

MANUALES Y TEXTOS

Otros títulos



Matemáticas elementales



Topología y sus aplicaciones 6



Cálculo diferencial en una variable

Matemáticas y sus aplicaciones 10

DAVID HERRERA CARRASCO
FERNANDO MACÍAS ROMERO

(coords.)

Los capítulos del presente libro son creados por los autores en el marco de su participación en el International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA). Los CIMA emanan de la fortuna de contar con el mejor comité organizador que ha puesto la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. He aquí los resultados que promueven la riqueza matemática, trabajos tenaces que lograron superponerse a los inexorables jueces y fueron autorizados después de un arbitraje riguroso.

BUAP
ediciones



MANUALES Y TEXTOS
ciencias exactas

BUAP
ediciones

DAVID HERRERA CARRASCO
FERNANDO MACÍAS ROMERO (coords.)

Matemáticas
y sus aplicaciones 10



Matemáticas y sus aplicaciones 10

DAVID HERRERA CARRASCO
FERNANDO MACÍAS ROMERO

(coords.)

David Herrera Carrasco (1955). Estudió la licenciatura en Matemáticas en la segunda generación de la refundación de la Escuela de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla (UAP). Comenzó a trabajar como profesor de matemáticas en la Preparatoria Alfonso Calderón (de la UAP) del 1975-1981. Desde 1981 a la fecha es Profesor de Tiempo Completo en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). Ha concluido la dirección de varias tesis de matemáticas.

Fernando Macías Romero (1961) Estudió la licenciatura, una maestría y un doctorado en Matemáticas, llegó a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP en el año 1982. Como formador de nuevo talento matemático, ha dirigido 31 Tesis de Licenciatura, 7 de Maestría y 3 de Doctorado, todas ellas concluidas con éxito, así como varias tesis más en proceso. Como docente, ha impartido múltiples cursos tanto en licenciatura como en posgrado así como conferencias de divulgación. Por esta labor, ha sido reconocido con el nivel IX dentro del Programa de Estímulos al Desempeño del Personal Docente 2018. Actualmente, es Investigador Nacional reconocido por el SNI.

Matemáticas y sus aplicaciones *10*



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

David Herrera Carrasco
Fernando Macías Romero
Coordinadores

Primera edición: 2018

ISBN: 978-607-525-521-7

DR © Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

4 Sur 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000

Teléfono: 01 (222) 2 29 55 00

www.buap.mx

Dirección General de Publicaciones

2 Norte 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000

Teléfonos: 01 (222) 246 85 59 y 01 (222) 229 55 00 ext. 5768 y 5764

www.dgp.buap.mx

dgp@correo.buap.mx

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel, Edificio FM1-101B

Ciudad Universitaria, Puebla, Pue. México. CP. 72570

Teléfonos: 01 (222) 229 55 00 ext. 7552

www.fcfm.buap.mx

dirección@fcfm.buap.mx

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

- *Rector*: José Alfonso Esparza Ortiz
- *Secretario General*: José Jaime Vázquez López
- *Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura*: Fernando Santiesteban Llaguno
- *Director Genenal de Publicaciones*: César Cansino Ortiz
- *Directora de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas*: Martha Alicia Palomino Ovando

Impreso y hecho en México

Printed and made in Mexico

Matemáticas y sus aplicaciones 10

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de investigación
presentados en el
International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA),
FCFM, BUAP.

Coordinadores

David Herrera Carrasco
Fernando Macías Romero

Comité científico internacional

Jorge Bustamante González (BUAP), Ermínia de Lourdes Campello Fanti (UNESP, BRA), Jiling Cao (AUT AC, NZ), Agustín Contreras Carreto (BUAP), Miguel Ángel García Ariza (BUAP), Lidia Aurora Hernández Rebollar (BUAP), Miguel Antonio Jiménez Pozo (BUAP), Judy Kennedy (LU, USA), Antonio de Jesús Libreros López (BUAP), Fernando Macías Romero (BUAP), Ángel del Río Mateos (UM, ES), José Gregorio Rodríguez Nieto (UNC, CO), Faustino Agustín Romano Velázquez (UNAM), Francisco Solano Tajonar Sanabria (BUAP), Azucena Tochimani Tiro (UVA, ES), Teresa de Jesús Valerio López (UAQ), Xinlong Zhou (NUI-DUE, DE).

Contenido

Presentación	1
Educación matemática	
Capítulo 1. Dificultades de uso de la lógica de los sistemas matemáticos de signos involucrados en la construcción del número natural	5
<i>María Leticia Rodríguez González, Eugenio Filloy Yagüe</i>	
Filosofía, divulgación e historia de las matemáticas	
Capítulo 2. Los <i>Elementos</i> de Euclides en la enseñanza de las matemáticas en el México colonial	35
<i>Marco Arturo Moreno Corral</i>	
Topología	
Capítulo 3. Génesis del (n, m)-ésimo hiperespacio suspensión de un continuo	51
<i>Gerardo Hernández Valdez, Fernando Macías Romero, David Herrera Carrasco</i>	
Capítulo 4. Complejos cúbicos difusos	73
<i>David Herrera Carrasco, Adolfo Maceda Méndez, Fernando Macías Romero</i>	
Análisis matemático	

Capítulo 5. Aproximación de funciones con PyChebFun	105
<i>Esteban Escamilla Navarro, Juana Elisa Escalante Vega, Francisco Sergio Salem Silva</i>	
Probabilidad y estadística	
Capítulo 6. VaR y CVaR con cópulas elípticas: una aplicación a portafolios de inversión bivariados con análisis retrospectivo	121
<i>Jacobo Guzmán Trujillo, María Teresa Verónica Martínez Palacios, Ambrosio Ortiz Ramírez</i>	
Modelación matemática	
Capítulo 7. Hacia una estimación automática de la edad ósea	159
<i>José Luis Tonatiúh Banda Escobar, Salvador Eugenio Ayala Raggi, Aldrin Barreto Flores</i>	
Índice de autores	175

