) \rightarrow C(X^*)$ such that, for each $g \in C_0(\widehat{X})$,

$$g = Mg \circ \tau. \tag{1}$$

With these notations we define a map $\Phi : C_W(X) \rightarrow C(X^*)$ as follows: if $f \in C_W(X)$, then $\Phi(f) = M\widehat{f}$ (where \widehat{f} is the (unique) extension of f to \widehat{X} and $M\widehat{f}$ is defined by (1)). In $C(\widehat{X})$ and $C(X^*)$ we consider the sup norm.

For our first result we need other notations. Set Π for the family of all polynomials,

$$\Pi_W = \{WP : P \in \Pi\},$$

$$\widehat{\mathcal{P}}_W = \{\widehat{Q} \in C(\widehat{X}) : \widehat{Q}|_X = Q \in \Pi_W\},$$

$$\mathcal{P}_W^* = \Phi(\Pi_W),$$

$$\mathcal{P}_W = \Pi_W \oplus \mathbb{R} = \{\alpha + S : \alpha \in \mathbb{R}, S \in \Pi_W\},$$

$$\mathcal{R}_W = \widehat{\mathcal{P}}_W \oplus \mathbb{R} = \{\alpha + S : \alpha \in \mathbb{R}, S \in \widehat{\mathcal{P}}_W\},$$

and

$$\mathcal{Q}_W = \mathcal{P}_W^* \oplus \mathbb{R} = \{\alpha + T : \alpha \in \mathbb{R}, T \in \mathcal{P}_W^*\}.$$

Proposition 2.1. *For a weight W the following assertions are equivalent:*

- (i) *The family of all polynomials is dense in $C_W(X)$.*
- (ii) *The linear space $\widehat{\mathcal{P}}_W$ is dense in $C_0(\widehat{X})$.*
- (iii) *The linear space \mathcal{P}_W^* is dense in $C_0(X^*)$.*
- (iv) *The linear space \mathcal{Q}_W is dense in $C(X^*)$.*

Proof. (i) \Leftrightarrow (ii). It follows from the fact the function $H : C_W(X) \rightarrow C_0(\widehat{X})$ given by $H(f) = \widehat{f}$ is linear, surjective and preserves the distant. Moreover $H(\Pi_W) = \widehat{\mathcal{P}_W}$.

(ii) \Leftrightarrow (iii). The function $M : C_0(\widehat{X}) \rightarrow C_0(X^*)$ defined by (1) is linear, surjective and preserves the distant. Moreover $M(\widehat{\mathcal{P}_W}) = M(H(\Pi_W)) = \Phi(\Pi_W) = \mathcal{P}_W^*$.

(iii) \Leftrightarrow (iv). Assume that \mathcal{P}_W^* is dense in $C_0(X^*)$ and fix $f \in C(X^*)$. Since $g(x) = f(x) - f(x_0) \in C_0(X^*)$, there exists a sequence $\{p_n\}$ en \mathcal{P}_W^* such that $p_n \rightarrow g$. By setting $p_n^*(x) = p_n(x) + f(x_0)$ we obtain a sequence in \mathcal{Q}_W which converges uniformly to f .

On the other hand, if \mathcal{Q}_W is dense in $C(X^*)$ and $f \in C_0(X^*)$, there exist $p_n \in \mathcal{Q}_W$, $n \in \mathbb{N}$, such that $p_n \rightarrow f$. Since $|p_n(x_0)| = |f(x_0) - p_n(x_0)| \rightarrow 0$, by setting $p_n^*(x) = p_n(x) - p_n(x_0)$ we obtain a sequence in \mathcal{P}_W^* which converges uniformly to f . \square

In the next theorem we use some characterization of dense subspaces of $C(Z)$, for a compact Hausdorff space Z . We need another definition.

Given a compact topological Hausdorff space Z and two closed sets $A, B \subset Z$, we say that a family $\mathcal{F} \subset C(Z)$, S -separates A and B if, for each $\delta \in (0, 1)$ there exists $g \in \mathcal{F}$ such that, $0 \leq g \leq 1$, $g(A) \subset [0, \delta]$ and $g(B) \subset [1 - \delta, 1]$. In such a case we say that g δ -separates A and B .

In the next Proposition $\text{int}(A)$ denotes the interior of the set A and x_0 is the point defined at the beginning of this section.

Proposition 2.2. *For a fixed weight W the following assertion are equivalent:*

- (i) *The polynomials are dense in $C_W(X)$.*
- (v) *\mathcal{Q}_W S -separates each couple of closed disjoint sets in X^* .*
- (vi) *\mathcal{Q}_W S -separates each couple of closed disjoint sets A and B in X^* such that $x_0 \in \text{int}(A)$.*
- (vii) *\mathcal{R}_W S -separates each couple of closed disjoint sets C and D in \widehat{X} such that $0 \in \text{int}(C)$ and D is compact subset of $(0, \infty)$.*
- (viii) *Given reals c and d , $0 < c < d$, and two disjoint closed sets $C, D \subset X$ such that D is compact and $([0, c] \cup [d, \infty)) \subset C$, then \mathcal{P}_W S -separates the sets C and D .*
- (ix) *For each compact set $K \subset (0, \infty)$ and any bounded open neighborhood V of K such that $0 \notin V$, there is a bounded open neighborhood W of K such that $W \subset V$ and \mathcal{P}_W S -separates K and $X \setminus W$.*

(x) For each $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ and a finite family of numbers

$$0 < a_1 - \alpha < b_1 + \alpha < a_2 - \alpha < b_2 + \alpha < \cdots < a_n - \alpha < b_n + \alpha < \infty, \quad (2)$$

the subspace \mathcal{P}_W S -separates the sets $K = \cup_{k=1}^n [a_k, b_k]$ and J , where $J = X \setminus I$ and $I = \cup_{k=1}^n (a_k - \alpha, b_k + \alpha)$.

Proof. (i) \Leftrightarrow (v). It follows from a result of Blasco and Molto in [2] that (v) and (iv) (in Proposition 2.1) are equivalent. Then, the assertion follows from the relation (i) \Leftrightarrow (iv) proved in Proposition 2.1.

(v) \Rightarrow (vi). It is trivial.

(vi) \Rightarrow (v). Fix two disjoint closed sets C and D in X^* . One may assume that $x_0 \notin D$. Let E be a closed neighborhood of x_0 such that $E \cap D = \emptyset$. Then set $A = C \cup E$ and $B = D$. Since \mathcal{Q}_W S -separates A and B , it S -separates C and D .

(vi) \Rightarrow (vii). Fix closed disjoint sets C and D in \widehat{X} such that $0 \in \text{int}(C)$ and D is compact subset of $(0, \infty)$. Fix $\alpha > 0$ such that $D \subset [0, \alpha]$. Set $A = \tau(C \cup [2\alpha, \infty])$ and $B = \tau(D)$, where τ is the quotient map defined at the beginning of this section. Since $C \cup [2\alpha, \infty]$ is τ -saturated neighborhood of 0 and τ is open, A and B are disjoint closed sets in X^* and $x_0 \in \text{int}(A)$. Therefore \mathcal{Q}_W S -separates A and B . Given $\delta \in (0, 1/4)$ there exists $g \in \mathcal{Q}_w$ such that $0 \leq g \leq 1$, $g(A) \subset [0, \delta]$ and $g(B) \subset [1 - \delta, 1]$. Then, for the function $f \in \mathcal{R}_W$ such that $f = g \circ \tau$, one has $0 \leq f \leq 1$, $f(C) \subset f(C \cup [2\alpha, \infty]) \subset [0, \delta]$ and $f(D) \subset [1 - \delta, 1]$. Thus \mathcal{R}_W S -separates C and D .

(vii) \Rightarrow (vi). Fix closed disjoint sets A and B in X^* such that $x_0 \in \text{int}(A)$ and set $C = \tau^{-1}(A)$ and $D = \tau^{-1}(B)$. Since C and D are disjoint closed τ -saturated sets in \widehat{X} and $0, \infty \in \text{int}(C)$, D is a compact subset of $(0, \infty)$. From (vii) \mathcal{R}_W S -separates C and D . If $\delta \in (0, 1)$ and $f \in \mathcal{R}_W$, δ -separates C and D , then the function g given by the relation $f = g \circ \tau$ δ -separates A and B .

(vii) \Rightarrow (viii). Fix two reals c and d , $0 < c < d$, and two disjoint closed sets $C, D \subset X$ such that D is compact and $([0, c] \cup [d, \infty)) \subset C$. Since $D \subset [0, \infty)$, \mathcal{R}_W S -separates C and D . But \mathcal{P}_W is the restriction of functions in \mathcal{R}_W to X , thus \mathcal{P}_W S -separates C and D .

(viii) \Rightarrow (vii). Fix closed disjoint sets C and D in \widehat{X} such that $0 \in \text{int}(C)$ and D is compact subset of $[0, \infty)$. Fix reals c and d , $0 < c < d$ such that $[0, c] \subset C$ and $D \cap [d, \infty) = \emptyset$. If we set $E = C \cup [d, \infty)$, then \mathcal{P}_W S -separates D and E . It is sufficient to prove that \mathcal{R}_W S -separates C and D .

(viii) \Leftrightarrow (ix). It is easy to proof.

(ix) \Rightarrow (x). Assume that (ix) holds and fix numbers α , a_k and b_k as in (x). The set I is a bounded open neighborhood of K such that $0 \notin I$. Therefore, there is a bounded open neighborhood W of K such that $W \subset V$ and \mathcal{P}_W S -separates K and $X \setminus W$. Since $X \setminus I \subset X \setminus W$ we have the result.

(x) \Rightarrow (ix). Fix a compact set $K \subset (0, \infty)$ and a bounded open neighborhood V of K such that $0 \notin V$. Since V is the union of some intervals and K is compact, there is a finite number of bounded intervals $\{I_k\}_{k=1}^n$ in I such that $K \subset \cup_{k=1}^n I_k \subset I$. There there exist numbers $\alpha > 0$, $\{a_k\}_{k=1}^n$, and $\{b_k\}_{k=1}^n$ such that $K \subset \cup_{k=1}^n (a_k, b_k) \subset \cup_{k=1}^n (a_k - \alpha, b_k + \alpha) \subset \cup_{k=1}^n I_k$. If we set $W = \cup_{k=1}^n (a_k - \alpha, b_k + \alpha)$, we have obtained a bounded open neighborhood of K such that $W \subset V$. From (x), \mathcal{P}_W S -separates K and $X \setminus W$. \square

Our next goal is to change condition (x) in Proposition 2.2 by some new ones involving approximation of a particular class of functions.

Theorem 2.3. *For a fixed weight W the following assertion are equivalent:*

(i) *The polynomials are dense in $C_W(X)$.*

(xi) *For each $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ and a finite family of numbers as in (2), every function $f \in C(X)$ such that $0 \leq f \leq 1$ and*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in K \\ 0 & \text{if } x \in J, \end{cases}$$

where K and J are defined as in (x) in Proposition (2.2), can be uniformly approximated by elements of \mathcal{P}_W .

(xii) *For each $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ and a finite family of numbers as in (2), there exists a function $f \in C(X)$ such that $0 \leq f \leq 1$ and*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in K \\ 0 & \text{if } x \in J, \end{cases} \quad (3)$$

where K and J are defined as in (x) in Proposition (2.2), a f can be uniformly approximated by elements of \mathcal{P}_W .

(xiii) *For any numbers $0 < \alpha < a < b$ and every function $g \in C(X)$ such that $0 \leq g \leq 1$,*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [a, b] \\ 0 & \text{if } x \in [0, \infty) \setminus [a - \alpha, b + \alpha], \end{cases}$$

and g can be uniformly approximated by elements of \mathcal{P}_W .

(xiv) For any numbers $0 < \alpha < a < b$, there exists a function $h \in C(X)$ such that $0 \leq h \leq 1$,

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [a, b] \\ 0 & \text{if } x \in [0, \infty) \setminus [a - \alpha, b + \alpha], \end{cases}$$

and h can be uniformly approximated by elements of \mathcal{P}_W .

(xv) For any numbers $0 < \alpha < a < b$, there exists a function $h \in C(X)$ such that $0 \leq h \leq 1$,

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [a, b] \\ 0 & \text{if } x \in [0, \infty) \setminus [a - \alpha, b + \alpha], \end{cases}$$

and h can be uniformly approximated by elements of Π_W .

Proof. (i) \Rightarrow (xi). The space $C_W(X)$ contains all functions considered in (xi).

(xi) \Rightarrow (xii). It is trivial.

(xii) \Rightarrow (i). We will prove that (xii) \Rightarrow (x) of Proposition 2.2. Fix α , $\{a_k\}_{k=0}^n$ and $\{b_k\}_{k=0}^n$ satisfying (2) and let J and K be defined as in Proposition 2.2. Fix a function $f \in C(X)$, $0 \leq f \leq 1$ such that (3) holds and f can be uniformly approximated by elements of \mathcal{P}_W . For each $\delta \in (0, \alpha)$, fix $t \in (0, \delta)$ and $P_t \in \mathcal{P}_W$ such that $\|f - P_t\|_\infty < t$. One has $P_t(J) \subset [-t, t]$ and $P_t(K) \subset [1 - t, 1 + t]$. Notice that

$$0 < \frac{\delta - t}{1 + 2\delta} \leq \frac{1 + t + \delta}{1 + 2\delta} < 1.$$

Set

$$s = \min \left\{ \frac{\delta - t}{1 + 2\delta}, 1 - \frac{1 + t + \delta}{1 + 2\delta} \right\}.$$

One has $0 < s < \delta$. Take $P \in \mathcal{P}_W$ such that

$$\left\| \frac{1}{1 + 2\delta}(P_t + \delta) - P \right\|_\infty < s.$$

Let us prove that P is one of the function we are looking for. In fact, for $x \in [0, \infty)$,

$$0 \leq \frac{\delta - t}{1 + 2\delta} - s \leq \frac{1}{1 + 2\delta}(P_t(x) + \delta) - s \leq P(x) \leq \frac{1}{1 + 2\delta}(P_t(x) + \delta) + s \leq 1.$$

On the other hand, if $x \in J$,

$$0 \leq P(x) \leq \frac{1}{1+2\delta}(P_t(x) + \delta) + s \leq \frac{1}{1+2\delta}(t + \delta) + \delta < 3\delta.$$

Finally, if $x \in K$,

$$P(x) \geq \frac{1}{1+2\delta}(P_t(x) + \delta) - s \geq \frac{1}{1+2\delta}(1 - t + \delta) - s \geq 1 - 3\delta.$$

Therefore, $0 \leq P \leq 1$, $P(K) \subset [1 - 3\delta, 1]$ and $P(J) \subset [0, 3\delta]$.

(xi) \Rightarrow (xiii) It is clear that (xiii) is a direct consequence of (xi).

(xiii) \Rightarrow (xiv) It is simple to prove.

(xiv) \Rightarrow (xii) Any function f as in (xii) can be written as a linear combination of the functions as the ones given in (xiv).

(xiv) \Rightarrow (xv). It is simple.

(xv) \Rightarrow (xiv). It can be obtained as in the proof (iv) \Rightarrow (iii) in Proposition 2.1. \square

3 A sufficient condition

We need some auxiliary results.

Set $\varphi(x) = \sqrt{x}$, for $x \geq 0$. If $p > 0$, $t > 0$ and $g \in C[0, p]$ set

$$\omega_\varphi(g, t)_{[0, p]} = \sup_{h \in (0, t]} \sup_{x \in J(h, \varphi)} | \Delta_{h\varphi(x)} g(x) | \quad (4)$$

where

$$\Delta_{h\varphi(x)} g(x) = g(x + h\varphi(x)/2) - g(x - h\varphi(x)/2)$$

and

$$J(h, \varphi) = \{x \in (0, p) : x \pm h\varphi(x)/2 \in [0, p]\}.$$

Proposition 3.1. *Fix $0 < \alpha < a < b$ and consider the function $f \in C(X)$*

given by

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in [0, a - \alpha] \cup [b + \alpha, \infty) \\ (x - a + \alpha)/\alpha & \text{if } x \in (a - \alpha, a) \\ 1 & \text{if } x \in [a, b] \\ (b + \alpha - x)/\alpha & \text{if } x \in (b, b + \alpha]. \end{cases} \quad (5)$$

If $c \geq b + \alpha$ and

$$g(y) = \begin{cases} f(cy)/W(cy), & \text{if } y \in (0, 1], \\ g(0) = 0 & \text{if } y = 0. \end{cases}, \quad (6)$$

then there exists a constant $C(a, b, \alpha)$ such that, for $0 < t < 1$,

$$\omega_\varphi(g, t)_{[0,1]} \leq C(a, b, \alpha) (t\sqrt{c} + \omega_\varphi(W, t\sqrt{c})_{[0,b+\alpha]}). \quad (7)$$

Proof. Let us denote

$$\beta = \frac{1}{\min \{W(y) : y \in [a - \alpha, b + \alpha]\}}. \quad (8)$$

Fix $h \in (0, t]$ and $x \in (0, 1)$ such that $0 \leq x - h\varphi(x)/2 < x + h\varphi(x)/2 \leq 1$. We should consider several cases.

(1) If $x + h\varphi(x) \leq (a - \alpha)/c$ or $x - h\varphi(x) \geq (b + \alpha)/c$, then

$$g(x + h\varphi(x)/2) - g(x - h\varphi(x)/2) = 0.$$

(2) Suppose that $x \pm h\varphi(x)/2 \in [(a - \alpha)/c, a/c]$. Since $x \leq a/c$, $\varphi(x) \leq \varphi(a/c)$. Therefore

$$\begin{aligned} \alpha | \Delta_{h\varphi(x)}g(x) | &= \left| \frac{c(x + h\varphi(x)/2) - a + \alpha}{W(c(x + h\varphi(x)/2))} - \frac{c(x - h\varphi(x)/2) - a + \alpha}{W(c(x - h\varphi(x)/2))} \right| \\ &\leq \frac{ch\varphi(x)}{W(c(x + h\varphi(x)/2))} + \frac{|(c(x - h\varphi(x)/2) - a + \alpha)\Delta_{ch\varphi(x)/\varphi(cx)}W(cx)|}{W(c(x + h\varphi(x)/2))W(c(x - h\varphi(x)/2))} \end{aligned}$$

$$\leq \beta\sqrt{ch}\varphi(a) + \beta^2\alpha\omega_\varphi(W, \sqrt{ch})_{[0, b+\alpha]}.$$

That is

$$|\Delta_{h\varphi(x)}g(x)| \leq \frac{\beta\varphi(a)}{\alpha}\sqrt{ch} + \beta^2\omega_\varphi(W, \sqrt{ch})_{[0, b+\alpha]}.$$

(3) If $x \pm h\varphi(x)/2 \in [b/c, (b + \alpha)/c]$, the estimate is obtained as in the case (2).

(4) If $x \pm h\varphi(x) \in [a/c, b/c]$, then

$$\begin{aligned} |\Delta_{h\varphi(x)}g(x)| &= \frac{|\Delta_{hc\varphi(x)}W(cx)|}{W(c(x + h\varphi(x)/2))W(c(x - h\varphi(x)/2))} \\ &\leq \beta^2\omega_\varphi\left(W, \frac{tc\varphi(x)}{\varphi(cx)}\right)_{[0, b+\alpha]} = \beta^2\omega_\varphi(W, t\sqrt{c})_{[0, b+\alpha]}. \end{aligned}$$

(5) Suppose that $x - h\varphi(x)/2 \in [0, (a - \alpha)/c]$ and $x + h\varphi(x)/2 \in ((a - \alpha)/c, a/c]$. Since $x < a/c$, $\varphi(x) < \varphi(a)/\varphi(c)$, we have

$$\begin{aligned} |\Delta_{h\varphi(x)}g(x)| &= |g(x + h\varphi(x)/2)| = \frac{c(x + h\varphi(x)/2) - a + \alpha}{W(c(x + h\varphi(x)/2))} \\ &= \frac{c(x - h\varphi(x)/2) + ch\varphi(x) - a + \alpha}{W(c(x + h\varphi(x)/2))} \leq \beta ch\varphi(x) \leq \beta\varphi(a)\varphi(c)h. \end{aligned}$$

(6) Suppose that $x - h\varphi(x)/2 \in [0, (a - \alpha)/c]$ and $x + h\varphi(x)/2 \in (a/c, b/c]$. From this conditions one has $\alpha < ch\varphi(x) < h\varphi(a)\varphi(c)$. Therefore

$$|\Delta_{h\varphi(x)}g(x)| = \frac{1}{W(c(x + h\varphi(x)/2))} \leq \beta \frac{h\varphi(a)\varphi(c)}{\alpha}.$$

(7) Suppose that $x - h\varphi(x)/2 \in [0, (a - \alpha)/c]$ and $x + h\varphi(x)/2 \in (b/c, b + \alpha)/c]$. Then

$$|\Delta_{h\varphi(x)}g(x)| = \frac{b + \alpha - c(x + h\varphi(x)/2)}{W(cx + ch\varphi(x)/2)} \leq \beta\alpha \leq \beta ch\varphi(x) \leq \beta\varphi(a)\varphi(c)h.$$

(8) Suppose that $x - h\varphi(x)/2 \in [(a - \alpha)/c, a/c]$ and $x + h\varphi(x)/2 \in (a/c, b/c]$. Then

$$|\Delta_{h\varphi(x)}g(x)| = \left| \frac{c(x - h\varphi(x)/2) - a + \alpha}{\alpha W(c(x - h\varphi(x)))} - \frac{1}{W(c(x + h\varphi(x)/2))} \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \frac{c(x - h\varphi(x)/2) - a}{\alpha W(c(x - h\varphi(x)))} \right| + \beta^2 | (W(c(x + h\varphi(x)/2)) - (W(c(x - h\varphi(x)/2))) | \\ &\leq \beta ch\varphi(x) + \beta^2 \omega_\varphi(W, t\varphi(x)/\varphi(cx)) \leq \beta h\varphi(b)\varphi(c) + \beta^2 \omega_\varphi(W, t\varphi(c))_{[0, b+\alpha]}. \end{aligned}$$

The other cases can be treated analogously. □

Theorem 3.2. *There exists a constant C such that, for each $g \in C[0, 1]$ and $n > 1$,*

$$E_n(g) = \inf_{p \in \Pi_n} \|g - p\|_{[0,1]} \leq C\omega_\varphi \left(g, \frac{1}{n} \right)_{[0,1]}, \tag{9}$$

where $\|f\|_{[0,1]}$ denotes the sup norm on $[0, 1]$, Π_n is the family of all polynomials of degree no greater than n and $\varphi(x) = \sqrt{x}$.

Proof. It is known (see [3], Th 7.2.1) that there exists a constant M such that, for each $g \in C[0, 1]$ and $n > 1$,

$$E_n(g) \leq C\omega_\psi \left(g, \frac{1}{n} \right)_{[0,1]},$$

where $\psi(x) = \sqrt{x(1-x)}$ and $\omega_\psi(g, t)_{[0,1]}$ is defined as in (4) with the function ψ instead of φ . Thus we only need to verify the inequality $\omega_\psi(g, t)_{[0,1]} \leq \omega_\varphi(g, t)_{[0,1]}$. But, if $0 < h \leq t < 1$ and $x \pm h\psi(x)/2 \in [0, 1]$, then

$$\begin{aligned} &| f(x + h\psi(x)/2) - f(x - h\psi(x)/2) | = | \Delta_{h\sqrt{1-x}\varphi(x)} f(x) | \\ &\leq \omega_\varphi(g, t\sqrt{1-x})_{[0,1]} \leq \omega_\varphi(g, t)_{[0,1]}. \end{aligned} \quad \square$$

Theorem 3.3. *If W is a weight which the following property:*

(P) *For all reals $d > 0$ and $\varepsilon > 0$, there exist $n \in \mathbb{N}$ and $q_n \geq d$ such that*

$$\frac{\sqrt{q_n}}{n} < \varepsilon \quad \text{and} \quad \sup_{x \in [q_n, \infty)} W(x)2^n \left(\frac{2x}{q_n} - 1 \right)^n < \varepsilon, \tag{10}$$

then the polynomials are dense in $C_W(X)$.

Proof. We will derive the result from assertion (xv) in Theorem 2.3. In particular, for fixed numbers $0 < \alpha < a < b$, we will prove that (xv) holds with the function f defined by (5). That is, for each $\varepsilon \in (0, 1)$, there exists a polynomial P such that $\|f - WP\|_{(0, \infty)} < \varepsilon$.

Given $\varepsilon > 0$, we start with choosing a constant $t_0 > 0$ such that, for $t \in (0, t_0]$

$$\omega_\varphi(W, t)_{[0, b+\alpha]} < \frac{\varepsilon}{4CC(a, b, \alpha)}.$$

where C is the constant in (9) and $C(a, b, \alpha)$ is the constant in (7). Fix ε^* such that

$$0 < \varepsilon^* < \min \left\{ t_0, \frac{1}{4CC(a, b, \alpha)}, \frac{1}{4\beta} \right\} \varepsilon,$$

where β is defined by (8). By the assumptions of the theorem there exist $n \in \mathbb{N}$ and $c \geq b + \alpha$ such that

$$\frac{\sqrt{c}}{n} < \varepsilon^* \quad \text{and} \quad \sup_{x \in [c, \infty)} W(x) 2^n \left(\frac{2x}{c} - 1 \right)^n < \varepsilon^*.$$

With this number c , we work with the function g defined by (6).

Let $p \in \Pi_n$ be the polynomial of best approximation for g in $C[0, 1]$. That is $E_n(g) = \|g - p\|_{[0,1]}$. By the choice of ε^* , (9) and Proposition 3.1, we have

$$\begin{aligned} \|g - p\|_{[0,1]} &\leq C\omega_\varphi \left(g, \frac{1}{n} \right)_{[0,1]} \leq CC(a, b, \alpha) \left(\frac{\sqrt{c}}{n} + \omega_\varphi \left(W, \frac{\sqrt{c}}{n} \right)_{[0, b+\alpha]} \right) \\ &\leq CC(a, b, \alpha)\varepsilon^* + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Let $P(x) = p(x/c)$. It follows from the latter estimates that

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, c]} |f(x) - W(x)P(x)| &= \sup_{x \in (0, c]} W(x) \left| \frac{f(x)}{W(x)} - P(x) \right| \\ &\leq \sup_{y \in (0, 1]} \left| \frac{f(cy)}{W(cy)} - P(cy) \right| = \sup_{y \in [0, 1]} |g(y) - p(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Notice that

$$\|g\|_{[0,1]} = \sup_{y \in [(a-\alpha)/c, (b+\alpha)/c]} \left| \frac{f(cy)}{W(cy)} \right| = \sup_{x \in [a-\alpha, b+\alpha]} \frac{f(x)}{W(x)} \leq \beta.$$

Consequently, we obtain

$$\|p\|_{[0,1]} \leq \|g\|_{[0,1]} + \|g - p\|_{[0,1]} \leq 2\|g\|_{[0,1]} \leq 2\beta.$$

If is known that if Q is a polynomial of degree n and $|Q(y)| \leq K$, for $|y| \leq 1$, then $|Q(y)| \leq K(2y)^n$, for $y > 1$ (see Lemma 3 in [4]). Therefore, if we set $Q(y) = p((1+y)/2)$, for $y > 1$,

$$|Q(y)| = |p((1+y)/2)| \leq 2\beta(2y)^n$$

or

$$|P(x)| = \left| p\left(\frac{x}{c}\right) \right| \leq \beta 2^{n+1} \left(\frac{2x}{c} - 1\right)^n, \quad x > c.$$

Finally

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [c, \infty)} |f(x) - W(x)P(x)| &= \sup_{x \in [c, \infty)} |W(x)P(x)| \\ &\leq 2\beta \sup_{x \in [c, \infty)} W(x)2^n \left(\frac{2x}{c} - 1\right)^n < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad \square$$

Condition (10) may seem severe. In fact, we need it because in place of the best approximation of the function in the semi axis, we approximate it in a compact interval.

Let us obtain a known result from the last theorem.

Theorem 3.4. *If $W(x) = x^\lambda \exp(-x^\gamma)$ with $\lambda > 0$ and $\gamma \geq 1$, then the polynomials are dense in $C_W(X)$.*

Proof. Define the sequences $\{r_n\}$ and $\{q_n\}$ by

$$r_n = (n + \lambda)/\gamma)^{1/\gamma} \quad \text{and} \quad q_n = n^{1+\log 2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Since

$$(W(x)x^n)' = x^{n+\lambda-1}e^{-x^\gamma}(n + \lambda - \gamma x^\gamma)$$

the function $G_n(x) = x^{n+\lambda} \exp(-x^\gamma)$, decrease for $x > r_n$. Therefore, for n such that $n(\gamma \log 2 + 1) \leq n^{\gamma(1+\log 2)}$,

$$\begin{aligned} \Lambda_n &= \sup_{x \in [q_n, \infty)} W(x)2^n \left(\frac{2x}{q_n} - 1\right)^n \leq \frac{2^{2n}}{q_n^n} \sup_{x \in [q_n, \infty)} G_n(x) = \frac{2^{2n}}{q_n^n} G_n(q_n) \\ &= 2^{2n} q_n^\lambda \exp(-q_n^\gamma) = 2^{2n} n^{\lambda(1+\log 2)} e^{-n^{\gamma(1+\log 2)}} \leq \frac{2^n}{e^{n\gamma \log 2}} \frac{2^n}{e^n} n^{\lambda(1+\log 2)}. \end{aligned}$$

Using these inequalities and the equalities

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{q_n}}{n} = 0,$$

we obtain that conditions in (10) hold. □

Acknowledgment

The author thanks to the reviewer for careful reading of the manuscript.

Bibliografía

- [1] N. I. Akhiezer, *On the weighted approximation of continuous functions by polynomials on the entire real axis*, Amer. Math. Soc. Translation, ser. 2, Vol. 22 (Providence, Rhode Island, 1962), 95-137.
- [2] J. L. Blasco and A. Molto, *On the uniform closure of a linear space of bounded real-valued functions*, Annali di Matematica Pura ed Applicata IV, CXXXIV (1983), 233-239.
- [3] Z. Ditzian, V. Totik, *Moduli of smoothness*, Springer, New York (1987).
- [4] G. Freud, *On weighted polynomial approximation on the whole real axis*, Acta Mat. Hung., **20** (1-2) (1969), 223-225.
- [5] P. Koosis, *The logarithmic Integral I*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [6] D. Lubinsky, *A survey of weighted polynomial approximation with exponential weights*, Surveys on Approximation Theory, **3** (2007), 1-105.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

jbusta@fcfm.buap.mx

Capítulo 3

Axiomas de completación equivalentes

Manuel Ibarra Contreras, Armando Martínez García
FCFM, BUAP

Resumen

Este capítulo tiene como objetivo dar algunas proposiciones equivalentes al Axioma del Supremo, entre ellas, el Axioma de Cortadura, el Teorema de Valores Extremos, el Teorema del Valor Intermedio y el Teorema del Valor Medio.

1 Introducción

Se sabe que en los primeros cursos de matemáticas de licenciatura se trabaja con los números reales como un campo ordenado completo, donde la completez está dada en términos del Axioma del Supremo. En este capítulo veremos que este Axioma es equivalente a otras proposiciones, en particular, al Axioma de Cortadura, al hecho de que el conjunto de números reales \mathbb{R} es conexo, al Teorema de Valores Extremos, al Teorema del Valor Intermedio y al Teorema del Valor Medio, entre otros más.

2 Resultados generales

En este capítulo consideraremos a los números reales, conjunto que denotaremos como es usual, por \mathbb{R} . Se sabe que \mathbb{R} es un campo ordenado completo, donde la completez está dada por el Axioma del Supremo. Los conceptos topológicos se pueden consultar en [3]; el material restante de esta sección, a excepción de la Definición 2.17 y la Observación 2 que se pueden ver en [5], se puede consultar en [1] y [2].

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, el intervalo abierto (a, b) , el intervalo abierto (a, ∞) y el intervalo abierto $(-\infty, b)$ son los conjuntos

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ y
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$,

respectivamente.

Los intervalos cerrados $[a, b]$, $[a, \infty)$ y $(-\infty, b]$ se definen como los siguientes conjuntos:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$,
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ y
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$,

respectivamente.

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, el intervalo abierto con centro en x_0 y radio r , el cual denotaremos como $B_r(x_0)$, es el conjunto $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\}$.

Definición 2.1. Sea $A \subset \mathbb{R}$.

1. A es un conjunto abierto en \mathbb{R}

si para todo $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$.

2. A es un conjunto cerrado en \mathbb{R} si $\mathbb{R} \setminus A$ es un conjunto abierto en \mathbb{R} .
3. La cerradura de A es el conjunto

$$cl(A) = \{x \in \mathbb{R} : \text{para todo } r > 0, B_r(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

4. $x \in \mathbb{R}$ es punto de acumulación de A , si para todo $r > 0$,

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

5. \mathbb{R} es conexo si no existen conjuntos abiertos no vacíos $A, B \subset \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbb{R} = A \cup B \text{ y } A \cap B = \emptyset.$$

Lema 2.2. Sea $A \subset \mathbb{R}$, entonces A es un conjunto cerrado si y solo si $A = cl(A)$.

Demostración. Supongamos que A es cerrado. De la definición de cerradura de A se tiene que $A \subset cl(A)$, y si $x \notin A$, dado que $X \setminus A$ es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset X \setminus A$, lo que implica que $x \notin cl(A)$, es decir $cl(A) \subset A$. Por lo tanto, $A = cl(A)$.

Por otro lado, si suponemos que $A = cl(A)$ y $x \in X \setminus A$, entonces $x \in X \setminus cl(A)$ y así, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \cap A = \emptyset$, es decir, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset X \setminus A$ lo que implica que $X \setminus A$ es abierto y, por lo tanto, A es cerrado. \square

Dado $x \in \mathbb{R}$, el valor absoluto de x , el que denotaremos como $|x|$ es

- $|x| = x$ si $x \geq 0$ y
- $|x| = -x$ si $x < 0$.

Como consecuencia inmediata, se tiene lo siguiente.

Observación 2.3. 1. Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $-|x| \leq x \leq |x|$.

2. Si $x \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, entonces $|x| \leq r$ si y solo si $-r \leq x \leq r$ si y solo si $x \in [-r, r]$.

Definición 2.4. Dado $A \subset \mathbb{R}$, diremos que

1. A es acotado superiormente si existe $r \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in A$, $a \leq r$.
2. A es acotado inferiormente si existe $r \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in A$, $r \leq a$.
3. A es acotado si existe $r > 0$ tal que para todo $a \in A$, $|a| \leq r$.
4. Una familia de subconjuntos de \mathbb{R} es una cubierta abierta de A si cada uno de sus elementos es un conjunto abierto y la unión de todos ellos contiene a A .
5. A es compacto si de toda cubierta abierta de A podemos extraer una subcubierta finita.

Lema 2.5. *Sea $A \subset \mathbb{R}$. A es acotado si y solo si A es acotado superiormente e inferiormente.*

Demostración. Es claro que si A es acotado entonces A es acotado superiormente e inferiormente. Ahora supongamos que A es acotado superior e inferiormente, es decir, existen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tales que $r_1 \leq a \leq r_2$ para todo $a \in A$. Como $r_2 \leq |r_2|$ y $-|r_1| \leq r_1$ se sigue que $-|r_1| \leq a \leq |r_2|$.

Sea $r = \max\{|r_1|, |r_2|\}$, es claro que $|r_2| \leq r$, $-r \leq -|r_1|$, se sigue que $-r \leq a \leq r$ para todo $a \in A$, lo cual implica que $|a| \leq r$ para todo $a \in A$. \square

Lema 2.6. *Si $A \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente, entonces $cl(A)$ es acotado superiormente.*

Demostración. Como A es acotado superiormente, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que para toda $a \in A$, $a \leq r$.

Afirmamos que r es cota superior de $cl(A)$. En caso contrario existiría $x \in cl(A)$ tal que $r < x$, entonces para $\epsilon = x - r$ se tiene que $B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$, lo cual implica que existe $a \in A$ tal que $x - \epsilon < a < x + \epsilon$, se sigue que $r < a$ lo que es una contradicción, ya que r es cota superior de A . Por lo tanto $cl(A)$ es acotado superiormente. \square

De forma análoga se prueba también el siguiente resultado.

Lema 2.7. *Si $A \subset \mathbb{R}$ es acotado inferiormente, entonces $cl(A)$ es acotado inferiormente.*

De los tres Lemas 2.5, 2.6 y 2.7, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.8. *Si $A \subset \mathbb{R}$ es acotado, entonces $cl(A)$ es acotado.*

Lema 2.9. *Si $A \subset B \subset \mathbb{R}$ son tales que A es un conjunto cerrado en \mathbb{R} y B compacto, entonces A es compacto.*

Demostración. Si $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ es una cubierta abierta de A , entonces $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \{\mathbb{R} \setminus A\}$ es una cubierta abierta de B , lo cual implica que existen $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ tales que $\{U_1, \dots, U_n, (\mathbb{R} \setminus A)\}$ es cubierta abierta de B , se sigue que $\{U_1, \dots, U_n\}$ es una cubierta abierta de A . Por lo tanto A es compacto. \square

Ahora recordemos que una sucesión en \mathbb{R} es una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ y que si para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = x_n$, entonces es costumbre denotar a la sucesión f como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, costumbre que seguiremos de aquí en adelante.

Definición 2.10. Dada la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $x \in \mathbb{R}$ diremos que

1. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x o que x es el límite de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si

para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N, x_n \in B_\epsilon(x)$.

2. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente si para todo $n \in \mathbb{N}, x_n \leq x_{n+1}$.

3. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente si para todo $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \leq x_n$.

Si la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x lo denotaremos como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Definición 2.11. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $a_0 \in \mathbb{R}$. Diremos que a_0 es supremo de A si cumple las siguientes dos condiciones.

1. Para toda $a \in A, a \leq a_0$
2. Si existe $b \in \mathbb{R}$ tal que para toda $a \in A, a \leq b$, entonces $a_0 \leq b$.

Nota: Sea $A \subset \mathbb{R}$.

1. Si A tiene supremo, éste es único.
2. Si $a_0 \in \mathbb{R}$ es el supremo de A , denotaremos como $a_0 = \sup(A)$.

Axioma del Supremo: Si $A \subset \mathbb{R}$ es tal que

1. $A \neq \emptyset$ y
2. A es acotado superiormente,

entonces A tiene supremo.

Lema 2.12. Si $A \subset \mathbb{R}$ es tal que

1. $A \neq \emptyset$ y
2. A no tiene supremo,

entonces $cl(A)$ no tiene supremo.

Demostración. Supongamos que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $r = \sup(\text{cl}(A))$.

Afirmamos que $r = \sup(A)$. Es claro que para todo $a \in A$, $a \leq r$. Ahora supongamos que existe $t \in \mathbb{R}$ tal que para toda $a \in A$, $a \leq t$. Si $t < r$, entonces t no es cota superior de $\text{cl}(A)$ por lo tanto existe $x \in \text{cl}(A)$ tal que $t < x \leq r$, de donde para $\epsilon = x - t$ se tiene que $B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$, lo cual implica que existe $a \in A$ tal que $x - \epsilon < a < x$ de donde se sigue que $t < a$ lo cual es una contradicción, se sigue $r = \sup(A)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\text{cl}(A)$ no tiene supremo. \square

Definición 2.13. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $a_0 \in \mathbb{R}$. a_0 es ínfimo de A si

1. Para toda $a \in A$, $a_0 \leq a$.
2. Si existe $b \in \mathbb{R}$ tal que para toda $a \in A$, $b \leq a$, entonces $b \leq a_0$.

Observación 2.14. Sea $A \subset \mathbb{R}$.

1. Si A tiene ínfimo éste es único.
2. Si $a_0 \in \mathbb{R}$ es el ínfimo de A denotaremos como $a_0 = \inf(A)$.

Teorema 2.15. Si $A \subset \mathbb{R}$ y $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que $a_0 = \sup(A)$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $|a - a_0| < \epsilon$.

Demostración. Si $\epsilon > 0$, como $a_0 - \epsilon < a_0$ y $a_0 = \sup(A)$, entonces existe $a \in A$ tal que $a_0 - \epsilon < a < a_0$, se sigue que $|a - a_0| < \epsilon$. \square

Corolario 2.16. Si $A \subset \mathbb{R}$ y $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que $a_0 = \inf(A)$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $|a - a_0| < \epsilon$.

Definición 2.17. [5] Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ tales que $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. La pareja ordenada (A, B) es una cortadura de \mathbb{R} si

1. $\mathbb{R} = A \cup B$ y
2. Para todo $a \in A$ y $b \in B$, se tiene que $a < b$.

Axioma de Cortadura:

Para toda cortadura (A, B) existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que

Para todo $a \in A$ y $b \in B$, se tiene que $a \leq r \leq b$.

Nota: Al punto $r \in \mathbb{R}$ dado en el Axioma de Cortadura se le llama punto de cortadura de la cortadura (A, B) y es único.

Definición 2.18. Dada una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in [a, b]$ diremos que

1. f es continua en x_0 si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
2. f es continua en a por la derecha si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $a < x < a + \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.
3. f es continua en b por la izquierda si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $b - \delta < x < b$, entonces $|f(x) - f(b)| < \epsilon$.

En caso de que f sea continua en x_0 lo denotaremos como $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ y si f es continua en x para todo $x \in [a, b]$ diremos que f es continua en $[a, b]$, es claro que en $x_0 = a$ la continuidad es por la derecha la cual se denotará como $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ y en $x_0 = b$, la continuidad es por la izquierda la cual denotaremos como $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Definición 2.19. Para una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$ diremos que

1. f es derivable en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe ,
2. f es derivable en a por la derecha si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe,
3. f es derivable en b por la izquierda si $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$ existe.

En el caso de que f sea derivable en x_0 denotaremos como $f'(x_0)$ como

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Si para cada $x \in [a, b]$, f es derivable en x diremos que f es derivable en $[a, b]$. Una vez más, para $x = a$ la derivada es por la derecha y para $x = b$ la derivada es por la izquierda.

Lema 2.20. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable en $[a, b]$ tal que $f'(b) < 0$ (o $f'(b) > 0$), entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) > f(b)$ ($f(x_0) < f(b)$, respectivamente).

Demostración. Supongamos que $f'(b) < 0$ y que para todo $x \in (a, b)$, $f(x) \leq f(b)$, es decir $f(x) - f(b) \leq 0$ y como $x < b$ se sigue que $x - b < 0$ lo cual implica que $\frac{f(x)-f(b)}{x-b} \geq 0$ para cada $x \in (a, b)$, se sigue que $f'(b) \geq 0$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) > f(b)$.

El caso cuando $f'(b) > 0$ es análogo al anterior: si para todo $x \in (a, b)$, $f(x) \geq f(b)$, entonces $f(x) - f(b) \geq 0$, es decir, $f(x) - f(b) \geq 0$ y como $x - b < 0$ se sigue que $\frac{f(x)-f(b)}{x-b} \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$ lo cual implica que $f'(b) \leq 0$ que contradice la hipótesis del teorema. Por lo tanto existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) < f(b)$. \square

En forma similar se demuestra el siguiente corolario.

Corolario 2.21. *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable en $[a, b]$ tal que $f'(a) > 0$ ($f'(a) < 0$), entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) > f(a)$ ($f(x_0) < f(a)$, respectivamente).*

3 Teoremas implicados por el Axioma del Supremo

En esta sección daremos algunos teoremas que en su demostración utilizan el Axioma del Supremo ya sea en forma directa o indirecta. Los resultados de esta sección se pueden consultar en [1], [2] y [4].

Teorema 3.1. *El Axioma del Supremo implica cada una de las siguientes afirmaciones.*

1. Si $A \subset \mathbb{R}$ es tal que

(a) $A \neq \emptyset$ y

(b) A está acotado inferiormente,

entonces A tiene ínfimo.

2. (Teorema de Weierstrass) Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión tal que:

(a) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y

(b) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada superiormente,

entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.

3. (Teorema de Bolzano-Weierstrass) Si $A \subset \mathbb{R}$ es tal que:

- (a) A es infinito y
- (b) A está acotado,

entonces A tiene un punto de acumulación.

4. (Teorema de Heine-Borel) Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto tal que

- (a) A es cerrado y
- (b) A está acotado,

entonces A es compacto.

5. Si (A, B) es una cortadura de \mathbb{R} , entonces

(A, B) satisface el Axioma de Cortadura.

6. \mathbb{R} es conexo.

7. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, entonces existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

para todo $x \in [a, b]$.

8. (Teorema del Valor Intermedio) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a) < f(b)$, entonces

para cada $c \in (f(a), f(b))$ existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = c$.

9. (Teorema del Valor Medio) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces

$$\text{existe } x_0 \in (a, b) \text{ tal que } f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

10. (Teorema de Darboux) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $f'(a) < f'(b)$, entonces

para cada $y \in [f'(a), f'(b)]$ existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = y$.

Demostración. 1. Sea $A \subset \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$ y A acotado inferiormente. Definamos el conjunto

$$B = \{-x : x \in A\}.$$

Como $A \neq \emptyset$ y $A \subset \mathbb{R}$, entonces $B \neq \emptyset$ y $B \subset \mathbb{R}$. Además, como A está acotado inferiormente, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $r \leq x$, para todo $x \in A$, lo cual implica que $-x \leq -r$ para todo $x \in A$, es decir, $-r$ es cota superior de B ; entonces por el Axioma del Supremo existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$a_0 = \sup(B).$$

Afirmamos que

$$-a_0 = \inf(A).$$

Como $a_0 = \sup(B)$, entonces $-x \leq a_0$ para todo $x \in A$, se sigue que $-a_0 \leq x$ para todo $x \in A$, lo cual implica que $-a_0$ es cota inferior de A . Ahora, si $t \in \mathbb{R}$ es otra cota inferior de A , es decir, $t \leq x$ para todo $x \in A$, entonces $-x \leq -t$ para todo $x \in A$, de donde $-t$ es cota superior de B y, como $a_0 = \sup(B)$, se sigue que $a_0 \leq -t$, es decir, $t \leq -a_0$. Por lo tanto, de la Definición 2.13, se sigue que $-a_0 = \inf(A)$.

2. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que:

- (a) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y
- (b) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada superiormente.

Definamos el conjunto

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Es claro que $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y A es acotado superiormente, entonces, por el Axioma del Supremo, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$x = \sup(A).$$

Afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Sea $\epsilon > 0$. Como $x - \epsilon < x$ y $x = \sup(A)$, entonces, por el Teorema 2.15, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x - \epsilon < x_N \leq x$ y, dado que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente, entonces para todo $n > N$ se tiene que $x - \epsilon < x_n \leq x$, lo cual implica que $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$ para toda $n > N$, es decir $|x_n - x| < \epsilon$ para toda $n > N$.

Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Observemos que, de manera análoga, se puede probar la siguiente afirmación:

Si $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión tal que:

- (a) $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y
- (b) $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada inferiormente,

entonces $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente al ínfimo del conjunto $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$.

3. Sea $A \subset \mathbb{R}$ tal que A es infinito y acotado.

Como A es acotado, entonces por el Lema 2.9, A está acotado superior e inferiormente lo cual implica que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales $a \leq x \leq b$ para toda $x \in A$, se sigue que $A \subset [a, b] = [a_1, b_1]$. Consideremos $c = \frac{a+b}{2}$. Como A es infinito, entonces $A \cap [a, c]$ es infinito o $A \cap [c, b]$ es infinito. Sin pérdida de generalidad supongamos que $A \cap [a, c]$ es infinito y definamos $[a_2, b_2] = [a, c]$.

En general, para $n \in \mathbb{N}$ si ya tenemos definido al intervalo $[a_n, b_n]$ de tal manera que $A \cap [a_n, b_n]$ es infinito, entonces vamos a elegir $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ de la siguiente manera: una vez más, si $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, entonces $A \cap [a_n, c_n]$ es infinito o $A \cap [c_n, b_n]$ es infinito. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A \cap [a_n, c_n]$ es infinito y elijamos $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c_n]$.

Por construcción, la familia de intervalos $\{[a_n, b_n] : n \in \mathbb{N}\}$ satisface las siguientes propiedades:

- (a) Para toda $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq a_{n+1}$ y $a_n < b_1$.
- (b) Para toda $n \in \mathbb{N}$: $b_{n+1} \leq b_n$ y $a_1 < b_n$.
- (c) Para toda $n \in \mathbb{N}$: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$.
- (d) Por el Teorema 3.1 inciso 2) existen $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b_0.$$

Además,

$$b_1 - a_1 = b - a, b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) \text{ y en general } b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_1 - a_1),$$

se sigue que

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}(b_1 - a_1) = 0.$$

Por lo tanto de (d) y (e) tenemos que $a_0 = b_0$.

Afirmamos que a_0 es punto de acumulación del conjunto A .

Sea (c, d) un intervalo abierto en \mathbb{R} tal que $a_0 \in (c, d)$.

Como

$$a_0 = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\},$$

del Teorema 2.15 y Corolario 2.16, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales

$$c < a_n \leq a_0 \leq b_m < d,$$

de donde $c \in [a_n, b_m] \subset (c, d)$. Por lo tanto si $r = \max\{n, m\}$, entonces $c \in [a_r, b_r] \subset (c, d)$, lo cual implica que $(c, d) \cap A \neq \emptyset$. Es decir, a_0 es punto de acumulación del conjunto A .

4. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado y acotado.

Como A está acotado, entonces, por Lema 2.5, A está acotado superiormente e inferiormente, lo cual implica que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq x \leq b$ para todo $x \in A$, lo cual implica que $A \subset [a, b]$.

Ahora consideremos una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$, de $[a, b]$ y definamos el conjunto B como

$$\{x \in [a, b] : \text{existen } U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U} \text{ tales que } [a, x] \subset \bigcup\{U_i : i \in \{1, \dots, n\}\}\}.$$

Es claro que $a \in B$, que $x \leq b$ para toda $x \in B$ y que $B \subset \mathbb{R}$, entonces por el Axioma del Supremo existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$r = \sup(B).$$

Como $a \in B$ y b es cota superior de B , entonces $a \leq r \leq b$ lo cual implica que existe $U_{i_0} \in \mathcal{U}$ tal que $r \in U_{i_0}$. Como U_{i_0} es un conjunto abierto en \mathbb{R} y $r \in U_{i_0}$ existe $x \in A$ tal que $x \in U_{i_0}$, se sigue que existen $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ tales que $[a, x] \subset \bigcup\{U_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$ lo cual implica que

$$[a, r] \subset \bigcup\{U_i : i \in \{1, \dots, n\}\} \cup U_{i_0},$$

se sigue que $r \in B$.

Sabemos que $r \leq b$; si $r < b$, podemos elegir $\epsilon > 0$ tal que $r \in (\epsilon - r, \epsilon + r) \subset U_{i_0}$ con $\epsilon + r < b$ lo cual implica que existe $x' \in (r, \epsilon + r) \subset U_{i_0}$, lo cual implica que $x' \in B$ lo cual no puede pasar ya que $r = \sup(B)$ y $r < x'$. Por lo tanto, $r = b$, se sigue que $[a, b]$ es compacto. Como $A \subset [a, b]$ y A es cerrado, entonces, por el Lema 2.9, A es compacto.

5. Sea (A, B) una cortadura de \mathbb{R} . Como para todo $a \in A$ y $b \in B$ tenemos que $a < b$, entonces A es un conjunto acotado superiormente y como $A \subset \mathbb{R}$ y $A \neq \emptyset$, entonces por el Axioma del Supremo existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$x = \sup(A).$$

Además si existiera $b_0 \in B$ tal que $b_0 < x$, entonces existiría $a_0 \in A$ tal que $b_0 < a_0$ lo cual no puede suceder, y esto implica que x es un punto de cortadura y, por la Observación 2, éste es único. Por lo tanto, (A, B) satisface el Axioma de Cortadura.

6. Supongamos que \mathbb{R} no es conexo, entonces existen conjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset \mathbb{R}$ tales que $U \cap V = \emptyset$ y $U \cup V = \mathbb{R}$.

Sean $u \in U$ y $v \in V$ con $u < v$ y definamos el conjunto

$$B = [u, v] \cap U$$

es claro que $u \in B$ y que v es cota superior de B , entonces por el Axioma del Supremo existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$r = \sup(B)$$

lo cual implica que $r \in U$ o $r \in V$ pero no en ambos.

Supongamos que $r \in U$. Como $v \in V$, $r < v$ y, dado que U es un conjunto abierto de \mathbb{R} , podemos elegir $\epsilon > 0$ tal que $(r - \epsilon, r + \epsilon) \subset U$ y tal que $r + \epsilon < v$, elijamos $r < u' < r + \epsilon$, entonces $u' \in [u, v] \cap U$ lo cual no puede pasar ya que $r = \sup(B)$. Por lo tanto $r \notin U$. Como $r \notin U$, entonces $r \in V$ y como V es un conjunto abierto de \mathbb{R} existe $\epsilon > 0$ tal que $(r - \epsilon, r + \epsilon) \subset V$ lo cual implica que existe $b \in B$ tal que $b \in (r - \epsilon, r + \epsilon) \subset V$, de donde $b \in U \cap V$, y esto no puede ser. Por lo tanto $r \notin V$ y como $r \notin U$, entonces $r \notin \mathbb{R}$ lo cual no puede ser. Por lo tanto \mathbb{R} es conexo.

7. Demostraremos que existe $x_2 \in [a, b]$ tal que $f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$. Como f es continua en $[a, b]$, entonces f es acotada en $[a, b]$, en particular, es acotada superiormente en $[a, b]$, entonces, por el Axioma de Supremo, existe $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$m = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Si $f(x) < m$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $m - f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$ y así, se puede definir $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(x) = \frac{1}{m - f(x)} \text{ para toda } x \in [a, b].$$

Es claro que g es continua en $[a, b]$; por lo tanto, g es acotada en $[a, b]$ y, en particular, acotada superiormente y, como $g(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$, podemos elegir $r > 0$ tal que $g(x) < r$, de donde $\frac{1}{m-f(x)} < r$ para todo $x \in [a, b]$ lo cual implica que

$$f(x) < m - \frac{1}{r} \text{ para toda } x \in [a, b],$$

y esto no puede ser ya que $m - \frac{1}{r} < m$ y $m = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Por lo tanto existe $x_2 \in [a, b]$ tal que $m = f(x_2)$ y así, $f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$.

8. Definamos el conjunto

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) < c\}.$$

Como $f(a) < c$, entonces $a \in A$ y dado que $A \subset [a, b]$, entonces A es acotado superiormente y, por el Axioma del Supremo, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_0 = \sup(A).$$

Como $a \in A$, entonces $a \leq x_0$. Ahora si $b < x_0$, entonces por el Teorema 2.15 existe $d \in A$ tal que $b < d$ lo cual no puede suceder; por lo tanto, $x_0 \leq b$ y esto implica que $x_0 \in [a, b]$.

Afirmamos que $f(x_0) = c$.

Supongamos que $f(x_0) > c$. Como $f(x_0) > c$, entonces $f(x_0) - c > 0$; por lo tanto, para $\epsilon = f(x_0) - c$ existe $\delta > 0$ tal que para toda $x \in [a, b]$ tal que $|x - x_0| < \delta$ implica que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, entonces para toda $x \in [a, b]$ tal que $|x - x_0| < \delta$ implica que

$$f(x_0) - (f(x_0) - c) < f(x) < f(x_0) + (f(x_0) - c),$$

se sigue que para toda $x \in [a, b]$ tal que $|x - x_0| < \delta$ implica que $f(x) > c$. Ahora, como $x_0 = \sup A$, por el Teorema 2.15, existe $x \in A$ tal que $x_0 - \delta < x < x_0$, lo cual implica que $f(x) > c$, y esto no puede pasar ya que $x \in A$ y $f(x) > c$.

Si $f(x_0) < c$ sea $\epsilon = c - f(x_0)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para toda $x \in [a, b]$ tal que $|x - x_0| < \delta$ implica que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ entonces para toda $x \in [a, b]$ tal que $|x - x_0| < \delta$ implica que

$$f(x_0) - (c - f(x_0)) < f(x) < f(x_0) + (c - f(x_0)),$$

se sigue que para toda $x \in [a, b]$ tal que $|x - x_0| < \delta$ implica que $f(x) < c$.

En particular para $x \in [a, b]$ tal que $x_0 < x < x_0 + \delta$ se sigue que $f(x) < c$ lo cual implica que $x \in A$ y esto no puede ocurrir ya que $x_0 = \sup(A)$ y $x_0 < x$. Por lo tanto $f(x_0) = c$.

9. Si $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$, entonces h es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Usando 7. existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que

$$\text{para todo } x \in [a, b] : h(x_1) \leq h(x) \leq h(x_2).$$

Si $x_1 \in (a, b)$ o $x_2 \in (a, b)$ elegimos $c = x_1$ o $c = x_2$ y no es difícil probar que $h'(c) = 0$. Si $x_1, x_2 \in \{a, b\}$ entonces la función es constante y cualquier $c \in (a, b)$ satisface que $h'(c) = 0$. Los dos casos anteriores muestran que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

10. Sea $y \in (f'(a), f'(b))$. Definamos la función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada como

$$g(x) = yx - f(x).$$

Es claro que g es derivable en $[a, b]$ y $g'(x) = y - f'(x)$, de donde

$$g'(a) = y - f'(a) > 0 \text{ y } g'(b) = y - f'(b) < 0.$$

Si se aplican el Lema 2.20 y el Corolario 2.21, existen $x_1, x_2 \in (a, b)$ tales que $g(x_1) > g(b)$ y $g(x_2) > g(a)$, lo cual implica que g no alcanza su máximo ni en a , ni en b . Por lo tanto, por 7., existe $c \in (a, b)$ tal que $g(c) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ y como g es derivable en c se sigue que $g'(c) = 0$, lo cual implica que $f'(c) = y$. \square

4 Teoremas que implican el Axioma del Supremo

En esta sección veremos que cada uno de los teoremas de la sección anterior implican el Axioma del Supremo. Para ver y ampliar información sobre los resultados de esta sección se pueden consultar [4] y [5].

Teorema 4.1. *Cada una de las siguientes proposiciones implican el Axioma del Supremo.*

1. Si $A \subset \mathbb{R}$ es tal que

(a) $A \neq \emptyset$ y

(b) A está acotado inferiormente,

entonces A tiene ínfimo.

2. (Teorema de Weierstrass). Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión tal que:

(a) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y

(b) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada superiormente,

entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.

3. (Teorema de Bolzano-Weierstrass). Si $A \subset \mathbb{R}$ es tal que:

(a) A es infinito y

(b) A es acotado,

entonces A tiene un punto de acumulación.

4. (Teorema de Heine-Borel). Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto tal que

(a) A es cerrado y

(b) A es acotado,

entonces A es compacto.

5. El Axioma de Cortadura.

6. \mathbb{R} es conexo.

Demostración. 1. Sea $B \subset \mathbb{R}$, $B \neq \emptyset$ y B acotado superiormente.

Definamos el conjunto

$$A = \{-x : x \in B\}$$

Como $B \subset \mathbb{R}$, $B \neq \emptyset$, entonces $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y, como B está acotado superiormente, entonces existe $b_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b_0$ para toda $x \in B$,

lo cual implica que $-b_0 \leq -x$ para toda $x \in B$, es decir, A está acotado inferiormente; por lo tanto, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$r = \inf(A).$$

Afirmamos que

$$-r = \sup(B).$$

Como $r = \inf A$, $r \leq -x$ para todo $x \in B$, se sigue que $x \leq -r$ para todo $x \in B$, lo cual implica que $-r$ es cota superior de B .

Ahora, si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq t$ para todo $x \in B$, entonces, $-t \leq -x$ para todo $x \in B$ lo cual implica que $-t$ es cota inferior de A y, como $r = \inf(A)$, entonces $-t \leq r$, de donde $-r \leq t$.

Por lo tanto, de la Definición 2.11, $-r = \sup(B)$.

2. Primero observemos que se satisfacen las siguientes propiedades.

(a) Si toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente, entonces toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es convergente.

Es suficiente observar que si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente y acotada inferiormente, entonces la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $y_n = -x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente, lo cual implica que existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -y$.

(b) La sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0.

Es claro que la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiormente; por lo tanto $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente, es decir, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = x$.

Como $\frac{1}{n} > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ se sigue que $x \geq 0$.

Si $x > 0$ para $\epsilon = \frac{x}{2}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N$, $\frac{1}{n} \in B_\epsilon(x)$, lo cual implica $\frac{1}{n} \in (\frac{x}{2}, \frac{3x}{2})$, de donde $\frac{x}{2} < \frac{1}{n} < \frac{3x}{2}$ para toda $n > N$.

Ahora, si $n > N$, como $4n > n$, se sigue que $\frac{x}{2} < \frac{1}{4n}$ lo cual implica que $2x < \frac{1}{n} < \frac{3x}{2}$ y esto no puede ser.

Por lo tanto $x = 0$.

(c) La sucesión $\{(\frac{1}{2})^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0.

Es suficiente observar que para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $0 < (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{n}$ y aplicar el inciso (b)

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y A acotado superiormente. Si existe $a_0 \in A$ tal que a_0 es cota superior de A , entonces $a_0 = \sup A$. Si no es el caso, consideremos $a_1 \in A$ y $b_1 \in \mathbb{R}$ cota superior de A . Como $a_1 < b_1$, al tomar $\frac{a_1+b_1}{2}$, se tienen los siguientes casos:

Caso 1. $\frac{a_1+b_1}{2}$ es cota superior de A .

En este caso elijamos $a_2 \in A$ tal que $a_2 = a_1$ y $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$.

Caso 2. $\frac{a_1+b_1}{2}$ no es cota superior de A .

En este caso elijamos $a_2 \in A$ tal que $\frac{a_1+b_1}{2} < a_2$ y $b_2 = b_1$.

Recursivamente obtenemos dos sucesiones $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que

(d) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y $a_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

(e) $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y b_n es cota superior de A para todo $n \in \mathbb{N}$ y

(f) $0 < b_n - a_n \leq (\frac{1}{2})(b_{n-1} - a_{n-1}) \leq \dots \leq (\frac{1}{2})^n(b_1 - a_1)$.

Entonces por el inciso (a), tenemos que

(i) Existen $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b_0$ y $a_0 \leq b_0$. Por

lo tanto

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_0 - a_0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2})^n(b_1 - a_1) = 0$,

y así obtenemos que

(iii) $a_0 = b_0$.

Afirmamos que $a_0 = \sup(A)$.

I) a_0 es cota superior de A .

En caso contrario existe $a \in A$ tal que $a_0 < a$ lo cual implica que $b_0 < a$, de donde existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $b_N < a$ lo cual no puede ser ya que b_n es cota superior de A para toda $n \in \mathbb{N}$.

II) Ahora sea $t \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq t$ para toda $a \in A$, entonces $a_n \leq t$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$, entonces $a_0 \leq t$.

Por lo tanto $a_0 = \sup(A)$.

3. Por el inciso 2. será suficiente demostrar que toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente.

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente y acotada superiormente.

(a) Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > N$, $x_n = x_m$, entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.

(b) Si para todo $n \neq m$, se tiene que $x_n \neq x_m$ se sigue que el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es infinito y acotado; por lo tanto, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene un punto de acumulación $x_0 \in \mathbb{R}$.

Como $x_0 \in \mathbb{R}$ es punto de acumulación del conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, dado $r > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N \in B_r(x_0)$ y dado que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente para toda $n > N$ se tiene que $x_n \in B_r(x_0)$.

Por lo tanto $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

4. Supongamos que existe $B \subset \mathbb{R}$ no vacío y que no tiene supremo.

(a) Si B es acotado inferiormente, aplicando el Lema 2.6 se sigue que B es acotado y por el Corolario 2.8, $cl(B)$ es acotado.

Como $cl(B)$ es cerrado y acotado, entonces $cl(B)$ es compacto y por el Lema 2.12 $cl(B)$ no tiene supremo, por lo tanto para cada $x \in cl(B)$ existe $y_x \in cl(B)$ tal que $x < y_x$, de donde

$$\{(-\infty, y_x) : x \in cl(B)\}$$

es una cubierta abierta de $cl(B)$.

Por lo tanto existen $y_{x_1}, \dots, y_{x_n} \in cl(B)$ tales que

$$cl(B) \subset \cup\{(-\infty, y_{x_i}) : i = 1, \dots, n\} = (-\infty, y_0), \text{ donde}$$

$$y_0 = \text{máx}\{y_{x_i} : i = 1, \dots, n\},$$

pero $y_0 \in cl(B)$ y $y_0 \notin (-\infty, y_0)$.

Por lo tanto B tiene supremo.

(b) Si B no está acotado inferiormente, como $B \neq \emptyset$, elijamos $b_0 \in B$ y definamos el conjunto

$$D = \{b \in B : b_0 \leq b\}$$

es claro que D es acotado inferiormente y que $D \subset B$, lo cual implica que D es acotado superiormente y así, aplicando el Lema 2.5, D es acotado y, por el Corolario 4.8, $cl(D)$ no tiene supremo.

Así, si seguimos un argumento similar al caso anterior concluimos que B tiene supremo.

5. Sea $C \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente con $C \neq \emptyset$.

Definamos

$$B = \{r \in \mathbb{R} : r \text{ es cota superior de } C\} \text{ y } A = \mathbb{R} \setminus C.$$

Es claro que (A, B) es una cortadura de \mathbb{R} . Por lo tanto, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que para toda $a \in A$ y $b \in B$ se tiene que $a \leq r \leq b$.

Afirmamos que $r = \sup(C)$.

Si $r \notin B$, entonces $r \in A$ lo cual implica que existe $c \in C$ tal que $r < c$, lo cual implica que $r < \frac{r+c}{2} < c$.

Como $r < \frac{r+c}{2} < c$, entonces $\frac{r+c}{2} < c$ lo cual implica que $\frac{r+c}{2} \in A$ y $r < \frac{r+c}{2}$ implica que $\frac{r+c}{2} \in B$, se sigue que $\frac{r+c}{2} \in A \cap B$ lo cual es contradicción.

Por lo tanto $r \in B$.

Además es claro que para todo $\epsilon > 0$, $r - \epsilon < r$ lo cual implica que $r - \epsilon \notin B$.

Por lo tanto

$$r = \sup(C).$$

6. Supongamos que existe $A \subset \mathbb{R}$ no vacío, acotado superiormente y que no tiene supremo.

Sea

$$M = \{m \in \mathbb{R} : m \text{ no es cota superior de } A\}.$$

Como A es un conjunto no vacío, entonces M es un conjunto no vacío. Sea $m \in M$, entonces existe $a \in A$ tal que $m < a$.

Afirmamos que $(-\infty, a) \subset M$ ya que si $x \in (-\infty, a)$, entonces $x < a$ lo cual implica x no es cota superior de A , por lo tanto $x \in M$, de donde M es un conjunto abierto.

Ahora sea

$$N = \{n \in \mathbb{R} : n \text{ es cota superior de } A\}.$$

Es claro que N es un conjunto no vacío. Sea $n \in N$, como N no tiene mínimo, entonces existe $n' \in N$ tal que $n' < n$.

Afirmamos que $(n', \infty) \subset N$ lo cual es claro ya que si $n'' \in (n', \infty)$ se sigue que $n' < n''$ lo cual implica que n'' es cota superior de A ; por lo tanto, $n'' \in N$, es decir, N es un conjunto abierto.

Claramente $\mathbb{R} = M \cup N$ y $M \cap N = \emptyset$ lo cual implica que \mathbb{R} no es conexo. \square

5 Teoremas que implican el Axioma de Cortadura

En esta sección veremos que cada uno de los teoremas de esta sección implican el **Axioma de Cortadura** (ver [5]).

Lema 5.1. *Si (A, B) es una cortadura de \mathbb{R} sin punto de cortadura, entonces A y B son conjuntos abiertos.*

Demostración. Como (A, B) es una cortadura la cual no tiene punto de cortadura, entonces para cada $x \in A$ existe $a \in A$ tal que $x < a$, ya que en caso contrario existe $x_0 \in A$ tal que para todo $a \in A$, $a \leq x_0$ y como

$x_0 \in A$, entonces $x_0 < b$ para todo $b \in B$ lo cual implicaría que x_0 es punto de cortadura de la cortadura (A, B) .

Por lo tanto dado $x \in A$ existe $a \in A$ tal que $x < a$.

Afirmamos que $(-\infty, a) \subset A$ ya que en caso contrario existe $y \in (-\infty, a)$ tal que $y \notin A$ lo cual implicaría que $y \in B$, de donde $a < y$ lo cual no puede ser ya que $y \in (-\infty, a)$.

Por lo tanto $(-\infty, a) \subset A$.

En forma similar se demuestra que B es un conjunto abierto. \square

Teorema 5.2. *Cada una de las siguientes afirmaciones implican el Axioma de Cortadura.*

1. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$, entonces existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

para todo $x \in [a, b]$.

2. (Teorema del Valor Intermedio) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a) < f(b)$, entonces

para cada $c \in (f(a), f(b))$ existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = c$.

3. (Teorema del Valor Medio) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces

$$\text{existe } x_0 \in (a, b) \text{ tal que } f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

4. (Teorema de Darboux) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $f'(a) < f'(b)$, entonces

para cada $y \in [f'(a), f'(b)]$ existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = y$.

Demostración. 1. Supongamos que no se satisface el Axioma de Cortadura, entonces existe una cortadura (A, B) de \mathbb{R} sin punto de cortadura y, por el Lema 5.1, A y B son conjuntos abiertos.

Sean $a \in A$ y $b \in B$, entonces la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = x \text{ si } x \in A \cap [a, b] \text{ y } f(x) = a - 1 \text{ si } x \in B \cap [a, b]$$

no alcanza su máximo en $[a, b]$, ya que en caso contrario existe $c \in [a, b]$ tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in [a, b]$.

Como $c \in [a, b]$, entonces $c \in [a, b] \cap A$ o $c \in [a, b] \cap B$.

(a) Si $c \in [a, b] \cap B$, entonces $f(c) = a - 1$ y como $a - 1 < a < x$ para $x \in A \cap [a, b]$, entonces $f(c) < f(a) < f(x) = x$ para $x \in A \cap [a, b]$ lo cual implica que $f(c) < f(x)$ para $x \in A \cap [a, b]$.

(b) Si $c \in [a, b] \cap A$, entonces $c \in A$ y como A es abierto existe $a' \in A \cap [a, b]$ tal que $a' > c$ y, dado que $c, a' \in A \cap [a, b]$, se sigue que $f(c) < f(a')$.

Por lo tanto, existe una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ la cual no alcanza su máximo.

2. Supongamos que no se satisface el Axioma de Cortadura, entonces existe una cortadura (A, B) de \mathbb{R} sin punto de cortadura y, por el Lema 5.1, A y B son conjuntos abiertos.

Sean $a \in A$ y $b \in B$, entonces la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = 0 \text{ si } x \in A \cap [a, b] \text{ y } f(x) = 1 \text{ si } x \in B \cap [a, b]$$

es continua y claramente f no satisface el Teorema del Valor Intermedio.

3. Una vez más, si no se satisface el Axioma de Cortadura, entonces existe una cortadura (A, B) de \mathbb{R} sin punto de cortadura y, por el Lema 5.1, A y B son conjuntos abiertos.

Sean $a \in A$ y $b \in B$, entonces la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = 0 \text{ si } x \in A \cap [a, b] \text{ y } f(x) = 1 \text{ si } x \in B \cap [a, b]$$

satisface que

$$f'(x) = 0 \text{ para cada } x \in (a, b) \text{ y } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{1}{b - a}.$$

De aquí, concluimos que f no satisface el Teorema del Valor Medio.

4. Si no se satisface el Axioma de Cortadura, entonces existe una cortadura (A, B) de \mathbb{R} sin punto de cortadura y, por el Lema 5.1, A y B son conjuntos abiertos. Sean $a \in A$ y $b \in B$, entonces la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = x \text{ si } x \in A \cap [a, b] \text{ y } f(x) = a - 1 \text{ si } x \in B \cap [a, b]$$

satisface que para cada $x \in (a, b)$, $f'(x) \in \{0, 1\}$, de donde f' no tiene la propiedad del valor intermedio. \square

De los Teoremas 4.1 y 5.2 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.3. *Cada una de las siguientes afirmaciones implican el Axioma del Supremo.*

1. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, entonces existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

para todo $x \in [a, b]$.

2. (Teorema del Valor Intermedio) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a) < f(b)$, entonces

para cada $c \in (f(a), f(b))$ existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = c$.

3. (Teorema del Valor Medio) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces

$$\text{existe } x_0 \in (a, b) \text{ tal que } f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

4. (Teorema de Darboux) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $f'(a) < f'(b)$, entonces

para cada $y \in [f'(a), f'(b)]$ existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = y$.

De los Teoremas 3.1 y 4.1 y Corolario 5.3 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.4. *Cada una de las siguientes afirmaciones es equivalente al Axioma del Supremo.*

1. Si $A \subset \mathbb{R}$ es tal que

(a) $A \neq \emptyset$ y

(b) A es acotado inferiormente,

entonces A tiene ínfimo.

2. (Teorema de Weierstrass). Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión tal que:

- (a) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y
 (b) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada superiormente,
 entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.
3. (Teorema de Bolzano-Weierstrass). Si $A \subset \mathbb{R}$ es tal que:
 (a) A es infinito y
 (b) A es acotado,
 entonces A tiene un punto de acumulación.
4. (Teorema de Heine-Borel). Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto tal que
 (a) A es cerrado y
 (b) A es acotado,
 entonces A es compacto.
5. Si (A, B) es una cortadura de \mathbb{R} , entonces
- $$(A, B) \text{ satisface el Axioma de Cortadura.}$$
6. \mathbb{R} es conexo.
7. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, entonces existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que
- $$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$
- para todo $x \in [a, b]$.
8. (Teorema del Valor Intermedio) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a) < f(b)$, entonces
- para cada $c \in (f(a), f(b))$ existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = c$.
9. (Teorema del Valor Medio) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces

$$\text{existe } x_0 \in (a, b) \text{ tal que } f'(x_0) = \frac{f(a) - f(b)}{b - a}.$$

10. (Teorema de Darboux) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en $[a, b]$ tal que $f'(a) < f'(b)$, entonces
- para cada $y \in [f'(a), f'(b)]$ existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = y$.

Agradecimientos

Agradecemos al revisor sus comentarios y sugerencias a una versión previa de este capítulo.

Bibliografía

- [1] Juan Angoa, Jaime Arroyo, Agustín Contreras, David Herrera, Manuel Ibarra, Raúl Linares, Fernando Macías, Armando Martínez, Celestino Soriano y Fernando Velázquez, *Cálculo diferencial en una variable*, Textos Científicos Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (2005).
- [2] Juan Angoa, Agustín Contreras, Manuel Ibarra, Raúl Linares, Armando Martínez, *Matemáticas Elementales*, Textos Científicos Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (2008).
- [3] Robert G. Bartle, *Introducción al Análisis Matemático*, Limusa, Grupo Noriega Editores, (1992).
- [4] Michael Deveau and Holger Teismann, *72 + 42 Characterizations of the Completeness and Archimedean Properties of Ordered Fields*, Real Analysis Exchange, 39 2 (2013-2014), 261-304.
- [5] Holger Teismann, *Toward a More Complete List of Completeness Axioms*, The American Mathematical Monthly, 120, 2 (2013) 99-114.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

mibarra@fcfm.buap.mx

maga@fcfm.buap.mx

Ecuaciones Diferenciales

Capítulo 4

Criterio para la aplicación del método de factorización a sistemas cuánticos

Mario Alberto Maya Mendieta¹, José Jacobo Oliveros Oliveros¹, Guadalupe Sandoval Moreno¹, Evelia Teniza Tetlalmatzi²

¹Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, ²Escuela Preparatoria Urbana Enrique Cabrera Barroso, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Resumen

El lenguaje matemático natural de la mecánica cuántica es el álgebra lineal, por lo que el uso de operadores que actúan en el espacio vectorial de estados tiene un sólido fundamento teórico pero además mucha utilidad práctica. El método de factorización de Dirac para resolver la ecuación de Schrödinger, central en la mecánica cuántica, es un mecanismo muy sencillo pero al mismo tiempo elegante, y tiene su base en operadores llamados de escalera pues a partir del conocimiento de la función de onda asociada a un estado dinámico, es posible generar todas las demás. Desafortunadamente, no es aplicable a todos los sistemas. En este trabajo, desarrollamos y utilizamos un criterio que nos permite, en principio, saber si para un sistema dado el método de factorización funciona. Presentamos dos problemas en los que nuestro método funciona muy bien, y como una línea de investigación futura, su posible empleo a nuevos sistemas cuánticos.

1 Introducción

Una de las características de la mecánica cuántica es el uso de operadores hermíticos para representar las cantidades físicas que describen a un sistema. En particular, la energía tiene como representación al operador hamiltoniano

\widehat{H} , el cual es un operador diferencial de segundo orden, con el que se establece la ecuación de Schrödinger, central dentro de la mecánica cuántica. Existen otros operadores que son usados como herramientas para facilitar los cálculos requeridos, por ejemplo, para resolver la mencionada ecuación diferencial de segundo orden de Schrödinger. Este es precisamente el objetivo de este trabajo, el cual se enmarca en una línea de investigación que se inició casi desde el nacimiento de la mecánica cuántica y la cual continúa vigente: la solución de la ecuación de Schrödinger por métodos puramente algebraicos.

Podemos decir que el lenguaje natural de la mecánica cuántica es el álgebra lineal, por lo que el uso de operadores no es sorprendente. Dentro de este esquema es donde aparece el llamado método de factorización de Dirac [2], el cual es utilizado por casi todos los trabajos sobre el tema [6].

Los operadores diferenciales de primer orden que factorizan al hamiltoniano del oscilador armónico [4] y que además sirven para generar las funciones de onda, las cuales contienen a los polinomios de Hermite, son un buen ejemplo de solución algebraica de una ecuación diferencial de segundo orden. El método de factorización ha sido aplicado con éxito a otros sistemas cuánticos, por ejemplo, al átomo de hidrógeno [10]. En algunos casos, ha servido como punto de partida para encontrar nuevos sistemas cuánticos con solución exacta [7]. En [12], el autor presenta un procedimiento sistemático para construir una jerarquía de hamiltonianos no relativistas con la propiedad de que los miembros adyacentes de la jerarquía son supersimétricos. El siguiente ejemplo que citamos es el del oscilador isotónico [1, 3, 8], cuyo potencial presenta una barrera infinita en el centro de un oscilador armónico normal. Nuestra contribución a esta línea de investigación será aplicada al final a este sistema cuántico. La motivación para realizar este trabajo está en la falta de algunos criterios generales para 1) proponer operadores que factorizen al hamiltoniano, 2) construir operadores que generen todas las funciones de onda del sistema dado. Estos últimos operadores son llamados de ascenso y descenso u operadores de escalera.

El trabajo se desarrollará de la siguiente manera: En la Sección 2, presentamos algunos fundamentos de la mecánica cuántica, resaltando aspectos que son importantes para nuestro objetivo. En la Sección 3, mostramos el prototipo de sistema cuántico, el oscilador armónico, y cómo se resuelve con el método algebraico. A continuación, en la Sección 4 presentamos nuestra contribución: un criterio para construir operadores diferenciales de primer orden que factorizen al hamiltoniano. Luego mostramos una forma de construir

operadores de escalera [9], ahora de segundo orden, a partir de los operadores de factorización. En la Sección 5, aplicamos nuestro método al oscilador isotónico y comparamos nuestros resultados con algunos que aparecen en la literatura, mostrando también un mecanismo particular para reducir el orden de derivación de los operadores de escalera. Finalmente en la Sección 6 damos nuestras conclusiones.

2 La mecánica cuántica

Presentamos una breve revisión de algunos puntos importantes de la mecánica cuántica que se requieren para este trabajo [11].

2.1 Los Postulados

Postulado 1. *Un estado es un conjunto de valores de las cantidades físicas (cantidades medibles) que definen completamente al sistema físico. El estado de un sistema cuántico es especificado por la función de onda $\Psi_n(\vec{r}, t)$ que depende de las coordenadas y del tiempo.*

Este postulado no es exclusivo de la mecánica cuántica en lo que se refiere a lo que entendemos por un estado físico, pues es aplicable en toda teoría física. La novedad es que se asigna una función $\Psi_n(\vec{r}, t)$ en la cual está toda la información que se puede conocer sobre el sistema dado.

Postulado 2. *Toda cantidad física A es representada en mecánica cuántica por un operador hermítico \widehat{A} .*

Un operador hermítico es una clase especial de operadores. El hecho de que debe ser un operador hermítico el que represente a una cantidad física se debe a que sus valores propios son reales, para que haya congruencia con el siguiente postulado.

Postulado 3. *Cualquier medida de la cantidad física A , cuyo operador asociado es \widehat{A} , da como resultado únicamente uno de los valores propios A_n de la ecuación de valor propio $\widehat{A}\Psi_n = A_n\Psi_n$, donde Ψ_n representa el estado físico, de acuerdo al Postulado 1.*

Los postulados 2 y 3 nos indican que el lenguaje matemático natural de la mecánica cuántica es el álgebra lineal.

Postulado 4. *El valor promedio o valor de expectación de una cantidad física es*

$$\langle A \rangle = \int \Psi_n^*(\vec{r}, t) \hat{A} \Psi_n(\vec{r}, t) d^3r.$$

Este postulado introduce un aspecto no conocido en la mecánica clásica: el carácter probabilístico de las predicciones teóricas de la mecánica cuántica. Aquí la física pierde parcialmente su sentido determinista: a tal causa tal efecto. Ahora las condiciones iniciales dan lugar a situaciones que sólo se pueden predecir en términos de la probabilidad de que ocurran.

Postulado 5. *La evolución temporal de la función de onda $\Psi_n(\vec{r}, t)$ es dada por la ecuación de Schrödinger.*

Podemos decir que la ecuación de Schrödinger es la ecuación de movimiento de la mecánica cuántica, que sustituye a la ecuación de Newton de la mecánica clásica. La ecuación de Schrödinger es la más importante de la mecánica cuántica y hablaremos de ella en las siguientes Secciones.

Estos postulados son la esencia de una de las teorías más exitosas de la física. La mecánica cuántica describe los fenómenos que ocurren en la naturaleza a escala del átomo con una precisión asombrosa, una manifestación de lo cual se traduce en una aplicación práctica: las comunicaciones. Se esperan nuevas aplicaciones que en un plazo muy corto producirán una revolución en el manejo de datos por medio de la computación cuántica y en la seguridad de la transmisión de información por medio de la criptografía cuántica.

2.2. Las cantidades físicas y los operadores

En particular, en relación con el Postulado 1, hablamos de dos cantidades físicas que tienen gran relevancia en nuestro trabajo. La primera es el momento lineal de un cuerpo de masa m y que lleva una velocidad \vec{v} , el cual clásicamente es $\vec{p} = m\vec{v}$. El operador asociado es

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx} \tag{1}$$

mientras que la posición está representada por

$$\hat{x} = x\hat{I}. \tag{2}$$

Otro operador que necesitamos es el de energía cinética

$$\widehat{T} = \frac{1}{2m} \widehat{p}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}, \quad (3)$$

para construir el operador de energía total u operador hamiltoniano

$$\widehat{H} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x). \quad (4)$$

En (4), se tomaron unidades tales que $\hbar = m = 1$. De las expresiones anteriores deducimos que para encontrar los valores físicos permitidos de ambas cantidades físicas debemos aplicar esos operadores a ciertas funciones dando lugar a ecuaciones de valor propio. Para el operador hermítico \widehat{A} , el cual representa a la cantidad física a , tenemos

$$\widehat{A}f = af.$$

Es aquí donde se aprecia la utilidad del álgebra lineal en la mecánica cuántica, lo que refuerza por lo que sigue. Los eigenvalores (reales) de la anterior expresión son los que tienen que ver con una medición experimental de la variable dinámica a , de acuerdo con el Postulado 3.

El caso más importante en la mecánica cuántica es la ecuación de valor propio

$$\widehat{H}\psi_n = E\psi_n. \quad (5)$$

llamada ecuación estacionaria de Schrödinger, donde E es la energía del sistema y \widehat{H} es el operador de energía, llamado operador de Hamilton o simplemente operador hamiltoniano. En la Sección 4, planteamos su origen, significado y cómo resolverla, pero lo que es necesario mencionar es que las soluciones $\psi_n(x)$ de la ecuación estacionaria de Schrödinger, es decir, los estados cuánticos, forman un espacio vectorial tal como contempla el álgebra lineal. Dos resultados de esta teoría matemática que tienen consecuencias muy significativas son

- 1) Si dos operadores conmutan entonces tienen funciones propias comunes.
- 2) Si dos operadores no conmutan entonces sus variables dinámicas no pueden medirse simultáneamente.

La no conmutatividad de ciertos operadores tiene un papel muy importante en este trabajo, aunque no en el sentido físico expresado por las aseveraciones anteriores, sino más bien en sus consecuencias matemáticas, lo cual es aprovechado para establecer una herramienta poderosa para resolver la ecuación de Schrödinger: el método de factorización de Dirac, como veremos en lo que sigue.

2.3. La ecuación de Schrödinger

De acuerdo al Postulado 5 la ecuación de Schrödinger describe la evolución temporal del sistema físico sujeto a la fuerza establecida en el potencial $V(x)$ por medio de

$$F = -\frac{\partial V(x, t)}{\partial x}.$$

Sin embargo, una característica de la ecuación de Schrödinger es que la fuerza no entra directamente, a diferencia de la ecuación de Newton de la mecánica clásica. Otra cosa que es notable es que la función potencial $V(x, t)$ tiene la misma forma matemática en mecánica clásica y en mecánica cuántica. Los sistemas cuánticos más importantes que aparecen en la naturaleza tienen la característica de que su potencial es constante en el tiempo. Este hecho da lugar a una simplificación notable al resolver la ecuación de Schrödinger. En efecto, en este caso es posible aplicar el método de separación de las variables, en el que se separan la posición x y el tiempo t en la función de onda:

$$\Psi(x, t) = \psi(x) T(t). \tag{6}$$

Notamos que al separar las variables, obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias. La ecuación en x es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi. \tag{7}$$

Esta última ecuación es una forma más detallada de la ecuación estacionaria de Schrödinger (5), y el objetivo de este trabajo es resolverla de manera algebraica, cuando sea posible. La ecuación diferencial para la variable temporal es

$$i\hbar \frac{dT}{dt} = ET. \tag{8}$$

La solución de la ecuación temporal (8) es trivial:

$$T(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}, \quad (9)$$

por lo que la forma general de la función de onda (6) es

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}. \quad (10)$$

La ecuación (7) es llamada ecuación de Schrödinger estacionaria. Siguiendo la costumbre de la literatura especializada, llamaremos simplemente ecuación de Schrödinger a (7); en lo que sigue de este trabajo nos concentraremos en su solución.

En la mayoría de los casos importantes la forma de $\psi(x)$ no es la de una función elemental. Aparte del caso de la partícula libre en el que $V(x) = 0$, el método de solución es el de series de potencias el cual no trataremos aquí. En algunos casos en los que el potencial tiene una forma apropiada, se puede utilizar el método de factorización de Dirac. Este método es puramente algebraico, y se le tiene como una forma de solución sencilla y muy elegante. Desafortunadamente no tiene validez general y se ha usado en pocos casos. En la siguiente Sección damos un esquema de aplicación al caso más sencillo: el oscilador armónico. En la literatura aparecen con frecuencia trabajos en los que se describe la utilidad de este método, lo cual constituye una línea de investigación muy importante dentro de la mecánica cuántica. Como se mencionó en la introducción, en este trabajo reportamos nuestra contribución al tema, lo cual haremos en las Secciones 4 y 5.