Presentación

Tenemos la fortuna de hacer un recorrido hacia un proceso creativo sin precedentes. Ha llegado el momento de compartir esta sabiduría, de invitar a todo el mundo a embarcarse en el navío que nos conduce hacia la Fuente de todo lo creado. Esta es la razón por la cual editamos el libro que tienen en sus manos. La felicidad que propone este libro por su divulgación, investigación e intercambio de ideas se debe a la generosidad de muchísimos matemáticos que participaron en el denominado *Fifth International Conference on Mathematics and its Applications* (5CIMA, 2018), un esfuerzo profesional consolidado que ha permitido la participación de grandes personajes de diversas universidades, nacionales y extranjeras, tanto en el desarrollo del 5CIMA como en su memoria escrita, que es el presente libro. La base ha sido un comité organizador especializado, entusiasta y vigoroso emanado de la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. Este producto no es ni siquiera setemesino, es normal, de por lo menos nueve meses de trabajo constante. Por el amor a la matemática es que ha nacido este ejemplar que nos brinda la sabiduría necesaria para mostrarles parte de nuestros quehaceres cotidianos.

Los capítulos de este libro están agrupados por secciones de acuerdo al área temática en el 5CIMA. Dichos capítulos fueron sometidos a arbitraje riguroso.

Agradecemos, con toda el alma, a todos los árbitros su amabilidad, gentileza, dedicación y trabajo científico. Un agradecimiento especial a Antonio de Jesús Libreros López por su apoyo en la edición de esta obra. Gracias por dejar huella.

David Herrera Carrasco
Fernando Macías Romero
Editores

Educación matemática

Capítulo 1

Dificultades de uso de la lógica de los sistemas matemáticos de signos involucrados en la construcción del número natural

María Leticia Rodríguez González, Eugenio Filloy Yagüe
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN

Resumen

Este proyecto de investigación tiene el propósito de observar y analizar las dificultades de los niños de 6 a 9 años con el uso de la lógica de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) involucrados en la construcción de número natural, con base en el Modelo de John von Neumann. El análisis se centra en la actuación de los alumnos durante el intercambio de mensajes matemáticos en escenarios escolares, donde se presentan diversos significados (lógicos) y que son resultado de procesos cognitivos. Con la estructura teórica de los Modelos Teóricos Locales y sus cuatro componentes y los aportes de las psicologías cognitivas y soviéticas en relación con la lógica de construcción de número natural de los niños, en particular la Teoría de las Acciones Mentales, se pretende diseñar un modelo de enseñanza que traslade el Modelo formal a un modelo con el uso de material concreto.

1 Introducción

En todos los espacios de la vida cotidiana los seres humanos estamos involucrados con el uso de los números, a los niños se les introduce desde el momento en que tienen que clasificar, seriar y contar. Históricamente el hombre tuvo la necesidad de representarlos simbólicamente, usando diversos registros como marcas como puntos y rayas sobre tablas, huesos, piedras, nudos y otros objetos; o bien, usando su cuerpo para poder contar como una técnica corporal, método que aún persiste en algunas comunidades indígenas [9, págs. 33-37]. Este recorrido histórico también lo hacen los niños pequeños a través de la imitación. Sin embargo, el que los niños puedan expresar oralmente secuencias numéricas, reconocer y dibujar algunos numerales e incluso algunas regularidades del sistema de numeración, no significa que estén contando o que tengan la noción de número natural.

Por otro lado, las prácticas escolares siguen enfatizando en el conocimiento de los números en el sentido cardinal, descuidando la ordinalidad, como afirman Ma-

ravilla y Filloy en [11, págs. 129-130] que los usos y costumbres van a repercutir en los modelos de enseñanza, mismos que son avalados por los docentes. Llegan a la conclusión de que el problema de la enseñanza de los números naturales en educación preescolar se enfrenta al desconocimiento de las educadoras del concepto de número, al observar las incongruencias en las secuencias de actividades que desarrollan y la prevalencia de la repetición.

Confrontando esta experiencia con el nivel de educación primaria y con el Plan de Estudios [17, pág. 53] nos dice que "... el estudio de la matemática considera el conocimiento y uso del lenguaje aritmético, algebraico y geométrico, así como la interpretación de información y de los procesos de medición". En los programas de estudio se estructuran los aprendizajes en tres ejes: Sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma espacio y medida y Manejo de la información. Los contenidos se organizan secuencialmente de lo simple a lo complejo. La estrategia pedagógica propuesta en los libros "Desafíos Matemáticos" presentan una secuencia de actividades problemáticas para que los niños y docentes desarrollen herramientas matemáticas que les permita poner en práctica sus conocimientos matemáticos.

Sin embargo, a pesar de que se empezaron a trabajar desde el año 2011, se tienen serias dificultades para comprender las orientaciones didácticas para trabajarlas con los niños. Se sugiere trabajarlos en el salón de clase, con diferentes formas de interacción: individual, en parejas, en equipos y grupalmente; pero la experiencia que se ha observado es que los maestros trabajan los desafíos como lecciones o ejercicios, de forma individual e incluso los dejan de tarea en casa, los califican perdiendo la esencia metodológica para promover la creatividad y gusto por las matemáticas. Se rompe con el sentido pedagógico de la evaluación como un proceso de valoración y análisis de los procedimientos que realizaron para consensar los más factibles y económicos, las dificultades que tuvieron y cómo lo resolvieron; se saltan desafíos generando una pérdida de la secuencia gradual en torno a la complejidad conceptual. Se observan también prácticas centradas en mecanizaciones que van desde secuencias numéricas orales, escritas, ejercicios fotocopiados (de libros de matemáticas que no tienen coherencia con el enfoque didáctico de la asignatura de matemáticas), series de sumas y restas por columnas como por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 845 \\ + 356 \\ \hline 1201 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 935 \\ - 237 \\ \hline 698 \end{array}$$

Este tipo de prácticas pueden generar en los niños experiencias de rechazo y obstaculizar el desarrollo del pensamiento matemático para desarrollar la creatividad en la solución de los problemas contextualizados, a partir de mostrar y expresar los

argumentos que validen sus resultados.

Por lo que, el interés de esta investigación está centrada en responder la pregunta: ¿Qué dificultades tienen los niños al usar la lógica de los Sistemas Matemáticos de Signos en la construcción de los números naturales, teniendo como base el modelo formal de John von Neumann? Se propone partir de una estructura matemática que pueda servir de base de la construcción del pensamiento matemático; propuesta que se viene explorando con niños preescolares con el trabajo mencionado anteriormente y ahora en esta nueva etapa con niños de los tres primeros grados de educación primaria. La estructura aritmética que se propone es la lógica de construcción de los Sistemas Matemáticos de Signos implicados en la construcción de los números naturales, sus propiedades y operaciones. Pues de acuerdo con Filloy [4, págs. 1 - 11], en la investigación en Matemática Educativa las dificultades están en la propia matemática, "... de ahí la conveniencia de que el observador cuente con competencias de uso de un SMS más abstracto que englobe todos los utilizados en el proceso observado" [4, Pág. 7]. Desde esta perspectiva en este proyecto se propone un modelo formal matemático, para trasladarlo a actividades concretas en un modelo de enseñanza, para identificar las dificultades que tienen los niños con esta manera particular, para ello se han diseñado los siguientes objetivos:

- (1) Comprender las dificultades que tienen los niños en los primeros ciclos de educación primaria, al usar la lógica de los Sistemas Matemáticos de Signos en la construcción de los números naturales, con base en el modelo de von Neumann, a través del desarrollo de procesos de iteración y recursividad; teniendo como referente teórico y metodológico a los Modelos Teóricos Locales.
- (2) Diseñar un modelo de Enseñanza que traslade el Modelo de la Matemática Formal a un Modelo Matemático Concreto; sin intervenir ni obstaculizar la estructura curricular, con la finalidad de conocer los procesos de generalización y comunicación con contenido matemático, a través del estudio de casos como estrategia metodológica.

Con el marco teórico de los Modelos Teóricos Locales (MTLs) [5, pág. 30] y sus cuatro componentes este proyecto de investigación se ha estructurado de la siguiente manera: (a) *Modelo Formal* de John von Neumann precisa una lógica de construcción de los números naturales a partir del orden, con los procesos de iteración y recursividad, se puede ir construyendo el sucesor a partir del antecesor; (b) *Modelo de Cognición* recupera las aportaciones de la epistemología psicogenética y su relación con la lógica en la construcción de número y las contribuciones de la psicología soviética con la Teoría de las Acciones; (c) *Modelo de Comunicación* implica a los usuarios competentes para usar los Sistemas Matemáticos de Signos

(SMS) involucrados en las nociones de número y; (d) *Diseñar un Modelo de Enseñanza* que traslade el modelo formal a un modelo con el uso de material concreto y la recta numérica.

2 Marco Teórico

La lógica de construcción de los números naturales que se propone tiene que ver con el interés de proponer una construcción en cualquier contexto, para que los estudiantes puedan operar con números en dos niveles: con objetos y sin ellos.

1 Modelos Teóricos Locales

Los MTLs son una propuesta teórica que toma en cuenta las dificultades que la matemática tiene en sí misma y las que se producen en las aulas cuando se plantean diferentes tipos de actividades que tienen que ver con la producción de sentido de mensajes matemáticos y su decodificación. La observación empírica es la principal herramienta para comprender los procesos cognitivos que se articulan en la competencia formal y pragmática. Lo local es porque profundizan en el análisis de un fenómeno específico, el cual es analizado a la luz de las cuatro componentes: formal, cognitivo, enseñanza y de comunicación. Los diseños experimentales tienen la intención de analizar la información que permita comprender las dificultades a las que se enfrentan los actores en situaciones problemáticas para observar las interacciones y contraposiciones de las competencias (cogniciones) que se ponen en juego en el espacio textual; cómo se van construyendo los intertextos a través del modelo de enseñanza específico con un soporte en el modelo formal y qué competencias comunicativas usan para decodificar y codificar los mensajes, así como las dificultades o posibilidades que tienen para realizar un esbozo lógico semiótico de la situación problemática.

1.1 Modelo de Competencia Formal

Para Filloy [4, pág. 56] en el modelo formal "...se trata de los fenómenos que están organizados en las matemáticas tomadas en su estado, el momento actual y considerando su uso actual". Dicho en otras palabras se trata de los conceptos matemáticos. Y de acuerdo con Freudenthal [6, pág. ix] es partir de las dificultades de construcción histórica del concepto matemático en cuestión, en nuestro caso son los números naturales. La tradición histórica la iniciamos con las aportaciones de los griegos, quienes conceptualizaron a los números naturales relacionados con proporciones numéricas y que gracias a Eudoxo se consolida como "... la teoría de las proporciones expuesta por Euclides" [3, pág. 15], que permeó hasta el siglo XIX.

Dedekind, en correspondencia con Cantor y Frege [3, págs. 51-60] relacionan al número con la teoría de conjuntos. William, [21, págs. 596-597] afirma que Pierce en: “on the logic of number”, propone una lógica para comprender si las proposiciones sobre los números son verdades probadas. Dice que “los objetos de un sistema que tienen una relación fundamental de cantidad son llamadas cantidades y el sistema es llamado sistema de cantidad.” [21, pág. 599]. Para ello define cantidad simple, cantidad múltiple, cantidad discreta, cantidad semi-infinita, definiciones relacionadas con el orden (sucesor y antecesor). Más tarde Zermelo [12, pág. 51] ofrece una nueva prueba para demostrar el teorema del buen orden y la teoría con conjuntos infinitos.

Con estos antecedentes, John von Neumann [19, pág. 346] propone construir el conjunto de los números naturales como números ordinales, que constituye otra manera de hacerlos con un manejo de la lógica más preciso. En este modelo von Neumann [12, pág 186] propone el principio del orden que se consolida con la iteración y la recursividad.