3 La factorización del oscilador armónico

En el álgebra ordinaria el producto de dos cantidades s y t es conmutativo

$$st = ts. \quad (11)$$

Como una consecuencia tenemos la identidad

$$s^2 - t^2 = (s + t)(s - t). \quad (12)$$

la cual es conocida en los textos elementales de álgebra como la factorización de la diferencia de cuadrados. Sin embargo, en el álgebra de operadores en

general la ley conmutativa no es válida. Si \widehat{A} y \widehat{B} son dos operadores lineales entonces debemos partir de que

$$\widehat{A}\widehat{B} \neq \widehat{B}\widehat{A}. \tag{13}$$

Para ilustrar una de las consecuencia de la no conmutatividad de operadores hacemos el producto

$$\left(\widehat{A} - \widehat{B}\right) \left(\widehat{A} + \widehat{B}\right) = \widehat{A}\widehat{A} + \widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A} - \widehat{B}\widehat{B} = \widehat{A}^2 - \widehat{B}^2 + \widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A}. \tag{14}$$

Si definimos el conmutador de los operadores \widehat{A} y \widehat{B} como:

$$\left[\widehat{A}, \widehat{B}\right] = \widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A}, \tag{15}$$

entonces (14) se puede escribir así

$$\widehat{A}^2 - \widehat{B}^2 = \left(\widehat{A} - \widehat{B}\right) \left(\widehat{A} + \widehat{B}\right) - \left[\widehat{A}, \widehat{B}\right]. \tag{16}$$

Notamos la diferencia entre (12) y (16). Entonces el álgebra de operadores es un álgebra no conmutativa. Es claro que si \widehat{A} y \widehat{B} conmutan, el conmutador es cero.

Como caso muy especial y muy importante podemos demostrar que los operadores de momento \widehat{p} y de posición \widehat{x} no conmutan. En efecto, un cálculo cuidadoso muestra que su conmutador es

$$\left[\widehat{x}, \widehat{p}\right] = i. \tag{17}$$

El método factorización de Dirac se basa en la Ec. (16), precisamente en un álgebra no conmutativa, como se ilustra a continuación. Analizamos el caso del oscilador armónico cuyo hamiltoniano es

$$\widehat{H}_A = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{2} \widehat{p}^2 + \frac{1}{2} \widehat{x}^2. \tag{18}$$

El hecho de que \widehat{H}_A sea la suma del “cuadrado” de dos cantidades sugiere el uso de la identidad algebraica (16). Con la analogía $s \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{x}$, $t \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}i\widehat{p}$ podemos introducir los operadores

$$\hat{a}^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{p}), \tag{19}$$

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - i\hat{p}). \tag{20}$$

Se puede comprobar que \hat{a}^+ es el hermítico conjugado de \hat{a}^- . Siguiendo las reglas del álgebra no conmutativa podemos demostrar que

$$\widehat{H} = \hat{a}^+ \hat{a}^- - [\hat{p}, \hat{x}]. \tag{21}$$

La expresión (21) es lo que entendemos como la factorización del hamiltoniano. No es la factorización algebraica ordinaria, debido al segundo término en (21), pues estamos trabajando con un álgebra no conmutativa. La Ec. (21) es central en el método algebraico de solución de la ecuación de Schrödinger. Escribimos los operadores \hat{a}^+ y \hat{a}^- en su forma diferencial:

$$\hat{a}^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx} + x \right), \tag{22}$$

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dx} + x \right), \tag{23}$$

con la expresión explícita (1) del operador de momento. De (22) y (23) y con (17) se desprenden las propiedades

$$\hat{a}^+ \hat{a}^- = \widehat{H}_A - \frac{1}{2}, \tag{24}$$

$$\hat{a}^- \hat{a}^+ = \widehat{H}_A + \frac{1}{2}. \tag{25}$$

En las expresiones anteriores tenemos la factorización explícita del hamiltoniano (3.8). La relación de conmutación entre los operadores \hat{a}^+ y \hat{a}^- es

$$[\hat{a}^+, \hat{a}^-] = 1. \tag{26}$$

Las siguientes propiedades son las que garantizan que \hat{a}^+ y \hat{a}^- sean operadores que sirven para que a partir de una solución se puedan generar todas las demás.

$$\begin{aligned} \left[\widehat{H}_A, \widehat{a}^- \right] &= -\widehat{a}^-, \\ \left[\widehat{H}_A, \widehat{a}^+ \right] &= \widehat{a}^+. \end{aligned}$$

Ahora describimos brevemente como se pueden encontrar las soluciones de la ecuación estacionaria de Schrödinger para el oscilador armónico con los operadores \widehat{a}^+ y \widehat{a}^- . Si escribimos la ecuación estacionaria de Schrödinger (7) para el estado dinámico definido por el índice n , es decir, para el estado cuya función de onda es ψ_n , en la forma

$$\widehat{H}_A \psi_n = E_n \psi_n, \tag{27}$$

y aplicamos \widehat{a}^+ a cada lado y luego utilizamos la propiedad (25), encontramos que

$$\widehat{H}_A \widehat{a}^+ \psi_n = (E_n + 1) \widehat{a}^+ \psi_n, \tag{28}$$

es decir, si ψ_n es solución de (3.15) también lo es $\widehat{a}^+ \psi_n$ pero con valor propio $E_n + 1$, por lo que podemos escribir que el estado de número cuántico $n + 1$ se encuentra a partir del estado n con el operador \widehat{a}^+ :

$$\psi_{n+1} \propto \widehat{a}^+ \psi_n. \tag{29}$$

De la misma forma, pero utilizando la propiedad (22) encontramos

$$\psi_{n-1} \propto \widehat{a}^- \psi_n. \tag{30}$$

Tenemos entonces que los operadores \widehat{a}^+ y \widehat{a}^- sirven para construir ψ_{n+1} y ψ_{n-1} a partir de una solución ψ_n conocida. Este es un logro importante, pues uno de los beneficios es que se evita la engorrosa solución por series de potencias. Por lo anterior a los operadores \widehat{a}^+ y \widehat{a}^- se les llama de ascenso y descenso respectivamente y genéricamente operadores de escalera. Un cálculo cuidadoso nos indica que

$$\widehat{a}^+ \psi_n = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}, \tag{31}$$

$$\widehat{a}^- \psi_n = \sqrt{n} \psi_{n-1}. \tag{32}$$

Normalmente se encuentra primero la solución $\psi_0(x)$ que corresponde al estado de mínima energía $E_0 \geq 0$. La existencia de tal estado se infiere de la forma del potencial $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ el cual tiene un valor mínimo $V(0) = 0$. Para calcular la función de onda de tal estado se establece la condición

$$\hat{a}^- \psi_0 = 0, \tag{33}$$

la cual da lugar a la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{d\psi_0}{dx} + x\psi_0 = 0, \tag{34}$$

cuya solución es

$$\psi_0(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}, \tag{35}$$

y mediante un proceso inductivo, la solución que corresponde al estado n -ésimo es

$$\psi_n(x) = (\hat{a}^+)^n \psi_0(x). \tag{36}$$

Efectuando este proceso se encuentra la conocida solución para el oscilador armónico cuántico en términos de los polinomios de Hermite $H_n(x)$:

$$\psi_n(x) = C_n H_n(x) e^{-\frac{1}{2}x^2}, \tag{37}$$

donde C_n es una constante determinada por la condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = 1.$$

Finalmente, utilizando las propiedades (24) o (25) se encuentra el espectro de energía

$$E_n = n + \frac{1}{2}. \tag{38}$$

Hemos encontrado la solución de la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico con el método algebraico de Dirac. Se confirma el hecho mencionado acerca de la simplicidad y elegancia, pero también debemos recordar lo mencionado antes: el método no tiene aplicación general.

4 El método generalizado de factorización

4.1 La factorización del hamiltoniano

Vamos a tratar el caso de un sistema cuántico arbitrario, es decir, cuyo potencial $V(x)$ sea una función abierta, sólo con la condición de que mantenga a la partícula atrapada en una región del espacio para que aparezca la cuantización. Proponemos que los operadores que factorizan al hamiltoniano de ese sistema sean de la forma

$$\hat{b}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dx} + f(x) \right), \quad (39)$$

$$\hat{b}^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx} + f(x) \right). \quad (40)$$

Aquí la novedad es la función $f(x)$, la cual depende del potencial $V(x)$. Entonces para cada sistema cuántico existe en principio una factorización, es decir, una función $f(x)$. Si para un sistema dado existe una función así, tal que el hamiltoniano se pueda factorizar de la siguiente manera

$$\widehat{H} = \hat{b}^+ \hat{b}^- - a_1, \quad (41)$$

$$\widehat{H} = \hat{b}^- \hat{b}^+ - a_2, \quad (42)$$

con a_1 y a_2 funciones de x que dependen de la forma del potencial $V(x)$, entonces podemos afirmar que dicho hamiltoniano es factorizable. Si lo anterior se cumple, entonces es posible usar a los operadores \hat{b}^+ y \hat{b}^- como operadores de escalera o para poder construir a partir de ellos otros operadores, que pueden ser de segundo orden, que sean efectivamente operadores de escalera. Si es posible eso, podemos tener un sistema cuántico que pueda ser resuelto algebraicamente. En lo que sigue tratamos de establecer un camino para que

Dado un hamiltoniano \widehat{H} , encontrar una función $f(x)$ tal que los operadores (39) y (40) cumplan con la factorización (41), (42).

Para ello hacemos los productos $\hat{b}^+ \hat{b}^-$ y $\hat{b}^- \hat{b}^+$. Encontramos que $f(x)$ debe satisfacer simultáneamente el siguiente par de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= a_2 - a_1, \\ f^2 &= 2V + a_2 + a_1,\end{aligned}$$

y combinándolas de manera adecuada llegamos a

$$f(x) = \frac{1}{2(a_2 - a_1)} \frac{d}{dx} (2V + a_2 + a_1). \quad (43)$$

Aunque esta fórmula nos permite conocer la función $f(x)$ y en consecuencia los operadores de factorización \hat{b}^+ y \hat{b}^- , tiene el inconveniente de que se requiere conocer a_2 y a_1 , es decir, la factorización de \widehat{H} , lo cual, de entrada, es desconocido. Entonces debemos buscar otra forma de construir $f(x)$.

Si \hat{b}^- es un operador de descenso, entonces debe tener la capacidad de destruir al estado base, es decir, al estado de mínima energía. Si \hat{b}^- no es operador de descenso, entonces, como veremos en la siguiente Sección, se construye otro operador \widehat{A}^- , generalmente de segundo orden, a partir de \hat{b}^- que sí lo sea. Tomando en cuenta lo anterior, pasamos a calcular la función $f(x)$ de una forma diferente a la establecida anteriormente: Si la función $\phi_0(x)$ es la función de onda del estado de mínima energía, entonces

$$\hat{b}^- \phi_0 = 0, \quad (44)$$

y usando la forma explícita (40) de \hat{b}^- obtenemos

$$\left(\frac{d}{dx} + f(x) \right) \phi_0(x) = 0. \quad (45)$$

De (45) encontramos otra forma para calcular la función $f(x)$ buscada:

$$f(x) = -\frac{1}{\phi_0} \frac{d\phi_0}{dx}. \quad (46)$$

Entonces podemos concluir lo siguiente:

Si de alguna forma se logra conocer la función de onda del estado cuántico de mínima energía y si la operaciones indicadas en (46) dan un resultado finito, entonces existe la función $f(x)$ y el hamiltoniano de dicho sistema es factorizable.

Por otro lado, la función del estado base o de mínima energía ϕ_0 se puede determinar, por ejemplo, con las condiciones de frontera que determina el potencial $V(x)$. En particular, para el oscilador armónico la función de onda del estado base (35) se puede deducir fácilmente con las condiciones de frontera, las cuales son $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi_0 = 0$. Luego, aplicando (46) se encuentra que $f(x) = x$, por lo que (39) y (40) dan lugar a (22) y (23).

4.2 Operadores de escalera

La segunda característica para que el método de factorización de Dirac sea útil para encontrar las soluciones de la ecuación de Schrödinger es que deben existir operadores de ascenso \widehat{A}^+ y descenso \widehat{A}^- en el sentido de que, conocida la solución φ_n para el estado n , se puedan encontrar las soluciones para estados contiguos

$$\varphi_{n+k}(x) \propto \widehat{A}^+ \varphi_n(x), \tag{47}$$

$$\varphi_{n-k}(x) \propto \widehat{A}^- \varphi_n(x), \tag{48}$$

donde $k = 1, 2, \dots$ depende de la separación de los niveles de espectro de energía.

Estos operadores \widehat{A}^\pm no siempre son los \widehat{b}^\pm que factorizan al hamiltoniano, incluso pueden ser de segundo orden en la derivada. Aquí proponemos un mecanismo para que, dado un potencial, se puedan construir los operadores de escalera correspondientes. La condición básica que deben cumplir los operadores de escalera se establecen en sus relaciones de conmutación con el hamiltoniano [9]:

$$[\widehat{H}, \widehat{A}^\pm] = \pm \Delta E_n \widehat{A}^\pm, \tag{49}$$

con $\Delta E_n = E_{n+k} - E_n$ (los valores del entero positivo $k = 1, 2, \dots$ dependen de la cuantización de la energía y de la manera elegida de numerar los estados cuánticos). En [9] se demuestra que (49) garantiza la validez de (47) y (48).

5 Aplicación al oscilador isotónico

Como hemos visto, se requieren dos pasos para poder utilizar el método algebraico de factorización de Dirac: 1) encontrar operadores \widehat{b}^\pm que factoricen al

hamiltoniano según (41) y (42); 2) Encontrar operadores que sean de escalera de acuerdo a (49). Para el oscilador isotónico el hamiltoniano es

$$\widehat{H}_I = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{l(l+1)}{2x^2}, \tag{50}$$

y la ecuación de Schrödinger correspondiente

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 \varphi_n}{dx^2} + \left[\frac{1}{2} x^2 + \frac{l(l+1)}{2x^2} \right] \varphi_n = E_n \varphi_n. \tag{51}$$

5.1 La factorización del hamiltoniano

La condición necesaria para poder utilizar nuestro método es conocer la función de onda del estado base φ_0 , lo cual no siempre es posible utilizando únicamente las condiciones de frontera. Entonces el primer paso para que el método expuesto en la Sección 4.1 sea de utilidad aquí es determinar esa función de onda para un sistema dado de la manera que sea posible. Afortunadamente para el oscilador isotónico se puede calcular la función de onda φ_0 con las condiciones de frontera. El potencial es de la forma [8]

$$V_I = \frac{1}{2} x^2 + \frac{l(l+1)}{2x^2}. \tag{52}$$

El primer término de (52) es el oscilador armónico. El segundo término, como lo mencionamos en la introducción, es una barrera de potencial infinita, que la partícula no puede atravesar, por lo que las condiciones de frontera son

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0.$$

La función de onda debe ser de la forma

$$\varphi_0(x) = g(x) h(x),$$

tal que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} h(x) &= 0. \end{aligned}$$

Como se trata de la parte del oscilador armónico sabemos que $g(x)$ debe ser una exponencial

$$g(x) = e^{-bx^2}, \quad b > 0.$$

Para $h(x)$ la forma más sencilla que cumple la condición de frontera en $x \rightarrow 0$ es

$$h(x) = x^a, \quad a > 0.$$

En resumen, la función buscada tiene la forma

$$\varphi_0(x) = x^a e^{-bx^2}, \quad a, b > 0. \tag{53}$$

Para determinar las constantes a y b de (53) usamos el hecho de que $\varphi_0(x)$ debe satisfacer la ecuación estacionaria de Schrödinger (51). Su forma asintótica en $x \rightarrow 0$ es

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_0 + \frac{l(l+1)}{2x^2} \varphi_0 = 0.$$

Al introducir $\varphi_0(x)$ obtenemos

$$l(l+1) + a - a^2 = 0 \implies a = l + 1.$$

Ahora, cuando $x \rightarrow \infty$ la ecuación de Schrödinger asintótica que se deriva de (51) es

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_0 + \frac{1}{2} x^2 \psi_0 = 0,$$

que da lugar a la ecuación algebraica para b :

$$\frac{1}{2} - 2b^2 = 0 \implies b = \frac{1}{2},$$

y finalmente nuestra función $\varphi_0(x)$ es

$$\varphi_0(x) = x^{l+1} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \tag{54}$$

Ahora calculamos la función $f(x)$ por medio de (6.6). El resultado es

$$f(x) = x - \frac{l+1}{x}. \tag{55}$$

Lo anterior coincide con lo que aparece en la Ref. [8].

En resumen, para el oscilador isotónico tenemos que los operadores de factorización (4.1) y (4.2) son ahora

$$\widehat{b}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dx} + x - \frac{l+1}{x} \right), \tag{56}$$

$$\widehat{b}^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx} + x - \frac{l+1}{x} \right), \tag{57}$$

operadores que coinciden con los de la Ec. (13) de [8].

5.2 Los operadores de escalera

A diferencia del oscilador armónico en el que una inspección de su hamiltoniano (3.8) permite establecer directamente sus operadores de escalera, en el caso del oscilador isotónico no es posible, por lo que procedemos a construirlos a partir de las propiedades generales establecidas anteriormente. Nuestros resultados serán comparados con los de [8] como una manera de comprobación. Debemos mencionar que en esa referencia utilizan la teoría de grupos para generar los operadores de escalera.

Se sabe que este sistema tiene su espectro de energía similar al del oscilador armónico [8]. Pero hay una diferencia: los niveles contiguos están separados por dos unidades, por lo que

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = 2.$$

Entonces se cumple (49) con \widehat{A}^+ en la forma

$$[\widehat{H}, \widehat{A}^+] = 2\widehat{A}^+. \tag{58}$$

Vamos a utilizar (58) para construir al operador \widehat{A}^+ . Utilizando (18) podemos cambiar (50) a

$$\widehat{H}_I = \widehat{a}^+ \widehat{a}^- + \frac{1}{2} + \frac{l(l+1)}{2x^2}. \tag{59}$$

Proponemos que \widehat{A}^+ sea de segundo orden en la derivada y además que sea de la forma

$$\widehat{A}^+ = (\widehat{a}^+)^2 + q(x). \quad (60)$$

La Ec. (58) es la que nos va a decir como es la función $q(x)$. Con (59) y (60) podemos escribir

$$\left[\widehat{H}_I, \widehat{A}^+ \right] = \left[\widehat{H}_A + \frac{l(l+1)}{2x^2}, \widehat{a}^+ \widehat{a}^+ + q \right] = C_1 + C_2 + C_3, \quad (61)$$

con

$$\begin{aligned} C_1 &= \left[\widehat{H}_A, \widehat{a}^+ \widehat{a}^+ \right], \\ C_2 &= \left[\widehat{H}_A, q \right], \\ C_3 &= \left[\frac{l(l+1)}{2x^2}, \widehat{a}^+ \widehat{a}^+ \right]. \end{aligned}$$

Utilizando las relaciones de conmutación llegamos a los resultados

$$C_1 = 2(\widehat{a}^+)^2, \quad (62)$$

$$C_2 = -\frac{dq}{dx} \frac{d}{dx} - \frac{1}{2} \frac{d^2q}{dx^2}, \quad (63)$$

$$C_3 = \frac{l(l+1)}{x^3} \frac{d}{dx} - \frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{3l(l+1)}{2x^4}. \quad (64)$$

Introduciendo (62), (63) y (64) en (61), encontramos que el conmutador está dado por

$$\left[\widehat{H}_I, \widehat{A}^+ \right] = 2(\widehat{a}^+)^2 + \left(\frac{l(l+1)}{x^3} - \frac{dq}{dx} \right) \frac{d}{dx} - \frac{1}{2} \frac{d^2q}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{3l(l+1)}{2x^4}. \quad (65)$$

Ahora comparamos con (58) en la forma

$$\left[\widehat{H}, \widehat{A}^+ \right] = 2 \left[(\widehat{a}^+)^2 + q(x) \right]. \quad (66)$$

La comparación de (65) y (66) da lugar al par de ecuaciones para la función desconocida $q(x)$:

$$\frac{l(l+1)}{x^3} - \frac{dq}{dx} = 0, \tag{67}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2q}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{3l(l+1)}{2x^4} = 2q(x). \tag{68}$$

La función

$$q(x) = -\frac{l(l+1)}{2x^2}, \tag{69}$$

es consistente con (67) y (68). De la misma manera, con

$$[\widehat{H}, \widehat{A}^-] = -2\widehat{A}^-,$$

y

$$\widehat{A}^- = (\widehat{a}^-)^2 + q(x),$$

se llega al mismo resultado (69) para la función $q(x)$. Por lo tanto, con (69) y (60) hemos demostrado que los operadores de escalera del oscilador isotónico son

$$\widehat{A}^\pm = (\widehat{a}^\pm)^2 + q(x) = (\widehat{a}^\pm)^2 - \frac{l(l+1)}{2x^2}. \tag{70}$$

Estos operadores coinciden con los que aparecen en [1], [3] y [8]. Tenemos entonces un caso en que los operadores de escalera no necesariamente coinciden con los de factorización. Esta situación es analizada con detalle en [9].

La siguiente tarea es poner a los operadores de escalera \widehat{A}^\pm de (70) en términos de los operadores de factorización \widehat{b}^\pm de (56) y (57). Esto es necesario para que podamos calcular φ_{n+1} y φ_{n-1} a partir de φ_n de una manera práctica. Se hace fácilmente a través de la relación entre \widehat{a}^\pm y \widehat{b}^\pm que se puede deducir por medio de (56), (57), (19) y (20). Esta relación es

$$\widehat{b}^+ = \widehat{a}^+ - \frac{l+1}{\sqrt{2x}}, \tag{71}$$

$$\widehat{b}^- = \widehat{a}^- - \frac{l+1}{\sqrt{2x}}. \tag{72}$$

Un cálculo un poco laborioso nos lleva a

$$(\hat{a}^+)^2 = (\hat{b}^+)^2 + \frac{2(l+1)\hat{b}^+}{\sqrt{2x}} + \frac{(l+1)(l+2)}{2x^2}, \quad (73)$$

$$(\hat{a}^-)^2 = (\hat{b}^-)^2 + \frac{2(l+1)\hat{b}^-}{\sqrt{2x}} + \frac{l(l+1)}{2x^2}. \quad (74)$$

Finalmente, introduciendo (73) y (74) en (70) obtenemos

$$\hat{A}^+ = (\hat{b}^+)^2 + \frac{2(l+1)\hat{b}^+}{\sqrt{2x}} + \frac{l+1}{x^2}, \quad (75)$$

$$\hat{A}^- = (\hat{b}^-)^2 + \frac{2(l+1)\hat{b}^-}{\sqrt{2x}}. \quad (76)$$

5.3 Las funciones de onda del oscilador isotónico

Como aplicación final de todo lo anterior, calculamos las soluciones $\varphi_n(x)$ de la ecuación de Schrödinger (51) para el oscilador isotónico. Para empezar, al aplicar el operador \hat{b}^- de (72) al estado base $\varphi_0(x)$ dado por (54) obtenemos

$$\hat{b}^- \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dx} + x - \frac{l+1}{x} \right) \left(x^{l+1} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right) = 0. \quad (77)$$

El resultado (77) implica que $\hat{A}^- \varphi_0(x) = 0$, lo cual es correcto pues $\varphi_0(x)$ es el estado de mínima energía. Ahora calculamos la función de onda para el estado con $n = 1$ por medio de $\hat{A}^+ \varphi_0(x)$. De acuerdo con (73) necesitamos

$$(\hat{b}^+)^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{dx^2} - 2 \left(x - \frac{l+1}{x} \right) \frac{d}{dx} + \left(\frac{l(l+1)}{x^2} - 2l + x^2 - 3 \right) \right], \quad (78)$$

el cual, como era de esperarse, es de segundo orden en la derivada. Prosiguiendo con el cálculo de $\varphi_1(x)$ llegamos a

$$\varphi_1(x) = \hat{A}^+ \varphi_0(x) = (2x^2 - 2l - 3) \varphi_0. \quad (79)$$

El polinomio de Laguerre [11] de grado $n = 1$ es

$$L_1^\alpha(\xi) = -\xi + \alpha + 1.$$

En términos de $\xi = x^2$ tenemos

$$L_1^\alpha(x^2) = -x^2 + \alpha + 1.$$

Así que con el polinomio

$$2x^2 - 2l - 3 = -2 \left(-x^2 + l + \frac{1}{2} + 1 \right),$$

que aparece en (79), identificamos

$$\alpha = l + \frac{1}{2},$$

y entonces la función de onda correspondiente al primer estado excitado se escribe así

$$\varphi_1(x) = C_1 L_1^{l+\frac{1}{2}}(x^2) \varphi_0(x).$$

Por un proceso inductivo podemos demostrar que la solución general de la ecuación de Schrödinger para el oscilador isotónico es

$$\varphi_n(x) = \left(\widehat{A}^+ \right)^n \varphi_0(x) = C_n L_n^{l+\frac{1}{2}}(x^2) \varphi_0(x), \quad (80)$$

que coincide con lo que aparece en la literatura. Finalmente, podemos emplear un método que permite eliminar la segunda derivada que aparece en (78) por medio de la ecuación diferencial de Laguerre:

$$x \frac{d^2 u}{dx^2} + (\alpha - x + 1) \frac{du}{dx} + nu = 0. \quad (81)$$

Con este mecanismo los operadores de escalera \widehat{A}^+ y \widehat{A}^- se convierten en operadores diferenciales de primer orden [9] y permiten un ahorro considerable de cálculo.

6 Conclusiones

El método de factorización de Dirac es muy útil para sistemas cuánticos en los que se puede aplicar. Pero a pesar del avance que se ha tenido a través de los años, todavía falta establecer criterios estrictos para demostrar la existencia de los operadores de factorización y los operadores de ascenso y descenso, y en segundo lugar, para construirlos. Notamos en la literatura que en algunos casos esos operadores se encuentran a prueba y error. Nuestra contribución principal en este trabajo es la forma de construir los operadores de factorización a partir del conocimiento de la función de onda $\varphi_0(x)$ por medio de

$$f(x) = -\frac{1}{\phi_0} \frac{d\phi_0}{dx}. \quad (82)$$

Si existe tal función $f(x)$ en todos los puntos en los que el potencial mantiene confinada a la partícula, o en otras palabras, si $\phi_0(x) \neq 0$ en ese rango de valores de x , entonces (46) es buen resultado, y podemos esperar que el método de factorización sea aplicable al sistema cuántico en cuestión. Hemos visto la utilidad de (46) en el oscilador isotónico, pues el rango de posiciones de la partícula permitido por el potencial es $-\infty < x < 0$ y $0 < x < +\infty$. En esa región $\varphi_0(x)$ dada por

$$\varphi_0(x) = x^{l+1} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad (83)$$

es diferente de cero y el método de factorización funciona. En el caso del oscilador armónico la factorización funciona pues la región permitida es $-\infty < x < +\infty$ y

$$\psi_0(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (84)$$

es diferente de cero en todos los puntos de esa zona. Finalmente, un camino para continuar este trabajo es buscar nuevos sistemas cuánticos a los que sea aplicable nuestro criterio.

Bibliografía

- [1] J. Casahorrán, *On a novel supersymmetric connection between harmonic and isotonic oscillators*, Physica A, 217 (1995) 429.

- [2] P. A. M. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon, Oxford (1935).
- [3] Z. Dongpei, *A new potential with the spectrum of an isotonic oscillator*, Journal of Physics A, 20 (1987) 4331.
- [4] M.D. Fayer, *Elements of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, New York, Oxford (2001).
- [5] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, Series and Products*, Elsevier, Academic Press, Amsterdam (2007).
- [6] L. Infeld and T. E. Hull, *The factorization method*, Reviews of Modern Physics, 23 (1951) 21.
- [7] B. Mielnik, *Factorization method and new potentials with the oscillator spectrum*, Journal of Mathematical Physics, 25 (1984) 3387.
- [8] S. M. Nagiyev et al, *On a dynamical symmetry group of the relativistic linear singular oscillator*, arXiv math/ph/0608057 (2006).
- [9] A. Pérez-Lorenzana, *On the factorization method and ladder operators*, Revista Mexicana de Física 42 (1996) 1060.
- [10] J. O. Rosas Ortíz, *Exactly solvable hydrogen-like potentials and factorization method*, arXiv:quant-ph/980620 (1998).
- [11] R. Shankar, *Principles of Quantum Mechanics*, Kluwer Academic/Plenum Press, New York (1994).
- [12] Sukumar, *Supersymmetry, Factorization Of The Schrodinger Equation And A Hamiltonian Hierarchy* J. Phys. A: Math. Gen. 18 (1985), L57-L61.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

mmaya@fcm.buap.mx

oliveros@fcfm.buap.mx
orion99954@gmail.com
tenizabella@yahoo.com

Geometría

Capítulo 5

Estudio iconológico y geométrico de la escultura de San Cristóbal ubicada en el Museo Regional de Puebla

Emma Garrido Sánchez

Universidad de Morelia, Centro INAH Puebla

Resumen

La Historia del Arte nos enseña que el Patrimonio Cultural puede estudiarse desde diversos enfoques interdisciplinarios, contribuyendo todos a la apreciación e interpretación de la obra de arte. Es necesario considerar el análisis desde el encuentro de varias perspectivas, en este caso donde confluyen la geometría y la iconología. El análisis iconológico y geométrico de la escultura de San Cristóbal se realizará utilizando el método iconológico de Erwin Panofsky, que establece tres niveles de estudio: el preiconográfico, el icononográfico y el iconológico, por ello, en primer lugar se realizará el análisis iconológico, posteriormente el análisis geométrico para verificar la proporción o desproporción en las dimensiones del bien histórico. Finalmente un análisis de la obra frente a la producción artística de la época para detectar posibles variaciones plásticas en la escultura y si esta corresponde a los cánones de proporción del contexto en el que fue elaborado.

1 Introducción

El interés en investigar la escultura de San Cristóbal ubicada en el Museo Regional de Puebla obedece a la necesidad de contar con información tanto histórica como plástica del objeto de estudio de mi tesis de Maestría en Historia del Arte. La investigación parte de las interrogantes: ¿Quién fue San Cristóbal?, ¿Cómo llegó al Museo Regional de Puebla?, ¿Qué importancia tiene?, preguntas aparentemente simples pero que poseen una gran complejidad.

Según Jacobo de la Vorágine, fraile que perteneció a la orden dominica en Italia, a San Cristóbal se le llama “Portador de Jesús”. De la Vorágine fue obispo de Génova entre 1292 y 1298, escribió una crónica de la ciudad de Génova y es considerado el autor de *La Leyenda Dorada*[9], la recopilación hagiográfica más importante en torno a los santos mártires y desde luego la más relevante en la iconografía pictórica y escultórica de los mismos. Desde el siglo XVI a San Cristóbal se le considera conductor de almas y patrono de los viajeros[6]. Actualmente es considerado patrono de los automovilistas y de los camioneros.

En el presente capítulo se realizará el análisis iconológico y geométrico aplicando la sección áurea a fin de determinar si la escultura de San Cristóbal obedece a los modelos artísticos establecidos en siglo XVIII y se analizará el contexto histórico en que la obra fue elaborada.

La justificación y relevancia de la presente investigación radica en los siguientes aspectos: La escasa información bibliográfica conocida sobre San Cristóbal, la escultura colonial poblana ha sido poco estudiada y el interés en investigar la utilización de la proporción áurea en el diseño y elaboración de las obras escultóricas poblanas del siglo XVIII.

2 Método iconológico

El análisis iconológico y geométrico de la escultura de San Cristóbal se realizará con base en los postulados de Erwin Panofsky quien plantea tres niveles de lectura: preiconográfico, iconográfico e iconológico. Este análisis iconológico e iconográfico se elaborará desde una perspectiva cualitativa y a través del análisis de contenido que está ligado a varias técnicas, entre ellas: La consulta documental, el análisis del estado del arte, la observación directa y la fotografía.

El objetivo general planteado es realizar el análisis iconológico y geométrico de la escultura de San Cristóbal para ampliar el conocimiento artístico e histórico de la obra en cuestión. Derivándose de este los siguientes objetivos particulares:

1. Identificar en los archivos del Depósito del Centro INAH Puebla, datos que proporcionen información sobre la llegada de la escultura de San Cristóbal al Museo Regional de Puebla.

2. Comparar con la proporción áurea las proporciones de la escultura de San Cristóbal para determinar si corresponde a los cánones de proporción de la época.
3. Estudiar el contexto histórico y social en que fue elaborada la escultura de San Cristóbal.

La investigación de la escultura de San Cristóbal se pretende realizar desde una epistemología cualitativa, ya que ésta puede ser aplicada a las ciencias sociales, en específico a los estudios de las artes, a los textos artísticos: pintura y escultura, por ejemplo, al proceso de su creación y evolución puesto que decodifica y codifica la obra, por lo que el sentido semiótico está presente en el análisis de la obra[1].

Erwin Panofsky plantea que el análisis iconográfico considera la identificación acertada de los motivos iconográficos y el significado intrínseco o contenido. La significación intrínseca o contenido se percibe investigando aquellos “supuestos” que muestran la actitud de una nación, un periodo, una clase, una creencia religiosa o filosófica calificados en cuanto a calidad por una persona y representados en una obra. La interpretación de los motivos iconográficos es el prerequisite para un correcto análisis iconográfico en sentido más estricto, por otra parte, el análisis de las imágenes, las historias y las alegorías es el prerequisite de una correcta interpretación iconográfica en un sentido más profundo, es decir, iconológica.

El análisis iconográfico a que se refiere el estudio de las imágenes ya sea pintura, escultura, historias y alegorías, considera una familiaridad con temas y conceptos específicos, lo cual presupone un conocimiento previo de los procesos y hechos históricos[18].

El análisis iconológico e iconográfico de la escultura de San Cristóbal ubicada en el Museo Regional de Puebla, plantea tres niveles:

1. Nivel pre-iconográfico (significación primaria o natural). Este nivel se refiere a la “interpretación elemental” inmediata, descriptiva de la obra de arte.
2. Nivel iconográfico (significación secundaria o convencional). Corresponde al “contexto social y cultural de la obra [...]”, que al investigador le es consabido en el mundo del que este forma parte por lo que es necesario una interpretación inteligible”[18].

3. Nivel iconológico (Significación intrínseca o contenido). También se le conoce como iconografía en sentido profundo. Se relaciona con un “significado intrínseco” al “significado individual” de la obra, a su autor, a la técnica, a su inserción y creencia religiosas, etc. y que han sido confirmadas por otros testimonios, textos literarios u otras pinturas del propio autor. Implica una decodificación y es un nivel donde la interpretación de la obra es mas profunda, es decir ya “no es mera descripción, sino, plenamente historia”. Panofsky plantea que “una obra de arte debe considerarse para su estudio como un todo”[18].

3 Análisis de la obra artística

La escultura de San Cristóbal data del siglo XVIII, es de autor anónimo, mide 3.10 m de altura y se encuentra en el Museo Regional de Puebla. Este bien histórico está construido en madera y con la técnica policromada[2]. De acuerdo con los datos encontrados el autor es del municipio de Acajete, Puebla. Es una imagen artística que destaca por sus atributos iconográficos. Podemos observar a un personaje masculino con barba, pelo rizado, cuya mirada es estática y dirigida hacia el cielo. Su indumentaria consta de una saya floreada remangada hasta las rodillas asida por un cinturón en el que se sujetaba a los pasajeros. Su posición es erguida como la de un guerrero, con posición firme, con la pierna izquierda hacia adelante, listo para emprender el viaje. En su espalda posee una capa de yeso de color rojo.

En el hombro derecho se puede observar que San Cristóbal porta al Niño Jesús quien sostiene con la mano izquierda el globo terráqueo que hace alusión al universo terrestre o celestial, por lo que cuando el Niño Jesús pidió a San Cristóbal lo trasladara al otro lado del río, le pesó tanto, que el gigante le preguntó: “¿Por qué pesas tanto si eres un niño?”, y el Niño le contestó: “Porque yo soy Jesús y traigo el mundo en mi espalda”[21]. El Niño Jesús se encuentra con la mirada hacia enfrente y con la mano derecha señalando como dando la bendición. San Cristóbal se deriva de Cristóforo, nombre que adquirió cuando se convirtió al catolicismo[6]. De ahí que San Cristóbal significa “Portador de Jesús ”[9] y su rostro sea similar a Cristo.

En un estudio de campo realizado en el Estado de Puebla se encontró que existen esculturas de San Cristóbal en el municipio de Tepeojuma, en San Cristóbal Tepatlaxco, municipio de San Martín Texmelucan y en San Cristó-

bal Tepontla, municipio de San Pedro Cholula. Dichas esculturas no rebasan 1.5 m de tamaño y algunas de ellas no han sido adecuadamente restauradas. En la actualidad estas imágenes sacras son veneradas en sus respectivos templos católicos, especialmente el 25 de julio, cuando son cargadas en andas y llevadas en procesión por algunas calles del centro del pueblo.

Con base en la información anterior podemos afirmar, que por sus dimensiones y su estado de conservación, la escultura de San Cristóbal que se encuentra en el Museo Regional de Puebla se coloca como la mas importante en el Estado y ya no es venerada porque es considerada un objeto artístico.

Existen también pinturas de gran formato de la época virreinal, como por ejemplo, la ubicada en la Catedral de Puebla, pero ellas no son motivo de este estudio, por lo cual no las enumeramos aquí.

Considerando que el método panofskyano establece considerar a la obra artística de manera integral debido a que implica un análisis profundo (iconológico), en una observación detenida la escultura del gigante San Cristóbal muestra desproporción. Resulta muy importante comprobar tal afirmación debido a que, como se explicará en la Sección 5, en la imaginería del siglo XVIII lo importante era la belleza sagrada y lograr la conexión con Dios, no las adecuadas proporciones en las dimensiones.

También en esa época había una influencia a través de la arquitectura de la aplicación de la proporción dorada en el arte, por ello también confirmaremos tal desproporción mediante una metodología científica basada en la sección áurea. A continuación se realiza el análisis geométrico para determinar si cumple o no con los cánones de proporción divina.

4 Análisis geométrico de la escultura de San Cristóbal

Sección áurea

Al realizar la investigación historiográfica se encontró que era necesario considerar proporciones, lo cual se hizo basado en la sección áurea o proporción divina. Esta proporción, entendida en su momento como una ley matemática y divina que organiza los elementos del mundo en una armonía perfecta, tiene sus orígenes con Pitágoras (582 AC - 507 AC) para quien *todo es número*. Pero se debe a Euclides (325 AC - 265 AC) la definición geométrica formal.



Figura 1: Escultura de San Cristóbal. SECRETARÍA DE CULTURA.-INAH.-MEX: “Reproducción autorizada por el Instituto Nacional de Antropología e Historia”. Título: San Cristóbal. Autor: Anónimo. Data: Siglo XVIII. Técnica: Estofado. Dimensiones: 3.10 m. Ubicación: Museo Regional de Puebla.

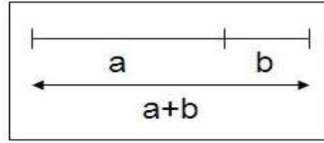


Figura 2: Sección áurea.

La sección áurea, “que corresponde a la partición más simple de una magnitud en dos partes desiguales o partición más lógica [...]”[5] es lo que Euclides en el libro VI, proposición 30, de “Los Elementos”, plantea como dividir una recta dada en extrema y media razón, y define así al inicio del libro (Def.3): “Se dice que una recta está dividida en extrema y media razón, cuando la totalidad del segmento es al segmento mayor como el segmento mayor es al menor”[8].

A la proporción de la partición desigual o asimétrica de una magnitud en dos partes que se establece entre la magnitud inicial y sus dos partes, se le denomina media y extrema razón o sección áurea si cumple la proporción expresada en la ecuación (1). Sean a y b estas dos partes (ver Figura 2), entonces

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}. \tag{1}$$

La ecuación (1) se puede escribir como

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

Haciendo $\Phi = \frac{a}{b}$ y considerándola como incógnita se tiene[5],[10]

$$1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi$$

De la cual se obtiene la ecuación cuadrática

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \tag{2}$$

cuya solución es

$$\Phi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

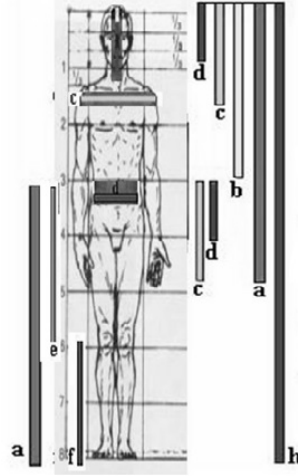


Figura 3: Sección áurea en el cuerpo humano[11]

$$\Phi_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.618$$

De aquí que

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \approx 1.618$$

Sección áurea en el cuerpo humano

Uno de los primeros documentos sobre el estudio de las proporciones humanas fue escrito por Marcus Vitruvius Pollio, arquitecto romano en el siglo I, para quien “[...] en el cuerpo humano bien formado existe una perfecta armonía entre todas sus partes.”[13]

Los primeros estudios de la sección áurea en el cuerpo humano se encuentran en el famoso dibujo, el hombre de Vitruvio, de Leonardo Da Vinci. Ahí se resumen algunas ideas importantes del pensamiento renacentista sobre la sección dorada. Leonardo Da Vinci también ilustró el libro de Luca Paccioli *La divina proporción* publicado en 1509.

También en el Renacimiento, Alberto Durero realizó estudios minuciosos sobre las proporciones humanas de niños y adultos[13].

En el cuerpo humano se puede encontrar la sección áurea en las siguientes proporciones (Ver Figura 3)[11]:

1. h es la altura total y a es la altura del ombligo, medida desde la planta de los pies, o también la longitud desde la parte más alta de la cabeza hasta la punta de los dedos de las manos, medida con los brazos estirados y pegados al cuerpo.
2. b es la distancia desde la parte superior de la cabeza al codo, y b es la sección áurea de a .
3. c es la longitud desde el codo hasta la punta de los dedos, y también el ancho de hombros. d , que es la sección áurea de c , es la longitud desde el codo hasta el comienzo de la mano en la muñeca, y también el ancho de la cintura.
4. e es la distancia entre el ombligo y la rodilla, y su sección áurea f , es la distancia desde la rodilla a la planta de los pies.

Así al calcular las razones siguientes se obtiene el número de oro.

$$\frac{h}{a} \approx 1.618, \quad \frac{a}{b} \approx 1.618, \quad \frac{b}{c} \approx 1.618, \quad \frac{c}{d} \approx 1.618, \quad \frac{e}{f} \approx 1.618$$

Sección áurea en la escultura de San Cristóbal

Una observación importante antes de describir la metodología para la medición y comparación es la siguiente: Se utilizaron fotografías de la escultura porque es difícil moverla debido a su peso y tamaño, además no se permite manipularla ya que puede ser dañada y porque en la fotografía se puede modificar adecuadamente el tamaño de la imagen sin alterar la escala. Las mediciones se realizaron sobre una imagen fotográfica, pero el esquema que muestra los segmentos de recta utilizados en este trabajo es un dibujo a escala de la escultura de San Cristóbal porque no está permitido rayar o deformar las imágenes de los bienes que son patrimonio histórico o cultural de nuestro país.