Mosterín [12, pág. 187] afirma que en:

... la concepción de von Neumann, cada ordinal es el conjunto de los ordinales precedentes. Esta clase está bien ordenada, por la relación de pertenencia o, si se prefiere por la equivalente relación de ser menor. En efecto, un ordinal α precede a otro β si y solo si $\alpha \in \beta$, (...). Así, 0 es el conjunto vacío, 1 es el conjunto cuyo único elemento es 0, 2 es el conjunto cuyos elementos son el vacío y 1, y así sucesivamente.

Esta plataforma tiene como base un sistema formal expresado en axiomas, lo que constituye un sistema lógico. Para evitar las paradojas lógicas establece diferencias entre conjuntos y clases. Si bien todo conjunto es una clase, no toda clase es un conjunto. En este sentido conjunto se refiere aquellas clases que pertenecen al conjunto. El principio “... de orden de un conjunto bien ordenado sería la clase de todos los conjuntos bien ordenados isomorfos con él” [12, pág. 186]. Sin embargo, esta situación llevó a contradicciones dentro de la misma teoría intuitiva de conjuntos, a lo que von Neumann propuso que en lugar de “... identificar un ordinal con una enorme clase de conjuntos isomorfos entre sí, propuso identificarlo con un representante (un elemento) particular de esa clase, con la que desaparecen los peligros asociados a la gran cardinalidad y se simplifica la teoría” [12, pág. 186]. Entonces se tiene que: “Cada ordinal es el conjunto de todos los ordinales que lo preceden” [19, pág. 347] lo que se puede representar por las siguientes definiciones: “Cero es el conjunto vacío; *i. e.*, $0 = \emptyset$ ”, [8, pág. 76] la definición 2 del mismo texto dice: $1 = \{0\} = 0 \cup \{0\}$, de manera similar se construyen los números siguientes [8, pág. 76]:

$$0 = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
1 &= \{\emptyset\} \\
2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
4 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} \\
5 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}\}
\end{aligned}$$

Si los ordinales están ordenados por la relación de pertenencia, se tiene que $0 \in 1 \in 2 \in 3 \dots$. Entonces "... cada conjunto bien ordenado es isomorfo a cada uno de estos ordinales de von Neumann" [12, pág. 187]. Con el recurso de la iteración se realiza la construcción.

La *iteración* es el proceso que se repite una y otra vez. Choate, Devaney y Foster [1, pág. IX] afirman: "Iterar significa repetir algo una y otra vez". Es decir, el procedimiento que se hizo para el primer elemento, se hace para el segundo, para el tercero y así sucesivamente, dicho de otra manera: el paso $n + 1$ se obtiene directamente del paso n .

El procedimiento *recursivo* es la ejecución inicial que se repite exactamente para el caso anterior. Con la *recursión* se puede definir una función para todos los ordinales, basta hacerlo con el primero que es el cero y se realiza el mismo proceso para los demás.

"El teorema de la recursión transfinita nos permite definir una función para todos los ordinales, definiéndola para el 0 y, suponiendo que ya esté definida para un ordinal cualquiera α , definiéndola para $\alpha + 1$, y, suponiendo que ya esté definida para todos los ordinales menores que un ordinal límite λ , definiéndola para λ " [12, pág. 188].

Asimismo, este autor afirma que "una función computable puede definirse también como función recursiva. Toda definición recursiva es computable, y a la inversa, toda función computable es recursiva". Más adelante refiere: "... una función es recursiva si y solo si es computable..." [12, pág. 295].

La abstracción de los números naturales posibilita a los alumnos operar con ellos, usar los números por sí mismos en cualquier contexto. La intención de introducir este modelo en la escuela primaria, es para identificar las dificultades a las que se enfrentan los niños en el aprendizaje de estos nuevos SMS. Nos interesa comprender los niveles de actuación de los niños para analizar, razonar y comunicar los significados matemáticos que van construyendo.

1.2 Modelo de cognición

Este componente se centra en analizar los procesos cognitivos que siguen los individuos, para llegar a la generalización y abstracción del conocimiento, a través de

la memoria, la atención, la percepción, los procesos de análisis y síntesis; y cómo se desarrollan los procesos de aprendizaje usando una lógica específica de construcción de número. En nuestro caso, la lógica está dada por el modelo formal propuesto; por lo que nuestro interés, es identificar y analizar las dificultades cognitivas a las que se enfrentan los niños de los primeros grados escolares de la escuela elemental con este modelo de enseñanza, poniendo atención en los Sistemas de Signos Matemáticos (SSM) que usan para acercarse a la lógica de construcción de los SMS involucrados en la construcción de número natural. Las aportaciones teóricas de las psicologías piagetianas y soviéticas en torno a la adquisición de número natural de los niños en edad escolar, nos permitirán comprender los procesos lógicos que usan los niños, cuando están realizando diversas actividades matemáticas en escenarios escolares.

1.2.1 La lógica y la psicología cognitiva piagetiana

La relación entre lógica y matemática de acuerdo con Piaget [13, pág. 28] se origina en las acciones para conformar sistemas formales autónomos. Este es un proceso que se va dando por niveles en el que interviene una estructura que él ha denominado agrupamiento,

... y que matemáticamente posee propiedades de la estructura de grupo y de la estructura de retículo. Estas dos últimas son las que caracterizan la conducta propia del último período del desarrollo intelectual en el que sujeto se serviría de los esquemas más generales y simples de la lógica formal, es decir, los esquemas de la lógica de proposiciones –lo que en los Principia Mathematica se denominaba “teoría de la deducción” [2, pág. 28].

Piaget [13, págs. 39-42] identifica algunas contradicciones que se presentan desde el punto de vista psicológico:

- (a) No se puede hablar de verdades empíricas con independencia de las relaciones lógicas. La experiencia no puede ser interpretada haciendo abstracción del aparato lógico conceptual de la interpretación. Para ejemplificar esta situación recurre a los experimentos realizados con Inhelder donde se les pide a los niños que comparen e identifiquen si el agua contenida en un tubo de cristal inclinado es horizontal. Por los resultados obtenidos afirmaron que los niños no descubren la “horizontalidad” hasta haber construido un marco espacial de referencia.
- (b) Las operaciones lógicas no aparecen en el transcurso del desarrollo del niño, como un simple sistema de expresiones lingüísticas o simbólicas; sino que

implican un grupo de operaciones. Es hasta los 7 – 8 años en que los niños pueden construir la relación de inclusión y con ello se abre la posibilidad de la presencia de las acciones reversibles de composición y descomposición.

- (c) Considera que la lógica no es simplemente un lenguaje; es un proceso lento y tardío en el pensamiento del niño. Entre los 7 – 8 años aparecen las primeras operaciones de clases; sin embargo, la relación de transitividad está ausente, el niño acepta que $A = B$ y $B = C$, pero rechaza que $A = C$. Es hasta los 11 – 12 años en que aparecen las operaciones con proposiciones.

Para resolver estas contradicciones Piaget [13, págs. 44-45], presenta las operaciones como acciones lógicas de pensamiento interiorizadas y reversibles por medio de los cuales los sujetos desarrollan un sistema estructurado para comprender los símbolos de tal forma que se pueden establecer y desarrollar conocimientos en todas las áreas. Los niños poco a poco van desarrollando la capacidad de ir estableciendo las relaciones numéricas en un sistema y a partir del desarrollo de las operaciones concretas pueden ir comprendiendo y estableciendo la relación entre conservación y reversibilidad operatoria; pero, este proceso no es inmediato, implica descubrir la conservación para reconocer las transformaciones de los objetos, del espacio y tiempo. Descubrir “. . . la conservación de la sustancia es hacia los siete-ocho años, del peso a los nueve-diez y del volumen a los once-doce. . .” [14, pág. 102]. La noción de *conservación* implica transformaciones reversibles: inversiones o reciprocidad; y la *reversibilidad* es la clave para desarrollar el pensamiento operatorio, con la noción de agrupamiento de clases (aditivos o multiplicativos) y grupo INRC (Identidad, Negación, Reciprocidad, Correlatividad) y el retículo, permitirán al sujeto desarrollar los desplazamientos conceptuales que den cuenta de un pensamiento operatorio estructurado. “Los esquemas operatorios, por tanto, han de ser considerados como estructuras actualizadas, que implican las diversas posibilidades implícitas en el todo estructurado, es decir, en la forma de equilibrio de las operaciones proposicionales” [13, pág. 77].

Con el comienzo de la reversibilidad se construye la representación conceptual [14, págs 103-111] y el establecimiento de las relaciones de inclusión, orden y clasificación de los objetos; con la relación de transitividad se consolida el razonamiento lógico – matemático, Piaget [14, págs. 27-37] afirma que éste es producto de las experiencias del sujeto, va a depender del ambiente favorecedor y de la convivencia con los otros, para contar con mayores oportunidades de consolidación de sus estructuras lógico-matemáticas, en especial la génesis del número. La conservación de la materia, del peso y del volumen les permite a los sujetos establecer las relaciones de clasificación, seriación y ordenación de los objetos del mundo cotidiano. A través de la clasificación agrupan los objetos usando el concepto de pertenencia; con la

seriación establecen relaciones entre varios objetos y al ordenarlos hacen comparaciones y aplican criterios de jerarquía entre ellos. Estas relaciones se consolidan con la transitividad, reciprocidad y reversibilidad. La conservación de número les permitirá comprender la variación de la cantidad, posición y forma. La conservación de espacio, tiempo, velocidad, distancia, masa y volumen serán fundamentales en la transición de la acción a la operación. La coordinación de las acciones conforma el proceso de la asimilación y con ello se pueden conferir diversos significados a los objetos a través de la acomodación.

Isaacs [10, págs. 22-27] fue un investigador piagetiano que retoma la conceptualización de número como la síntesis o fusión de dos procesos básicos subyacentes a la lógica: la clasificación y la seriación. Afirma que: “El paralelismo existente entre los procesos y reglas de la lógica y de la aritmética hace resaltar aún más la anomalía implícita en las actitudes educacionales por completo diferentes que tenemos entre ambas” [10, pág. 74]. Considera que la lógica ha sido fundamental para la construcción de las matemáticas y a su vez la relación entre las matemáticas y la lógica conforman el desarrollo intelectual humano. Desde el inicio del proceso de desarrollo de los niños, comienzan a identificar relaciones lógicas entre los objetos del mundo que los rodean, distinguen distintos significados de orden: “ir primero, antes, después, el que sigue, el que está antes”, comparan donde hay pocos, muchos, cuántos más, . . .” aunque algunas de estas frases y palabras no tienen significado matemático, sí podemos encauzarlas para encontrar referentes con el modelo formal matemático. Isaacs [10, págs. 86-91] refiere que la relación lógica vinculada con la noción de número es la de parte y todo, en sus diferentes variedades, clases y subclases, por ejemplo: clase los animales y subclases aves, peces, mamíferos, reptiles e insectos. Además, reconoce las dificultades que tienen los niños al dominar la capacidad para manejar las relaciones lógicas; pero será hasta después de los seis o siete años de edad que podrán hacerlo sin dificultad. Señala que estas relaciones lógicas están presentes desde el momento en que se va construyendo el conocimiento a través del razonamiento que van realizando los pequeños. Por lo que propone el desarrollo del pensamiento lógico, como objetivo de la educación, de esta manera, los niños tendrán mayores oportunidades para establecer relaciones lógicas de manera más temprana y con mayor certeza de acceso al concepto de número.