Para realizar las mediciones de los segmentos considerados en la comparación se procedió de la siguiente manera: Se utilizó una fotografía de frente como la mostrada en la Figura No. 1. Las mediciones verticales se hicieron

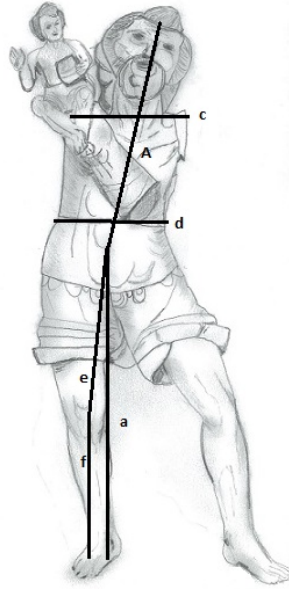


Figura 4: Sección áurea en la escultura de San Cristóbal.

con base en el pie derecho porque permite una medición con menor distorsión y como consecuencia una mejor aproximación en los resultados.

Debido a que la posición del cuerpo humano representado en la escultura no es completamente vertical se utilizaron como apoyo dos fotografías de perfil, una del izquierdo y otra del derecho. En cualquiera de estas dos fotografías se encontró que una primera línea recta que vaya del centro del cuerpo en la cintura a la base del pie (fascia plantar) pasando a lo largo de la pierna derecha y una segunda línea recta que vaya del centro del cráneo a la fascia plantar derecha están separadas formando un ángulo de 10 grados aproximadamente.

Esta separación pequeña nos permite considerar como buena la aproximación de coplanaridad de los puntos extremos de los segmentos medidos para el cálculo del número de oro.

Los segmentos tienen las siguientes magnitudes:

$a=e+f=7.6$ cm, $A=5.5$ cm, $h=a+A=13.1$ cm $C=2.7$ cm, $d=2.5$ cm, $e=4.1$ cm, $f=3.5$ cm

de las cuales, al realizar los cocientes se obtiene:

$$h/a = \frac{\text{estatura}}{\text{altura del ombligo}} \approx 1.723$$

$$c/d = \frac{\text{ancho de hombros}}{\text{ancho de cintura}} \approx 1.08$$

$$e/f = \frac{\text{longitud ombligo-rodilla}}{\text{longitud rodilla-planta del pie}} \approx 1.17$$

De las proporciones obtenidas arriba podemos observar que la relación estatura-altura ombligo es muy próxima a Φ , lo cual significa que en las dimensiones de altura la escultura está aproximadamente proporcionada, sin embargo, los cocientes que involucran las extremidades (relación longitud ombligo-rodilla y longitud rodilla-planta del pie) y la anchura del tronco (relación ancho de hombros y ancho de cintura) son aproximadamente $2/3$ de Φ , lo cual implica que la mayor desproporción se encuentra en la relación hombros-cintura.

Como puede constatarse con estos resultados la figura humana representada en esta escultura, San Cristóbal, no tiene las dimensiones perfectas o divinas. No mantiene una proporcionalidad perfecta en sus dimensiones, sin embargo, no cae en la deformación, esto es, la figura humana no cambia de forma, no sufre alteraciones o distorsiones, solo presenta una complejión delgada en lugar de una complejión atlética.

5 San Cristóbal frente al contexto de la época

La iconografía e iconología de San Cristóbal están ligadas a lo sagrado y lo profano, a lo sagrado por cumplir con una devoción definida por el Concilio de Trento del 3 de diciembre de 1563, así como por la ideología de la época cuyo rigor de religiosidad católica permeaba produciendo “un modelo de arte al proponer ciertos lineamientos en la expresión que originó un tipo de imagen que predomina en la escultura colonial”[20], sin embargo, fue el III Concilio Provincial Mexicano de 1585 presidido por el Arzobispo – Virrey Pedro Moya Contreras quien confirmando el de 1583, recomendó que las imágenes cumplieran su objetivo piadoso ya que era importante que no se presentaran “indecentes o profanas, que pudiera impedir la devoción de los fieles”, por lo que en la Nueva España los artistas tenían que acatar las disposiciones de la

legislación eclesiástica ya que era obligatorio que toda imagen religiosa cumpliera con el objetivo, transmitir a los fieles la religiosidad y la devoción[4], porque de acuerdo a lo establecido en el Concilio de Trento “[...]quien enseñe algo contradictorio a estas resoluciones debe ser proscrito.”[4] Por esto es evidente que el Concilio Provincial Mexicano reafirmaba lo dispuesto por el Concilio de Trento. De ahí que el rostro de la escultura de San Cristóbal tenga un rostro de piedad, de sufrimiento, de divinidad por parecerse a Cristo.

El barroco popular tridentino participaba de una representación donde los cuerpos de la imagen tenían que ser “poesía” por su asociación con el personaje representado, una virtud propia quizá emparentada para más de un devoto indio o mestizo. Estas imágenes tenían que poseer una triada: representación, símbolo y teofanía, entendiéndose este último concepto como consagrar un lugar y hacerlo comunicante con el cielo[7].

En el siglo XVIII, la imaginería novohispana destaca en libertad de movimiento pero pierde en emotividad. Se hace aparatosa o se supedita a la arquitectura o cae, al final de ese periodo, en el academicismo llamado neoclasicismo. La Nueva España vive y sobresale valientemente ante los nuevos paradigmas expresando estos esquemas, pero siempre con elementos propios ya que siempre está presente el sentido de la talla indígena, ejemplo de ello es la Iglesia de Santa Mónica donde en una de sus hornacinas externas se puede apreciar una escultura de San Cristóbal tallada en piedra que para la época se consideró moderna, aunque su rostro denota no nada más inexpresividad e inmovilidad, sino también desproporción[16].

Estas convenciones dieron paso a un prototipo convencional de escultura sagrada. Este modelo de escultura tenía que ocultar la verdadera personalidad física del personaje representado, tal es el caso de San Antonio que en palabras de Vargas Lugo, “era un hombre bajo, gordo e hidrópico” y absolutamente nada de eso se transmite o representa en sus imágenes. Por lo que las imágenes al colocarse en los altares tenían que proyectar dulzura, juventud y belleza, adquiriendo fama entre la población[20].

La tendencia a deshumanizar las imágenes para sacralizar su belleza “se da en toda la imaginería; casi no se puede reconocer una imagen si no lleva sus atributos”, esto debido al deseo de la Iglesia de insistir en que los fieles “no podían adorar a la imagen en particular, ni al ser de carne y hueso, sino al símbolo y la personalidad espiritual con la cual se significó al subir a los altares.”[20]

Otra característica de la escultura novohispana, es la desproporción en los

cuerpos humanos, no importaba a los fieles ni al público de la etapa barroca, que un mismo santo aparentara diferentes edades, sino que reflejara paz y luz a la vez[20].

Por otra parte, la arquitectura colonial tuvo gran influencia del número de oro desde el siglo XVI[12][19], esto debido a que “los frailes franciscanos que construyeron los conventos del siglo XVI del estado de Puebla tenían sólidos conocimientos sobre geometría y arquitectura [...]” [15] Su fuente de inspiración son los planos ideales de un “monasterio de regla benedictina: Saint Gall en Suiza.” Los elementos geométricos utilizados en el diseño de Saint Gall fueron: “El rectángulo de proporción áurea, el cuadrado de San Benito y espirales de pulsación cuadrantal con sus rectángulos rectores que contienen las leyes de la armonía universal.”[15]

Recordemos que varios de los escultores tenían formación en arquitectura y escultura, por lo cual es de esperar que su formación influyera en la aplicación de la sección áurea en el diseño y la elaboración de su obra artística.

Más tarde, en el siglo XVIII, los escultores mexicanos del neoclasicismo se propusieron con insistencia el regreso “a la bella porción, al canón, a la serenidad, y a las materias nobles, como el mármol y el bronce, [...]” Pero, como apunta Moreno Villa, “[...]el hecho es que la mayoría de ellos se quedó sin alcanzar, ni siquiera entender, la divina proporción en los griegos.”[16]

“La escultura poblana del siglo XVIII ha sido muy poco estudiada [...]” Toda ella está dominada por “un apellido prestigioso”: Cora. Cualquier escultor poblano de ese siglo es opacado por la presencia de los Cora. El primero, José Antonio Villegas, “se dedicó a la arquitectura y la escultura, artes en las que salió maestro consumado.”[3]. Se observa en el caso de Puebla que en el siglo XVIII la formación de arquitecto también tiene influencia en la escultura.

La llegada de San Cristóbal al Museo Regional de Puebla está asociada con la desaparecida Iglesia de Guadalupe, que estuvo ubicada en el Cerro de Loreto, y que con la llegada de los betlemitas esta escultura fue expulsada. También está vinculada con la estancia de San Cristóbal en la Catedral de Puebla, de donde también salió para su traslado a la Iglesia de Santiago. Durante la intervención francesa, en 1863, la escultura fue utilizada como trinchera en el Fuerte Morelos, donde perdió uno de sus brazos. Posteriormente regresó al Templo de Santiago donde fue abandonada y arrumbada[17]. En 1976, fecha de inauguración del Museo Regional de Puebla el objeto histórico fue ubicado como pieza importante en la exposición permanente del Museo en

mención, previa restauración exhaustiva realizada por el Instituto Nacional de Antropología e Historia, ya que se encontraba en estado deplorable[14]. Actualmente, permanece en la Sala de Historia.

Como se puede observar, la escultura de San Cristóbal, objeto de la presente investigación, al encontrarse en el Museo Regional de Puebla, adquiere una resignificación, es decir, un nuevo significado, un nuevo valor, una historicidad.

Conclusiones

El análisis iconológico y geométrico determinó que la escultura de San Cristóbal, tanto en sus dimensiones como en su técnica, obedece a la producción artística del siglo XVIII. Su gigantismo corresponde a las características plásticas de la época puesto que importaba más la expresividad divina que la proporción de su cuerpo.

El estudio geométrico realizado en el presente capítulo en la obra de arte de San Cristóbal también demostró que la Historia del Arte como ciencia social no está disociada de otras disciplinas y en específico, de la geometría que permitió, en este análisis, obtener resultados precisos sobre las proporciones de la escultura. La aplicación de la sección áurea permitió mostrar que la escultura del gigante mutilado de San Cristóbal ubicado en la sala de Historia del Museo Regional de Puebla posee mayor desproporción en sus dimensiones transversales, el torso, que en las dimensiones relacionadas con su altura.

Con base en las investigaciones de campo realizadas en algunos municipios poblanos se pudo constatar que la escultura de San Cristóbal que se expone en el Museo Regional de Puebla, es una obra artística única en el Estado de Puebla debido a sus dimensiones, su técnica escultórica y sus atributos iconográficos.

Agradecimientos

Al Instituto Nacional de Antropología e Historia por el permiso otorgado para utilizar la imagen de la escultura de San Cristóbal en la realización de este estudio. Al restaurador Alfonso Hinojosa Correa por la información e imágenes proporcionadas sobre San Cristóbal. A Judith Romero Rosas, Responsable del Depósito de Bienes Culturales del Centro INAH Puebla por el acceso per-

mitido para consulta de archivos. A la arquitecta Angeles Silva Gómez, de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, por la elaboración de la Figura No. 4. Mi reconocimiento al Árbitro por sus valiosas observaciones que me hicieron reflexionar, aprender y enriquecer este trabajo.

Bibliografía

- [1] Álvarez Álvarez, Luis, Barreto Argilagos, Gaspar, *La epistemología cualitativa* en El arte de investigar el arte, Santiago de Cuba: Editorial Oriente, 2010.
- [2] Archivo del Depósito de Bienes Culturales del Centro INAH Puebla.
- [3] Arellano, Fernando, *El arte hispanoamericano*, Caracas: Editorial Ex Libris, 1988.
- [4] Belting, Hans. *La veneración de los santos y el respeto a las imágenes en el Concilio de Trento (1563)* en Imagen y Culto. Una historia de la imagen anterior a la edad del arte, Madrid, Ediciones Akal, 2009, pp. 719-722.
- [5] Bonell, Carmen, *La Divina Proporción. Las formas geométricas*, México: Alfaomega, 2000.
- [6] Carmona Muela, Juan, *Iconografía de los santos*, Madrid: Ediciones Akal, 2008.
- [7] Eliade, Mircea, *El espacio sagrado y la sacralización del mundo* en Lo Sagrado y lo Profano, Barcelona, Editorial Paidós, 1998, pp. 21-26.
- [8] Euclides, *Elementos de Geometría. Libro VI*. México: UNAM, 1991.
- [9] García Cuadrado, María Dolores, *San Cristóbal: Significado iconológico e iconográfico* en La exégesis como instrumento de creación cultural. El testimonio de las obras de Gregorio de Elbira, Antig. crist. (Murcia) XVII, 2000, pp. 343-366.
- [10] Ghyka, Matila C., *Φ el número de oro. Volumen I. Los ritmos*, Barcelona: Editorial Poseidón, 1978.

- [11] Gómez Bello, Mercedes, *La constante ϕ y sus implicaciones en el estudio de la proporcionalidad*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2011.
- [12] González Galván, Manuel, *Trazo, proporción y símbolo en el arte virreinal. Antología personal*, México, UNAM, 2006.
- [13] Doczi, Gyorgy, *El poder de los límites. Proporciones armónicas en la naturaleza, el arte y la arquitectura*, Buenos Aires: Editorial Troquel, 2003.
- [14] Información y fotografías proporcionadas por el Restaurador Alfonso Hinojosa Correa, quien fue Coordinador de la Sección de Restauración del Centro INAH Puebla durante 35 años.
- [15] Martínez del Sobral y Campa, Margarita, *Los conventos franciscanos poblanos y el número de oro*, Puebla, Edición de Gobierno del Estado de Puebla, Centro INAH Puebla, Fundación Fuad Abed Halabi A. C., 1988.
- [16] Moreno Villa, José, *La escultura colonial mexicana*, México, FCE, 2004.
- [17] Paleta Vázquez, María del Pilar, *El deambular de San Cristóbal en la ciudad de Puebla en Mitos, Leyendas y Tradición de Puebla*. Puebla: Asociación de Mujeres Periodistas y Escritoras, Universidad Madero, Segunda Edición, 2002, pp. 123-136.
- [18] Panofsky, Erwin, *Estudios sobre Iconología*, Madrid: Alianza Editorial, 2001.
- [19] Piña Dreinhofer, Agustín, *Arquitectura del Siglo XVI*, México, UNAM, 2013.
- [20] Vargas Lugo, Elisa. *Formas y expresión de la escultura novohispana*, en *Imaginería Virreinal, Memorias de un Seminario*, IIE UNAM-INAH SEP, México, D.F., 1990.
- [21] Vorágine, Santiago de la, *La leyenda dorada*, Madrid: Alianza Editorial, 2004. De la Vorágine fue el hagiógrafo más destacado del siglo XIII. Se entiende por Hagiografía la vida de los Santos.

Universidad de Morelia

Fray Antonio de Lisboa No. 22 esquina con Av. Tata Vasco, Colonia 5 de
Mayo Morelia, Mich. C.P. 58230

Centro INAH Puebla

Avenida Ejércitos de Oriente s/n, Centro Cívico 5 de Mayo, Los Fuertes
Puebla, Pue. C.P. 72270

emmiux1608@gmail.com

Topología

Capítulo 6

Generalizaciones de Teoremas de Urysohn y Katětov

Luz del Carmen Álvarez Marín, José Margarito
Hernández Morales

Universidad Tecnológica de la Mixteca

Resumen

Un resultado muy conocido en topología debido a su importancia en el análisis moderno es el que se conoce como el Lema de Urysohn establecido a inicios de los años 20's del siglo pasado por el matemático ruso Pável Samuítovich Urysohn. Este Lema fue generalizado para espacios bitopológicos normales por pares por Kelly en 1963. Ahora hacemos la generalización a los mismos espacios bitopológicos pero con la normalidad por pares fuertemente. De igual manera hacemos la generalización del teorema de Katětov que fue establecido para espacios topológicos normales en 1951 y generalizado por E. P. Lane en 1967 a espacios bitopológicos normales por pares. Aquí hacemos la correspondiente generalización para espacios bitopológicos normales por pares fuertemente.

1 Preliminares

El primero en hablar de los espacios bitopológicos fue Kelly, en [7], y fue también el primero en introducir los axiomas de separación por pares, el término por pares es agregado para involucrar ambas topologías. Un espacio bitopológico es un conjunto X en el cual están definidas dos topologías τ_1 y τ_2 y se denota por (X, τ_1, τ_2) . En adelante, para referirnos en forma general a alguna de las topologías τ_1 o τ_2 se pondrá τ_i donde $i \in \{1, 2\}$, y si incluimos τ_j se entenderá que $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$.

En un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) , a los elementos de τ_i , $i = 1, 2$, se les llama τ_i -abiertos. A los complementos de un τ_i -abierto se le llama

τ_i -cerrado. Dado $A \subset X$, denotemos por $int_{\tau_i}(A)$ al interior de A respecto a la topología τ_i , y por $cl_{\tau_i}(A)$, a la clausura de A respecto a la topología τ_i , $i = 1, 2$. A continuación se enuncian los conceptos de Hausdorff y normal por pares dados por Kelly.

Definición 1.1. Un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) se dice Hausdorff por pares, si para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$, existen conjuntos U τ_j -abierto, V τ_i -abierto tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Definición 1.2. Un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) se dice normal por pares, si dados $F \subset X$ τ_i -cerrado y $G \subset X$ τ_j -cerrado, con $F \cap G = \emptyset$, existen conjuntos U τ_j -abierto, V τ_i -abierto, tales que $F \subset U$ y $G \subset V$, con $U \cap V = \emptyset$.

Ejemplo 1.1. El conjunto $X = \mathbb{R}$, con las topologías

$$\tau_1 = \emptyset \cup \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$$

y

$$\tau_2 = \emptyset \cup \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$$

no es Hausdorff por pares, pues para $x, y \in X$, con $x < y$, no existe un τ_2 -abierto que contenga a x y no a y .

Ejemplo 1.2. El conjunto $X = \{a, b, c\}$, con las topologías $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ y $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{b, c\}\}$ es normal por pares. En efecto, los únicos conjuntos cerrados con respecto a las topologías distintas son $F = \{b, c\}$ τ_1 -cerrado, $G = \{a\}$ τ_2 -cerrado y claramente $U = \{b, c\}$ es τ_2 -abierto, $V = \{a\}$ es τ_1 -abierto y cumplen lo requerido.

En el siguiente resultado se incluyen algunas equivalencias que se pueden ver en [8] y [10] del concepto de normalidad por pares, pero además estamos anexando 4 y 5 que hemos establecido.

Teorema 1.1. *En un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) , los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. X es normal por pares.
2. Para cada $F \subset X$ τ_i -cerrado y para cada $U \subset X$ τ_j -abierto, con $F \subset U$, existe V τ_j -abierto y G τ_i -cerrado tales que $F \subset V \subset G \subset U$.

3. Para cada $F \subset X$ τ_i -cerrado y para cada $U \subset X$ τ_j -abierto, con $F \subset U$, existe V τ_j -abierto que cumple:

$$F \subset V \subset cl_{\tau_i}(V) \subset U.$$

4. Para cada $F_1 \subset X$ τ_i -cerrado y cada $F_2 \subset X$ τ_j -cerrado con $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ existe un $U \subset X$ τ_j -abierto, cumpliendo: $F_1 \subset U$ y $F_2 \cap cl_{\tau_i}(U) = \emptyset$.
5. Para cada $F_1 \subset X$ τ_i -cerrado y cada $F_2 \subset X$ τ_j -cerrado, con $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, existen $U \subset X$ τ_j -abierto, $V \subset X$ τ_i -abierto tales que:

$$F_1 \subset U, F_2 \subset V \text{ y } cl_{\tau_i}(U) \cap cl_{\tau_j}(V) = \emptyset.$$

En general, la unión arbitraria de cerrados no necesariamente es un cerrado, por lo anterior existe el concepto de conjuntos F_σ los cuales son uniones a lo más numerables de conjuntos cerrados, mientras que las intersecciones numerables de conjuntos abiertos son denotados por G_δ . Es fácil darse cuenta de que el complemento de un F_σ es un G_δ y que el complemento de un G_δ es un F_σ .

El resultado siguiente puede encontrarse en [1] y su demostración está basada en las equivalencias anteriores.

Teorema 1.2. Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico normal por pares. Sean $A, B \subset X$ tales que A es un conjunto τ_1 - F_σ , B es un conjunto τ_2 - F_σ y

$$cl_{\tau_1}(A) \cap B = \emptyset = A \cap cl_{\tau_2}(B).$$

Entonces existe un conjunto U τ_2 -abierto, con $A \subset U$ y un conjunto V τ_1 -abierto, donde $B \subset V$ y tal que $U \cap V = \emptyset$. Más aún, estos conjuntos satisfacen también la relación:

$$A \subset U \subset cl_{\tau_1}(U) \subset X - B, \text{ y } B \subset V \subset cl_{\tau_2}(V) \subset X - A.$$

2 Axiomas de separación por pares fuerte

En el 2013, Ajoy Mukharjee, en [4], define los axiomas de separación fuertes aprovechando el hecho de tener dos topologías fijas en un mismo espacio y que posiblemente los interiores respecto a topologías contrarias pudieran ser vacíos.

Definición 2.1. Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico. Un subconjunto A de X es (τ_i, τ_j) -dualmente abierto si existe un τ_j -abierto B , tal que $A = \text{int}_{\tau_i}(B)$.

Análogamente, un subconjunto C de X es (τ_i, τ_j) -dualmente cerrado, si existe un τ_j -cerrado D , tal que $C = \text{cl}_{\tau_i}(D)$.

En general no se tiene que con esta clase de conjuntos se pueda obtener una topología, pues en general, la unión finita de conjuntos dualmente abiertos, no necesariamente vuelve a ser un conjunto del mismo tipo, ver [4].

Definición 2.2. Un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) se dice Hausdorff por pares fuertemente, si para cada par de puntos $x, y \in X$, $x \neq y$, existen U τ_i -abierto y V τ_j -abierto, tales que $x \in \text{int}_{\tau_j}(U)$, $y \in \text{int}_{\tau_i}(V)$ y $U \cap V = \emptyset$.

Ejemplo 2.1. ([4], Ejemplo 2.2, pág. 167) Sea $X = \mathbb{R}$, con τ_1 la topología usual y τ_2 la topología generada por los intervalos de la forma $(a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$. A ésta topología se le llama topología del límite superior. Dados $x, y \in X$, con $x < y$, sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a < x < b < y < c$, pongamos $U_1 = (a, b) \in \tau_1$, $V_1 = (b, c] \in \tau_2$. Claramente $x \in \text{int}_{\tau_2}(U_1)$, $y \in \text{int}_{\tau_1}(V_1)$ y $U_1 \cap V_1 = \emptyset$. De igual manera, haciendo $U_2 = (b, c) \in \tau_1$, $V_2 = (a, b] \in \tau_2$ se cumple que $x \in \text{int}_{\tau_1}(V_2)$, $y \in \text{int}_{\tau_2}(U_2)$ y $U_2 \cap V_2 = \emptyset$. Por tanto (X, τ_1, τ_2) es Hausdorff por pares fuertemente.

Nótese que si (X, τ_1, τ_2) es Hausdorff por pares fuertemente, entonces es Hausdorff por pares según Kelly. Sin embargo, lo contrario no es cierto, como lo muestra el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.2. Sea $X = \mathbb{R}$, τ_1 la topología usual y

$$\tau_2 = \{\emptyset\} \cup \{U \cup (x, +\infty) : x \in \mathbb{R}, U \in \tau_1\}.$$

Probamos ya que $(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2)$ es Hausdorff por pares, sin embargo no es Hausdorff por pares fuertemente, pues si $x < y$, entonces cualquier intervalo $(\alpha, b) \in \tau_1$, con $x \in (\alpha, b)$, tendrá interior vacío respecto a la topología τ_2 .

Con los dos ejemplos anteriores, tenemos que estos conceptos no son equivalentes.

Teorema 2.1. *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. X es de Hausdorff por pares fuertemente.

2. Dado $x \in X$, para cada $y \in X$, $x \neq y$, existe U τ_i -abierto tal que:

$$x \in \text{int}_{\tau_j}(U) \quad y \quad y \notin \text{cl}_{\tau_i}(U)$$

3. Para cada $x \in X$, se cumple que:

$$\bigcap \{ \text{cl}_{\tau_i}(U) : x \in U, \quad U \text{ } \tau_i\text{-abierto} \} = \{x\}.$$

4. El conjunto $(X \times X) - \Delta$ es la unión de subconjuntos A ,

$(\tau_j \times \tau_i, \tau_i \times \tau_j)$ -dualmente abiertos, para los cuales $A = \text{int}_{\tau_j \times \tau_i}(W)$, con $W \subset (X \times X) - \Delta$, $\tau_i \times \tau_j$ -abierto, donde

$$\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subset (X \times X)$$

Demostración.

1) \Rightarrow 2) Supongamos que se cumple 1), sea $x \in X$, para cada $y \in X$, con $x \neq y$, existen U τ_i -abierto y V τ_j -abierto tales que:

$$x \in \text{int}_{\tau_j}U, \quad y \in \text{int}_{\tau_i}V \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset.$$

Como $U \subset X - V$, con $X - V$ τ_j -cerrado, se tiene que $\text{cl}_{\tau_j}(U) \subset X - V$; pero $\text{int}_{\tau_i}(V) \subset V$ luego $X - V \subset X - \text{int}_{\tau_i}(V)$, siendo éste último τ_i -cerrado. De aquí $\text{cl}_{\tau_i}(\text{cl}_{\tau_j}(U)) \subset X - \text{int}_{\tau_i}(V)$, como $\text{int}_{\tau_i}(V) \cap \text{int}_{\tau_j}(U) = \emptyset$, concluimos que $y \notin \text{cl}_{\tau_i}(\text{cl}_{\tau_j}(U))$.

2) \Rightarrow 3) Sea $x \in X$, consideremos

$$M = \bigcap \{ \text{cl}_{\tau_i}(\text{cl}_{\tau_j}(U)) : x \in U, \quad U \text{ } \tau_i\text{-abierto} \}.$$

Claramente $x \in M$, y para $y \neq x$, existe A τ_i -abierto tal que $x \in A$, con $y \notin \text{cl}_{\tau_i}(A)$, luego $y \notin M$. Por tanto $M = \{x\}$.

3) \Rightarrow 4) Sean $(x, y) \in (X \times X) - \Delta$, $x \neq y$, por 3) existe U τ_i -abierto tal que $x \in \text{int}_{\tau_j}(U)$ y $y \notin \text{cl}_{\tau_i}(\text{cl}_{\tau_j}(U))$, de aquí:

$$y \in X - \text{cl}_{\tau_i}(\text{cl}_{\tau_j}(U)) = \text{int}_{\tau_i}(X - \text{cl}_{\tau_j}(U)).$$

Si hacemos $V = X - cl_{\tau_j}(U)$, V es τ_j -abierto y

$$(x, y) \in int_{\tau_j}(U) \times int_{\tau_i}(V) = int_{\tau_j \times \tau_i}(U \times V).$$

Dado que $U \subset cl_{\tau_j}(U)$, se tiene que $V = X - cl_{\tau_j}(U) \subset X - U$, por tanto $V \cap U = \emptyset$; obteniendo $U \times V \subset (X \times X) - \Delta$.

Así, si tomamos $(x, y) \in (X \times X) - \Delta$, $x \neq y$, existen U τ_i -abierto, V τ_j -abierto, tales que $x \in int_{\tau_j}(U)$, $y \in int_{\tau_i}(V)$ y $U \cap V = \emptyset$. De donde $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$. Luego,

$$(x, y) \in int_{\tau_j}(U) \times int_{\tau_i}(V) \subset U \times V \subset (X \times X) - \Delta,$$

pero

$$int_{\tau_j}(U) \times int_{\tau_i}(V) = int_{\tau_j \times \tau_i}(U \times V).$$

Si $A = int_{\tau_j \times \tau_i}(U \times V)$, entonces A es $(\tau_j \times \tau_i, \tau_i \times \tau_j)$ -dualmente abierto. Por tanto, $(X \times X) - \Delta$ es unión de conjuntos dualmente abiertos.

4) \Rightarrow 1) Si $x, y \in X$, $x \neq y$, entonces $(x, y) \in (X \times X) - \Delta$. Luego, existe A $(\tau_j \times \tau_i, \tau_i \times \tau_j)$ -dualmente abierto tal que $(x, y) \in A = int_{\tau_j \times \tau_i}(U \times V)$, con $U \times V$ $\tau_i \times \tau_j$ -abierto y $U \times V \subset (X - \Delta)$. De lo anterior, claramente se tiene que $x \in int_{\tau_j}(U)$, $y \in int_{\tau_i}(V)$ y $U \cap V = \emptyset$. \square

Otro de los axiomas de separación dado por Ajoy Mukharjee en [4], es la normalidad por pares fuertemente.

Definición 2.3. Un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) , se dice que es normal por pares fuertemente, si para cada par de subconjuntos F τ_i -cerrado y G τ_j -cerrado, con $F \cap G = \emptyset$, existe un τ_j -abierto U y un τ_i -abierto V tales que $F \subset int_{\tau_i}(U)$ y $G \subset int_{\tau_j}(V)$, con $U \cap V = \emptyset$.

Teorema 2.2. En un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) , los siguientes enunciados son equivalentes:

1. (X, τ_1, τ_2) es normal por pares fuertemente.
2. Para cada F τ_i -cerrado y cada U τ_j -abierto, con $F \subset U$, existen W τ_j -abierto y D τ_i -cerrado tales que:

$$F \subset int_{\tau_i}(W) \subset W \subset D \subset cl_{\tau_j}(D) \subset U.$$

3. Para cada F τ_i -cerrado y cada U τ_j -abierto, con $F \subset U$, existe W τ_j -abierto, tal que

$$F \subset \text{int}_{\tau_i}(W) \subset \text{cl}_{\tau_i}(W) \subset \text{cl}_{\tau_j}(\text{cl}_{\tau_i}(W)) \subset U.$$

4. Para cada par de conjuntos F τ_i -cerrado y G τ_j -cerrado, con $F \cap G = \emptyset$, existe un τ_j -abierto W tal que

$$F \subset \text{int}_{\tau_i}(W) \quad \text{y} \quad G \cap \text{cl}_{\tau_j}(\text{cl}_{\tau_i}(W)) = \emptyset.$$

Demostración.

1) \Rightarrow 2) Supongamos que (X, τ_1, τ_2) es normal por pares fuertemente, sean F τ_i -cerrado y U τ_j -abierto, con $F \subset U$. Como $X - U$ es τ_j -cerrado y $F \cap (X - U) = \emptyset$, existen W τ_j -abierto, V τ_i -abierto tales que $F \subset \text{int}_{\tau_i}(W)$ y $X - U \subset \text{int}_{\tau_j}(V)$, con $W \cap V = \emptyset$. De lo anterior,

$$\text{cl}_{\tau_j}(X - V) = X - \text{int}_{\tau_j}(V) \subset U$$

e

$$\text{int}_{\tau_j}(V) \subset V \subset X - W \subset X - \text{int}_{\tau_i}(W) \subset X - F.$$

Luego $F \subset \text{int}_{\tau_i}(W) \subset W \subset X - V \subset X - \text{int}_{\tau_j}(V) = \text{cl}_{\tau_j}(X - V) \subset U$. Haciendo $D = X - V$, el cual claramente es τ_i -cerrado, se obtiene el resultado.

2) \Rightarrow 3) Sea F τ_i -cerrado, U τ_j -abierto, con $F \subset U$, como $X - U$ es τ_j -cerrado y $F \cap (X - U) = \emptyset$, por 2), existe W τ_j -abierto y D τ_i -cerrado tales que $F \subset \text{int}_{\tau_i}(W) \subset W \subset D \subset \text{cl}_{\tau_j}(D) \subset U$. Dado que D es τ_i -cerrado, $\text{cl}_{\tau_i}(W) \subset D \subset \text{cl}_{\tau_j}(D)$; luego $\text{cl}_{\tau_j}(\text{cl}_{\tau_i}(W)) \subset \text{cl}_{\tau_j}(D) \subset U$. Esto implica

$$F \subset \text{int}_{\tau_i}(W) \subset \text{cl}_{\tau_i}(W) \subset \text{cl}_{\tau_j}(\text{cl}_{\tau_i}(W)) \subset U.$$

3) \Rightarrow 4) Sean F τ_i -cerrado, G τ_j -cerrado, tales que $F \cap G = \emptyset$, luego $F \subset X - G$ el cual es τ_j -abierto. Por 3), existe W τ_j -abierto, tal que $F \subset \text{int}_{\tau_i}W \subset \text{cl}_{\tau_i}(W) \subset \text{cl}_{\tau_j}(\text{cl}_{\tau_i}(W)) \subset X - G$, luego $G \subset X - \text{cl}_{\tau_j}(\text{cl}_{\tau_i}(W))$, de aquí que $G \cap \text{cl}_{\tau_j}(\text{cl}_{\tau_i}(W)) = \emptyset$.

4) \Rightarrow 1) Supongamos que se cumple 4). Sean F τ_i -cerrado y G τ_j -cerrado, tales que $F \cap G = \emptyset$. Por hipótesis, existe W τ_j -abierto tal que

$F \subset \text{int}_{\tau_i}(W)$ y $G \cap \text{cl}_{\tau_j}(\text{cl}_{\tau_i}(W)) = \emptyset$. Luego $G \subset \text{int}_{\tau_j}(X - \text{cl}_{\tau_i}(W))$. Tomando $V = X - \text{cl}_{\tau_i}(W)$, el cual es τ_i -abierto, se cumple que $V \cap W \subset (X - W) \cap W = \emptyset$. \square

Ejemplo 2.3. ([4], Ejemplo 2.5, pág. 168) Sea \mathbb{R} el conjunto de los números reales y $a \in \mathbb{R}$ fijo, consideremos las topologías

$$\tau_1 = \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, a), [a, +\infty)\},$$

$$\tau_2 = \{\mathbb{R}, \emptyset, \mathbb{R} - \{a\}, (-\infty, a), (-\infty, a], (a, +\infty)\}.$$

Los posibles conjuntos τ_1 -cerrado son los mismos abiertos de τ_1 , y los posibles τ_2 -cerrados son $\mathbb{R}, \emptyset, \{a\}, [a, +\infty), (a, +\infty)$ y $(-\infty, a]$. Las parejas formadas por un τ_1 -cerrado con un τ_2 -cerrado, no triviales, cuya intersección es vacía, son: $\{(-\infty, a), [a, +\infty)\}, \{(-\infty, a), \{a\}\}, \{(-\infty, a), (a, +\infty)\}$. Para cada pareja de la lista anterior, existen un τ_i -abierto U y un τ_j -abierto V , disjuntos, cuyos interiores respecto a las topologías contrarias, contienen a los cerrados dados. Por ejemplo, para la primera pareja, $(-\infty, a)$ es τ_1 -cerrado y $(-\infty, a) \subset \text{int}_{\tau_1}(-\infty, a) = (-\infty, a) \in \tau_2$, mientras que $[a, +\infty)$ es τ_2 -cerrado y $[a, +\infty) \subset \text{int}_{\tau_1}[a, +\infty) = [a, +\infty) \in \tau_1$. Por tanto, este espacio bitopológico es normal por pares fuertemente.

Del hecho de que $\text{int}_{\tau_i}(U) \subset U$, se deduce que la normalidad por pares fuertemente implica la normalidad por pares de Kelly. Sin embargo, en [4] se da un ejemplo donde el recíproco no se cumple:

Ejemplo 2.4. ([4], Ejemplo 2.5, pág. 168) Sea $X = \{a, b, c\}$, con topologías

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}, \text{ y}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, c\}\}.$$

Veamos que este espacio bitopológico es normal por pares. Los posibles conjuntos τ_1 -cerrados no triviales son $\{b, c\}, \{c\}, \{b\}$, y los posibles τ_2 -cerrados no triviales son $\{a, c\}, \{a\}$. Las parejas formadas por un τ_1 -cerrado con un τ_2 -cerrado, no triviales, cuya intersección es vacía, son:

- i) $\{\{b, c\}, \{a\}\}$, ii) $\{\{c\}, \{a\}\}$,
- iii) $\{\{b\}, \{a\}\}$ y iv) $\{\{b\}, \{a, c\}\}$.

Para cada pareja de la lista anterior, existen un τ_i -abierto U y un τ_j -abierto V , disjuntos, que contienen a los cerrados dados. Por ejemplo, para la pareja i), $\{b, c\}$ es τ_1 -cerrado y $\{b, c\} \subset \{b, c\} \in \tau_2$, mientras que $\{a\}$ es τ_2 -cerrado y $\{a\} \subset \{a\} \in \tau_1$. Por tanto, este espacio bitopológico es normal por pares, sin embargo no es normal por pares fuertemente, pues para la pareja del inciso i) los interiores de los únicos abiertos disjuntos $int_{\tau_2} \{a\}$, $int_{\tau_1} \{b, c\}$ son vacíos.

Nótese que el espacio del Ejemplo 2.4 no es Hausdorff por pares. El siguiente ejemplo, muestra un espacio bitopológico Hausdorff por pares y normal por pares, que no es normal por pares fuertemente.

Ejemplo 2.5. Sea $X = \mathbb{R}$, τ_1 la topología usual y

$$\tau_2 = \{\emptyset\} \cup \{U \cup (x, +\infty) : x \in \mathbb{R}, U \in \tau_1\},$$

como ya se mostró en el Ejemplo 2.2, este espacio es Hausdorff por pares, pero no Hausdorff por pares fuertemente. Probemos ahora que es normal por pares, pero no normal por pares fuertemente. Para probar la normalidad por pares, usaremos la equivalencia 3 del Teorema 1.1.

Pimer caso: Sea A un conjunto τ_1 -cerrado y U τ_2 -abierto con

$$A \subset U = U_1 \cup (b, \infty),$$

para algún $U_1 \in \tau_1$ y $b \in \mathbb{R}$. Notemos que (\mathbb{R}, τ_1) es normal y que $\tau_2 \subset \tau_1$, por lo que $U \in \tau_1$. De lo anterior, existe V_1 τ_1 -abierto tal que

$$A \subset V_1 \subset cl_{\tau_1}(V_1) \subset U.$$

Si $A \cap (b, +\infty) = \emptyset$, hacemos $V = V_1 \cap (c, \infty)$, con $c = b + 1$. En caso contrario, sea $a_0 = \inf A \cap (b, +\infty)$. Puesto que A es τ_1 -cerrado, U es τ_2 -abierto, se tiene que $a_0 \in A$ y existe un $\epsilon > 0$, tal que $B_{\tau_1}(a_0, \epsilon) \subset (b, +\infty)$. Con lo anterior, si $\delta = \min \{\frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2}\}$, obtenemos que $V = V_1 \cup (c, +\infty) \in \tau_2$, con $c = a_0 - \delta$, cumple que:

$$A \subset V \subset cl_{\tau_1}(V) \subset U.$$

Segundo caso: Sea A un conjunto τ_2 -cerrado y U τ_1 -abierto con $A \subset U$. Se tiene

$$X - U \subset X - A,$$

donde $X - U$ es τ_1 -cerrado y $X - A$ τ_2 -abierto. Esto último nos regresa al primer caso, por lo que existe $V_2 \in \tau_2$ tal que

$$X - U \subset V_2 \subset cl_{\tau_1}(V_2) \subset X - A.$$

Sacando complementos tenemos:

$$A \subset X - cl_{\tau_1}(V_2) \subset X - V_2 \subset U,$$

haciendo $V = X - cl_{\tau_1}(V_2) = int_{\tau_1}(V_2) \in \tau_1$, se tiene que

$$A \subset V \subset cl_{\tau_2}(V) \subset X - V_2 \subset U.$$

Así, el espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) es normal por pares. Sin embargo, el conjunto $A = (-\infty, 0]$ es τ_2 -cerrado y es disjunto con $B = [1, 2]$, el cual es τ_1 -cerrado. Claramente, para cualquier $0 < \alpha < 1$, los conjuntos $U_\alpha = (-\infty, \alpha) \in \tau_1$ y $V = (\alpha, 3) \cup (4, +\infty) \in \tau_2$ se cumple que $A \subset U$, $B \subset V$, con $U_\alpha \cap V = \emptyset$. Sin embargo, $int_{\tau_2}(U_\alpha) = \emptyset$, por lo que la condición $A \subset int_{\tau_2}(U_\alpha)$ no puede ser satisfecha, lo que hace que éste espacio no sea normal por pares fuertemente.

El siguiente resultado que hemos obtenido es una generalización del Teorema 1.2.

Teorema 2.3. *Dado (X, τ_1, τ_2) , un espacio bitopológico normal por pares fuertemente, sean $A, B \subset X$ tales que A es un conjunto τ_i - F_σ , B un conjunto τ_j - F_σ y*

$$cl_{\tau_i}(A) \cap B = \emptyset = A \cap cl_{\tau_j}(B).$$

Entonces existe un conjunto U τ_j -abierto y un conjunto V τ_i -abierto, con $A \subset int_{\tau_i}(U)$, $B \subset int_{\tau_j}(V)$ y tales que $U \cap V = \emptyset$. Estos conjuntos satisfacen también la relación

$$A \subset int_{\tau_i}(U) \subset U \subset cl_{\tau_i}(U) \subset cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i}(U)) \subset X - B \quad (1)$$

y

$$B \subset int_{\tau_j}(V) \subset V \subset cl_{\tau_j}(V) \subset cl_{\tau_i}(cl_{\tau_j}(V)) \subset X - A.$$

Demostración.

Sean $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, con A_n τ_i -cerrado y B_n τ_j -cerrado.

Aplicando el inciso 3) del Teorema 2.2, a A_1 y $X - cl_{\tau_j}(B)$, existe un conjunto U_1 τ_j -abierto con

$$\begin{aligned} A_1 &\subset int_{\tau_i}(U)_1 \subset cl_{\tau_i}(U)_1 \\ &\subset cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i}(U_1)) \subset X - cl_{\tau_j}(B). \end{aligned}$$

Dado que $B_1 \cap (cl_{\tau_i}(A) \cup cl_{\tau_i}(U_1)) \subset (B \cap cl_{\tau_i}(A)) \cup (B \cap cl_{\tau_i}(U_1)) = \emptyset$, usando nuevamente el inciso 3) del Teorema 2.2 para los conjuntos B_1 y $X - (cl_{\tau_i}(A) \cup cl_{\tau_i}(U_1))$, existe un conjunto V_1 , τ_i -abierto tal que

$$\begin{aligned} B_1 &\subset int_{\tau_j}(V_1) \subset cl_{\tau_j}(V_1) \\ &\subset cl_{\tau_i}(cl_{\tau_j}(V_1)) \\ &\subset X - (cl_{\tau_i}(A) \cup cl_{\tau_i}(U_1)). \end{aligned}$$

Ahora, como $(A_2 \cup cl_{\tau_i}(U_1)) \cap (cl_{\tau_j}(B) \cup cl_{\tau_j}(V_1)) = \emptyset$ podemos aplicar nuevamente el inciso 3) del Teorema 2.2 a:

$$A_2 \cup cl_{\tau_i}(U_1) \subset X - (cl_{\tau_j}(B) \cup cl_{\tau_j}(V_1))$$

para obtener un conjunto U_2 τ_j -abierto para el cual

$$\begin{aligned} A_2 \cup cl_{\tau_i}(U_1) &\subset int_{\tau_i}(U_2) \\ &\subset cl_{\tau_i}(U_2) \subset cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i}(U_2)) \\ &\subset X - (cl_{\tau_j}(B) \cup cl_{\tau_j}(V_1)). \end{aligned}$$

Una vez más aplicando el mismo resultado a $B_2 \cup cl_{\tau_j}(V_1)$ y a:

$$X - (cl_{\tau_i}(A) \cup cl_{\tau_i}(U_1) \cup cl_{\tau_i}(U_2)),$$

puesto que $(B_2 \cup cl_{\tau_j}(V_1)) \cap (cl_{\tau_i}(A) \cup cl_{\tau_i}(U_1) \cup cl_{\tau_i}(U_2)) = \emptyset$, se obtiene un conjunto V_2 τ_i -abierto tal que:

$$\begin{aligned} B_2 \cup cl_{\tau_j}(V_1) &\subset int_{\tau_j}(V_2) \\ &\subset cl_{\tau_j}(V_2) \subset cl_{\tau_i}(cl_{\tau_j}(V_2)) \\ &\subset X - (cl_{\tau_i}(A) \cup cl_{\tau_i}(U_1) \cup cl_{\tau_i}(U_2)). \end{aligned}$$

Continuando de esta manera, se definen inductivamente los conjuntos U_n τ_j -abiertos y los conjuntos V_n τ_i -abiertos, satisfaciendo

$$\begin{aligned} A_n \cup cl_{\tau_i}(U_1) \cup \dots \cup cl_{\tau_i}(U_{n-1}) &\subset int_{\tau_i}(U_n) \\ &\subset cl_{\tau_i}(U_n) \subset cl_{\tau_j}(cl_{\tau_i}(U_n)) \\ &\subset X - (cl_{\tau_j}(B) \cup cl_{\tau_j}(V_1) \cup \dots \cup cl_{\tau_j}(V_{n-1})), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 B_n \cup cl_{\tau_j} V_1 \cup \dots \cup cl_{\tau_j} V_{n-1} &\subset int_{\tau_j} (V_n) \\
 &\subset cl_{\tau_j} (V_n) \subset cl_{\tau_i} (cl_{\tau_j} (V_n)) \\
 &\subset X - (cl_{\tau_i} (A) \cup cl_{\tau_i} (U_1) \cup \dots \cup cl_{\tau_i} (U_n)),
 \end{aligned}$$

para todo número natural n , donde $U_0 = V_0 = \emptyset$.