1.2.2 Las Psicologías Soviéticas y la Teoría de las Acciones mentales

Galperín [7, págs. 25-28] es el fundador de la teoría de las acciones mentales y tiene como antecedentes las contribuciones de Vigotsky. Esta línea teórica se ha seguido desarrollando en el campo de la educación por Talizina [17, págs. 7-30 y 111-156] lo que representa quizá una oportunidad para observar las acciones que realizan los niños, en lo referente a la manipulación, y la relación entre la acción

y la operación como procesos de pensamiento; pero ahora con la componente de los procesos de significación. Para este enfoque teórico, la relación sujeto - objeto genera procesos de significación mediados por la actividad que los individuos hacen sobre los objetos, con el uso de instrumentos socioculturales como las herramientas y signos. El lenguaje y sus códigos de signos son herramientas que constituyen una experiencia histórico - cultural, en la que los sujetos a través de su acción mediada por los usos en la interacción social, pueden internalizar el conocimiento a través del desarrollo de la “psique humana”. La *acción* es la base organizacional de la actividad social. Los *signos* son producto de la evolución sociocultural y su manifestación en el lenguaje los consolidan como herramienta de mediación. El desarrollo psicológico posibilita al sujeto interiorizar el proceso de las transformaciones cualitativas en tres momentos:

1. La percepción del sujeto actúa de manera confusa en un primer momento;
2. La ejercitación de sus funciones psicológicas le va a permitir la toma de decisiones, el uso de la memoria, del pensamiento y del lenguaje;
3. El uso de las funciones superiores le facultará el control de la acción y podrá contar con la capacidad de regular su acción voluntaria, ser consciente de su toma de decisiones, la implicación social de ellas y usar los signos como mediadores.

Galperín [7, págs. 57-86] y Talizina [18, págs. 21-38] desarrollan la teoría de la formación por etapas de las Acciones Mentales, afirmando que se requiere de la lógica como la ciencia que permitirá comprender el proceso de construcción del pensamiento, a partir de la descripción del paso de la actividad externa hacia la actividad interna en la psiquis del hombre.

En este aparato teórico, las capacidades matemáticas se pueden desarrollar a través de la enseñanza, no están de acuerdo con Piaget en lo referente a la aparición de las operaciones lógicas hasta la adolescencia, afirman que:

Si estamos de acuerdo con el punto de vista de Piaget, entonces no es necesario estudiar las matemáticas antes de la adolescencia o estudiarlas de manera inadecuada y acostumbrarse a los malos resultados en esta materia. (...) Por el contrario, si reconocemos la naturaleza social de las leyes del desarrollo de la psique del hombre y, entre ellas, las del intelecto, entonces se resolverán de otra manera los problemas de la aplicación del

pensamiento lógico y de las correlaciones entre la enseñanza y el desarrollo [18, pág. 11].

Dado que el desarrollo de las capacidades humanas son producto de la interacción social, los conocimientos son una fuente de experiencias sociales que constituyen los elementos de las acciones del hombre. “La acción es aquella unidad que tenemos para el análisis de cualquier proceso de aprendizaje” [18, pág. 12], “. . . constituye el acto de la actividad vital del sujeto” [17, pág. 14]. La acción como proceso intermedio y la operación como la automatización que depende de la acción, son los procesos que permiten la relación de la actividad y la construcción de significados. A través de las acciones mentales, en el proceso de enseñanza – aprendizaje, se plantean cinco etapas: motivacional, base orientadora de la acción, material, verbal y mental.

Etapas motivacional. - es permanente, su influencia es positiva, es el objetivo de la actividad, en un primer momento permite al sujeto la formación del sentido, para poder resolver con las herramientas que ha construido, apropiarse de nuevos conocimientos a través del aprendizaje.

Base Orientadora de la Acción. - permite al sujeto obtener información sobre el objeto de estudio, asimilándolo ordenada y sistemáticamente, de acuerdo con las actividades que va a realizar, así como con las acciones y operaciones que intervienen o se requieren para comprenderlo.

Material. - el sujeto va a planear y ejecutar la acción, apoyándose en el uso de material concreto, mapas mentales, dibujos, esquemas y signos.

Verbal. - se da el paso de la acción al lenguaje verbal (oral o escrito), a través de la socialización, el sujeto pone en práctica la reflexión sobre su acción, logrando la generalización y su autonomía.

Mental. - se sintetiza todo el proceso, el sujeto va de manera progresiva: de la acción a la automatización y al pensamiento reflexivo para llegar a la argumentación.

Para Talizina [18, pág. 25] el concepto del número es una de las dificultades que no ha podido ser atendidas adecuadamente, lo que conlleva a deficiencias en el desarrollo matemático de los niños. Asegura que la lógica está presente en cualquier concepto formal o informal, entendiendo ésta como el sentido de construcción. Con estos referentes es necesario preguntarse sobre los usos de los números en su carácter absoluto, ya que a los niños se les ha enseñado que los números van cambiando de acuerdo con la secuencia numérica, pero cuando se les plantea una situación en la que no necesariamente el 8 es mayor que el 5, los niños entran en conflicto, por ejemplo, si les preguntamos quien es el más grande, generalmente responden el 8, pero cuando los situamos en magnitudes la situación puede cambiar, como cuando se trata de unidades diferentes: 8 centímetros y 5 decímetros. O bien, seis monedas de dos pesos y una moneda de diez pesos. Generalmente el contexto social permite convertir la experiencia social en una experiencia individual, al momento de descubrir el carácter relativo de los números.

El desarrollo del pensamiento lógico es el proceso que guía la construcción del concepto, en la que intervienen *tipos de acciones*. El primer tipo de acción es la *inducción al concepto*, en la cual es necesario señalar las características de los objetos para incorporarlos a una clase; el segundo es establecer los criterios de pertenencia a un conjunto, esta acción permite a los sujetos establecer comparaciones, seleccionar y discriminar a los objetos por su condición. “El contenido de inducir al concepto, requiere de un análisis especial que presupone todo un sistema de conocimientos y habilidades previos y no sólo de las matemáticas, sino también de la lógica” [18, pág. 32].

El papel de la memoria va a ser fundamental, para que los niños puedan organizar la información que están asimilando a través de la actividad y de las acciones de comparar, deducir consecuencias, clasificar entre otras. Entonces las nociones son en un principio el producto de las acciones de los escolares a través de la actividad con los objetos. “P. Ya. Galperin, (...) llegó a la siguiente conclusión: los conceptos matemáticos pueden formarse de manera completa, sólo después de la previa asimilación de las operaciones matemáticas generales, de los conceptos y de las relaciones” [18, pág. 49]. Este proceso continúa desarrollándose para acceder a escenarios más complejos: asimilación del concepto y

... el trabajo con las habilidades lógicas y simbólicas no termina, sino que, gradualmente, pasa a niveles más complejos de actividad, los cuales se consideran las tareas de seriación y clasificación, así como en las tareas sobre la actividad de signos y símbolos” [18, pág. 57].