Si hacemos $U = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$ y $V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$ se tiene que U es τ_j -abierto, mientras que V es τ_i -abierto y claramente

$$A \subset U, \quad B \subset V \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset.$$

Dado que V es τ_i -abierto y $U \cap V = \emptyset$, se sigue que $cl_{\tau_i} (U) \cap V = \emptyset$, así que $cl_{\tau_i} (U) \cap B = \emptyset$. Más aún, como $\bigcup_{n=0}^{\infty} int_{\tau_i} (U_n) \subset int_{\tau_i} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} U_n \right)$, se sigue que

$$A \subset int_{\tau_i} (U) \subset cl_{\tau_i} (U) \subset X - B.$$

Ahora, una vez más podemos aplicar la equivalencia de normalidad por pares fuertemente (3) a los conjuntos $cl_{\tau_i} U$ y $X - B$ para obtener un W τ_j -abierto, tal que

$$\begin{aligned}
 cl_{\tau_i} U &\subset int_{\tau_i} (W) \subset cl_{\tau_i} (W) \subset \\
 &\subset cl_{\tau_j} (cl_{\tau_i} (W)) \subset X - B,
 \end{aligned}$$

y así, por $cl_{\tau_j} (cl_{\tau_i} U) \subset cl_{\tau_j} (cl_{\tau_i} W) \subset X - B$, se llega a

$$A \subset int_{\tau_i} (U) \subset cl_{\tau_i} (U) \subset cl_{\tau_j} (cl_{\tau_i} (U)) \subset X - B.$$

Análogamente, se puede obtener:

$$B \subset int_{\tau_j} (V) \subset cl_{\tau_j} (V) \subset cl_{\tau_i} (cl_{\tau_j} (V)) \subset X - A,$$

lo que prueba el teorema. □

3 Lema de Urysohn

El Lema de Urysohn nos da una caracterización de los espacios topológicos normales, cabe señalar que Kelly mostró este hecho para la normalidad por pares. Ahora obtuvimos la extensión de este importante resultado para la normalidad por pares fuertemente y con esto mostramos que efectivamente, el axioma dado por Ajoy Mukharjee en [4] es más fuerte que el dado por Kelly.

Si (X, τ) es un espacio topológico, la función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es semicontinua superiormente si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$\{x \in X : f(x) < \alpha\}$$

es un abierto en X . Análogamente, f es semicontinua inferiormente si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

es un abierto en X .

Definición 3.1. Sean (X, τ_1, τ_2) y (Y, σ_1, σ_2) dos espacios bitopológicos. Una función $f : (X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (Y, \sigma_1, \sigma_2)$ es llamada continua por pares o bicontinua si las dos funciones $f : (X, \tau_i) \rightarrow (Y, \sigma_i)$ $i = 1, 2$ son continuas.

En el caso de funciones bicontinuas de valores reales $f : (X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow \mathbb{R}$, se considera al espacio real como el espacio bitopológico $(\mathbb{R}, \nu_1, \nu_2)$, donde $\nu_1 = \nu_2$ representa a la topología usual. De igual forma, en la expresión $f : (X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow [0, 1]$ bicontinua, el conjunto $[0, 1]$ representa al espacio $([0, 1], \nu_1, \nu_2)$, donde $\nu_1 = \nu_2$ será la topología usual restringida al intervalo.

Para el caso de la normalidad por pares, Kelly obtuvo la siguiente extensión del Lema de Urysohn para espacios bitopológicos que se enuncia a continuación:

Teorema 3.1. (Urysohn, [7]) *Si (X, τ_1, τ_2) es un espacio bitopológico normal por pares, entonces para cualesquiera par de conjuntos F τ_1 -cerrado y G τ_2 -cerrado con $F \cap G = \emptyset$, existe una función $f : (X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow [0, 1]$ que satisface:*

- a) $f(x) = 0$, para toda $x \in F$ y $f(x) = 1$, para toda $x \in G$ y
- b) f es τ_1 -semicontinua inferiormente y τ_2 -semicontinua superiormente.

Para el caso de normalidad por pares fuertemente, se obtuvo:

Teorema 3.2. (*Extensión del Lema de Urysohn*) Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico normal por pares fuertemente. Si $A, B \subset X$ son tales que A es τ_i -cerrado, B es τ_j -abierto y $A \cap B = \emptyset$, entonces existe una función $f : X \rightarrow [0, 1]$ bicontinua que satisface:

$$f|_A = 0 \quad \text{y} \quad f|_B = 1,$$

esto es, para cada $x \in A$, $f(x) = 0$, y $f(x) = 1$, para $x \in B$.

Demostración.

Seguiremos el esquema de la clásica demostración del Teorema de Urysohn. Hagamos $D_0 = A$ y $V_1 = X - B$. De esta forma, D_0 es τ_i -cerrado, V_1 es τ_j -abierto y $D_0 \subset V_1$. Por (2.2) existen $D_{\frac{1}{2}}$ τ_i -cerrado y $V_{\frac{1}{2}}$ τ_j -abierto, tales que:

$$D_0 \subset \text{int}_{\tau_i} \left(V_{\frac{1}{2}} \right) \subset V_{\frac{1}{2}} \subset D_{\frac{1}{2}} \subset \text{cl}_{\tau_j} \left(D_{\frac{1}{2}} \right) \subset V_1.$$

Aplicando la misma propiedad a los pares $D_0 \subset V_{\frac{1}{2}}$ y $D_{\frac{1}{2}} \subset V_1$, afirmamos la existencia de dos pares de conjuntos $D_{\frac{1}{4}}, D_{\frac{3}{4}}$ τ_i -cerrados y $V_{\frac{1}{4}}, V_{\frac{3}{4}}$ τ_j -abiertos tales que:

$$\begin{aligned} D_0 &\subset \text{int}_{\tau_i} \left(V_{\frac{1}{4}} \right) \subset V_{\frac{1}{4}} \subset D_{\frac{1}{4}} \\ &\subset \text{cl}_{\tau_j} \left(D_{\frac{1}{4}} \right) \subset V_{\frac{1}{2}} \subset D_{\frac{1}{2}} \\ &\subset \text{int}_{\tau_i} \left(V_{\frac{3}{4}} \right) \subset V_{\frac{3}{4}} \\ &\subset D_{\frac{3}{4}} \subset \text{cl}_{\tau_j} \left(D_{\frac{3}{4}} \right) \subset V_1. \end{aligned}$$

Continuando en esta forma obtenemos dos familias de conjuntos no decrecientes $\{D_{\frac{k}{2^n}} : n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \dots, 2^{n-1} + 1\}$ y $\{V_{\frac{k}{2^n}} : n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \dots, 2^{n-1}\}$, que satisfacen:

$$\begin{aligned} D_{\frac{k-1}{2^n}} &\subset \text{int}_{\tau_i} \left(V_{\frac{k}{2^n}} \right) \subset V_{\frac{k}{2^n}} \\ &\subset D_{\frac{k}{2^n}} \subset \text{cl}_{\tau_j} \left(D_{\frac{k}{2^n}} \right) \\ &\subset V_{\frac{k+1}{2^n}} \subset D_{\frac{k+1}{2^n}} \end{aligned}$$

para $k = 1, \dots, 2^{n-1}$. Por conveniencia hacemos $D_1 = X$ y $V_0 = \emptyset$. De manera general:

$$D_q \subset \text{int}_{\tau_i} (V_p) \subset V_p \subset D_p \quad (2)$$

$$\subset cl_{\tau_j}(D_p) \subset V_r \subset D_r.$$

para cada $q, p, r \in D$, (donde D es el conjunto de números diádicos), con $q < p < r$.

Con lo anterior, se puede definir la función $f : X \rightarrow [0, 1]$, por:

$$f(x) = \inf\{p : x \in V_p\}, \quad x \in X, \tag{3}$$

la cual es la misma que propone Kelly y que como se menciona en [7] y en [1], esta función f así definida, también es igual a:

$$f(x) = \inf\{p : x \in D_p\},$$

para cada $x \in X$. En el mismo trabajo se prueba que f es τ_i -semicontinua inferiormente y τ_j -semicontinua superiormente, ahora probaremos que ésta es τ_i -semicontinua superiormente y τ_j -semicontinua inferiormente. Afirmamos que $f(x)$, definida en (3), es también igual a:

$$\inf\{p : x \in int_{\tau_i}(V_p)\} \quad e \tag{4}$$

$$\inf\{p : x \in cl_{\tau_j}(D_p)\}. \tag{5}$$

En efecto, para ver que la expresión de (4) es igual a $f(x)$, de:

$$\inf\{p : x \in D_p\} \leq \inf\{p : x \in int_{\tau_i}(V_p)\}$$

se puede deducir de $\{p : x \in int_{\tau_i}(V_p)\} \subset \{p : x \in D_p\}$, y si

$$p_1 = \inf\{p : x \in D_p\} < \{\inf\{p : x \in int_{\tau_i}(V_p)\} = p_2,$$

entonces existen $q, r \in (p_1, p_2) \cap D$, con $q < r$, para los cuales (utilizando 2)

$$x \in D_q \subset int_{\tau_i}(V_r) \subset V_r \subset D_r \subset cl_{\tau_j}(D_r),$$

lo que contradice la definición de p_2 . De manera similar se puede verificar que la expresión de (5) es igual a $f(x)$. También es claro que para cualquier $x \in X$, $0 \leq f(x) \leq 1$; que $f(x) = 0$, si $x \in A$ y $f(x) = 1$, si $x \in B$.

Para probar que f es τ_i -semicontinua superiormente, sea α un número real, con $0 < \alpha \leq 1$. De la expresión (4), se tiene que:

$$f(x) < \alpha \quad \text{si y sólo si, existe } p, p < \alpha, x \in int_{\tau_i}(V_p)$$

$$\text{si y sólo si } x \in \bigcup_{p < \alpha} \text{int}_{\tau_i}(V_p),$$

probando así que $f^{-1}([0, \alpha)) = \bigcup_{p < \alpha} \text{int}_{\tau_i}(V_p)$ es un conjunto τ_i -abierto. La τ_j -semicontinuidad inferior de f se deduce de la expresión (5) de $f(x)$ y de que

$$f(x) > \alpha \text{ si y sólo si, existe } p, p > \alpha, x \in (X - \text{cl}_{\tau_j}(D_p))$$

$$\text{si y sólo si } x \in \bigcup_{p > \alpha} (X - \text{cl}_{\tau_j}(D_p)).$$

Probando así que el conjunto $f^{-1}((\alpha, 1])$ es τ_j -abierto. □

Ejemplo 3.1. Sea $X = \mathbb{R}$, con topologías

$$\tau_1 = \{\mathbb{R}, \emptyset, \{3\}\}, \text{ y}$$

$$\tau_2 = \{\mathbb{R}, \emptyset, \mathbb{R} - \{3\}\} \cup \{(-\infty, a) - \{3\} : a \in \mathbb{R}\}.$$

Veamos que este espacio bitopológico es normal por pares. El único τ_1 -cerrado no trivial es $A = \mathbb{R} - \{3\}$ y por tanto, $B = \{3\}$ es el único τ_2 -cerrado disjunto a él no trivial. Claramente $U = \mathbb{R} - \{3\} \in \tau_2$ y $V = \{3\} \in \tau_1$, satisfacen que $A \subset U$ y $B \subset V$, con $U \cap V = \emptyset$.

Dado que $\text{int}_{\tau_2}(V) = \emptyset$ y B no es vacío, este espacio no es normal por pares fuertemente.

Por otro lado, cualquier función $f : (X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow [0, 1]$ que satisfaga las condiciones del Lema de Urysohn para los cerrados disjuntos A y B dados anteriormente, esto es, que $f(x) = 0$ para cada $x \in A$ y $f(x) = 1$, para $x \in B$, será trivialmente τ_1 -semicontinua inferiormente y τ_2 -semicontinua superiormente. Sin embargo, f no es τ_1 -semicontinua superiormente pues para cada $0 < \alpha < 1$, el conjunto

$$\{x \in X : f(x) < \alpha\} = \mathbb{R} - \{3\},$$

no es τ_1 -abierto; por lo tanto, f no es bicontinua.

Esto muestra que la normalidad por pares fuerte, es indispensable para la bicontinuidad.

4 Teorema de Katětov

En 1952 Katětov en [5] y [6], establece el siguiente resultado: en un espacio topológico (X, τ) normal, para cada par de funciones $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, con f semicontinua superiormente, g semicontinua inferiormente y $f \leq g$, (esto es, $f(x) \leq g(x)$, para cada $x \in X$), existe una función continua $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \leq h \leq g$.

Unos años después, en 1967, Lane en [9] extiende este resultado para espacios bitopológicos de la siguiente manera:

Teorema 4.1. *(Extensión Teorema Katětov, Lane [9]) Un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) es normal por pares si y sólo si para cualesquiera par de funciones $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ con f τ_i -semicontinua superiormente, g τ_j -semicontinua inferiormente y $f \leq g$, existe una función $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple:*

- a) $f \leq h \leq g$, y
- b) h es τ_i -semicontinua superiormente y τ_j -semicontinua inferiormente.

Recientemente, hemos mostrado una extensión de este resultado para la normalidad por pares fuertemente, que a continuación enunciamos. Para la demostración de este teorema utilizaremos el Teorema 2.3.

Teorema 4.2. *(Extensión del teorema de Katětov) Un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) es normal por pares fuertemente si y sólo si para cada par de funciones $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, con f τ_i -semicontinua superiormente, g τ_j -semicontinua inferiormente y $f \leq g$, existe una función bicontinua $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \leq h \leq g$.*

Demostración.

Supóngase primero el caso particular $f, g : X \rightarrow [0, 1]$. Pongamos $D_0 = \emptyset$ y para cada $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, sean $D_r = g^{-1}([0, r])$ y $O_r = f^{-1}((r, 1])$. Se tiene que, para cada $0 < s < r$, $g^{-1}([0, s])$ es τ_j -cerrado ya que la función g es τ_j -semicontinua inferiormente. Como se puede ver $D_r = \bigcup_{0 < s < r} g^{-1}([0, s])$, por tal motivo D_r es un conjunto τ_j - F_σ . Ahora, puesto que f es τ_i -semicontinua superiormente, se tiene que el conjunto $f^{-1}([s, 1])$ es τ_j -cerrado y así $O_r = \bigcup_{r < s < 1} f^{-1}([s, 1])$ es un τ_j - F_σ . Además, es fácil verificar que:

$$cl_{\tau_i}(D_r) \cap O_r = \emptyset = D_r \cap cl_{\tau_j}(O_r). \tag{6}$$

Por la forma en que se han definido los conjuntos D_r y O_r y las igualdades dadas en (6) obtenemos que D_1 y O_1 satisfacen las hipótesis del Teorema 2.3, de aquí que existe un conjunto U_1 τ_j -abierto tal que:

$$\begin{aligned} D_1 &\subset \text{int}_{\tau_i}(U_1) \subset U_1 \subset \text{cl}_{\tau_i}(U_1) \\ &\subset \text{cl}_{\tau_j}(\text{cl}_{\tau_i}(U_1)) \subset X - O_1. \end{aligned}$$

De igual manera, existe un conjunto $U_{\frac{1}{2}}$ τ_j -abierto tal que:

$$\begin{aligned} D_{\frac{1}{2}} &\subset \text{int}_{\tau_i}\left(U_{\frac{1}{2}}\right) \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \text{cl}_{\tau_i}\left(U_{\frac{1}{2}}\right) \\ &\subset \text{cl}_{\tau_j}\left(\text{cl}_{\tau_i}\left(U_{\frac{1}{2}}\right)\right) \\ &\subset [X - O_{\frac{1}{2}}] \cap U_1. \end{aligned}$$

Similarmente existen dos conjuntos $U_{\frac{1}{4}}$ y $U_{\frac{3}{4}}$ τ_j -abiertos tales que:

$$\begin{aligned} D_{\frac{1}{4}} &\subset \text{int}_{\tau_i}\left(U_{\frac{1}{4}}\right) \subset U_{\frac{1}{4}} \\ &\subset \text{cl}_{\tau_i}\left(U_{\frac{1}{4}}\right) \subset \text{cl}_{\tau_j}\left(\text{cl}_{\tau_i}\left(U_{\frac{1}{4}}\right)\right) \\ &\subset [X - O_{\frac{1}{4}}] \cap U_{\frac{1}{2}}, \quad y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{\frac{3}{4}} \cup \text{cl}_{\tau_i}\left(U_{\frac{1}{2}}\right) &\subset \text{int}_{\tau_i}\left(U_{\frac{3}{4}}\right) \subset U_{\frac{3}{4}} \\ &\subset \text{cl}_{\tau_i}\left(U_{\frac{3}{4}}\right) \subset \text{cl}_{\tau_j}\left(\text{cl}_{\tau_i}\left(U_{\frac{3}{4}}\right)\right) \\ &\subset [X - O_{\frac{3}{4}}] \cap U_1. \end{aligned}$$

Continuando recursivamente, obtenemos conjuntos U_r τ_j -abiertos, que satisfacen la relación general

$$\begin{aligned} D_{\frac{2i-1}{2^m}} \cup \text{cl}_{\tau_i}\left(U_{\frac{i-1}{2^{m-1}}}\right) &\subset \text{int}_{\tau_i}\left(U_{\frac{2i-1}{2^m}}\right) \\ &\subset U_{\frac{2i-1}{2^m}} \subset \text{cl}_{\tau_i}\left(U_{\frac{2i-1}{2^m}}\right) \\ &\subset \text{cl}_{\tau_j}\left(\text{cl}_{\tau_i}\left(U_{\frac{2i-1}{2^m}}\right)\right) \\ &\subset [X - O_{\frac{2i-1}{2^m}}] \cap U_{\frac{i}{2^{m-1}}}, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$, $m \in \mathbb{N}$, donde $U_0 = \emptyset$. De lo anterior, si ponemos $r = \frac{2^i - 1}{2^m}$, se puede ver que se cumple:

$$\begin{aligned} D_r &\subset \text{int}_{\tau_i} U_r \subset U_r \\ &\subset \text{cl}_{\tau_i}(U_r) \subset \text{cl}_{\tau_j}(\text{cl}_{\tau_i}(U_r)) \\ &\subset X - O_r \end{aligned}$$

para todo $r \in D = (0, 1) \cap \{\frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \dots, 2^{n-1}\}$ y

$$U_r \subset \text{cl}_{\tau_j}(\text{cl}_{\tau_i}(U_r)) \subset \text{int}_{\tau_i}(U_{r'}) \subset U_{r'}$$

para cada $r, r' \in D$, con $r < r'$.

Así, podemos definir la función

$$h(x) = \inf\{r \in D : x \in U_r\}, \quad x \in X.$$

De igual manera que en la demostración del Lema de Urysohn, respecto a la definición de la función f , se pueden deducir otras expresiones para h , como:

$$\begin{aligned} h(x) &= \inf\{r \in D : x \in \text{int}_{\tau_i}(U_r)\} \\ &= \inf\{r \in D : x \in \text{cl}_{\tau_i}(U_r)\} \\ &= \inf\{r \in D : x \in \text{cl}_{\tau_j}(\text{cl}_{\tau_i} U_r)\}, \quad x \in X. \end{aligned}$$

La bicontinuidad de h se deduce de manera similar a la de f en el Teorema 3.2.

Resta probar que $f \leq h \leq g$. Para hacerlo, sean $x \in X$ y $r \in D$ tales que $r < f(x)$, entonces para cada $r' \in D$ con $0 \leq r' < r$, se tiene $x \notin X - O_{r'}$ y por tanto $x \notin U_{r'}$, implicando que $h(x) \geq r$; pero si $h(x) \geq r$, para cada $r \in D$, con $r < f(x)$, se tiene que $f(x) \leq h(x)$. Por otro lado, si $r \in D$ es tal que $g(x) < r$, entonces $x \in D_r \subset U_r$ y por tanto $h(x) \leq r$, para todo $r \in D$, implicando así que $h(x) \leq g(x)$.

Para deducir el caso general $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se usará el caso particular ya probado, al utilizar el homomorfismo estrictamente creciente $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ dado por:

$$\varphi(x) = \frac{|x| + x + 1}{2(|x| + 1)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Consecuentemente se puede aplicar el resultado probado para las funciones $\bar{f} = \varphi \circ f$ y $\bar{g} = \varphi \circ g$, encontrando una función $\bar{h} : X \rightarrow (0, 1)$ bicontinua tal

que $\bar{f} \leq \bar{h} \leq \bar{g}$. De tal forma que la función buscada es $h = \varphi^{-1} \circ \bar{h} : X \rightarrow \mathbb{R}$ igualmente bicontinua.

Recíprocamente, supóngase que A y B son dos subconjuntos disjuntos τ_i -cerrado y τ_j -cerrado, respectivamente. Las funciones características χ_A y χ_{X-B} son funciones τ_i -semicontinua superiormente, τ_j -semicontinua inferiormente y satisfacen $\chi_A \leq \chi_{X-B}$. Por hipótesis existe una función bicontinua $h : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $\chi_A \leq h \leq \chi_{X-B}$, por la bicontinuidad de h , $U = h^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ es un conjunto τ_i -abierto y τ_j -abierto, mientras que $D = h^{-1}([\frac{1}{4}, 1])$ es un conjunto τ_i -cerrado y τ_j -cerrado. Así:

$$A \subset \text{int}_{\tau_i}(U) \subset U \subset D \subset \text{cl}_{\tau_j}(D) \subset X - B.$$

Con lo que queda probado el resultado. □

Ejemplo 4.1. Consideremos el espacio $X = \mathbb{R}$, con topologías del Ejemplo 3.1.

Como ya se probó, este espacio bitopológico es normal por pares pero no normal por pares fuertemente. Ahora, las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

satisfacen las hipótesis del Teorema 4.2, esto es, f es τ_2 -semicontinua superiormente, g τ_1 -semicontinua inferiormente y $f \leq g$.

Cualquier función

$$h : (X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisfaga la condición $f \leq h \leq g$, deberá cumplir también que $h(3) = 1$ y $0 \leq h(x) \leq \frac{1}{2}$, pero esta función no será bicontinua; mostrando así que la normalidad por pares fuerte es indispensable para concluir la bicontinuidad en nuestra extensión del Teorema de Katětov.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo obtenido por parte del Programa Para el Desarrollo Profesional Docente mediante la aprobación del proyecto Espacios Asimétricos, Bitopológicos y Aplicaciones en la Complejidad de Algoritmos del Cuerpo Académico UTMIX-39.

Bibliografía

- [1] Cobzaş, Ş. *Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces*, Frontiers in Mathematics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel. 006, (2013).
- [2] Fletcher, P., Hoyle, H. B. III and Patty, C. W. *The comparison of topologies*, Duke Math. J. 36, (1969), 325-331.
- [3] Hernández, J. M., Álvarez, L. C. *On bicontinuous functions in strongly pairwise normal spaces*, Global Journal of Pure and Applied Mathematics. Volume 12, No. 1. (2016), 1053-1060.
- [4] Mukharjee, A. *Some new bitopological notions*, Publications de L'Institut Mathématique. Nouvelle série, tome 93 (107). (2013), 165-172.
- [5] Katětov, M. *On real-valued functions in topological spaces*, Fund. Math., 38, (1951), 85-91.
- [6] Katětov, M. Correction to: *On real-valued functions in topological spaces*, Fund. Math., 40, (1953), 203-205.
- [7] Kelly, J. C. *Bitopological spaces*, Proc. London Math. Soc. **13**, (1963), 71-89.
- [8] Kilicman, A. and Salleh, Z. *On pairwise Lindelöf bitopological spaces*, Topology and its Applications. Elsevier. 154, (2007), 1600-1607.
- [9] Lane, E. P. *Bitopological spaces and quasi-uniform spaces*, Proc. Londond Math. Soc. 17, (1967), 241-256.

- [10] Saegrove, M. J. *On bitopological spaces*, Iowa State University, Digital Repositroy@Iowa State University. Retrospective Theses and Dissertations. Paper 4914, (1971).

Universidad Tecnológica Mixteca
Km 2.5 Carretera a Acatlima,
Huajuapán de León, Oaxaca, C.P. 69000

`jmh@mixteco.utm.mx`

`lalvarez@mixteco.utm.mx`

Capítulo 7

Progresiones aritméticas como base para algunos espacios topológicos

Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Fernando Mauricio Rivera Vega
FCFM, BUAP

Resumen

En el presente trabajo se revisan propiedades topológicas como la conexidad, regularidad y compacidad de los espacios topológicos definidos por Furstenberg, Golomb y Kirch, los cuales tienen como base conjuntos de progresiones aritméticas. El primero definido sobre el conjunto de los números enteros, \mathbb{Z} , y los dos últimos sobre el conjunto enteros positivos, \mathbb{N} . Además, se incluyen algunas aplicaciones de los espacios antes mencionados a la Teoría de los Números.

1 Preliminares

Las letras \mathbb{Z} , \mathbb{N} y \mathbb{N}_0 denotan el conjunto de los enteros, el conjunto de los enteros positivos y los enteros no negativos, respectivamente. El símbolo $\Theta(a)$ denota el conjunto de todos los factores primos de $a \in \mathbb{N}$, es decir, si $a = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n}$ es la descomposición de a en producto de potencias de primos, donde $m_i \in \mathbb{N}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces $\Theta(a) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Para $a, b \in \mathbb{Z}$, se usan los símbolos (a, b) y $[a, b]$ para denotar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de a y b , respectivamente. Además, para $a, b \in \mathbb{N}$ y $c \in \mathbb{Z}$, haciendo un abuso de notación diremos que

$$\{\mathbf{an} + \mathbf{b}\} = \{an + b : n \in \mathbb{N}_0\},$$

$$\{\mathbf{an}\} = \{an : n \in \mathbb{N}\},$$

y

$$\{\mathbf{az} + \mathbf{c}\} = \{az + c : z \in \mathbb{Z}\}.$$

2 La topología de Furstenberg

En 1955 H. Furstenberg define la base \mathcal{B} de una topología τ_F en el conjunto de los números enteros \mathbb{Z} , véase [7, página 900]. Dicha base esta conformada por la colección de todas las progresiones aritméticas $\{\mathbf{az} + \mathbf{c}\}$. Sin dificultad se logra ver que un subconjunto $U \subset \mathbb{Z}$ es un conjunto abierto si y solo si es el vacío o cada $x \in U$ admite algún entero positivo a tal que $\{\mathbf{az} + \mathbf{x}\} \subset U$. Veamos que, en efecto, \mathcal{B} es base para una topología en \mathbb{Z} .

Es claro que, $\bigcup \mathcal{B} \subset \mathbb{Z}$. Para la otra contención basta notar que $\mathbb{Z} = \{\mathbf{z}\}$, es decir, basta elegir $a = 1$ y $c = 0$. Así, $\mathbb{Z} = \bigcup \mathcal{B}$.

Sean $\{\mathbf{a_1z} + \mathbf{c_1}\}, \{\mathbf{a_2z} + \mathbf{c_2}\} \in \mathcal{B}$ tales que $\{a_1z + b_1\} \cap \{a_2z + b_2\} \neq \emptyset$. Tomemos $x \in \{a_1z + b_1\} \cap \{a_2z + b_2\}$ y consideremos el abierto básico $\{az + x\}$ con $a = [a_1, a_2]$, además, supongamos que $a = a_1n_1$ y $a = a_2n_2$ para algunos $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Es claro que $x \in \{az + x\}$, además, afirmamos que $\{az + x\} \subset \{a_1z + b_1\} \cap \{a_2z + b_2\}$. En efecto, sea $x' \in \{az + x\}$, entonces existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $x' = az + x$. Como $x \in \{a_1z + b_1\} \cap \{a_2z + b_2\}$ existen $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $x = a_1z_1 + b_1$ y $x = a_2z_2 + b_2$. Entonces

$$\begin{aligned} x' &= az + a_1z_1 + b_1 \\ &= a_1n_1z + a_1z_1 + b_1 \\ &= a_1(n_1z + z_1) + b_1 \end{aligned}$$

y también,

$$\begin{aligned} x' &= az + a_2z_2 + b_2 \\ &= a_2n_2z + a_2z_2 + b_2 \\ &= a_2(n_2z + z_2) + b_2 \end{aligned}$$

Así, $x \in \{az + x\} \subset \{a_1z + b_1\} \cap \{a_2z + b_2\}$.

Por lo tanto, \mathcal{B} es base de una topología para \mathbb{Z} .

Observación 2.1. Notar que la base \mathcal{B} tiene tantos elementos como números naturales, es decir, el espacio (\mathbb{Z}, τ_F) es segundo numerable.

Observación 2.2. Ningún abierto en τ_F , a excepción del vacío, puede ser un conjunto finito, ya que si $A \neq \emptyset$ es un conjunto abierto entonces existe $\{az + b\} \in \mathcal{B}$, con $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{Z}$ tal que $\{az + b\} \subset A$, donde $\{az + b\}$ es una progresión aritmética infinita. De ello también se tiene que el complemento de un conjunto finito no puede ser cerrado.

Observación 2.3. Los subconjuntos $\{az + b\}$ son abiertos (por definición) y cerrados, ya que podemos escribir $\{az + b\}$ como el complemento de una unión de subconjuntos abiertos

$$\{az + b\} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{j=1}^{a-1} \{az + (b + j)\}$$

Es decir, el espacio (\mathbb{Z}, τ_F) es un espacio cero dimensional y por lo tanto, totalmente desconexo.

Furstenberg también comenta en [3] que el espacio (\mathbb{Z}, τ_F) es normal, y por lo tanto metrizable. Para nuestros propósitos nos restringiremos a ver que dicho espacio es regular.

Teorema 2.4. *El espacio (\mathbb{Z}, τ_F) es regular.*

Demostración. Primero veamos que el espacio (\mathbb{Z}, τ_F) es un espacio T_1 ; para ello tomemos $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $x \neq y$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x < y$ y consideremos $\{(y - x + 1)z + x\}, \{(y - x + 1)z + y\} \in \mathcal{B}$. Es claro que $x \in \{(y - x + 1)z + x\}$ y $y \in \{(y - x + 1)z + y\}$.

Si $x \in \{(y - x + 1)z + y\}$ entonces $x = (y - x + 1)z_1 + y$ para algún $z_1 \in \mathbb{Z}$, y así, $x - y = (y - x + 1)z_1$. Como $x < y$, se tiene que $y - x + 1 > 1$ y $x - y < 0$, por lo cual $z_1 < 0$. Si $z_1 = -1$, se tendría que $x - y = x - y - 1$, lo cual es un contradicción, por lo tanto, $z_1 < -1$. Entonces $x - y = (y - x + 1)z_1 < -(y - x + 1)$, es decir, $x - y < x - y - 1$, lo cual tampoco es posible y lo obtenemos a partir de suponer que $x \in \{(y - x + 1)z + y\}$, por lo tanto, $x \notin \{(y - x + 1)z + y\}$.

Si $y \in \{(y - x + 1)z + x\}$, entonces $y = (y - x + 1)z_2 + x$ para algún $z_2 \in \mathbb{Z}$, y así, $y - x = (y - x + 1)z_2$. Como $x < y$, se tiene que $y - x + 1 > 1$ y $y - x > 0$, por lo cual $z_2 > 0$. Si $z_2 = 1$, se tendría que $y - x = y - x + 1$, lo cual es un

contradicción, por lo tanto, $z_2 > 1$. Entonces $y - x = (y - x + 1)z_2 > (y - x + 1)$, es decir, $y - x > y - x + 1$, lo cual nuevamente tampoco es posible y se obtiene de suponer que, $y \in \{(y - x + 1)z + x\}$, por ende $y \notin \{(y - x + 1)z + x\}$. Por lo tanto, (\mathbb{Z}, τ_F) es T_1 .

Ahora veamos que, (\mathbb{Z}, τ_F) cumple el inciso (2) de la Proposición 5.26 de [2]. Sean $x \in \mathbb{Z}$ y $U \subset \mathbb{Z}$ un abierto tal que $x \in U$. Entonces existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \{az + x\} \subset U$, pero $\{az + x\} \in \mathcal{B}$ es un conjunto abierto y cerrado, entonces $x \in \{az + x\} = \{az + x\} \subset U$.

Por lo tanto, (\mathbb{Z}, τ_F) es regular. \square

Corolario 2.5. *El espacio topológico (\mathbb{Z}, τ_F) es metrizable*

Demostración. Como el espacio (\mathbb{Z}, τ_F) es regular y segundo numerable, entonces por el Teorema de Metrización de Uryshon, el espacio es metrizable. \square

Con lo desarrollado hasta ahora daremos una prueba topológica de la infinitud de los números primos que se le atribuye a Furstenberg.

Teorema 2.6. *El conjunto de los números primos es infinito.*

Demostración. Notar que los únicos números que no son múltiplos de números primos son -1 y 1 . Es decir,

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} \{pz\}$$

donde \mathbb{P} es el conjunto de los números primos.

Por la Observación 2.2, se tiene que $\bigcup_{p \in \mathbb{P}} \{pz\}$ no puede ser cerrado ya que su complemento es un conjunto finito. Por otro lado, por la Observación 2.3, se tiene que los subconjuntos $\{pz\}$ son cerrados. Así, si hubiera una cantidad finita de números primos, se tendría una unión finita de subconjuntos cerrados, la cual sería cerrada. Luego, $\bigcup_{p \in \mathbb{P}} \{pz\}$ es cerrado, lo cual es una contradicción por la Observación 2.2. \square

Veamos algunos resultados más del espacio topológico (\mathbb{Z}, τ_F) .

Teorema 2.7. *Toda progresión aritmética en \mathbb{Z} es disun conjunto conexo.*

Demostración. Sea $\{az+b\} \subset \mathbb{Z}$. Notar que la progresión aritmética $\{(2a)z+b\} \subsetneq \{az+b\}$, y además $\{(2a)z+b\}$ es un conjunto abierto y cerrado no vacío. Por lo tanto, la progresión $\{a+b\}$ es disun conjunto conexo. \square

Corolario 2.8. *El espacio topológico (\mathbb{Z}, τ_F) no es conexo.*

Demostración. Notar que, $\mathbb{Z} = \{z\}$, es decir, elegir $a = 1$ y $b = 0$. Por el Teorema 2.7, la progresión aritmética $\{z\}$ es disun conjunto conexo. Por lo tanto, el espacio topológico (\mathbb{Z}, τ_F) también lo es. \square

Teorema 2.9. *El espacio topológico (\mathbb{Z}, τ_F) no es localmente conexo.*

Demostración. Tomemos $x \in \mathbb{Z}$ y V_x una vecindad abierta x . Si (\mathbb{Z}, τ_F) fuera localmente conexo entonces existiría $U_x \subset V_x$ abierto y conexo tal que $x \in U_x$. Entonces existe un entero positivo a tal que $\{az+x\} \subset U_x$. Como $\{az+x\}$ es abierto y cerrado entonces U_x no es conexo, lo cual es una contradicción. \square

3 La topología de Golomb

En 1959 S. Golomb [4] presentó una prueba similar a la de la infinitud de los números primos dada por Furstenberg, usando una topología τ_G en \mathbb{N} , cuya base es

$$\mathcal{B}' = \{\{an + b\} : (a, b) = 1\}$$

que fue descrita en 1953 por M. Brown [1]. Rápidamente se tiene que todo conjunto abierto no vacío en (\mathbb{N}, τ_G) es infinito porque contiene una progresión aritmética. Sin embargo, todas las progresiones aritméticas $\{pn\}$, donde p es un número primo, son cerrados pero no abiertos porque su complemento

$$\bigcup_{i=1}^{p-1} \{pn + i\}$$

es unión de conjuntos abiertos.

Veamos la versión de la prueba de la infinitud de números primos dada por Golomb.

Teorema 3.1. *El conjunto de los números primos es infinito.*

Demostración. Sea $X = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} \{pn\}$ donde \mathbb{P} es el conjunto de los números primos. Si X es una unión finita de conjuntos cerrados, entonces X es cerrado. Pero el complemento de X es el singular $\{1\}$, el cual no es vacío ni infinito y por lo tanto, no puede ser abierto. Como el complemento de X no es abierto, X no puede ser cerrado, por lo cual la unión no es finita, y así, los números primos son infinitos. □

El espacio de Golomb tiene diversas propiedades topológicas que son de ayuda para aplicaciones en Teoría de Números. A continuación presentamos algunas de ellas.

Teorema 3.2. *El espacio topológico (\mathbb{N}, τ_G) es Hausdorff.*

Demostración. Sean $s, t \in \mathbb{N}$ distintos. Supongamos sin pérdida de generalidad que $s > t$ y tomemos un número primo $p > s$. Entonces $\{pn + s\}$ y $\{pn + t\}$ son conjuntos abiertos y ajenos que separan a s y t . En efecto, si existiera $x \in \{pn + s\} \cap \{pn + t\}$ entonces $x = pn_1 + s = pn_2 + t$ para algunos $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$. Claramente $n_1 \neq n_2$, de lo contrario, $s = t$, lo cual no es posible. Si $n_1 > n_2$, entonces $pn_1 + s > pn_2 + t$, porque $s > t$, lo cual es una contradicción. Si $n_1 < n_2$, entonces $s = p(n_2 - n_1) + t$. Luego, como $n_2 - n_1 \geq 1$ y $t \in \mathbb{N}$ entonces $s > p$, lo cual es nuevamente una contradicción. □

La siguiente observación será de gran utilidad de aquí en adelante por las características que tienen los abiertos básicos de (\mathbb{N}, τ_G) .

Observación 3.3. Si $a, b \in \mathbb{N}$ son coprimos entonces existen $s \in \mathbb{N}$ y t un entero negativo tales que $1 = as + bt$.

Teorema 3.4. *El espacio topológico (\mathbb{N}, τ_G) es conexo.*

Demostración. Supongamos que existen dos conjuntos abiertos, no vacíos y ajenos O_1 y O_2 tales que $\mathbb{N} = O_1 \cup O_2$. Sean $\{a_1n + b_1\}$ y $\{a_2n + b_2\}$ abiertos básicos de los conjuntos O_1 y O_2 , respectivamente. Sea α un múltiplo de a_1 de la forma a_1n_1 con $n_1 \in \mathbb{N}$. Si α está en O_2 se tendría que $\alpha = a_1n_1 = An_0 + B$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}_0$, y donde $\{An + B\} \subset O_2$.

Como $(A, B) = 1$, existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que $1 = As + Bt = As + (\alpha - An_0)t = A(s - n_0t) + \alpha t$, y por lo tanto $(\alpha, A) = 1$. De lo anterior, como $\alpha = a_1n_1$ entonces $1 = A(s - n_0t) + a_1(n_1t)$, es decir, $(A, a_1) = 1$. Entonces $\{a_1n + b_1\} \cap \{An + B\} \neq \emptyset$, de lo contrario, como $(A, B) = 1$ y por la Observación 3.3, existen $s_1 \in \mathbb{N}$ y t_1 un entero negativo tales que $As_1 + Bt_1 = 1$, entonces $As_1b_1 = b_1 - Bt_1b_1$. Notar que, $x = a_1n_1(-t_1b_1 + 1) + b_1 \in \{a_1n + b_1\}$, porque $n_1(-t_1b_1 + 1) \geq 0$. Pero,

$$\begin{aligned} x &= -at_1b_1 + \alpha + b_1 \\ &= -An_1t_1b_1 - Bt_1b_1 + An_1 + B + b_1 \\ &= -An_1t_1b_1 + An_1 + b_1 - Bt_1b_1 + B \\ &= A(-n_1t_1b_1 + n_1) + (b_1 - Bt_1b_1) + B \\ &= A(-n_1t_1b_1 + n_1) + As_1b_1 + B \\ &= A(-n_1t_1b_1 + n_1 + s_1b_1) + B \end{aligned}$$

donde $-n_1t_1b_1 + n_1 + s_1b_1 \geq 0$. Entonces $x \in \{An + B\}$, contradiciendo que O_1 y O_2 son ajenos. Por lo tanto, todo múltiplo de a_1 de la forma a_1n con $n \in \mathbb{N}$ debe pertenecer a O_1 . De manera análoga, los múltiplos de la misma forma de a_2 deben pertenecer a O_2 . Pero entonces los múltiplos comunes de a_1 y a_2 que tienen la misma forma deben pertenecer tanto a O_1 como a O_2 , lo cual contradice nuevamente que ambos conjuntos son ajenos. Por lo tanto, (\mathbb{N}, τ_G) es conexo.

□

Teorema 3.5. *El espacio topológico (\mathbb{N}, τ_G) no es regular.*

Demostración. El conjunto $\{2n\}$ es cerrado ya que $\mathbb{N} \setminus \{2n\} = \{2n + 1\}$ y $1 \notin \{2n\}$. Supongamos que existen cubiertas abiertas para $\{2n\}$ y 1 que los separan. Cualquier cubierta abierta del 1 que no intersekte a $\{2n\}$ debe contener una progresión $\{en + 1\}$, donde e es un número par, es decir, $e \in \{2n\}$.

Sea $\{an + b\}$ un elemento de la cubierta abierta de $\{2n\}$ que contenga a e , entonces $e = an_0 + b$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Como $(a, b) = 1$, por la Observación 3.3, existen $s, t \in \mathbb{N}$ tales que $1 = at + b(-s)$. Si $x = e(s + 1) + 1$, es claro que $x \in \{en + 1\}$, además,

$$\begin{aligned}
x &= es + e + 1 \\
&= an_0s + bs + an_0 + b + 1 \\
&= an_0s + an_0 + 1 + bs + b \\
&= an_0s + an_0 + at + b \\
&= a(n_0s + n_0 + t) + b
\end{aligned}$$

luego, $x \in \{an + b\}$. Entonces $\{en + 1\} \cap \{an + b\} \neq \emptyset$. Así, el conjunto cerrado $\{2n\}$ y el punto 1 no pueden tener vecindades abiertas ajenas. \square

Corolario 3.6. *El espacio topológico (\mathbb{N}, τ_G) no es localmente compacto.*

Demostración. Como (\mathbb{N}, τ_G) es Hausdorff, si además fuese localmente compacto entonces sería regular. \square

Teorema 3.7. *El espacio topológico (\mathbb{N}, τ_G) no es compacto.*

Demostración. Notar primero que, si p es un número primo entonces $\{pn + (p - 1)\} = \{pm - 1\} \in \mathcal{B}'$ donde $n \in \mathbb{N}_0$ y $m = n + 1 \in \mathbb{N}$. La unión

$$\mathcal{G} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} \{pm - 1\}$$

donde \mathbb{P} es el conjunto de los números primos, es una cubierta abierta infinita para los enteros positivos. En efecto, si suponemos que existe $x \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{G}$ entonces $(\forall p \in \mathbb{P})(\forall m \in \mathbb{N})(x \neq pm - 1)$, por lo cual $x + 1 \neq pm$. Luego $x + 1$ no puede ser primo ni compuesto. Entonces $x + 1 = 1$, es decir, $x = 0$, lo cual es una contradicción. Así, \mathcal{G} es cubierta abierta infinita de los enteros positivos.