El uso de los MTLs permite analizar las dificultades de los niños para ser actores competentes con el uso de la lógica de los SMS en la construcción del Número Natural, así como identificar las tendencias cognitivas que se generan con un modelo de enseñanza que tiene como base formal la contribución de von Neumann. La preocupación está en comprender cómo estructuran el esbozo lógico semiótico de la situación, qué papel juega la memoria en la construcción de representaciones y las inferencias que promueven la construcción del número natural, para poderlo operar en diferentes contextos. Qué tipo de códigos personales usan para referirse a las acciones, cómo las nombran y las posibilidades de generalización y abstracción, que van desde los códigos, dotación de sentidos intermedios, retrocesos, obstáculos, hasta la necesidad de dotar de sentidos a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones [4, págs. 43-44].

1.3 Modelo de Comunicación

De acuerdo con Filloy, Puig y Rojano [5, págs. 7-8] la matemática educativa se ocupa de comprender y entender cómo son los procesos de significación y comunicación

que se generan en los espacios educativos. El referente es el uso de los conceptos semióticos como signo, texto y sistema (matemático) de signos. Para fundamentar esta conceptualización, se apoyan en la semiótica de Pierce, quien centra su atención en el signo y su doble dimensión: acto como acción y representación; así como su relación triádica, en la cual el interpretante (cognición) va a jugar un papel fundamental, generando tres premisas:

- El signo es una relación triádica con la actuación del interpretante y no es sólo una relación diádica como lo explica Saussure (significante/significado).
- El signo está relacionado con la cognición.
- La relación triádica del signo no es arbitraria, implica una relación entre el signo (representamen), el objeto y el interpretante. El representamen es el fundamento de las ideas, es el objeto que representa al signo, y los interpretantes van a construir el sentido y significación: a través de la triada: signo – objeto – interpretante.

En la introducción a la *Obra Lógico Semiótica* [16, págs. 7-23] escrita por Sercovich afirma que la representación como la esencia del pensamiento, es con el apoyo de la lógica y refiere que “Pierce define así a la lógica, en sentido amplio, como una semiótica general que trata no sólo de la verdad, (...) los pensamientos son signos, la mente es un signo y, (...) el hombre mismo es un signo.” [16, pág. 8] Así el objeto de estudio de la Semiótica son los signos, para lo que propone otra triada:

... una *gramática pura* a la *gramática speculativa* (asignándole el cometido de determinar qué es lo que debe ser cierto del signo o del representamen para que pueda encarnar algún significado), llama *lógica propiamente dicha* (exacta) a la ciencia de lo que es cuasi-necesariamente verdadero de los representámenes para que puedan ser válidos para algún objeto, o sea, verdaderos, y (...) la *retórica pura*, que deber determinar las leyes mediante las cuales un signo da nacimiento a otro signo, un pensamiento a otro pensamiento” [16, pág. 9].

Este planteamiento conlleva a identificar los procesos de inducción y deducción, en el primero comprender los hechos homogéneos para clasificar, pero no explicar; mientras que con el segundo el razonamiento permite discriminar premisas verdaderas o falsas, desarrollar la inferencia a través del mecanismo de abducción, para formular hipótesis y conjeturas explicativas, con la finalidad de establecer su falsabilidad como posibilidad de que una proposición que puede ser negada. Este proceso de abducción implica un uso correcto de la lógica de los SMS, sus códigos y sus

reglas convencionales, artefactos lingüísticos que se emplean en una comunidad matemática. Pero también los sujetos usan metacódigos que constituyen “una colección de instrumentos discursivos y semióticos heterogénea y divergente que dan cuenta de la <masa de actividades de significación y comunicación que en la práctica acompañan el primer modo (formal y riguroso) de presentar las matemáticas>” [4, pág. 63].

Con estos referentes, se pretende comprender la complejidad que implica la estructura lógica de las acciones de construcción de número, qué SMS usan para la producción de sentido de las actividades de número que se les están proponiendo.

1.3.1 Uso de la Lógica de los Sistemas Matemáticos de Signos

Nuestro interés para comprender el uso de la lógica de los SMS está centrado en la realización de actividades sobre el número, apoyándonos en el uso de algoritmos y de los SMS que usan los niños para poder observar lo que llevan a cabo en la construcción de los números naturales. Es común que en la enseñanza se proponga una manera de construir y operar con los números usando los algoritmos convencionales, para lo cual los alumnos usan sus dedos, objetos o calculadoras. Sin embargo, en este punto es necesario precisar que nuestro interés es comprender los modos de significación, pues lo matemático está en los sistemas no en los signos [4, pág. 63]. Así los SMS se constituyen “. . . como una herramienta de análisis de los textos que producen los alumnos” [4, pág. 63] cuando están construyendo los números naturales con los procesos de iteración y recursividad, para operarlos usando los algoritmos correspondientes.

1.4 Modelo de Enseñanza

El modelo de enseñanza es una colección de textos, con la que se genera un intercambio de textos, modelando situaciones con lenguajes que van de concretos a abstractos; y en donde se producen “. . . códigos para desarrollar habilidades de resolución” [4, pág. 26]. Estas habilidades son tanto sintácticas como semánticas.

En este modelo de Enseñanza se van a proponer acciones, las cuales se llevan a efecto en un espacio textual, a partir del intercambio de mensajes entre el profesor y el niño, poniendo en acción sus SMS y que permita observar la concatenación que se produce con la utilización del SMS que los alumnos poseen, así como identificar las competencias discursivas que emplean. Este proceso de concatenación tiene que ver con lo que Filloy, Rojano y Puig [5, pág. 121] afirman que en los modelos de enseñanza los textos se van interrelacionando a partir de situaciones problemáticas, en las cuales los alumnos realizan diversas acciones y construyen nuevos SMS; van generando sentido y significación a la secuencia de esos textos, en donde a partir

de la enseñanza se consolidan y fortalecen nuevos conceptos para proveer nuevas etapas de abstracción estratificada.