Notar que, si quitamos a $\{qm - 1\}$ con $q \in \mathbb{P}$ de la cubierta \mathcal{G} , entonces $q - 1 \notin \mathcal{G} \setminus \{qm - 1\}$, de lo contrario existe $p' \in \mathbb{P}$ tal que $q - 1 \in \{p'm - 1\}$, es decir, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q - 1 = p'n_0 - 1$. Como $q, p' \in \mathbb{P}$ entonces $n_0 = 1$ y $p' = q$ lo cual es una contradicción. Así, \mathcal{G} no admite subcubiertas finitas. \square

El siguiente teorema da una caracterización completa de la conexidad de las progresiones aritméticas en la topología de Golomb τ_G sobre \mathbb{N} .

Teorema 3.8. (Teorema 3.3, [10]) Sean $a, b \in \mathbb{N}$. La progresión aritmética $\{an + b\}$ es conexa en (\mathbb{N}, τ_G) si y solo si $\Theta(a) \subset \Theta(b)$. En particular,

1. La progresión $\{an\}$ es un conjunto conexo.
2. Si la progresión $\{an + b\}$ es un elemento de la base \mathcal{B}' , entonces esta es conexa solo para $a = 1$.

Uno puede estudiar algunas características topológicas de los números primos como la siguiente.

Teorema 3.9. En el espacio topológico (\mathbb{N}, τ_G) , el interior del conjunto de los números primos es vacío.

Demostración. Si hubiera un conjunto abierto que consistiera exclusivamente de números primos, existiría una progresión $\{an + b\}$ con $1 \leq b \leq a$ cuyos elementos son todos primos. Pero tomando $n_0 = a + b + 1$ se tiene que

$$an_0 + b = (a + b)(a + 1)$$

el cual es compuesto. □

4 La topología de Kirch

En 1969 A. M. Kirch [5] probó que el espacio topológico (\mathbb{N}, τ_G) no es localmente conexo. Además, definió una topología τ_K en \mathbb{N} con la base,

$$\mathcal{B}'' = \{\{an + b\} : (a, b) = 1, b < a, a - \text{square} - \text{free}\}$$

la cual construye a partir de abiertos subbásicos de la topología τ_G , que son todas las progresiones $\{pn + c\}$ donde p es un número primo mayor que c . Cuando Kirch comparó las topologías τ_G y τ_K observó rápidamente que

$$\tau_K \subsetneq \tau_G$$

Por lo tanto, la topología de Kirch, τ_K es más fina que la topología de Gomb, τ_G . De lo anterior, inmediatamente se tiene que cada conjunto abierto no vacío en (\mathbb{N}, τ_K) es infinito por como esta dada la base \mathcal{B}'' de τ_K .

Veamos la demostración de Kirch sobre la desconexidad local del espacio (\mathbb{N}, τ_G) .

Teorema 4.1. *El espacio topológico (\mathbb{N}, τ_G) no es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que el espacio (\mathbb{N}, τ_G) es localmente conexo. Tomemos la vecindad abierta $\{2n+1\}$ del punto 1. Como el espacio es localmente conexo, existe un conjunto abierto y conexo C tal que $1 \in C \subset \{2n+1\}$. Sean $x, y \in C$ distintos (C es infinito porque es abierto) y supongamos sin pérdida de generalidad que $x < y$. Luego, existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ con $0 \leq n_1 < n_2$ tales que $x = 2n_1 + 1$ y $y = 2n_2 + 1$. Entonces

$$A = \bigcup_{i=0}^{n_1} \{2^{2^{n_1+1}}n + (1 + 2i)\} \quad y \quad B = \bigcup_{i=n_1+1}^{2^{n_2}-1} \{2^{2^{n_2+1}}n + (1 + 2i)\}$$

son conjuntos abiertos y no vacíos. Supongamos que $A \cap B \neq \emptyset$, entonces existe $x \in A \cap B$, se sigue que $x = 2^{2^{n_1+1}}n_1 + (1 + 2i) = 2^{2^{n_2+1}}n_2 + (1 + 2j)$, donde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ y $0 \leq i \leq n_1, n_1 + 1 \leq j \leq 2^{n_2} - 1$, de lo anterior se tiene que $n_1 > n_2$, porque $i < j$. También se cumple que $j - i \leq 2^{n_2-1}$, por lo cual, $2(j - i) < 2^{n_2}$. De las representaciones de x obtenemos que $2^{2^{n_1+1}}(n_1 - n_2) = 2(j - 1)$. Esto implica que $2^{n_2} < 2(j - i) < 2^{n_2}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $A \cap B = \emptyset$.

Es claro que $A \cup B \subset \{2n+1\}$; probemos que la contención inversa también se cumple. Sea $z \in \{2n+1\}$, entonces $z = 2n_0 + 1$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Notar que $A \cup B = \{2^{2^{n_1+1}}m + (1 + 2i)\}$ donde $i \in \{0, \dots, 2^{n_2}-1\}$. Si $n_0 \in \{0, \dots, 2^{n_2}-1\}$ basta elegir $i = n_0$ y se verifica fácilmente que $z \in \{2^{2^{n_1+1}}n + (1 + 2i)\}$. Si por el contrario $n_0 > 2^{n_2} - 1$, es decir, $n_0 = 2^{n_2} - 1 + j$ con $j \in \mathbb{N}$ entonces $z \in \{2^{2^{n_1+1}}n + (1 + 2i)\}$ donde i es el residuo de dividir $j - 1$ entre $2^{n_2} - 1$. Más aún, si $z = 2n_0 + 1 = 2(2^{n_2} - 1 + j) + 1$, entonces $z = 2^{2^{n_1+1}}q + (1 + 2i)$, donde q es el coeficiente que multiplica a $2^{2^{n_1+1}}$ que resulta de aplicar el algoritmo de la división entre $j - 1$ y $2^{n_2} - 1$. Por lo tanto, $\{2n+1\} = A \cup B$. Como $x \in A$ e $y \in B$, $A \cap C$ y $B \cap C$ separan a C , lo cual es una contradicción. \square

Veamos algunas propiedades del espacio topológico (\mathbb{N}, τ_K) .

Teorema 4.2. *El espacio topológico (\mathbb{N}, τ_K) es Hausdorff.*

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ distintos. Supongamos sin pérdida de generalidad que $b > a$. Tomar un número primo $p > b$. Notar que $\{pn + a\}, \{pn + b\} \in \mathcal{B}''$ por la elección de p , y además son conjuntos abiertos y ajenos que separan a a y b (la demostración es exactamente igual a la del Teorema 3.2). \square

Teorema 4.3. *El espacio topológico (\mathbb{N}, τ_K) es conexo.*

Demostración. Como $\tau_K \subsetneq \tau_G$, todo abierto de (\mathbb{N}, τ_K) es abierto en (\mathbb{N}, τ_G) . Por lo tanto, como (\mathbb{N}, τ_G) es conexo, también lo es (\mathbb{N}, τ_K) . \square

Kirch también probó que a diferencia de la topología τ_G con la que dota Golomb al conjunto de los enteros positivos, el espacio (\mathbb{N}, τ_K) sí es localmente conexo. Antes de dar la prueba de ello, veamos un teorema y un corolario que utilizaremos en dicha prueba.

Teorema 4.4. *(Teorema 4, [5]) Sea $A_i = \{p_i n + a_i\}$ con $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ abiertos subbásicos distintos, y sea $A = \bigcap_{i=1}^k A_i$. Si A es no vacío, entonces los enteros positivos p_i son todos distintos y $A = \{Pn + a\}$, donde a es el menor elemento común de todos los A_i y $P = \prod_{i=1}^k p_i$.*

Como la colección de todas las intersecciones finitas de abiertos subbásicos forman una base, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.5. *(Corolario 5, [5]) Si $A \neq \emptyset$ es un abierto básico en la topología τ_K , entonces A tiene la forma $\{an + b\}$, donde a es libre de cuadrados.*

Observación 4.6. Si $\{cn + d\}, \{an + b\} \in \mathcal{B}''$ son tales que $\{cn + d\} \subset \{an + b\}$ entonces $a|c$.

Teorema 4.7. *El espacio topológico (\mathbb{N}, τ_K) es localmente conexo.*

Demostración. Mostremos que (\mathbb{N}, τ_K) tiene una base que es un conjunto conexo. Sea $A = S(P, a)_{\mathbb{N}}$ un abierto básico y supongamos que A no es conexo. Entonces deben existir abiertos U y V tales que $A \cap U$ y $A \cap V$ son no vacíos, ajenos y $A \subset U \cup V$. Sean $a_1 \in A \cap U$ y $a_2 \in A \cap V$. Por la Observación 4.6, deben existir abiertos básicos de la forma $A_1 = \{PQn + b_1\}$ y $A_2 = \{PRn + b_2\}$ (porque $A_1, A_2 \subset A$) tales que $a_1 \in A_1 \subset A \cap U$ y $a_2 \in A_2 \subset A \cap V$ con PQ y

PR libres de cuadrados. Como P , PQ y PR son libres de cuadrados, entonces Q y R también son libres de cuadrados. Notar que Q y R no pueden tener factores primos en común con P , de lo contrario PQ y PR no serán libres de cuadrados. Por lo tanto, la factorización de potencias de primos de QR carece de los factores primos de P y viceversa, por lo cual $(P, QR) = 1$. Como P y QR son primos relativos existen enteros positivos $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que $1 = QRm_1 - Pm_2$, entonces $a = QR(m_1a) - P(m_2a) = QRr - Ps$, donde $r = m_1a$ y $m_2a = s$. Sea $a' = a + Ps = QRr$. Como U y V forman una separación de A , asumamos sin pérdida de generalidad que $a' \in A \cap U$. Entonces para algún abierto básico $\{PSn + b'\}$ se tiene que $a' \in \{PSn + b'\} \subset A \cap U$, donde PS es libre de cuadrados. Como $a' \in \{PSn + b'\}$, existe $n' \in \mathbb{N}$ tal que $a' = PSn' + b' = QRr$. Si existe un número primo p tal que $p|S$ y $p|QR$, entonces existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $pn_1 = PSn'$ y $pn_2 = QRr$, así $a' = pn_1 + b' = pn_2$, de donde además tenemos que $n_1 < n_2$. Entonces $b' = p(n_2 - n_1)$, es decir, $p|b'$, entonces $(PS, b') \geq p$, lo cual no es posible porque $(PS, b') = 1$. Por lo tanto, $(S, QR) = 1$, de ahí se obtiene que $(PS, PQR) = P$, y además como $P|a_2 - a'$ porque $a_2 - a' = (Pq + a) + (-a + Ps) = P(q + s)$, existen enteros positivos u y v tales que $PSu - PQRv = a_2 - a'$. Luego, como $a' + PSu = PSn' + b' + PSu = PS(n' + u) + b'$ y $a_2 + PQRv = (PRt' + b_2) + PQRv = PR(t' + Qv) + b_2$, se tiene que $(A \cap U) \cap (A \cap V) \neq \emptyset$ porque $PS(n' + u) + b' \in A \cap U$ y $PR(t' + Qv) + b_2 \in A \cap V$, contradiciendo la suposición original. Por lo tanto A es conexo y (\mathbb{N}, τ_K) es localmente conexo. \square

Teorema 4.8. *El espacio topológico (\mathbb{N}, τ_K) no es regular.*

Demostración. Es análoga a la del Teorema 3.5. \square

Sabemos que todo espacio localmente compacto Hausdorff es regular, como el espacio (\mathbb{N}, τ_K) no es regular, pero sí es Hausdorff, es inmediato que no es localmente compacto. Por otro lado, todo espacio compacto es localmente compacto, por ello (\mathbb{N}, τ_K) tampoco es compacto. Y en este caso los conceptos de ser compacto y numerablemente compacto coinciden, por lo que tampoco es numerablemente compacto.

Tal como en el espacio (\mathbb{N}, τ_G) , el siguiente teorema da una caracterización completa de la conexidad de las progresiones aritméticas en la topología de Kirch, τ_G sobre \mathbb{N} .

Teorema 4.9. (Teorema 3.5, [10]) *Toda progresión aritmética en (\mathbb{N}, τ_K) es un conjunto conexo.*

5 Una aplicación en Teoría de Números

Es fácil convergerse de que todo entero positivo impar tiene la forma $4n + 1$ o $4n + 3$ con $n \in \mathbb{N}$, y sin mucho esfuerzo se pueden encontrar números primos con tales formas. Si uno tiene a la mano una lista de los primeros 10,000,000 de números primos podría pensar rápidamente que, de hecho, hay una infinidad de primos de la forma $4n + 1$ o $4n + 3$. Pero, ¿Qué hay de los números de la forma $7n + 2$ o $13n + 7$? ¿También habrá muchos primos así? El matemático alemán G. Lejeune Dirichlet resolvió esta cuestión en 1837, cuando usó métodos de Análisis Complejo para probar el siguiente resultado.

Teorema 5.1. (Dirichlet)[6] *Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $(a, b) = 1$. Entonces la progresión aritmética $\{an + b : n \in \mathbb{N}\}$ contiene una infinidad de primos.*

No se conoce una prueba simple del teorema de Dirichlet sobre números primos en progresiones aritméticas. En [9] Spira propone como ejercicio demostrar la siguiente equivalencia: si $(a, b) = 1$, entonces la progresión aritmética $\{an + b\}$ tiene infinitos números primos, si y sólo si la progresión aritmética $\{an + b\}$ tiene al menos un número primo.

Tomando como cierta la equivalencia antes dada, a continuación presentamos otra equivalencia atribuida a Golomb del teorema de Dirichlet desde una perspectiva topológica.

Teorema 5.2. *El teorema de Dirichlet sobre primos en progresiones aritméticas es equivalente a la afirmación de que los números primos son un subconjunto denso del espacio topológico (\mathbb{N}, τ_G) .*

Demostración. Supongamos que se cumple el teorema de Dirichlet. Sean U un conjunto abierto no vacío en (\mathbb{N}, τ_G) y $\{an + b\} \subset U$ un abierto básico. Entonces U contiene números primos, es decir, el conjunto de números primos es un subconjunto denso en (\mathbb{N}, τ_G) .

Recíprocamente, asumamos que el conjunto de los números primos es denso en (\mathbb{N}, τ_G) . Entonces de manera particular, todas las progresiones aritméticas $\{an + b\}$ con $(a, b) = 1$, deben tener al menos un número primo. Por la equivalencia que propone [4, Problem E 1218, pág. 342.] como ejercicio, las progresiones $\{an + b\}$ tienen infinitos números primos. \square

Agradecimientos

Agradecemos encarecidamente a los árbitros su revisión exhaustiva del trabajo. Sus sugerencias y comentarios permitieron mejorar sustancialmente una primera versión del mismo.

Bibliografía

- [1] M. Brown, *A countable connected Hausdorff space*, Bull. Amer. Math. Soc., 59 (1953), 367
- [2] H. Furstenberg, *On the infinitude of primes*, Amer. Math. Monthly 62 (1955), 353.
- [3] S. Golomb, *A connected topology for the integers*, Amer. Math. Monthly 66 (1959), 663-665.
- [4] H. Eves, *Elementary Problems and Solutions*, Amer. Math. Monthly 63 (1956).
- [5] A. M. Kirch, *A countable, connected, locally connected Hausdorff space*, Amer. Math. Monthly 76 (1969), 169-171.
- [6] K. H. Rosen, *Elementary number theory and its applications*, Pearson, 6th ed., USA, (2011).
- [7] Paulina Szczuka, *The connectedness of arithmetic progressions in Furstenberg's, Golom's, and Kirch's topologies*, Demonstratio Mathematica, Vol. XLIII, No. 4 (2010), 899-909.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

201344131@alumnos.fcfm.buap.mx
dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx
frivera@alumnos.fcfm.buap.mx

Capítulo 8

Haces equivariantes y G -fibraciones

Alexander Bykov, Mauricio Esteban Chacón Tirado,
Patricia Domínguez Soto
FCFM, BUAP

Resumen

Una G -fibración representa una versión equivariante de una fibración de Hurewicz, es decir, es una G -función que tiene la propiedad de levantamiento de G -homotopías. Se sabe que, en la teoría clásica de fibraciones, haces principales (en inglés: principal bundles) son fibraciones de Hurewicz bajo condiciones bastante generales. En el presente capítulo utilizamos el concepto de haz principal equivariante introducido el trabajo de R.K.Lashof y J.P.May [10] y presentamos las condiciones bajo las cuales tales haces puedan considerarse como G -fibraciones.

1 Preliminares

En todo el capítulo la letra G denotará un grupo compacto de Hausdorff. Los fundamentos de la teoría de G -espacios (también conocida como la teoría de los grupos topológicos de transformaciones) se puede encontrar en [3], [4] y [11]. Sin embargo, para la conveniencia del lector, recordamos algunas definiciones y hechos conocidos.

Un G -espacio es un espacio topológico X junto con una acción (izquierda) continua fija $\cdot : G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$, de G en X . En la práctica se escribe gx en lugar de $g \cdot x$. Una función continua $f : X \rightarrow Y$, donde X y Y son G -espacios, se llama G -función o *función equivariante* si $f(gx) = gf(x)$ para todos los $(g, x) \in G \times X$. Si una G -función f es un homeomorfismo, decimos que es un G -homeomorfismo.

Para cada subgrupo H de un grupo topológico G , el espacio cociente G/H

es un G -espacio con la acción por traslación izquierda, $(g', gH) \mapsto g'gH$. Notemos que la proyección natural $G \rightarrow G/H$, $g \mapsto gH$ es una G -función.

Sea X un G -espacio. Un subconjunto $A \subset X$ se llama G -invariante o un G -subconjunto si $ga \in A$ para cada $g \in G$ y $a \in A$. Para $x \in X$, el subgrupo $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ se denomina el grupo de isotropía en x y el G -subconjunto $G(x) = \{gx \mid G \in G\}$ se llama la G -órbita de x . Si $f : X \rightarrow Y$ es una G -función, entonces, para cada $x \in X$, tenemos $G_x \subseteq G_{f(x)}$ y $f(G(x)) = G(f(x))$. Una G -función dada se llama *isovariante* si conserva los grupos de isotropía, es decir, $G_x = G_{f(x)}$ para cada $x \in X$.

Dado un G -espacio X , el conjunto de sus G -órbitas, dotado con la topología cociente, es llamado el *espacio orbital* de X y es denotado por X/G . La proyección natural $\pi_X : X \rightarrow X/G$ (definida por $\pi_X(x) = G(x)$) se llama la *proyección G -orbital* de X ; es una G -función si consideramos el espacio orbital X/G como un G -espacio con la acción trivial de G .

Si $f : X \rightarrow Y$ es una G -función, entonces existe una única función continua $f/G : X/G \rightarrow Y/G$, llamada la función *inducida por f* , tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X/G & \xrightarrow{f/G} & Y/G \end{array} \quad (1)$$

conmuta. Claramente, f/G es definida por $(f/G)(G(x)) = G(f(x))$.

Sea G un grupo compacto, X un G -espacio y $x \in X$. Decimos que una vecindad abierta G -invariante U de $G(x)$ en X , es un *tubo* alrededor de la órbita $G(x)$ si existe una G -función $f : U \rightarrow G/G_x$.

El siguiente teorema desempeña un papel importante dentro de la teoría de grupos topológicos de transformaciones (ver [3, Ch.II, Th.5.4]).

Teorema 1.1. *Sean G un grupo compacto de Lie y X un G -espacio de Tychonoff, entonces existe un tubo alrededor de cada una de las órbitas de X .*

Sean X y Y G -espacios. Una homotopía equivariante o G -homotopía es una función continua $H : X \times I \rightarrow Y$, tal que $H(g \cdot x, t) = g \cdot H(x, t)$ para

cada $(x, t) \in X \times I$ y toda $g \in G$, es decir, H es G -función considerando $X \times I$ con la acción diagonal, donde G actúa trivialmente en el intervalo unitario $I = [0, 1]$.

Si para un subconjunto cerrado G -invariante A de X se cumple $H(a, t) = H(a, 0)$, para cada $a \in A$ y $t \in I$, se dice que H es una G -homotopía relativa a A .

Decimos que una G -función $p : E \rightarrow B$ tiene la *propiedad equivariante de levantamiento de G -homotopías* respecto a un G -espacio X ($EHL P(X)$) si para toda G -función $f : X \rightarrow E$, y toda G -homotopía $F : X \times I \rightarrow B$ tal que $F(x, 0) = p \circ f(x)$ para cada $x \in X$, existe un relleno $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E$ para el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & E \\
 \partial_0 \downarrow & \tilde{F} \nearrow & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{F} & B
 \end{array} \tag{2}$$

donde $\partial_0(x) = (x, 0)$. Es decir \tilde{F} satisface $p\tilde{F} = F$ y $\tilde{F}\partial_0 = f$.

Una G -función p se llama G -fibración de Hurewicz si p tiene la propiedad de levantamiento de G -homotopías respecto a todo G -espacio X .

Diremos también que p tiene la $EHL P$ relativa si para cada diagrama conmutativo $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E$ el cual es una G -homotopía relativa a $A \subset X$ siempre y cuando F sea G -homotopía relativa a A .

Proposición 1.2. *Sea $p : E \rightarrow B$ una G -fibración donde G es un grupo compacto. Si B es un G -espacio metrizable, entonces p tiene la $EHL P$ relativa.*

Demostración. Consideremos el diagrama conmutativo (2) donde F es una G -homotopía relativa a $A \subset X$. Como G es compacto, B admite una métrica compatible G -invariante d , es decir una métrica que satisface $d(gb, gb') = d(b, b')$ para todo $b, b' \in B$ y $g \in G$. Además, podemos elegir d tal que $diam(B) \leq 1$. Sea $\varphi : X \rightarrow I$ una función dada por $\varphi(x) = diam(F(\{x\} \times I))$. Claramente φ es una G -función continua invariante. Modifiquemos la G -homotopía F como sigue:

$$F'(x, t) = \begin{cases} F(x, t/\varphi(x)) & \text{if } t < \varphi(x) \\ F(x, 1) & \text{if } t \geq \varphi(x) \end{cases}$$

Es fácil ver que F' es una G -función continua para la cual $F'\partial_0 = pf$. Como p es una G -fibración, existe una G -homotopía $\widehat{F} : X \times I \rightarrow E$ tal que $\widehat{F}\partial_0 = f$ y $p\widehat{F} = F'$. Ahora definamos una G -homotopía $\widetilde{F} : X \times I \rightarrow E$ por $\widetilde{F}(x, t) = \widehat{F}(x, t\varphi(x))$. Es rutina checar que \widetilde{F} es un relleno para el diagrama (2) la cual es una G -homotopía relativa a A . \square

Un G -espacio metrizable E se llama G -extensor absoluto de vecindades o, brevemente, un G -ANE si toda G -función $f : A \rightarrow E$, donde A es un G -subconjunto cerrado de un G -espacio metrizable X , se puede extender a una G -función $\bar{f} : U \rightarrow E$, $\bar{f}|_A = f$, para alguna vecindad G -invariante U de A en X . Si, en este contexto, f se puede extender hasta una G -función $\bar{f} : X \rightarrow E$ (es decir, se puede siempre tomar $U = X$) se dice que E es G -extensor absoluto o un G -AE. Obviamente cualquier G -subconjunto abierto de un G -AE es un G -ANE.

Proposición 1.3. [12] *Si G es un grupo compacto de Lie y H es un subgrupo cerrado en G , entonces G/H es un G -ANE-espacio.*

Un subgrupo cerrado H de un grupo compacto G se llama *grande* o un subgrupo extensor si el espacio cociente G/H es G -ANE.

En la teoría de G -espacios el concepto de G -fibración surge de manera natural: cada G -función $E \rightarrow G/H$ es una G -fibración si G es un grupo compacto de Lie. Este resultado es bien conocido para pero no es fácil encontrar su demostración en la literatura; la demostración directa para el caso metrizable se puede encontrar en [2]:

Proposición 1.4. ([2, Proposition 3.1]) *Sean H un subgrupo cerrado de un grupo compacto de Lie G y E un G -espacio metrizable. Entonces cada G -función $p : E \rightarrow G/H$ es una G -fibración.*

Decimos que una G -función $p : E \rightarrow B$ de G -espacios metrizables es una G -fibración regular si para cada subconjunto G -invariante A de un G -espacio

metrizable X y para cada diagrama de G -funciones

$$\begin{array}{ccc}
 X \times \{0\} \cup A \times I & \xrightarrow{f} & E \\
 \downarrow i & & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{F} & B
 \end{array}$$

existe una G -homotopía $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E$ como relleno (es decir, $\tilde{F}i = f$ y $p\tilde{F} = F$).

Claramente, cada G -fibración regular de G -espacios metrizable es una G -fibración (basta tomar $A = \emptyset$). Por otro lado, se tiene la siguiente afirmación:

Proposición 1.5. ([2, p. 50]) *Si $p : E \rightarrow B$ es una G -fibración, donde E y B son espacios G -ANE, entonces p es una G -fibración regular.*

Sea $\beta : G' \rightarrow G$ un homomorfismo continuo de grupos topológicos. Cada G -espacio X se puede considerar como un G' -espacio *via* β , es decir, con respecto a la acción $*$ del grupo G' dada por $g' * x = \beta(g')x$. Claramente cada G -función puede considerarse como una G' -función *via* β .

Proposición 1.6. ([1, Proposition 3.1]) *Sea $\beta : G' \rightarrow G$ un homomorfismo de grupos compactos. Si $p : E \rightarrow B$ es una G -fibración (regular) entonces, al ser considerada como G' -función *via* β , p es también una G' -fibración (regular).*

Destacamos dos casos particulares de la Proposición 1.6.

Corolario 1.7.

(i) *Sea $p : E \rightarrow B$ una G -fibración (regular). Si H es un subgrupo cerrado de G , entonces p es también una H -fibración (regular) *via* $H \hookrightarrow G$.*

(ii) *Sea N un subgrupo cerrado normal de un grupo G . Si para una G -función $p : E \rightarrow B$, la G/N -función inducida $p/N : E/N \rightarrow B/N$ es una G/N -fibración (regular), entonces p/N es también una G/N -fibración (regular) *via* $G \rightarrow G/N$.*

Las G -fibraciones regulares se pueden caracterizar localmente de la siguiente forma (para el caso de G -fibraciones, ver e.g., [4, p.53]):

Proposición 1.8. ([2, Prop. 3.6]). *Sea $p : E \rightarrow B$ una G -función entre G -espacios metrizablees. Si para cada punto $b \in B$ existe una vecindad abierta G -invariante U tal que la restricción de p , $p^{-1}(U) \rightarrow U$ es una G -fibración regular, entonces p es una G -fibración regular.*

2 Cuadrados pull-back

En esta sección recordaremos la definición de un cuadrado pull-back y daremos algunos ejemplos de cuadrados pull-back importantes para este trabajo.

Definición 2.1. El diagrama conmutativo de G -funciones

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f'} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad (3)$$

se llama **cuadrado pull-back** (o cuadrado universal) si satisface la siguiente propiedad universal:

Si X es un G -espacio y $\alpha : X \rightarrow B'$ y $\beta : X \rightarrow E$ son funciones equivariantes tales que $f\alpha = p\beta$, entonces existe una única G -función $h : X \rightarrow Z$ tal que el diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ & \searrow \beta & & & \\ & & Z & \xrightarrow{f'} & E \\ & \searrow h & & & \downarrow p \\ & & \downarrow p' & & \\ & \searrow \alpha & B' & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad (4)$$

Al G -espacio Z se le conoce también como **pull-back** (o *producto fibrado*) de $B' \xrightarrow{f} B \xleftarrow{p} E$, y debido a la propiedad universal, es único salvo isomorfismo. Este G -espacio puede ser definido de manera explícita como

$$Z = \{(b', e) \in B' \times E \mid f(b') = p(e)\},$$

con la acción diagonal de G , es decir, $g \cdot (b', e) = (gb', ge)$.

Al igual que en el caso de límites inversos, si está dado que el cuadrado (3) es un diagrama en $G\text{-TOP}$ (de G -espacios y G -funciones) tal que es pull-back en TOP , entonces es también un cuadrado pull-back en la categoría $G\text{-TOP}$.

En efecto, si X es un G -espacio, y α y β son G -funciones tales que $f\alpha = p\beta$, como (3) es un cuadrado pull-back en TOP , existe una única función continua h tal que el diagrama (4) es conmutativo. Esta h es G -equivariante, ya que para cada $x \in X$ y $g \in G$, tenemos

$$f'(h(gx)) = \beta(gx) = g\beta(x) = gf'(h(x)) = f'(gh(x)),$$

análogamente, se verifica que $p'(h(gx)) = p'(gh(x))$; lo que significa que $h(gx) = gh(x)$.

Proposición 2.2. *En el cuadrado pull-back (3) se cumple:*

- (a) *Si p es sobreyectiva (o inyectiva), también lo es p' .*
- (b) *Si p es abierta, también lo es p' .*
- (c) *Si p tiene una sección s , entonces p' también tiene una sección s' tal que $f \circ s' = s \circ f$.*
- (d) *Si p es perfecta, p' también lo es.*

Un caso importante es aquel en el que p es una proyección orbital, es decir, cuando $B = E/G$; y la acción de G en B' es trivial. En esta situación p' se puede considerar también como la proyección orbital de Z .

Proposición 2.3. *Sea X un G -espacio, y sea Z el pull-back de $B' \xrightarrow{f} X/G \xleftarrow{\pi} X$, donde B' es un G -espacio con la acción trivial. Entonces el espacio B' es homeomorfo al espacio orbital Z/G .*

Demostración. La proyección $\pi' : Z \rightarrow B'$ induce la función $\varphi = \pi'/G : Z/G \rightarrow B'/G = B'$ (Proposición 1.3.1). Como π es una función abierta (pues B'/G tiene la topología cociente) y sobreyectiva, π' también lo es (Proposición 2.2); luego es fácil ver que φ es abierta y sobreyectiva. Por otro lado, si $(b, x_1), (b, x_2) \in Z$, entonces $\pi(x_1) = f(b) = \pi(x_2)$, lo que significa que x_1 y x_2 están en la misma órbita, luego (b, x_1) y (b, x_2) están también en la misma órbita; lo que prueba la inyectividad de φ . Por lo tanto φ es un homeomorfismo. \square

Proposición 2.4. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una G -función, donde G es un grupo compacto, y X y Y son G -espacios de Hausdorff. El diagrama*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X/G & \xrightarrow{f/G} & Y/G \end{array}$$

es un cuadrado pull-back si y sólo si f es isovariante.

Demostración. Supongamos que f es isovariante.

Sea $P = \{(G(x), y) \mid G(f(x)) = G(y)\}$ el pull-back de $X/G \rightarrow Y/G \leftarrow Y$. Veamos que la G -función inducida $h : X \rightarrow P$, $x \mapsto (G(x), f(x))$, es un G -homeomorfismo. En efecto, si $(G(x), y) \in P$, existe $g \in G$ tal que $y = gf(x)$, y $h(gx) = (G(gx), f(gx)) = (G(x), y)$, luego h es sobreyectiva.

Supongamos ahora que $(G(x_1), f(x_1)) = (G(x_2), f(x_2))$, entonces existe $g \in G$ tal que $x_1 = gx_2$, luego $f(x_2) = f(x_1) = f(gx_2) = gf(x_2)$, lo que significa $g \in G_{f(x_2)} = G_{x_2}$, y por tanto $x_1 = x_2$, es decir, h es inyectiva.

Por último podemos afirmar que h es cerrada ya que la proyección orbital π_X es perfecta (Proposición 1.3.2) y el espacio P es de Hausdorff (ver, por ejemplo, [6, Prop. 3.7.5]).

Recíprocamente, si el diagrama es pull-back, entonces X es G -equivalente a P , y $G_x = G_{(G(x), f(x))} = G_{G(x)} \cap G_{f(x)} = G \cap G_{f(x)} = G_{f(x)}$, y por tanto, f es isovariante. \square

Proposición 2.5. *Suponga que el diagrama conmutativo de G -funciones*

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

es un cuadrado pull-back. Entonces

(a) si p es una G -fibración(regular), entonces p' es una G -fibración(regular);

(b) si E, B y B' son espacios G -ANE y p es una G -fibración, entonces E' es un espacio G -ANE.

Demostración. Solo probaremos la afirmación (b) pues la prueba de (a) es sencilla y son similares a las pruebas de las correspondientes versiones no equivariantes (ver, e.g., [8, Proposition 6.31] and [5, Proposition 6.4]).

Sea $h : A \rightarrow E'$ una G -función, donde A es un G -subconjunto cerrado de un G -espacio metrizable X . Como E y B' son G -ANE's, existen G -extensiones $\tilde{f} : U \rightarrow E$ y $\tilde{p} : U \rightarrow B'$ de las G -funciones $f'h$ y $p'h$, respectivamente, sobre una vecindad G -invariante U de A en X . Obtenemos la G -función $p\tilde{f}, f\tilde{p} : U \rightarrow B$ para la cual $p\tilde{f}|_A = f\tilde{p}|_A$. Usando que B es un G -ANE, por un argumento estándar (ver, e.g., [8, Proposition 8.12]), para alguna vecindad G -invariante V de A en U (y por lo tanto en X) podemos encontrar una G -homotopía $F : V \times I \rightarrow B$ relativa a A tal que $F(v, 0) = p\tilde{f}(v)$ y $F(v, 1) = f\tilde{p}(v)$ para todo $v \in V$. Como p es una G -fibración, existe una G -homotopía $\tilde{F} : V \times I \rightarrow E$ tal que $\tilde{F}(v, 0) = \tilde{f}(v)$ y $p\tilde{F} = F$. Además, afirmamos que \tilde{F} se puede elegir así esta será relativa a A al igual que F (aunque no se supone que p tiene EHLF relativa).

Para probar la última afirmación, notemos que la función F se factoriza a través del espacio cociente $V \times I / \sim$, donde \sim es la relación de equivalencia minimal sobre $V \times I$ tal que $(a, t) \sim (a, t')$ para $a \in A$ y $t, t' \in I$. Entonces podemos construir el siguiente diagrama conmutativo de G -funciones

$$\begin{array}{ccccc}
 V & \xrightarrow{\varphi} & Z & \xrightarrow{\widehat{F}} & E \\
 \partial_0 \downarrow & & \widehat{p} \downarrow & & \downarrow p \\
 V \times I & \xrightarrow{\tau} & V \times I / \sim & \xrightarrow{F'} & B
 \end{array}$$

donde τ es la función cociente, $F = F'\tau$, el cuadrado derecho es un cuadrado pull-back y φ es tal que $\tilde{f}|_V = \widehat{F}\varphi$ (φ es una G -función inducida por $\tilde{f}|_V$ y $\tau\partial_0$). Ahora observe que \widehat{p} es una G -fibración por la afirmación (a) y el espacio cociente $V \times I / \sim$ es metrizable por [6, Theorem 4.4.15], ya que $V \times I$ es metrizable y τ obviamente es una función perfecta. Claramente τ es una G -homotopía relativa a A y por lo tanto por la Proposición 1.2, existe una G -homotopía $D : V \times I \rightarrow Z$ relativa a A como relleno para el cuadrado izquierdo. Ahora la G -homotopía requerida \widehat{F} se obtiene como una composición de D y \widehat{F} .

Finalmente definamos $\hat{f} : V \rightarrow E$ por $\hat{f}(v) = \tilde{F}(v, 1)$. Entonces $p\hat{f} = f\tilde{p}|_V$ y además para todo $a \in A$, $\hat{f}(a) = \tilde{F}(a, 1) = \tilde{F}(a, 0) = \tilde{f}(a) = f'h(a)$, esto es, $\hat{f}|_A = f'h$. También como $\tilde{p}|_A = p'h$, podemos concluir que por la propiedad universal de pull-back, las G -funciones \hat{f} y $\tilde{p}|_V$ determinan una G -extensión $V \rightarrow E'$ de $h : A \rightarrow E'$. \square

La siguiente proposición tendrá muchas consecuencias relevantes para el presente trabajo.

Proposición 2.6. *Sean K y N subgrupos cerrados de un grupo compacto G tales que $KM = MK$, entonces el diagrama de proyecciones naturales*

$$\begin{array}{ccc} G/(K \cap M) & \xrightarrow{\pi_M} & G/M \\ \pi_K \downarrow & & \downarrow \beta_K \\ G/K & \xrightarrow{\beta_M} & G/KM \end{array} \quad (5)$$

es un cuadrado pull-back.

Demostración. Sea P el pull-back de $G/K \xrightarrow{\beta_N} G/KN \xleftarrow{\beta_K} G/N$ dado por

$$P = \{(xK, yM) \in G/K \times G/M \mid xKM = yKM\}.$$

Por la propiedad universal de pull-back existe una única función continua $\varphi : G/(K \cap M) \rightarrow P$ inducida por las proyecciones π_K y π_M . Esta función se define explícitamente como $\varphi(x(K \cap M)) = (xK, xM)$ y es una G -función.

Veamos que φ es un homeomorfismo.

- φ es inyectiva: Sean $x(K \cap M), y(K \cap M) \in G/(K \cap M)$ tales que $\varphi(x(K \cap M)) = \varphi(y(K \cap M))$, entonces $(xK, xM) = (yK, yM)$, luego $y^{-1}x \in K$ y $y^{-1}x \in M$, esto es $y^{-1}x \in K \cap M$, lo que significa que $x(K \cap M) = y(K \cap M)$.
- φ es sobreyectiva: Supongamos que $(xK, yM) \in P$. Entonces $xKM = yKM$. Como $yM \subseteq yKM$, tenemos $xKM \cap yM \neq \emptyset$, lo que implica que $xK \cap yM \neq \emptyset$.

Sea $z \in xK \cap yM$, entonces existen $k \in K$ y $m \in M$ tales que $z = xk = ym$. Luego $\varphi(z(K \cap M)) = (xkK, ymM) = (xK, yM)$.

Concluimos que φ es un homeomorfismo por ser una función continua biyectiva entre espacios compactos. \square

Corolario 2.7. Sean K y M subgrupos cerrados de un grupo compacto G tales que K es normal y $K \cap M = \{e\}$. Entonces el cuadrado pull-back (5) tiene la forma

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\pi_M} & G/M \\
 \pi_K \downarrow & & \downarrow \beta_K \\
 \widehat{G} & \xrightarrow{\beta_M} & \widehat{G}/\widehat{M}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 gM \\
 \downarrow \\
 \pi_K(g)\widehat{M}
 \end{array}
 \tag{6}$$

donde $\widehat{G} = G/K$ y $\widehat{M} = \pi_K(M)$.

Además, las proyecciones π_K y β_K se pueden considerar como proyecciones K -orbitales respecto a las acciones de K sobre G y G/M por traslaciones izquierdas; estas acciones son libres.

Demostración. Consideremos el diagrama (5). Como $K \cap M = \{e\}$, tenemos $G/(K \cap M) = G$ y

$$\widehat{M} = \pi_K(M) = \{mK \mid m \in M\} = KM/K.$$

Notemos que el espacio G/KM se puede identificar con $(G/K)/(KM/K)$, es decir, con \widehat{G}/\widehat{M} , usando el G -homeomorfismo canónico

$$G/KM \rightarrow (G/K)/(KM/K)$$

dado por $gKM \mapsto (gK)(KM/K)$.

Como $(gK)(KM/M) = \pi_K(g)\widehat{M}$, la proyección $\beta_K : gM \mapsto gKM$ está identificada con $gM \mapsto \pi_K(g)\widehat{M}$ y la proyección $\beta_M : gK \mapsto gKM$ está identificada con $gK \mapsto \pi_K(g)\widehat{M}$.

Así obtenemos el diagrama (6) el cual es un cuadrado pull-back por la Proposición 2.6.

Claramente, π_K y β_K se pueden considerar como proyecciones K -orbitales por las traslaciones izquierdas $g \mapsto gk$ y $gM \mapsto kgM$ respectivamente. En efecto,

$$K(gM) = \{kgM \mid k \in K\} = KgM = gKM$$

pues K es un subgrupo normal de G . Así, $\beta_K(gM) = K(gM)$.

La acción por traslación de K sobre G es obviamente libre y por lo tanto así es la acción de K sobre G/M ya que π_M es una K -función isovariante debido a la Proposición 2.4. (Note que (6) se puede considerar como un cuadrado pull-back de K -funciones). \square

3 Sucesiones exactas cortas y productos semi-directos

Recordemos que una *sucesión exacta corta* es un diagrama de homomorfismos de grupos

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{\iota} \Gamma \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1 \quad (7)$$

donde $1 = \{e\}$ es el grupo trivial, tal que

- (i) ι es un monomorfismo,
- (ii) π es un epimorfismo,
- (iii) $Im(\iota) = Ker(\pi)$.

A veces se dice que el grupo Γ es una *extensión de G por K* .

Claro que, en esta situación, podemos considerar K como un subgrupo normal de Γ (al identificar K con $\iota(K)$) y suponer que $G = \Gamma/K$, mientras π es la proyección canónica $\Gamma \rightarrow \Gamma/K$.

En caso de grupos *topológicos* siempre se supone que

- ι es un encaje cerrado (es decir, ι realiza un homeomorfismo entre K y el subgrupo cerrado $\iota(K) = Im(\iota)$),
- la función π es abierta.

En esta sección vamos a considerar detalladamente el caso cuando la sucesión exacta corta (7) de grupos topológicos es *escindida*, es decir, cuando para (7), existe un homomorfismo de grupos topológicos $j : G \rightarrow \Gamma$ tal que $\pi \circ j = id_G$.

Como un ejemplo de una sucesión exacta corta escindida sirve la sucesión

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{in} G \times K \xrightarrow{pr} G \longrightarrow 1 \quad (8)$$

donde $G \times K$ es el producto directo de los grupos topológicos G y K , el monomorfismo in es la inyección natural de K en $G \times K$, $in(k) = (e, k)$, y el epimorfismo pr es la proyección natural de $G \times K$ sobre G , $pr(g, k) = g$. Claramente, la inyección $j : G \hookrightarrow G \times K$ dada por $j(g) = (g, e)$ es un homomorfismo tal que $pr \circ j = id_G$.

Veremos que, en general, cada grupo Γ obtenido como una extensión de G por K mediante una sucesión exacta corta escindida tiene estructura de un producto semidirecto que generaliza la noción de un producto directo. A continuación recordaremos la definición de esta noción generalizada.

Sean G y K grupos topológicos y supongamos que $\alpha : G \rightarrow Aut(K)$, $g \mapsto \alpha_g$ es un homomorfismo, donde $Aut(K)$ es el grupo de automorfismos de K , tal que la correspondiente acción

$$\begin{aligned} G \times K &\rightarrow K \\ (g, k) &\mapsto \alpha_g(k), \end{aligned}$$

de G sobre K es continua, es decir, G actúa en K por medio de automorfismos.

Bajo las condiciones de arriba diremos que G y K están relacionados por α . En esta situación podemos considerar un nuevo grupo denotado por $G \rtimes_{\alpha} K$ y llamado el **producto semidirecto** de los grupos G y K que se define como sigue:

- (a) $G \rtimes_{\alpha} K = G \times K$, es decir, como un espacio topológico $G \rtimes_{\alpha} K$ es nada más que el producto topológico $G \times K$.
- (b) La operación en $G \rtimes_{\alpha} K$ está definida por

$$(g, k) \cdot (g', k') = (gg', k\alpha_g(k')).$$

Es fácil ver que $G \rtimes_{\alpha} K$ es un grupo topológico y se tiene la sucesión exacta corta escindida

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{in} G \rtimes_{\alpha} K \xrightarrow{pr} G \longrightarrow 1 \quad (9)$$

donde in y pr (y j que escinde la sucesión) se definen como en (8).

Diremos que dos extensiones Γ_1 y Γ_2 de K por G son *equivalentes* si existe un isomorfismo $\psi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Gamma_1 & & \\
 & \nearrow & \downarrow \psi & \searrow & \\
 1 & \longrightarrow & K & & G \longrightarrow 1 \\
 & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\
 & & \Gamma_2 & &
 \end{array}$$

es conmutativo.

Proposición 3.1. *Si la sucesión exacta corta de grupos topológicos (7) es escindida por medio de un homomorfismo $j : G \hookrightarrow \Gamma$, entonces es equivalente a una sucesión exacta corta que tiene la forma (9), es decir, existe un isomorfismo de grupos topológicos $\psi : G \rtimes_{\alpha} K \rightarrow \Gamma$ tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G \rtimes_{\alpha} K & & \\
 & \nearrow \textit{in} & \downarrow \psi & \searrow \textit{pr} & \\
 1 & \longrightarrow & K & & G \longrightarrow 1 \\
 & \searrow \iota & \downarrow & \nearrow \pi & \\
 & & \Gamma & &
 \end{array}$$

es conmutativo. Más precisamente, ψ se define por

$$\psi(g, k) = \iota(k)j(g) \quad (10)$$

mientras para el homomorfismo $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(K)$, $g \mapsto \alpha_g$, el automorfismo $\alpha_g : K \rightarrow K$ está definido como sigue:

$$k \mapsto \iota^{-1}(j(g)\iota(k)j(g^{-1})), \quad k \in K. \quad (11)$$

Demostración. Claramente, la función ψ dada por (10) es continua pues las funciones ι y j son continuas.

ψ es un homomorfismo:

Como $(g_1, k_1)(g_2, k_2) = (g_1g_2, k_1\alpha_{g_1}(k_2))$ tenemos

$$\begin{aligned} \psi(g_1, k_1)(g_2, k_2) &= \iota(k_1\alpha_{g_1}(k_2))j(g_1g_2) = \iota(k_1)\iota(\alpha_{g_1}(k_2))j(g_1)j(g_2) = \\ &= \iota(k_1)\iota(\iota^{-1}(j(g_1)\iota(k_2)j(g_1^{-1})))j(g_1)j(g_2) = \iota(k_1)j(g_1)\iota(k_2)j(g_1^{-1})j(g_1)j(g_2) = \\ &= \iota(k_1)j(g_1)\iota(k_2)j(g_2) = \psi(g_1, k_1)\psi(g_2, k_2). \end{aligned}$$

ψ es inyectiva:

Sea $(g, k) \in \text{Ker}(\psi)$. Entonces $\iota(k)j(g) = e$ y, por lo tanto,

$$e = \pi(\iota(k)j(g)) = \pi\iota(k) \cdot \pi j(g) = e \cdot g = g.$$

Ahora $e = \iota(k)j(g) = \iota(k)j(e) = \iota(k)$ y, como ι es inyectiva, $k = e$. Resulta que $\text{Ker}(\psi) = \{(e, e)\}$ (desde luego, (e, e) es el elemento del grupo $G \rtimes_{\alpha} K$).

ψ es sobreyectiva:

Sea $\gamma \in \Gamma$. Tenemos $\pi(\gamma j(\pi(\gamma^{-1}))) = \pi(\gamma)\pi j\pi(\gamma^{-1}) = \pi(\gamma)\pi(\gamma^{-1}) = e$, es decir, $\gamma j(\pi(\gamma^{-1})) \in \text{Ker}(\pi)$. Como $\text{Ker}(\pi) = \text{Im}(\iota)$ existe único $k \in K$ tal que $\iota(k) = \gamma j(\pi(\gamma^{-1}))$. De aquí, $\gamma = \iota(k)j(\pi(\gamma)) = \psi(\pi(\gamma), k)$.

De la prueba que ψ es sobreyectiva, vemos que la función ψ^{-1} inversa de ψ está dada por medio de la correspondencia

$$\gamma \mapsto (\pi(\gamma), \iota^{-1}(\gamma j\pi(\gamma^{-1}))) \quad (12)$$

y es evidentemente continua pues j y π son continuas mientras ι establece el homeomorfismo $K \rightarrow \iota(K)$. \square

Aplicamos la Proposición 3.1 a la siguiente situación.

Sean G y K subgrupos cerrados de un grupo topológico Γ tales que

- (i) $\Gamma = KG$,
- (ii) $G \cap K = \{e\}$,
- (iii) K es un subgrupo normal de Γ .

Dado $\gamma \in \Gamma$, su representación como $\gamma = kg$, $(g, k) \in G \times K$ (que existe por (i)) es única debido a (ii). En efecto, si $kg = k'g'$, entonces $K \ni (k')^{-1}k = g'g^{-1} \in G$, que implica $(k')^{-1}k = g'g^{-1} = e$, es decir, $g = g'$ y $k = k'$. Notemos que la función $\pi : \Gamma \rightarrow G$, $kg \mapsto g$, es un homomorfismo bien definido: $\pi(kg \cdot k'g') = \pi(kk'gg') = gg' = \pi(kg)\pi(k'g')$ (aquí usamos que

$k'' = gk'g^{-1} \in K$ debido a (iii)). Obtenemos la sucesión exacta corta de grupos topológicos

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{\iota} \Gamma \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

donde $\iota(k) = k$ escindida por $j : G \hookrightarrow \Gamma$, $j(g) = g$.

Según la Proposición 3.1 tenemos el isomorfismo

$$\psi : G \rtimes_{\sigma} K \rightarrow \Gamma, \quad \psi(g, k) = kg$$

donde el homomorfismo $\sigma : G \rightarrow \text{Aut}(K)$, $g \mapsto \sigma_g$ está definido por

$$\sigma_g(k) = gkg^{-1}.$$

En otras palabras, G actúa en K por conjugación.

En esta situación, es decir, cuando un grupo Γ satisface las condiciones (i)-(iii), se dice que Γ es un **producto semidirecto interno** de sus subgrupos G y K y se escribe simplemente $\Gamma = G \rtimes K$.

Ya hemos visto que el producto semidirecto interno $\Gamma = G \rtimes K$ es naturalmente isomorfo al producto semidirecto “externo” $\Gamma = G \rtimes_{\sigma} K$. En realidad cada producto semidirecto es un producto semidirecto interno en virtud de la siguiente consecuencia de la Proposición 3.1:

Corolario 3.2. *Si la sucesión exacta corta de grupos topológicos (7) es escindida por medio de un homomorfismo $j : G \hookrightarrow \Gamma$, entonces $\Gamma = \overline{G} \rtimes \overline{K}$, donde $\overline{G} = j(G)$ y $\overline{K} = \iota(K)$. En particular,*

$$G \rtimes_{\alpha} K = \overline{G} \rtimes \overline{K},$$

donde $\overline{G} = \{(g, e) \mid g \in G\}$ y $\overline{K} = \{(e, k) \mid g \in K\}$.

Demostración. Veamos que Γ satisface las condiciones (i)-(iii) de la definición de un producto semidirecto interno.

Por la fórmula (10) tenemos

$$\Gamma = \{i(k)j(g) \mid k \in K, g \in G\}$$

ya que ψ es sobreyectiva. Por lo tanto, $\Gamma = \overline{K} \cdot \overline{G}$. Si $\gamma \in \overline{K} \cap \overline{G}$, entonces existen $k \in K$ y $g \in G$ tales que $\gamma = \iota(k) = j(g)$. Luego $\gamma = j(g) = j(\pi j(g)) = j(\pi \iota(k)) = j(e) = e$. Resulta que $\overline{K} \cap \overline{G} = \{e\}$. Por fin, $\overline{K} = i(K) = \ker(\pi)$. Así, \overline{K} es un subgrupo normal de Γ . \square

4 Haces principales equivariantes

En esta sección usaremos el enfoque general del concepto de un haz principal equivariante dado en el trabajo de R.K.Lashof y J.P.May [10].

Definición 4.1. Sean G y K grupos topológicos. Sea Γ una extensión de G por K mediante la sucesión exacta corta (7). Una Γ -función $p : E \rightarrow B$ un $(K; \Gamma)$ -**haz principal** si cumplen las siguientes condiciones:

- (a) p es una función sobreyectiva y abierta;
- (b) la acción \cdot de K en E via ι (es decir, tal que $k \cdot x = \iota(k)x$ para $k \in K$ y $x \in E$) es libre;
- (c) para $x, y \in E$, $p(x) = p(y)$ si y sólo si $y = k \cdot x$ para algún $k \in K$.

Observación 4.2. Supongamos $p : E \rightarrow B$ es un $(K; \Gamma)$ -haz principal.

- (i) Podemos tratar $p : E \rightarrow B$ como una proyección K -orbital (respecto a la acción \cdot de K en E dada por (b)) en virtud de conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & E & \\
 \pi_E \swarrow & & \searrow p \\
 E/K & \xrightarrow{h} & B
 \end{array}$$

donde h es un homeomorfismo dado por $h(K(x)) = p(x)$. En verdad, la condición (c) nos dice que h es inyectiva y está bien definida. Es continua por la definición de la topología cociente. Además, h es sobreyectiva y abierta gracias a la condición (a). Por lo tanto, h es un homeomorfismo y, en particular, podemos identificar B con el espacio K -orbital E/K y escribir $B = E/K$.

- (ii) Por la definición E y B son Γ -espacios con las acciones $(\gamma, y) \mapsto \gamma y$ y $(\gamma, b) \mapsto \gamma b$, $\gamma \in \Gamma$, respectivamente; $p : E \rightarrow B$ es una Γ -función pero, en general, no es una G -función. No obstante, siempre podemos tratar B como un G -espacio con la acción $*$ dada por

$$g * b = \gamma b, \quad \gamma \in \pi^{-1}(g).$$

Supongamos que $\gamma, \gamma' \in \pi^{-1}(g)$. Entonces $\gamma^{-1}\gamma' \in Ker(\pi)$ y existe $k \in K$ tal que $\gamma' = \gamma\iota(k)$. Como p es sobreyectiva, existe $x \in p^{-1}(b)$ y tenemos

$$\gamma'b = \gamma\iota(k)b = \gamma p(\iota(k)x) = \gamma p(k \cdot x) = \gamma p(x) = \gamma b.$$

Por lo tanto, la función $G \times B \rightarrow B, (g, b) \mapsto g * b$, está bien definida.

Es fácil ver que de verdad $*$ es una acción continua.

Teorema 4.3. *Sea Γ un grupo compacto de Lie. Si $p : E \rightarrow B$ es un $(K; \Gamma)$ -haz principal, donde E es un Γ -espacio metrizable, entonces p es una Γ -fibración regular.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos considerar K como un subgrupo normal de Γ .

Dado un punto $b \in B$, tomemos algún punto $y \in p^{-1}(b)$. Para el subgrupo de isotropía Γ_y , tenemos $K \cap \Gamma_y = \{e\}$. En verdad, si $k \in K \cap \Gamma_y$, entonces $ky = y$ que implica $k = e$ pues por la definición de $(K; \Gamma)$ -haz principal la restricción de la acción de Γ en su subgrupo K es libre (véase Definición 4.1(b) tomando en cuenta que $K \equiv \iota(K)$). Además, K es un subgrupo normal de Γ y $G = \Gamma/K$. Según la Proposición 2.6 tenemos el cuadrado pull-back de proyecciones naturales

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \longrightarrow & \Gamma/\Gamma_y \\ \pi \downarrow & & \downarrow \hat{\pi} \\ G & \longrightarrow & \Gamma/K\Gamma_y \end{array}$$

Notemos que se puede considerar π y $\hat{\pi}$ como proyecciones K -orbitales si tratamos Γ y Γ/Γ_y como K -espacios respecto a las acciones de K por traslaciones izquierdas. Además, estas acciones son libres: la traslación de K en Γ es obviamente libre y la acción de K en Γ/Γ_y es libre ya que la proyección $\Gamma \rightarrow \Gamma/\Gamma_y$ es K -isovariante por la Proposición 2.4 (véase también el Corolario 2.7).

Como Γ es un grupo compacto de Lie, existe un tubo alrededor de la órbita $\Gamma(y)$ (véase el Teorema 1.1), es decir, existe una Γ -función $f : U \rightarrow \Gamma/\Gamma_y$ para alguna vecindad abierta Γ -invariante U de y en E .

Observemos que $U = p^{-1}(p(U))$. Claramente, $U \subseteq p^{-1}(p(U))$. Por otro lado, si $x \in p^{-1}(p(U))$, entonces $p(x) = p(y)$ para algún punto $y \in U$. De acuerdo con la definición de un haz principal equivariante existe $k \in K$ tal que $x = ky$ y, como U es Γ -invariante, $x \in U$.

Sea $V = p(U)$, entonces V es una vecindad abierta Γ -invariante de $b = p(y)$ pues la función p es abierta. La Γ -función $f : p^{-1}(V) \rightarrow \Gamma/\Gamma_y$ induce la función f/K de los espacios orbitales tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 p^{-1}(V) & \xrightarrow{f} & \Gamma/\Gamma_y \\
 \downarrow p|_U & & \downarrow \hat{\pi} \\
 V & \xrightarrow{f/K} & \Gamma/K\Gamma_y
 \end{array} \tag{13}$$

es conmutativo. Como f se puede considerar como una K -función de K -espacios libres (en particular, f es K -isovariante), este diagrama es un cuadrado pull-back por la Proposición 2.4.

En virtud de la Proposición 1.4 $\hat{\pi}$ es una Γ -fibración. Además, los espacios cocientes Γ/Γ_y y $\Gamma/K\Gamma_y$ son Γ -ANE (ver [12, Corollary 1.6.7]) que significa que la proyección $\hat{\pi}$ es una Γ -fibración regular (por la Proposición 1.5). Como el diagrama (13) es un cuadrado pull-back, la proyección $p|_U$ también lo es. Ahora aplicando la Proposición 1.8 concluimos que p es una Γ -fibración regular. □

5 Haces principales como G -fibraciones

En esta sección consideremos el caso particular de un $(K; \Gamma)$ -haz principal, cuando Γ es una extensión de un grupo G por K por medio de una sucesión exacta corta escindida o, equivalentemente, en virtud de la Proposición 3.1 y el Corolario 3.2 cuando Γ es un producto semidirecto.

Supongamos que una Γ -función $p : E \rightarrow B$ es un $(K; \Gamma)$ -haz principal (véase la Definición 4.1), donde Γ es una extensión de un grupo G por K por medio de una sucesión exacta corta

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{\iota} \Gamma \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

que es escindida por un homomorfismo $j : G \rightarrow \Gamma$, es decir, $\pi \circ j = id_G$. La acción de Γ en E induce la acción izquierda \star de G en E y la acción derecha \cdot de K en E via j y ι respectivamente:

$$g \star y = j(g)y, \quad y \cdot k = \iota(k^{-1})y, \quad k \in K, g \in G, y \in E$$

Notemos que la acción \star de K es libre debido la condición (b) de la Definición 4.1.

Es muy importante para que ahora podemos considerar la Γ -función $p : E \rightarrow B$ como una G -función via $j : G \hookrightarrow \Gamma$.

De verdad, ya sabemos que el Γ -espacio B tiene una estructura natural de un G -espacio según la Observación 4.2(ii): la acción $*$ de G en B fue definida de la siguiente manera:

$$g * b = \gamma b, \quad \gamma \in \pi^{-1}(g).$$

Como $j(g) \in \pi^{-1}(g)$ (pues $\pi(j(g)) = g$), tenemos $g * b = j(g)b$. En otras palabras, $*$ es una acción de G en B via j .

Por consiguiente, la Γ -función $p : E \rightarrow B$ es una G -función via $j : G \hookrightarrow \Gamma$ en el sentido de la Sección 1.5:

$$p(g \star y) = p(j(g)y) = j(g)p(y) = g * p(y)$$

para $g \in G$ y $y \in E$.

Ahora, tomando en cuenta estas observaciones, podemos presentar la siguiente versión particular del Teorema 4.3.

Teorema 5.1. *Sea E un Γ -espacio merizable, donde Γ es un grupo compacto de Lie. Supongamos que Γ es una extensión de un grupo topológico G por un grupo topológico K mediante la sucesión exacta corta*

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{\iota} \Gamma \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

escindida por medio de $j : G \hookrightarrow \Gamma$.

Si una Γ -función $p : E \rightarrow B$ es un $(K; \Gamma)$ -haz principal, entonces p es una G -fibración regular respecto las acciones de G en E y B via j .

Demostración. Por el Teorema 4.3 p es una Γ -fibración regular. Por consiguiente, p es también una G -fibración regular como una G -función via j en virtud de la Proposición 1.6. \square

Estamos interesados en situaciones cuando haces principales equivariantes cuales satisfacen al Teorema 5.1 surgen de una manera natural.

Notemos primero que para las acciones \star y \cdot definidas arriba tenemos la relación:

$$g \star (y \cdot k) = (g \star y) \cdot \alpha_g(k), \quad g \in G, \quad k \in K, \quad y \in E \quad (14)$$

donde α_g se define por (11).

De hecho, las acciones \star y \cdot determinan la acción inicial de Γ en E ; en otras palabras, podemos reestablecer la acción de Γ en E usando las acciones \star y \cdot . Más precisamente, $(g \star y) \cdot k^{-1} = (i(k^{-1}))^{-1} j(g)y = i(k)j(g)y$ y según las formulas (10) y (12) obtenemos

$$\gamma y = (g \star y) \cdot k^{-1}, \quad \gamma \in \Gamma, \quad y \in E \quad (15)$$

donde $g = \pi(\gamma)$ y $k = \iota^{-1}(\gamma j(\pi(\gamma^{-1})))$.

Las relaciones (14) y (15) se utilizan en el siguiente teorema que es una consecuencia del Teorema 5.1.

Teorema 5.2. *Sean G y K grupos compactos de Lie relacionados por el homomorfismo $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(K)$. Sea E un G -espacio izquierdo metrizable dotado también de una acción derecha libre del grupo K tal que se tiene la relación*

$$g \star (y \cdot k) = (g \star y) \cdot \alpha_g(k), \quad g \in G, \quad k \in K, \quad y \in E$$

(aquí \star y \cdot denotan las acciones G y K respectivamente). Entonces la proyección K -orbital $p : E \rightarrow B$ es una G -fibración regular, donde el espacio K -orbital $B = E/K$ está considerado como un G -espacio dotado de la acción $g \star yK = (g \star y)K$ (aquí, $yK = (y)K = \{y \cdot k \mid k \in K\}$ denota la K -órbita de $y \in E$).

Demostración. Las acciones \star y \cdot determinan la acción izquierda de $\Gamma = G \rtimes_{\alpha} K$ en E como sigue:

$$(g, k)y = (g \star y) \cdot k^{-1}, \quad (g, k) \in \Gamma, \quad y \in E.$$

Notemos que la acción \star está bien definida: si $yK = y'K$ entonces $y' = y \cdot k$ para alguna $k \in K$ y

$$(g \star y')K = (g \star (y \cdot k))K = ((g \star y) \cdot \alpha_g(k))K = (g \star y)K.$$

Por consiguiente, la acción de Γ en B dada por $(g, k)yK = g * yK$ está bien definida y podemos considerar $p : E \rightarrow B$ como una Γ -función pues

$$p((g, k)y) = p((g \star y) \cdot k^{-1}) = ((g \star y) \cdot k^{-1})K = (g \star y)K = g * yK = (g, k)p(y).$$

Con estas acciones de Γ , $p : E \rightarrow B$ es un $(K; G)$ -haz ya que obviamente se cumplen las condiciones (a)-(c) de la Definición 4.1.

Además, la sucesión exacta corta

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{in} G \rtimes_{\alpha} K \xrightarrow{pr} G \longrightarrow 1$$

se escinde por $j : G \hookrightarrow \Gamma$, $g \mapsto (g, e)$.

Evidentemente, las acciones \star y $*$ pueden tratadas como las acciones de G en E y B obtenidas de las acción de Γ la via j . En efecto, para $g \in G, y \in E$ y $b = yK \in B$, tenemos

$$j(g)y = (g, e)y = (g \star y) \cdot e^{-1} = g \star y$$

y

$$j(g)b = j(g)(yK) = (g, e)yK = g * yK.$$

Por último, el grupo Γ es un grupo compacto de Lie porque, como un espacio topológico, es $G \times K$. Concluimos que el $(K; G)$ -haz $p : E \rightarrow B$ satisface el Teorema 5.1 y por lo tanto p es una G -fibración regular. \square

Observación 5.3. Observe que la función $p : E \rightarrow B$ del Teorema 5.2 es un (G, α, K) -haz numerable en el sentido de [4, (8.7)]. La demostración del Teorema 5.2 es, de hecho, una realización de la idea de la prueba de [4, Proposition (8.10)] la cual afirma que p es localmente trivial como (G, α, K) -haz.

Uno puede usar argumentos estándares para probar que un (G, α, K) -haz numerable localmente trivial tiene la EHLP, utilizando la estructura de haz sobre $B \times I$; esta estructura está dada en [4, Proposition (8.13)].

6 Funciones por conjugación como fibraciones

En esta sección consideramos una aplicación del Teorema 5.2 a así llamadas “funciones por conjugación”.

Dado un subgrupo cerrado K de un grupo topológico G , es costumbre considerar el espacio cociente G/K como un G -espacio con la acción por traslación izquierda $g \cdot g'K = gg'K$. Claramente, si H es un subgrupo cerrado de G , podemos considerar G/K como un H -espacio por traslación izquierda. Pero en este trabajo estamos interesados en la posibilidad de considerar G/K con la acción \star del subgrupo H de G sobre G/K **por conjugación** dada por $h \star gK = hgh^{-1}K$. Vamos a dar las condiciones para tener esta acción.

Observemos primero que no hay obstáculos para considerar la acción por conjugación de H sobre G dada por $h \star g = hgh^{-1}$. Es fácil ver que en verdad es una acción. Notemos que un subgrupo K de G es invariante respecto a esta acción, es decir, cumple $hKh^{-1} = K$ para todo $h \in H$, si y sólo si se tiene

$$H \subset N(K),$$

donde $N(K) = \{g \in G \mid gKg^{-1} = K\}$ es el *normalizador* de K en G .

Proposición 6.1. Sean H y K subgrupos cerrados de un grupo G . La función

$$H \times G/K \rightarrow G/K,$$

dada por $(h, gK) \mapsto h \star gK = hgh^{-1}K$ es una acción si y sólo si $H \subset N(K)$.

Demostración. Supongamos que \star es una acción bien definida.

Sea $h \in H$. Veamos que $hKh^{-1} \subset K$. Si $y \in hKh^{-1}$, entonces $y = hkh^{-1}$ para alguna $k \in K$ y $hkh^{-1}K = h \star kK$. Como la acción está bien definida y $kK = eK$, tenemos:

$$hkh^{-1}K = h \star kK = h \star eK = hh^{-1}K = K$$

lo cual implica que $y = hkh^{-1} \in K$ y, por lo tanto, $hKh^{-1} \subset K$. Como $hKh^{-1} \subset K$ para cada $h \in H$, en realidad tenemos $hKh^{-1} = K$, es decir, $h \in N(H)$.

Ahora supongamos que $H \subset N(K)$. Si $g_1K = g_2K$, entonces $g_2^{-1}g_1 \in K$. Para cada $h \in H$, tenemos $hKh^{-1} = K$ y, en particular, $hg_2^{-1}g_1h^{-1} \in K$. Esto se puede reescribir $(hg_2h^{-1})^{-1}(hg_1h^{-1}) \in K$, lo cual implica que $hg_1h^{-1}K = hg_2h^{-1}K$, es decir, $h \star g_1K = h \star g_2K$. Concluimos que la función $(h, gK) \mapsto h \star gK$ está bien definida.

Veamos que es una acción. Sean $e \in H$, $h_1, h_2 \in H$ y $gK \in G/K$.

$$(a) \quad e \star gK = gK$$

$$(b) \quad h_1 h_2 \star gK = (h_1 h_2)g(h_1 h_2)^{-1}K = h_1(h_2 g h_2^{-1})h_1^{-1}K = h_1 \star (h_2 \star gK).$$

La continuidad se sigue de la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H \times G & \xrightarrow{\theta} & G \\ \text{id}_H \times q \downarrow & & \downarrow q \\ H \times G/K & \xrightarrow{\theta^*} & G/K \end{array}$$

donde $\theta(h, g) = hgh^{-1}$, $q(g) = gK$, y $\theta^*(h, gK) = h \star gK = hgh^{-1}K$, y además de que q es una función abierta. \square

Observación 6.2. La acción de H en G/H por conjugación está bien definida pues $H \subseteq N(H)$. De hecho esta acción coincide con la acción por traslación izquierda de H sobre $G/H : (h, gH) \mapsto h \star gH = hgh^{-1}H = hgH$.

Corolario 6.3. Sean H , K y M son subgrupos cerrados de G tales que $M \subset K$. Si $H \subset N(M) \cap N(K)$, entonces la proyección natural

$$q : G/M \rightarrow G/K, \quad gM \mapsto gK.$$

es una H -función respecto a las acciones de H en G/M y G/K por conjugación.

Demostración. Como $H \subset N(M)$ y $H \subset N(K)$, de la Proposición 6.1 H actúa sobre G/M y G/K por conjugación, es decir, tenemos las acciones $h \star gM = hgh^{-1}M$ y $h \star gK = hgh^{-1}K$.

Es inmediato verificar que q es una H -función. En efecto, si $h \in H$ y $gM \in G/M$, entonces

$$q(h \star gM) = q(hgh^{-1}M) = hgh^{-1}K = h \star gK = h \star q(gM).$$

\square

Definición 6.4.

(i) Sean H y K subgrupos cerrados de un grupo G . Vamos a decir que G/K es un H -espacio por conjugación si $H \subset N(K)$ y G/K está dotado de la acción $(h, gK) \mapsto h \star gK = hgh^{-1}K$.

(ii) Sean H , K y M son subgrupos cerrados de G tales que $M \subset K$. Se dice que la proyección natural

$$q : G/M \rightarrow G/K, \quad gM \mapsto gK.$$

es una **H -función por conjugación** si $H \subset N(M) \cap N(K)$ y los espacios G/M y G/K son H -espacios por conjugación.

En particular, si H es un subgrupo cerrado de un grupo G , entonces siempre podemos considerar la proyección natural $q : G \rightarrow G/H$ como una H -función por conjugación.

En realidad, el propósito de esta sección es probar la siguiente afirmación:

Teorema 6.5. *Sea G un grupo compacto y sean H y K subgrupos cerrados de G tales que $H \subset N(K)$. Si M es un subgrupo normal grande de G tal que $M \subset K$, entonces la proyección*

$$q : G/M \rightarrow G/K,$$

considerada como H -función por conjugación es una H -fibración regular.

Demostración. Como M es un subgrupo normal cerrado de G , tenemos que HM y KM son subgrupos cerrados de G y los grupos cocientes HM/M y KM/M son subgrupos cerrados de del grupo cociente G/M . Como, además, M es un subgrupo grande, G/M es un grupo compacto de Lie y, por lo tanto, HM/M y KM/M también son grupos compactos de Lie pues son subgrupos cerrados de G/M .

Vamos a considerar G/M como como un HM/M -espacio izquierdo con la acción de HM/M por conjugación

$$hM \star gM = (hM)(gM)(hM)^{-1} = hgh^{-1}M$$

y como un K/M -espacio derecho por traslaciones derechas

$$gM \cdot kM = (gM)(kM) = gkM.$$

Obviamente, esta acción derecha es libre.

Sea $\alpha : HM/M \rightarrow \text{Aut}(K/M)$, $hM \mapsto \alpha_{hM}$, el homomorfismo dado por $\alpha_{hM}(kM) = hkh^{-1}M$. Este está bien definido ya que $H \subset N(K)$. Además tenemos

$$hM \star (gM \cdot kM) = hgkh^{-1}M = (hgh^{-1})M \cdot hkh^{-1}M = (hM \star gM) \cdot \alpha_{hM}(kM).$$

Esto significa que el espacio G/M (que, desde luego, es metrizable por ser un grupo de Lie) con las acciones \star y \cdot satisface las condiciones del Teorema 5.2. Por lo tanto, la proyección K/M -orbital

$$q' : G/M \rightarrow (G/M)/(K/M)$$

es una HM/M -fibración regular.

Según la Proposición 1.6, q' es también una H -fibración regular respecto a la acción de H sobre G/M y $(G/M)/(K/M)$ via el homomorfismo $\beta : H \rightarrow HM/M$, $h \mapsto hM$. Evidentemente, es una acción por conjugación debido a la definición de la acción \star . De manera natural podemos identificar el espacio $(G/M)/(K/M)$ con G/K por medio del homeomorfismo

$$(G/M)/(K/M) \rightarrow G/K, \quad gM(K/M) \mapsto gK.$$

Por consiguiente, podemos identificar q' con la H -función $q : G/M \rightarrow G/K$. \square

Observación 6.6.

(a) La proyección $q : G/M \rightarrow G/K$ en el Teorema 6.5 se puede considerar como un $(HM/M, \alpha, K/M)$ -haz localmente trivial en el sentido de [4, (8.7)].

(b) Tomando $M = \{e\}$ y $K = H$ en el Teorema 6.5, tenemos la siguiente afirmación: *la proyección natural $G \rightarrow G/H$, considerada como H -función por conjugación, es una H -fibración siempre que G sea un grupo compacto de Lie y H sea un subgrupo cerrado de este.* Este hecho se puede encontrar en [9, p.266].

Bibliografía

- [1] A. Bykov, R. Juárez Flores, *G-fibrations and twisted products*, *Topology Appl.* **196** (2015), 379-397.
- [2] A. Bykov, A.L. Kantún Montiel, *Strong G-fibrations and orbit projections*, *Topology Appl.* 163 (2014), 46-65.
- [3] G.E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, New York, 1972.

- [4] T. tom Dieck, *Transformation groups*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1987.
- [5] J. Dydak, S. Nowak, *Funtion Space and Shape Theories*, Fund. Math. 171 (2002), 117-154.
- [6] R. Engelking, *General Topology*, PWN, Warszawa, 1977.
- [7] S.-T. Hu, *Theory of Retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, 1965.
- [8] I.M. James, *General Topology and Homotopy Theory*, Springer-Verlag, 1984.
- [9] R.K. Lashof, *Equivariant bundles*, Illinois J. of Math., 26 (1982), no.2, 257-271.
- [10] R.K. Lashof, J.P.May, *Generalized Equivariant Bundles*, Bulletin de la Soc.Math. de Belgique, XXXVIII (1986), p.265-271.
- [11] D.Montgomery, L.Zippin, *Topological Transformation groups*, Krieger, Huntington, 1974.
- [12] R.S. Palais, *The classification of G-spaces*, Mem. Amer.Math. Soc. 36, 1960.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

abykov@fcfm.buap.mx
pdsoto@fcfm.buap.mx
maeschacon@fcfm.buap.mx

Capítulo 9

Modelo del hiperespacio suspensión del continuo de Knaster

Gerardo Hernández Valdez, David Herrera Carrasco,
Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP

Resumen

En este capítulo probamos lo siguiente: que el continuo de Knaster es indescomponible; que posee la propiedad de cono = hiperespacio; una caracterización de continuos indescomponibles. Finalmente, se construye un modelo del hiperespacio suspensión del continuo de Knaster que ilustra dicha caracterización.

1 Introducción

Un continuo es un espacio métrico no degenerado, compacto y conexo. Recordemos que un continuo descomponible es aquel que se puede expresar como la unión de dos subcontinuos propios. Así, un continuo es indescomponible si no se puede expresar como la unión de dos subcontinuos propios de este. Ejemplos de continuos descomponibles existen muchos, por mencionar algunos, tenemos al arco, la curva cerrada simple, las gráficas finitas. A partir de la definición surge la pregunta natural: ¿Existen continuos que no son descomponibles? La respuesta es afirmativa, y los conocemos como continuos indescomponibles. El primer ejemplo de un continuo indescomponible lo describió el matemático danés L. E. J. Brouwer en su artículo de 1910 [3]. Un año más tarde, Z. Janiszewski [9, VI] propuso el ejemplo que ahora conocemos como el continuo de Knaster, y de hecho fue el primer ejemplo de un continuo indescomponible que no separa al plano. Bronislaw Knaster, matemático polaco, en su artículo de 1924 [10] prueba, utilizando un resultado de Kazimierz Kuratowski acerca de la irreducibilidad entre dos puntos, que

cierto continuo, en efecto es indescomponible. Es por esta razón que a este continuo se le conoce como el continuo de Brouwer-Janiszewski-Knaster. Tuvieron que pasar algunos años más para que se estudiara una propiedad interesante acerca del hiperespacio del continuo de Knaster. James Rogers demuestra que el hiperespacio del continuo de Knaster es homeomorfo a su cono. Esta propiedad nos ayuda en la construcción del modelo del hiperespacio suspensión de este continuo. Así, tendremos bien identificado el espacio de todos los subconjuntos del continuo de Knaster que tienen solo un punto. Al final de este capítulo, utilizaremos esta construcción para ilustrar el teorema que relaciona la propiedad de un continuo de ser indescomponible y que su hiperespacio suspensión al removerle dos puntos específicos no es arco-conexo. Una de las razones por la cual se realiza el capítulo es debido a que en la literatura es difícil encontrar una demostración acerca de la propiedad de cono = hiperespacio para el continuo de Knaster, Rogers solo menciona en [17, 1] que el continuo de Knaster posee esta propiedad, pero no da los detalles de su prueba, por lo cual aquí nos damos el placer de demostrarla.

2 Preliminares

A lo largo de este capítulo, X denotará un continuo y d su métrica. Si $n \in \mathbb{N}$, consideraremos los siguientes hiperespacios de X :

$$\begin{aligned}2^X &= \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es cerrado de } X\}, \\C_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a los más } n \text{ componentes}\}, \\F_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.\end{aligned}$$

A estos hiperespacios se les dota de la topología de Vietoris:

Definición 2.1. La topología de Vietoris para 2^X es la topología más pequeña, τ_V tal que 2^X tiene la siguiente propiedad: $\{A \in 2^X : A \subset U\} \in \tau_V$ para todo U abierto de X , y $\{A \in 2^X : A \subset B\}$ es cerrado bajo la τ_V , para todo B cerrado de X .

Si U_1, \dots, U_m son abiertos de X , entonces

$$\langle U_1, \dots, U_m \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^m U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i\}$$

es un básico para la topología de Vietoris (véase [6, Teorema 1.2]). Denotamos a $C_1(X)$ simplemente por $C(X)$, se le conoce como el hiperespacio de los subcontinuos de X .

El otro hiperespacio que es de nuestro interés será el espacio cociente $C_n(X)/F_m(X)$ con $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \geq m$, denotado por $HS_m^n(X)$, y se conoce como el (n, m) -ésimo **hiperespacio suspensión** de X (véase [1]).

Para la siguiente definición, recordemos primeramente que el cono de X es el espacio cociente que se obtiene al identificar $X \times \{1\}$ en un solo punto, en el espacio $X \times [0, 1]$, y se denota por $Cono(X)$. El vértice y la base del cono se denotan por $v(X)$ y $B(X)$, respectivamente.

Definición 2.2. Un continuo X posee la propiedad **cono = hiperespacio** si existe un homeomorfismo $h : C(X) \rightarrow Cono(X)$ tal que $h(X) = v(X)$ y $h(F_1(X)) = B(X)$.

Veamos que el intervalo unitario posee esta propiedad.

Ejemplo 2.3. Por [8], tenemos que $C([0, 1])$ se puede modelar como un triángulo en \mathbb{R}^2 , a través de la función $\gamma : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma([a, b]) = (a, b)$, la cual es un homeomorfismo entre $C([0, 1])$ y el triángulo $T = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$.

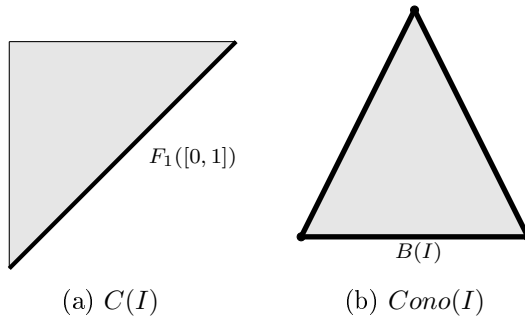


Figura 1: Hiperespacio y cono del intervalo

Sea $h : C([0, 1]) \rightarrow Cono([0, 1])$ la función definida por $h([a, b]) = (\frac{1}{2}(a + b), b - a)$ donde $C(I)$ se está rotando -45° en \mathbb{R}^2 y luego se ajusta la base y la altura. De la función, es claro que h un homeomorfismo, y por definición de h , tenemos que $h(F_1([0, 1])) = B([0, 1])$ y $h([0, 1]) = v([0, 1])$. Concluimos que el intervalo $[0, 1]$ posee la propiedad de cono = hiperespacio.

Las siguientes definiciones ayudarán en la construcción del homeomorfismo entre el hiperspacio de los subcontinuos del continuo de Knaster y su cono.

Definición 2.4. Sean $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de continuos y $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas $f_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$. La sucesión doble $\{X_i, f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una **sucesión inversa**, donde los X_i se conocen como **espacios factores** y las funciones f_i como **funciones de ligadura**. Si $\{X_i, f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión inversa, escribimos

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} \cdots X_i \xleftarrow{f_i} \cdots X_\infty$$

Antes de continuar, es menester mencionar que f_{ij} denota la composición de las funciones de ligadura $f_i \circ f_{i+1} \circ \cdots \circ f_j$.

Con la definición anterior, se define el siguiente concepto límite inverso.

Definición 2.5. Si $\{X_i, f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión inversa, definimos el **límite inverso** de la sucesión inversa, y lo denotamos por $\varprojlim (X_i, f_i)$, como el subespacio del producto cartesiano $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$, definido por

$$\varprojlim (X_i, f_i) = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i \text{ para cada } i \in \mathbb{N}\}.$$

Un resultado inmediato de la definición es el siguiente, que se encuentra en [16, Teorema 2.4]

Teorema 2.6. Si $\{X_i, f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión inversa, entonces el límite inverso es un continuo.

Denotaremos por $\pi_j : \varprojlim (X_i, f_i) \rightarrow X_j$ a la proyección natural y sea $\pi'_j : \varprojlim (C(X_i), f'_i) \rightarrow C(X_j)$ una proyección sobre $C(X_j)$ para cada j , donde $f'_i(A) = f_i(A)$, para cada $A \in C(X_{i+1})$.

3 Construcción del continuo de Knaster

En esta sección procedemos con la construcción del continuo de Knaster, tomada del artículo original [10].

Para la construcción del continuo de Knaster es necesario tener presente la construcción del conjunto de Cantor, al cual denotaremos por \mathcal{C} , y se define

de la siguiente manera: sea $[0,1]$ es el intervalo cerrado unitario, en el primer paso tenemos al conjunto $F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, es decir, removemos el intervalo abierto central de $[0,1]$ al dividirlo en tres partes. De manera similar, $F_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, donde removemos el intervalo abierto central de cada subintervalo cerrado en F_1 . En general, suponiendo que hemos construido el conjunto F_{n-1} , si $F_n = \bigcup_{k=0}^{3^n-1} [\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}] \cap F_{n-1}$, obtenemos F_{n+1} removiendo el intervalo abierto central de cada subintervalo en F_n . Así, el conjunto de Cantor se define por

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n. \tag{1}$$

Así mismo, utilizaremos la siguiente definición del conjunto de Cantor, que se encuentra en [2, Sección 7],

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} : a_n \in \{0, 2\} \right\}. \tag{2}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, considere $\mathcal{C} \times \{0\}$ el conjunto de Cantor encajado en \mathbb{R}^2 , es decir, insertamos el conjunto de Cantor en el eje de las abscisas. Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$\mathcal{C}_n = \left\{ (x, 0) \in \mathcal{C} \times \{0\} : \frac{2}{3^n} \leq x \leq \frac{1}{3^{n-1}} \right\}.$$

Dado $x \in \mathcal{C}$, definamos al conjunto $T_x = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \beta^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, \beta \geq 0 \right\}$ y denotamos por $\mathcal{D}_0 = \{T_x\}_{x \in \mathcal{C}}$, es decir, \mathcal{D}_0 es la familia formada por las semicircunferencias T_x que están por encima del eje de las abscisas, que tienen como centro al punto $(\frac{1}{2}, 0)$ y los puntos extremos de cada semicircunferencia pertenecen al conjunto de Cantor. De manera análoga, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$, $T_x^n = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \left(\alpha - \frac{5}{2 \cdot 3^n}\right)^2 + \beta^2 = \left(x - \frac{5}{2 \cdot 3^n}\right)^2, \beta \leq 0 \right\}$ y la familia $\mathcal{D}_n = \{T_x^n\}_{x \in \mathcal{C}_n}$ compuesta por las semicircunferencias T_x^n que se encuentran por debajo del eje de las abscisas, con centro en $(\frac{5}{2 \cdot 3^n}, 0)$ y que tienen como puntos extremos a puntos del conjunto \mathcal{C}_n .

Definamos ahora el conjunto

$$\mathcal{K} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\bigcup \mathcal{D}_n \right).$$

A fin de mostrar que \mathcal{K} es un continuo indescomponible, considere la sucesión infinita $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de semicircunferencias contenidas en \mathcal{K} que satisfacen las siguientes condiciones:

- (i) S_1 une los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$,
- (ii) para cada $n \geq 1$, $S_n \cap S_{n+1}$ se compone del extremo común de S_n y S_{n+1} .

Consideremos la unión de los elementos de la sucesión de acabamos de construir, $\mathcal{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$. Si denotamos por \mathcal{I} al conjunto de los extremos de los segmentos de longitud $\frac{1}{3^k}$, con $k \geq 1$, que pertenecen a $\mathcal{C} \times \{0\}$, tenemos que este conjunto es denso en $\mathcal{C} \times \{0\}$. Más aún, veamos que $\mathcal{J} \subset \mathcal{S}$. Observe que $(1, 0) \in S_1 \cap S_2$, $(\frac{2}{3}, 0) \in S_2 \cap S_3$ y $(\frac{1}{3}, 0) \in S_3 \cap S_4$. Y supongamos que, para algún $m \in \mathbb{N}$, y $k \in \{1, 2, \dots, 3^m - 1\}$, tenemos que $(\frac{k}{3^m}, 0) \in S_r \cap S_{r+1}$, donde dicho elemento pertenece también al conjunto $\mathcal{C} \times \{0\}$. Veamos que existe un punto de \mathcal{I} en $S_{r+1} \cap S_{r+2}$. Tenemos dos casos; cuando S_{r+1} es una circunferencia superior y cuando es inferior.

Caso 1. Supongamos que S_{r+1} es una semicircunferencia superior. Supondremos sin pérdida de generalidad que S_{r+2} es una semicircunferencia inferior tal que $(\frac{k}{3^m}, 0)$ es el extremo derecho de S_{r+2} . Entonces, $\frac{k}{3^m} \leq \frac{1}{3}$, lo que nos indica que $k \leq 3^{m-1}$. Ahora, notemos que el centro de S_{r+2} es $(\frac{5}{2 \cdot 3^{m-1}}, 0)$ o $(\frac{5}{2 \cdot 3^m}, 0)$, tenemos que el otro extremo puede ser el punto $(\frac{15-k}{3^m}, 0)$ o el punto $(\frac{5-3k}{3^{m+1}}, 0)$, los cuales pertenecen al conjunto \mathcal{J} , pues la longitud de los intervalos $[\frac{15-k}{3^m}, \frac{k}{3^m}]$ y $[\frac{5-3k}{3^{m+1}}, \frac{k}{3^m}]$ son $\frac{2k-15}{3^m}$ y $\frac{6k-5}{3^{m+1}}$, respectivamente.

Caso 2. Supongamos que S_{r+1} es una semicircunferencia inferior. Supondremos sin pérdida de generalidad que $(\frac{k}{3^m}, 0)$ se encuentra en el extremo izquierdo de S_{r+2} , la cual es una semicircunferencia superior con centro en $(\frac{1}{2}, 0)$ y tenemos que $k \leq 3^m - 1$. Entonces, el otro extremo de S_{r+2} es el punto $(1 - \frac{k}{3^m}, 0)$, el cual es un punto de $\mathcal{C} \times \{0\}$ que está en $S_{r+1} \cap S_{r+2}$.

Ahora, puesto que \mathcal{J} es denso en $\mathcal{C} \times \{0\}$, tenemos que $\text{cl}(\mathcal{S}) = \mathcal{K}$, lo cual demuestra que el espacio \mathcal{K} es un continuo, pues es la cerradura de una unión de conexos, y que la intersección es no vacía. Por otro lado, tenemos

que $\text{cl}(\mathcal{C} \times \{0\} - \mathcal{I}) = \mathcal{C} \times \{0\}$, que a su vez implica $\text{cl}(\mathcal{K} - \mathcal{S}) = \mathcal{K}$. Esto es, $\mathcal{K} - \mathcal{S}$ es denso en \mathcal{K} .

Para probar que \mathcal{K} es un continuo indescomponible, necesitamos la siguiente definición.

Definición 3.1. Un continuo X es irreducible en p y q si no existe un subcontinuo propio de X que contenga al conjunto $\{p, q\}$.

Definición 3.2. Un punto q en un continuo X es de **irreducibilidad** si existe $q \in X$ tal que X es irreducible en p y q .

La siguiente caracterización de continuos indescomponibles se encuentra en [16, Corolario 11.19].

Teorema 3.3. *Un continuo X es indescomponible si y solo si todo punto de X es un punto de irreducibilidad.*

Utilizaremos la densidad de $\mathcal{K} - \mathcal{S}$ y el resultado anterior para probar la indescomponibilidad de \mathcal{K} .

El siguiente lema nos provee de una propiedad fundamental para demostrar que el continuo \mathcal{K} es indescomponible.

Lema 3.4. *Si A es un continuo sujeto a las siguientes condiciones*

$$A \subset \mathcal{K}, \quad A \neq \mathcal{K}, \quad A \cap \mathcal{S} \neq \emptyset,$$

entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$.

Demostración. Sea $q \in A \cap \mathcal{S}$. Puesto que \mathcal{S} pasa por todos los puntos de la forma $(\frac{k}{3^n}, 0)$ como se probó anteriormente, sabemos que el conjunto \mathcal{S} es denso en \mathcal{K} y la desigualdad conjuntista $A \neq \mathcal{K}$ hace posible encontrar un punto $p \in \mathcal{S} - A$. Más aún, como $q \in \mathcal{S}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $q \in S_m$ podemos escoger el punto $p \in S_{m+1}$ de manera que si α es el arco con extremos en $(0, 0)$ y p , entonces $q \in \mathcal{S} \cap \alpha$. Veamos que $A \subset \alpha$. Procedemos por contradicción, supongamos que existe $r \in A - \alpha$. Sea n_0 un número natural tal que la distancia de p a A , así como la distancia de r a α exceda $\frac{1}{3^{n_0}}$ y que

$$\alpha \subset \bigcup_{i=1}^{2^{n_0}-1} S_i. \tag{3}$$

Ahora considere la banda $P = \text{Fr}_{\mathbb{R}^2} \bigcup_{a \in \alpha} B\left(a, \frac{4}{3^{n_0+2}}\right)$, formada por todos los círculos de radio $\frac{4}{3^{n_0+2}}$ que tienen por centro a un punto de α . Dicha banda se puede visualizar en la Figura 2.

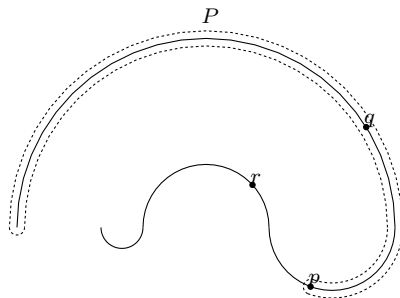


Figura 2: Banda P alrededor de α .

El borde de la banda se compone de dos arcos paralelos a α y dos semicircunferencias con centro en $(0, 0)$ y en p . Notemos que las dos líneas paralelas a α y la semicircunferencia con centro en $(0, 0)$ son ajenas a \mathcal{K} , puesto que sus puntos de intersección con el eje de las abscisas no pertenecen, en virtud de la inclusión (3), al conjunto \mathcal{C} . Esto ocurre debido a que $\frac{4}{3^{n_0+2}}$ no se encuentra en \mathcal{C} , puesto que posee al menos un dígito 1 en su expansión ternaria. Ahora, note que la circunferencia de centro p es ajena a A , puesto que la distancia de p a A es mayor a $\frac{1}{3^{n_0}}$ que a su vez es mayor a $\frac{4}{3^{n_0+2}}$. De esta manera, la banda entera P es ajena a A . Así, A es un subcontinuo de \mathcal{K} tal que $A \subset \bigcup_{a \in \alpha} B\left(a, \frac{4}{3^{n_0+2}}\right)$ o bien, $A \cap \bigcup_{a \in \alpha} B\left(a, \frac{4}{3^{n_0+2}}\right) = \emptyset$, contradiciendo $r \in A - \alpha$ y $q \in A \cap \mathcal{S}$, respectivamente. Concluimos que, $A \subset \alpha$ y se sigue el resultado. \square

De esta propiedad y utilizando el Teorema 3.3 concluimos esta sección con el siguiente corolario.

Corolario 3.5. *El continuo de Knaster es indescomponible.*

Demostración. Sean $p, q \in \mathcal{K}$ tales que $p \in \mathcal{S}$ y $q \in \mathcal{K} - \mathcal{S}$ y sea K un subcontinuo propio de \mathcal{K} tal que $p, q \in K$. Note que $K \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$, pues p está en dicha intersección. Utilizando Lema 3.4, tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset S_1 \cup \dots \cup S_{n_0}$, lo cual es una contradicción, pues $q \in K$, pero

$q \notin S_1 \cup \dots \cup S_{n_0}$. Concluimos que \mathcal{K} es un continuo indescomponible, por Teorema 3.3. \square

4 Propiedad de *Cono = Hiperespacio*

En esta sección probaremos que el continuo \mathcal{K} posee la propiedad de cono = hiperespacio. Para ello, haremos uso de los límites inversos.

El primer paso es identificar al continuo \mathcal{K} como un límite inverso. Para ello, considere el siguiente lema.

Lema 4.1. *Supongamos que los espacios factores X_i de X_∞ están encajados en un continuo X y las funciones de ligadura satisfacen las siguientes condiciones*

- (a) *existe un $N \in \mathbb{M}$ tal que para cada i y $x \in X_{i+1}$, $d(x, f_i(x)) < \frac{M}{2^i}$,*
- (b) *para cada espacio factor X_i y cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $k > i$ y $p, q \in X_k$ con $d(f_{ik}(p), f_{ik}(q)) > \varepsilon$, entonces $d(p, q) > \delta$.*

Entonces, para cada $x \in X_\infty$, la sucesión de coordenadas x_i converge a un punto único $h(x) \in X_\infty$ y la función $h : X_\infty \rightarrow X$ es un encaje.

Demostración. Si $x_{i+1} \in X_{i+1}$, entonces existe $M > 0$ tal que para cada i , $d(x_{i+1}, f_i(x_{i+1})) = d(x_{i+1}, x_i) < \frac{M}{2^i}$. Con esto, $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en un continuo, por lo que converge. De esta manera, h está bien definida (envía sucesiones a su límite en X). Veamos que h es una función

continua. Sea $\varepsilon_0 > 0$. Puesto que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{M}{2^i}$ es una serie convergente, existe $N \in \mathbb{N}$

tal que $\sum_{i=N}^{\infty} \frac{M}{2^i} < \frac{\varepsilon_0}{3}$. De este modo, si $x \in X_\infty$ y por (a), tenemos que, para cada $x \in X_\infty$,

$$d(h(x), x_N) \leq d(x_N, x_{N+1}) + d(x_{N+1}, h(x)) < \frac{M}{2^N} + d(x_{N+1}, h(x)) < \frac{\varepsilon_0}{3}. \quad (4)$$

Si $x \in X_\infty$, considere $U = B_{d_N}(x_N, \frac{\varepsilon_0}{3})$, el cual es un abierto de X_N ; tenemos entonces que $\pi_N^{-1}(U)$ es abierto en X_∞ . Más aún, si $y \in \pi_N^{-1}(U)$, entonces $y_N \in U$, y utilizando (4), tenemos

$$d(h(x), h(y)) \leq d(h(x), x_N) + d(x_N, y_N) + d(y_N, h(y)) < \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} = \varepsilon.$$

De aquí, se sigue que h es continua. Finalmente, veamos que esta función es uno a uno. Supongamos que $x \neq y$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} \neq y_{n_0}$. Sea $\varepsilon = \frac{d(x_{n_0}, y_{n_0})}{2}$. Por (b), existe $\delta > 0$ tal que si $k > n_0$ y $p, q \in X_k$ que satisfacen $d(f_{n_0k}(p), f_{n_0k}(q)) > \varepsilon$, entonces $d(p, q) > \delta$. Así, para cada $k > n_0$, $d(x_k, y_k) > \delta$ y puesto que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = h(x)$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = h(y)$, se tiene que $d(h(x), h(y)) \geq \delta$. De esta manera, h es un encaje. \square

Lo que sigue es encontrar un homeomorfismo entre el continuo \mathcal{K} y un límite inverso.

Definición 4.2. Una función $f : X \rightarrow Y$ es **indescomponible** si para cada par (A, B) de subconjuntos de X , tales que $X = A \cup B$, se tiene que $f(A) = Y$ o $f(B) = Y$.

Es inmediato de esta definición que, un continuo es indescomponible si su función identidad es indescomponible.

Teorema 4.3. *El continuo de Knaster es homeomorfo a un límite inverso de arcos con funciones de ligadura indescomponibles.*

Demostración. Buscamos aplicar el lema anterior. Para ello, sean $a_0 = (0, 0)$ y $a_i = (\frac{1}{3^i} \cdot \frac{5}{6}, -\frac{1}{3^i} \cdot \frac{1}{6})$ para cada $i \in \mathbb{N}$ donde a_i es el fondo de los semicírculos por debajo del eje de las abscisas. Denotaremos por A_n al arco contenido en \mathcal{K} que une a a_0 y a_n . Es claro que $A_n \subset A_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En la siguiente figura se muestran los primeros dos arcos.

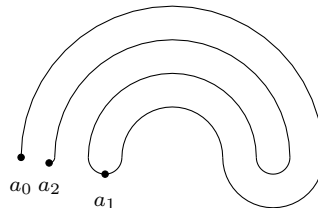


Figura 3: Construcción de los arcos A_n

Los arcos A_i serán nuestros espacios factores y consideraremos las funciones $r_i : A_{i+1} \rightarrow A_i$ definidas de la siguiente manera: los puntos de A_i son fijos; los puntos restantes corresponden al arco $A_{i+1} - (A_i - \{a_i\})$, el cual se puede encajar en A_i (al ser ambos arcos) a través de una función continua $e : A_{i+1} - (A_i - \{a_i\}) \rightarrow A_i$. Así, definimos a r_i como sigue:

$$r_i(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A_i, \\ e(x) & \text{si } x \in A_{i+1} - (A_i - \{a_i\}). \end{cases}$$

Más aún, le pedimos a la función de encaje e que cumpla la desigualdad $d(x, r_i(x)) < \frac{1}{3^i}$, lo cual es posible gracias a que la distancia entre los arcos A_{i+1} y A_i siempre es menor que $\frac{1}{3^i}$. Observe que las funciones r_i son retracciones y éstas serán las funciones de ligadura. Por ser r_i retracciones, tenemos que las funciones r_i son indescomponibles, por definición. Luego, se satisface la condición (a) del Lema 4.1, con $K = 1$. Así, tenemos que la función $h : \lim_{\leftarrow} (A_i, r_i) \rightarrow \mathcal{K}$ está bien definida y es continua. Puesto que

$\mathcal{K} = \text{cl} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)$, tenemos que a través de sucesiones, la función h es suprayectiva al ser continua. Veamos que h es inyectiva. Sean $x, y \in \lim_{\leftarrow} (A_i, r_i)$, tales que $h(x) = h(y)$. Por definición, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $d(x_n, y_n) < \varepsilon$. Puesto que $x_n, y_n \in A_n$, tenemos que $r_n(x_n) = x_n$ y $r_n(y_n) = y_n$. Más aún, se tiene que $r_{n+1}(x_n) = x_n$ y $r_{n+1}(y_n) = y_n$, pues $x_n, y_n \in A_n \subset A_{n+1}$. Esto es, $x_n = y_n$ si $n \geq N$. Por otro lado, como $r_N(x_N) = x_N$, por definición de límite inverso, $r_{N-1}(x_N) = x_{N-1}$

Pero como $h(x) = h(y)$, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que si $m \geq i$, entonces x_m y y_m están en el mismo radio. Entonces, $x_m = r_{m+1}(x_{m+1}) = r_{m+1}(y_{m+1}) = y_m$ si $m > i$. Por definición de h , tenemos que $x = y$ y así, h es inyectiva. \square

Teniendo esto, podemos hacer que el continuo de Knaster sea homeomorfo a un límite inverso más accesible. Para ello, considere el siguiente lema, que será auxiliar para lograr lo que acabamos de mencionar.

Lema 4.4. *Sean X_∞ y Y_∞ dos límites inversos tales que existe una sucesión de homeomorfismos $h_i : X_i \rightarrow Y_i$ que satisfacen $h_i \circ f_i = g_i \circ h_{i+1}$ para cada i . Entonces, X_∞ es homeomorfo a Y_∞ .*

Demostración. Definamos $h^* : X_\infty \rightarrow Y_\infty$ por $h^* ((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = (h_i(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$. Veamos que h^* está bien definida. Si $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X_\infty$, entonces $h^* ((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) =$

$(h_i(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ donde $h_i(x_i) = h_i(f_i(x_{i+1})) = g_i(h_{i+1}(x_{i+1}))$ y $h_{i+1}(x_{i+1}) \in Y_{i+1}$, por lo

que $g_i(h_{i+1}(x_{i+1})) \in Y_i$.

Mostraremos que h^* es una biyección. Sea $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in Y_\infty$. Entonces para cada i , $y_i \in Y_i$ y como h_i es un homeomorfismo, existe $x_i \in X_i$ tal que $h_i(x_i) = y_i$. Más aún, $y_i = h_i(x_i) = h_i(f_i(x_{i+1})) = g_i(h_{i+1}(x_{i+1})) = g_i(y_{i+1})$, de donde se sigue que $h^*((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Veamos que h^* es inyectiva. Sean $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X_\infty$, tales que $h^*((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = h^*((y_i)_{i \in \mathbb{N}})$. Entonces, $h_i(x_i) = h_i(y_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Por ser h_n un homeomorfismo, tenemos que $x_i = y_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y de aquí, se sigue la inyectividad de h^* .

Finalmente, veremos que h^* es continua, y para ello, veremos que es continua coordenada a coordenada por Teorema ... [14]. Para esto, notemos que $\pi_i \circ h^* = h_i \pi_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces, $\pi_i \circ h^*$ es continua, pues h_i y π_i lo son. Tenemos además el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \xleftarrow{f_1} & X_2 & \xleftarrow{f_2} & \cdots & X_i & \xleftarrow{f_i} & \cdots & X_\infty \\ h_1 \downarrow & & h_2 \downarrow & & & h_i \downarrow & & & h^* \downarrow \\ Y_1 & \xleftarrow{g_1} & Y_2 & \xleftarrow{g_2} & \cdots & Y_i & \xleftarrow{g_i} & \cdots & Y_\infty \end{array}$$

De manera similar, h_i^{-1} define el homeomorfismo $(h^*)^{-1}$ y tenemos el resultado. \square

Finalmente, podemos identificar al continuo \mathcal{K} con un límite inverso que consiste de intervalos y la función tienda definida en ...

Teorema 4.5. \mathcal{K} es homeomorfo a $\lim_{\leftarrow} (I, T)$.

Demostración. Sea $g_1 : A_1 \rightarrow I$ un homeomorfismo tal que $g_1(a_0) = 0$ y $g_1(a_1) = 1$. Definamos $g_2 : A_2 \rightarrow I$ como

$$g_2(x) = \begin{cases} \frac{g_1(x)}{2} & \text{si } x \in A_1, \\ 1 - \frac{g_1(r_1(x))}{2} & \text{si } x \in A_2 - A_1. \end{cases}$$

Veamos que $g_1 \circ r_1 = T \circ g_2$.

Si $x \in A_1$, tenemos que $g_1(r_1(x)) = g_1(x)$, por definición de r_1 . Por otro lado, $T(g_2(x)) = T\left(\frac{g_1(x)}{2}\right) = 2\left(\frac{g_1(x)}{2}\right) = g_1(x)$.

Si $x \in A_2 - A_1$, tenemos que $g_1(r_1(x))$ y por otro lado, $T(g_2(x)) = T\left(1 - \frac{g_1(r_1(x))}{2}\right) = 2 - 2\left(1 - \frac{g_1(r_1(x))}{2}\right) = g_1(r_1(x))$.

De la misma manera, definimos $g_n : A_n \rightarrow I$ tal que $g_{n-1} \circ r_{n-1} = T \circ g_n$. Así, la sucesión de homeomorfismos g_n , por lema 4.4, induce un homeomorfismo $g^* : \lim_{\leftarrow} (A_i, r_i) \rightarrow \lim_{\leftarrow} (I, T)$ tal que

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \xleftarrow{r_1} & A_2 & \xleftarrow{r_2} & \cdots & A_i & \xleftarrow{r_i} & \cdots & \lim_{\leftarrow} (A_i, r_i) \\ g_1 \downarrow & & g_2 \downarrow & & & g_i \downarrow & & & g^* \downarrow \\ I & \xleftarrow{T} & I & \xleftarrow{T} & \cdots & I & \xleftarrow{T} & \cdots & \lim_{\leftarrow} (I, T) \end{array}$$

Se sigue que \mathcal{K} es homeomorfo a $\lim_{\leftarrow} (I, T)$. □

Ahora, probaremos un teorema de manera general, el cual identifica al hiperespacio de un límite inverso como el límite inverso que tiene como espacios factores a los hiperespacios de los espacios factores del límite inverso original. Si denotamos por $C_\infty(X)$ al límite inverso $\lim_{\leftarrow} (C(X_i), f'_i)$, tenemos que

Teorema 4.6. *Si X es homeomorfo a $\lim_{\leftarrow} (X_i, f_i)$, entonces $C(X)$ es homeomorfo a $C_\infty(X)$.*

Demostración. Construiremos un homeomorfismo entre los dos espacios considerando las siguientes observaciones: si $A \in C_\infty(X)$, entonces $A = (A_1, A_2, \dots, A_i, \dots)$ donde $A_i \in C(X_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Por otro lado, si $D \in C(X)$, puesto que X es un límite inverso, tenemos que $D = \{(x_1, x_2, \dots) : x_n \in D_n = \pi_n(D)\}$. Con esto, definamos $h : C_\infty(X) \rightarrow C(X)$ por $h(A) = \{(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) : x_i \in A_i\}$. Mostraremos primeramente que esta función es uno a uno. Para ello, sean $A, B \in C_\infty(X)$ tales que $h(A) = h(B)$. Entonces, por definición, tenemos que $\{(x_1, \dots, x_i, \dots) : x_i \in A_i\} = \{(y_1, \dots, y_i, \dots) : y_i \in B_i\}$. Así, para cada $x_i \in A_i$, existen $(x_1, \dots, x_i, \dots) \in h(A)$ y $(y_1, \dots, y_i, \dots) \in h(B)$ tales que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde $x_n = y_n$, para cada n . De esta manera, $x_i \in B_i$ y tenemos que $A_i \subset B_i$. De manera análoga se obtiene la otra contención, llegando a $A_i = B_i$ para cada i . Se sigue que $A = B$ y h es una función uno a uno.

Veamos ahora que h es suprayectiva. Sea $B \in C(X)$. Entonces

$$B = \{(x_1, \dots, x_i, \dots) : x_i \in B_i\} = h((B_i)_{i \in \mathbb{N}}).$$

De esta manera, h es suprayectiva y por ende, una biyección. Sean U_1, \dots, U_m abiertos en X . Por lema [18, 1.3], tenemos que $\langle \pi_n^{-1}(U_1), \dots, \pi_n^{-1}(U_m) \rangle$ es abierto en $C(X)$. Considere

$$\begin{aligned}
 h^{-1}(\langle \pi_n^{-1}(U_1), \dots, \pi_n^{-1}(U_m) \rangle) &= \{A \in C_\infty(X) : h(A) \in \langle \pi_n^{-1}(U_1), \dots, \pi_n^{-1}(U_m) \rangle\} \\
 &= \{A \in C_\infty(X) : h(A) \subset \bigcup_{i=1}^m \pi_n^{-1}(U_i), h(A) \cap \pi_n^{-1}(U_i) \neq \emptyset\} \\
 &= \{A \in C_\infty(X) : (\pi_n \circ h)(A) \subset \bigcup_{i=1}^m U_i, (\pi_n \circ h)(A) \cap U_i \neq \emptyset\} \\
 &= \{A \in C_\infty(X) : \pi_n(\{(x_1, \dots, x_i, \dots) : x_i \in A_i\}) \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle\} \\
 &= \{A \in C_\infty(X) : \{x_n : x_n \in A_n\} \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle\} \\
 &= \{A \in C_\infty(X) : A_n \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle\} \\
 &= \{A \in C_\infty(X) : A \in (\pi'_n)^{-1}(\langle U_1, \dots, U_m \rangle)\} \\
 &= (\pi'_n)^{-1}(\langle U_1, \dots, U_m \rangle).
 \end{aligned}$$

Observe que este último conjunto es abierto en $C_\infty(X)$, pues π'_n es continua. Con esto, probamos que h es un homeomorfismo y concluimos que $C(X)$ es homeomorfo a $C_\infty(X)$. \square

De este lema, y el homeomorfismo entre \mathcal{K} y $\lim(T, I)$, tenemos que $C(\mathcal{K})$ es homeomorfo a $\lim(C(I), T')$, donde $T'(A) = T(A)$.

Probaremos ahora que $Cono(X_\infty)$ es homeomorfo a $\lim(Cono(X_i), f'_i)$. Antes de probar esto, es necesario definir de manera correcta el espacio $\lim(X_i, f''_i)$. Para ello, considere las siguientes funciones:

$$q_i : X_i \times [0, 1] \rightarrow Cono(X_i)$$

$$f'_i : X_{i+1} \times [0, 1] \rightarrow X_i \times [0, 1], \quad f'_i((x_{i+1}), t) = (f_i(x_{i+1}), t)$$

Denotaremos por q_i^* a la restricción $q_i|_{X_i \times [0, 1]} : X_i \times [0, 1] \rightarrow Cono(X_i) - v(X_i)$. Con esto, podemos definir a las funciones $f''_i : Cono(X_{i+1}) \rightarrow Cono(X_i)$ de la siguiente manera:

$$f''_i(x) = \begin{cases} v(X_i) & \text{si } x = v(X_{i+1}), \\ q_i^* \circ f'_i \circ (q_{i+1}^*)^{-1}(x) & \text{si } x \neq v(X_i). \end{cases}$$

Por como se define la función, tenemos que es un homeomorfismo si $x \neq v(X_i)$. Veamos la continuidad en el punto faltante. Utilizaremos sucesiones para proceder con la demostración. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $Cono(X_{i+1})$, y supondremos sin pérdida de generalidad que $a_n \neq v(X_{i+1})$ para cada n . Sea P_2 la proyección sobre la segunda coordenada, la cual es una función continua. Definamos $P : Cono(X_{i+1}) \rightarrow [0, 1]$ por $P(x) = P_2(q_i^{-1}(x))$, para cada $x \in Cono(X_{i+1})$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $b_n \in X_{i+1}$ y $t_n \in [0, 1]$ tales que $a_n = q_{i+1}(b_n, t_n)$. Luego, $P(a_n) = t_n$. De esta manera, puesto que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $v(X_{i+1})$ y al ser P continua, se sigue que $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $P(v(X_{i+1})) = 1$. De aquí, $\{f_i''(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $v(X_i)$. De esta manera, tenemos la continuidad y podemos continuar con el teorema.

Teorema 4.7. *Sea X un continuo homeomorfo al límite inverso $\varprojlim (x_i, f_i)$. Entonces, $Cono(X)$ es homeomorfo a $\varprojlim (Cono(X_i), f_i'')$.*

Demostración. Puesto que X es homeomorfo a $\varprojlim (X_i, f_i)$, existe un homeomorfismo h entre dichos espacios. Ahora, definamos $h' : X \times [0, 1) \rightarrow \varprojlim (X_i, f_i) \times [0, 1)$ de la siguiente manera: para cada $x \in \varprojlim (X_i, f_i)$ y cada $t \in [0, 1)$, tenemos que $h'(x, t) = (h(x), t)$. Así, es claro que h' es un homeomorfismo. Definimos ahora la función $q : X \times [0, 1] \rightarrow Cono(X)$ y sea q' la restricción $q|_{X \times [0, 1)} : X \times [0, 1) \rightarrow Cono(X) - v(X)$, la cual es un homeomorfismo. Si denotamos por $v_\infty(x)$ al punto $(v(X_1), v(X_2), \dots, v(X_i), \dots)$, veamos que $[0, 1) \times \varprojlim (X_i, f_i)$ es homeomorfo a $\varprojlim (Cono(X_i), f_i'') - \{v_\infty(x)\}$. Definamos la función $q_\infty : [0, 1) \times \varprojlim (X_i, f_i) \rightarrow [0, 1) \times \varprojlim (Cono(X_i), f_i'') - \{v_\infty(x)\}$ como sigue:

$$q_\infty((t, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)) = (t, q_1^*(x_1, t), \dots, q_i^*(x_i, t), \dots).$$

La función q_∞ es continua al ser q_i^* continuas para cada i , por [14, Teorema 19.6]. Veamos la inyectividad de esta función. Sean $(t_1, x_1, x_2, \dots), (t_2, y_1, y_2, \dots) \in [0, 1) \times \varprojlim (X_i, f_i)$ tales que $(t_1, x_1, x_2, \dots) \neq (t_2, y_1, y_2, \dots)$. Tenemos dos casos: primeramente, si $t_1 \neq t_2$, tenemos que $q_i^*(x_i, t_1) \neq q_i^*(x_i, t_2)$ para cada i , y por ende $q_\infty((t_1, x_1, x_2, \dots)) \neq q_\infty((t_2, y_1, y_2, \dots))$. Para el segundo caso, suponemos que existe $j \in \mathbb{N}$, tal que $x_j \neq y_j$. Una vez más, tenemos que q_j^* es un homeomorfismo, por lo que se sigue la inyectividad. Veamos la suprayectividad de esta función. Sea $(a_1, a_2, \dots) \in \varprojlim (Cono(X_i), f_i'') - \{v_\infty(x)\}$.

De aquí, $a_i \in \text{Cono}(X_i) - \{v(X_i)\}$, pues si $a_i = v(X_i)$ para algún i , entonces $(a_1, a_2, \dots) = v_\infty$, por definición de f_i'' . Luego, existe $(x_i, t_i) \in X_i \times [0, 1)$ tal que $q_i^*(x_i, t_i) = a_i$ para cada i . Veamos que $t_i = t_{i+1}$. Tenemos que $a_i \in \text{Cono}(X_i)$, por lo que existen $x_i \in X_i$ y $t_i \in [0, 1)$ tal que $q_i^*((x_i, t_i)) = a_i$ y se cumple que

$$\begin{aligned} a_i &= f_i''(a_{i+1}) = (q_i^* \circ f_i' \circ (q_{i+1}^*)^{-1})(a_{i+1}) \\ &= (q_i^* \circ f_i')((x_{i+1}, t_{i+1})) \\ &= q_i^*(f_i'((x_{i+1}, t_{i+1}))) \\ &= q_i^*((f_i(x_{i+1}), t_{i+1})). \end{aligned}$$

Se sigue que $q_i^*((x_i, t_i)) = a_i = q_i^*((f_i(x_{i+1}), t_{i+1}))$, de donde $f_i(x_{i+1})$ y $t_i = t_{i+1}$. Con esto, tenemos que q_∞ es biyección. Veamos que la inversa es una función continua. Dado $a \in [0, 1) \times \left(\varprojlim \text{Cono}(X_i, f_i'') - \{v_\infty(x)\}\right)$, tenemos que $a = (t, a_1, a_2, \dots)$, donde $t \in [0, 1)$ y $a_i \in \text{Cono}(X_i) - \{v_\infty(x)\}$. Si P_1 es la función proyección sobre la primera coordenada, tenemos que la función inversa de q_∞ procede de la siguiente manera

$$a \mapsto (t, P_1(q_1^{-1}(a_1)), \dots, P_i^{-1}(q_i(a_i)), \dots).$$

Debido a la continuidad de P_1 y de q_i para cada i , se sigue la continuidad de la inversa de q_∞ .

Definimos ahora la función que nos ayudará a demostrar la tesis del teorema. Sea $h'' : \text{Cono}(X) \rightarrow \varprojlim \text{Cono}(X_i, f_i'')$ definida por

$$h''(a) = \begin{cases} v_\infty(x) & \text{si } a = v(X), \\ q_\infty \circ h' \circ q'(x) & \text{si } a \neq v(X). \end{cases}$$

Observemos que h'' es una biyección, por definición de la función. Más aún, h'' es continua en $a \neq v(X)$, por la composición de homeomorfismos. Para la continuidad en $v(X)$ se procede de manera análoga a la demostración de continuidad de la función f'' . \square

Teniendo los resultados anteriores en cuenta, procedemos a demostrar que el continuo de Knaster posee la propiedad de $\text{Cono} = \text{Hiperespacio}$.

Teorema 4.8. *El continuo \mathcal{K} posee la propiedad de $\text{Cono} = \text{Hiperespacio}$.*

Demostración. El teorema 4.5, tenemos que \mathcal{K} es homeomorfo a $\lim_{\leftarrow}(I, T)$. Por teoremas 4.6 y 4.7, tenemos que $C(\mathcal{K})$ es homeomorfo a $\lim_{\leftarrow}(C(I), T')$ y $Cono(\mathcal{K})$ es homeomorfo a $\lim_{\leftarrow}(Cono(I), T'')$. Sea $g : C(I) \rightarrow Cono(I)$ el homeomorfismo que se obtiene de la propiedad *Cono = Hiperespacio* obtenida del Ejemplo 2.3. Notemos que se cumple $g \circ T' = T'' \circ g$, por definición de las funciones de ligadura. Por teorema 4.4, se sigue que existe un homeomorfismo G entre $\lim_{\leftarrow}(C(I), T')$ y $\lim_{\leftarrow}(Cono(I), T'')$ tal que $G((I, I, \dots, I, \dots)) = (v(I), v(I), \dots)$ y $G((F_1(I), F_1(I), \dots, F_1(I), \dots)) = (B(I), B(I), \dots)$. Luego, sea $H : C(\mathcal{K}) \rightarrow Cono(\mathcal{K})$, definida por $H = h'' \circ g \circ h$ y es tal que $H(\mathcal{K}) = v(\mathcal{K})$ y $H(F_1(\mathcal{K})) = B(\mathcal{K})$. Se sigue el resultado. \square

5 Hiperespacio suspensión

Teniendo en cuenta lo descrito en la sección anterior, podemos construir un modelo para el hiperespacio suspensión de \mathcal{K} . Además, en esta sección, como ya se mencionó anteriormente, probaremos un teorema relacionado con la indescomponibilidad de un continuo X y la arco-conexidad del (n, m) -ésimo hiperespacio suspensión. El siguiente lema ayudará a probar el teorema principal de esta sección.

Lema 5.1. *Si X es un continuo descomponible, entonces $C_n(X) - (\{X\} \cup F_m(X))$ es arco-conexo.*

Demostración. Puesto que X es descomponible, existen $A, B \in C(X) - \{X\}$ tales que $X = A \cup B$. Probaremos el resultado por inducción sobre n . La prueba para el caso $C(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$ se encuentra en [4], y la prueba para el caso $C_n(X) - (\{X\} \cup F_n(X))$ se encuentra en [13]. Probaremos el resultado para $m < n$, tomando un elemento $M \in C_2(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$ y lo uniremos con un elemento en $C_2(X) - (\{X\} \cup F_2(X))$ o en $C(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$. Teniendo lo anterior, se sigue la arco conexidad. Sea $M \in C_2(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$. Entonces, A debe tener dos componentes, pues de lo contrario, $M \in C(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$. Sean M_1, M_2 componentes de A . Si M_1 o M_2 son no degeneradas, entonces $M \in C_2(X) - (\{X\} \cup F_2(X))$ y se tiene el resultado. Luego, $A_1 = \{a_1\}$ y $A_2 = \{a_2\}$. Tenemos los siguientes casos para la localización de dichos puntos:

- Caso 1. Si $x_1 \in A - B$ y $x_2 \in B - A$, entonces, por [15] existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C_2(X)$ tal que $\alpha(0) = \{x_1\} \cup \{x_2\}$ y $\alpha(1) = A \cup \{x_2\}$, el cual es un elemento en $C_2(X) - (\{X\} \cup F_2(X))$.
- Caso 2. Si $x_1, x_2 \in A \cap B$, existe un arco ordenado [15], $\beta : [0, 1] \rightarrow C_2(X)$ tal que $\beta(0) = \{x_1\} \cup \{x_2\}$ y $\beta(1) = A$, el cual es un elemento en $C_2(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$. Análogamente si ambos puntos están en A o en B .

De ambos casos, tenemos que $C_2(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$ es arco conexo. Ahora supongamos que $C_n(X) - (\{X\} \cup F_m(X))$ es arco conexo, con $m \leq n$. Probaremos que $C_{n+1}(X) - (\{X\} \cup F_k(X))$ es arco conexo, con $k \leq n+1$, utilizando la misma técnica: para cada $M \in C_{n+1}(X) - (\{X\} \cup F_k(X))$, encontraremos un arco cuyos extremos sean M y algún elemento de $C_n(X) - (\{X\} \cup F_n(X))$, el cual ya es arco conexo. Observe que el caso $C_{n+1}(X) - (\{X\} \cup F_{n+1}(X))$ está probado en [13]. Luego, buscamos demostrar el resultado cuando $k \leq n$. Sea $M \in C_{n+1}(X) - (\{X\} \cup F_k(X))$. Entonces, M posee exactamente $n+1$ componentes, pues de lo contrario, $M \in C_n(X) - (\{X\} \cup F_k(X))$ y por hipótesis de inducción, tendríamos el resultado. Sean M_1, M_2, \dots, M_{n+1} componentes de M . Notemos que si existe $j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ tal que M_j es no degenerada, entonces $M \in C_{n+1}(X) - (\{X\} \cup F_{n+1}(X))$ y se tiene el resultado. Luego, $M_i = \{x_i\}$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$. Por el Principio de las Casillas, podemos suponer sin pérdida de generalidad que, $x_1, x_2 \in A$. Entonces existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C_{n+1}(X)$ tal que $\alpha(0) = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_{n+1}\}$ y $\alpha(1) = H \cup \{x_3\} \cup \dots \cup \{x_{n+1}\}$, el cual es un elemento de $C_n(X) - (\{X\} \cup F_n(X))$, y se sigue el resultado. \square

Continuamos con el teorema importante de esta sección.

Teorema 5.2. *Un continuo X es indescomponible si y solo si $HS_m^n(X) - \{q_X^m(X), F_X^m\}$ no es arco conexo.*

Demostración. Supongamos primero que X es un continuo indescomponible. Por Teorema 6.3 en [13], tenemos que $C_n(X) - \{X\}$ no es arco-conexo. Entonces, existen dos puntos A y B en dos arco-componentes distintas de $C_n(X) - \{X\}$. Ahora, supongamos que el arco que une a $q_X(A)$ con $q_X(B)$ en $HS_m^n(X) - \{q_X(X)\}$ no pasa por F_X^m . Entonces existe $\alpha \in HS_m^n(X) - \{q_X(X), F_X^m\}$ arco que une a $q_X(A)$ con $q_X(B)$. Como $HS_m^n(X) - \{q_X(X), F_X^m\}$ es homeomorfo a $C_n(X) - (\{X\} \cup F_m(X))$, existe un arco α' en $C_n(X) -$

$(\{X\} \cup F_m(X))$ que une a A con B . Puesto que $C_n(X) - (\{X\} \cup F_m(X)) \subset C_n(X) - \{X\}$, tenemos una contradicción. Luego, tenemos que cualquier arco que una a $q_X^m(A)$ y $q_X^m(B)$ en $HS_m^n(X) - \{q_X^m(X)\}$, pasa necesariamente a través de F_X^m . Esto implica que $q_X^m(A)$ y $q_X^m(B)$ están en dos arco-componentes distintas de $HS_m^n(X) - \{q_X^m(X), F_X^m\}$. Se sigue que este espacio no es arco-conexo.

Por otro lado, supongamos que X es descomponible. Por el Lema 5.1, $C_n(X) - (\{X\} \cup F_m(X))$ es arco-conexo. Puesto que $HS_m^n(X) - \{q_X^m(X), F_X^m\}$ es homeomorfo a $C_n(X) - (\{X\} \cup F_m(X))$, tenemos que $HS_m^n(X) - \{q_X^m(X), F_X^m\}$ es arco conexo. □

Para ejemplificar este teorema, consideremos al continuo de Knaster y su hiperespacio suspensión.

Ejemplo 5.3. Construyamos el hiperespacio suspensión de \mathcal{K} , $HS(\mathcal{K})$. Para ello, utilizaremos el hecho de que $C(\mathcal{K})$ es homeomorfo a $Cono(\mathcal{K})$, pues \mathcal{K} posee la propiedad de cono = hiperespacio. De este homeomorfismo, tenemos que el modelo para $C(\mathcal{K})$ se ve como en la siguiente figura.

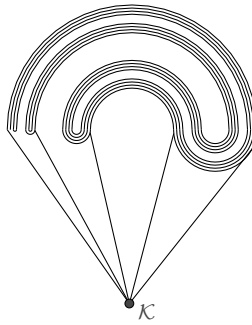


Figura 4: $C(\mathcal{K})$

En la figura anterior, tenemos que la base del cono representa al primer producto simétrico $F_1(\mathcal{K})$ y dado que el hiperespacio suspensión del continuo de Knaster se define al comprimir $F_1(\mathcal{K})$ a un solo punto, tenemos que $HS(\mathcal{K})$ se ve como sigue

En la figura anterior, podemos notar que si removemos los puntos $q(\mathcal{K})$ y $F_1(\mathcal{K})$, nos queda un espacio que no será arco-conexo, cumpliendo con el Teorema 5.2, pues sabemos que \mathcal{K} es un continuo indescomponible.

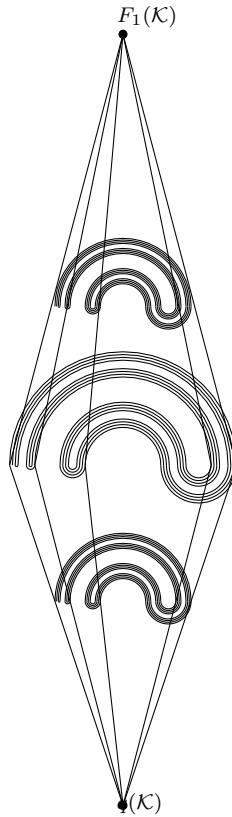


Figura 5: $HS(\mathcal{K})$

Agradecimientos

Los autores desean agradecer el tiempo y esfuerzo de los jurados y revisores por la aceptación de este trabajo, así como por sus atentas observaciones que hicieron de este, un trabajo más completo.

Bibliografía

- [1] José Guadalupe Anaya Ortega, David Maya Escudero, Francisco Vázquez Juárez, *The hyperspace $HS_n^m(X)$ for a finite graph X is unique*, Topology and its Applications 234, (2018), 428 – 439.

- [2] Robert G. Bartle, *The elements of real analysis*, John Wiley & Sons, Segunda Edición, New York, 1976.
- [3] Luitzen Egbertus Jan Brouwer, *Zur analysis situs*, *Mathematische Annalen*, Vol. 68, (1910), 422 – 434.
- [4] Raúl Escobedo Conde, María de Jesús López Toriz, Sergio Macías Álvarez, *On the hyperspace suspension of a continuum*, *Topology and its Applications*, Vol. 138, (2004), 109 – 124.
- [5] Gerardo Hernández Valdez, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *Génesis del (n, m) -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo. Capítulo 3.*, *Matemáticas y sus aplicaciones 10*, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 51-71 (2018).
- [6] Alejandro Illanes Mejía y Sam B. Nadler Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math.*, Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.
- [7] Alejandro Illanes Mejía, *The cone=hyperspace property, a characterization*, *Topology and its Applications* 113, (2001), 61 – 67.
- [8] Alejandro Illanes Mejía, *Models of hyperspaces*, *Topology Proceedings* 41, (2012), 39 – 64.
- [9] Zygmunt Janiszewski, *Sur les continus irréductibles entre deux points*, Université de Paris, 1911.
- [10] Bronislaw Knaster, *Sur les continus non-bonés*, *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 5, (1924), 23 – 58.
- [11] Kazimierz Kuratowski, *Topology*, Academic Press, New York and London, Vol. I, 1966.
- [12] Sergio Macías Álvarez, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X* , *Topology and its Applications*, Vol. 109, (2001), 237 – 256.
- [13] Sergio Macías Álvarez, *On the n -fold hyperspace suspension of continua*, *Topology and its Applications* Vol. 138, (2004), 125 – 138.

-
- [14] James Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2nd Edition, 2000.
- [15] Sam B. Nadler Jr., *Hyperspaces of sets*, Marcel Dekker, New York, Basel, 1979.
- [16] Sam B. Nadler Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.
- [17] James Rogers Jr., *The cone = hyperspace property*, Canadian Journal of Mathematics, Vol. 24, (1972), 279 – 285.
- [18] Jack Segal, *Hyperspaces of the inverse limit space*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 10, (1959), 706 – 709.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

2170734@alumnos.fcfm.buap.com

dherrera@fcfm.buap.mx

fmacias@fcfm.buap.mx

Índice de autores

Aguilar Romero, Felipe de Jesús, 135
Álvarez Marín, Luz del Carmen, 113

Bustamante González, Jorge, 25
Bykov, Alexander, 149

Chacón Tirado, Mauricio Esteban, 149

Domínguez Soto, Patricia, 149

Escalante Vega, Juana Elisa, 5

Garrido Sánchez, Emma, 93

Hernández Morales, José Margarito, 113
Hernández Valdez, Gerardo, 177
Herrera Carrasco, David, 135, 177

Ibarra Contreras, Manuel, 39

Macías Romero, Fernando, 135, 177
Martínez García, Armando, 39
Maya Mendieta, Mario Alberto, 67

Oliveros Oliveros, José Jacobo, 67

Rivera Vega, Fernando Mauricio, 135

Salem Silva, Francisco Sergio, 5
Sandoval Moreno, Guadalupe, 67

Teniza Tetlalmatzi, Evelia, 67
Tlapa García, Luis Abraham, 5

Matemáticas y sus aplicaciones 11

Coordinado por David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero

está a disposición en pdf en la página

de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP)

www.fcfm.buap.mx

a partir del 26 de octubre de 2019

peso del archivo: 2 MB

El cuidado de la edición es de Antonio de Jesús Libreros López.