Filloy [4, págs. 61-71] afirma que el investigador pondrá atención en observar los códigos que usan los niños, cómo los van transformando, las dificultades del uso lógico que tienen en su decodificación, cómo construyen nuevos estratos de abstracción de número natural, cómo van transitando de SMS concretos a los más abstractos y cómo los usan en la solución de diversos problemas relacionados a la conceptualización de los números naturales con el modelo de von Neumann.

1.4.1 Diseño y experimentación de un modelo de enseñanza para la construcción de los Números Naturales

El modelo de enseñanza se ha diseñado con la intención de tomar como punto de partida a la observación experimental con la finalidad de centrarnos en las dificultades que tienen los niños en la construcción del número natural; trabajando distintas actividades basadas en el Modelo formal de John von Neumann; donde la *iteración* y *recursión* estarán presentes. El algoritmo simple se va a usar con el recurso de la iteración; además del cerebrum (calculadora) que usaremos como una herramienta de comprobación de resultados; para que descubran el numeral o grafo de representación de los números.

Teniendo como base el Modelo Formal se podrá realizar una observación de las situaciones por medio del SMS más abstracto, que nos va a posibilitar decodificar los textos que se producen en el intercambio de mensajes con contenido matemático en las aulas y donde se conjugan diferentes grados de competencia de uso de los SMS utilizados.

En esta primera etapa el diseño consta de dos momentos, cada uno con una secuencia de actividades distribuidas en sesiones de 40 minutos aproximadamente:

(a) *Construcción de los diez primeros números naturales (0 – 9)*

La acción consiste en observar las dificultades que tienen los niños para construir los 10 primeros números a partir del orden, incluyendo al cero. Los números son ordenados por la construcción, y *cualquier número es menor que cualquier posterior* [8, pág. 77], al construir un número ordinal como un representante del tipo de orden de un conjunto bien ordenado, con el proceso de la iteración construyen el sucesor, entonces todos tienen un antecesor excepto el cero que es el principio del orden.

A partir de la iteración los niños van a repetir el mismo procedimiento para la construcción $n+1$, con la recursividad van a repetir exactamente las mismas acciones que hicieron para el caso anterior. El orden de la construcción de los números naturales, se va dando uno a uno, conformando el sucesor a partir del antecesor,

y verificando que, dado cualquier subconjunto no vacío de sus elementos, posee al menos un elemento.

Con la recta numérica se comienzan a ubicar los números de acuerdo con el orden de construcción, además de trabajar la suma y la resta. A los niños se les proponen representarlo en la recta numérica como los saltos de la rana para “adelante” y para “atrás”.

Las preguntas o cuestionamientos serán fundamentales para guiar la actividad de los niños en este proceso de construcción, de acuerdo con las acciones y actitudes que van manifestando. La preocupación es identificar las dificultades que tienen para desarrollar esbozos lógico semióticos de los SMS que descubren y emplean. Algunas de las preguntas pueden ser: ¿Qué hay en la bolsa? ¿Se podrá construir el que sigue? ¿Qué se necesita? ¿Cómo lo nombramos? ¿En dónde lo colocamos? ¿Quién es el primero? ¿Quién es el segundo? ¿Cuál fue el primero que construimos?...

Para trasladar el modelo formal de von Neumann a un modelo concreto, usando los procesos de iteración y recursión se usan bolsas de hule transparente de 10 diferentes medidas (3 cm x 3 cm, 5 cm x 5 cm, 7 cm x 7 cm, ...) como recipientes de los elementos que van a contener; cuadrados de foami de 7 cm x 7 cm y cubos de madera de 5 cm de arista y una calculadora. Para cada numeral se emplea un color diferente (0 – amarillo, 1 – naranja, 2 – azul claro, 3 – verde claro, 4 – rosa, 5 – blanco, 6 – azul oscuro, 7 – lila, 8 – rojo, 9 – verde oscuro), que se identificará con la bolsita contenedora y, en la calculadora se cubren las teclas de acuerdo con el color previamente asignado a los numerales.

- En el inicio de la construcción se les muestra una bolsa (la más pequeña) de hule transparente y vacía, con la finalidad de que los niños puedan nombrar al vacío como una entidad matemática llamada “cero”, invitarlos inmediatamente a que presionen en la calculadora la tecla que tiene el color marcado en la bolsa (previamente en la bolsa se pusieron dos líneas de color amarillo) y elijan el numeral que sale en la pantalla (0) para que lo seleccionen de los numerales que se les muestran (0, 1, 2, 3, ... 9), mismos que también son del color predeterminado, en este caso al cero se le asignó el color amarillo.
- Una vez que pegan el numeral “cero” por fuera de la bolsa contenedora, se hace énfasis en que hemos “construido el cero”; de inmediato se les pide que lo coloquen en la recta numérica como el principio de la construcción, siendo el primer elemento de la secuencia, mismo que se coloca en la recta numérica.
- Se les pregunta ¿Se podrá construir el que sigue?, con la finalidad de que ellos lo puedan hacer. Ahora se dispone de la bolsa que sigue en tamaño más grande y se les pregunta: ¿Qué tiene la bolsa? ¿Cómo está la bolsa? Se espera

que contesten: cero, vacío o nada. Se les vuelve a preguntar ¿Qué podemos hacer para “construir el que sigue”?, pues la bolsa no contiene elementos y por lo tanto representa al cero. Entonces se les propone tomar otra bolsa (del mismo tamaño con la que se construyó el cero) para que vuelvan a construir el cero e introducirla en la nueva bolsa que ahora representará al uno. Se realiza el mismo procedimiento que el anterior con la finalidad de que ellos vayan dándole sentido a $n + 1$; sin quitar el cero construido y que ya estaba colocado en la recta numérica, ahora se coloca el “uno construido” en la recta numérica. Se vuelve a preguntar, ¿podemos construir el que sigue?, es muy probable que algunos niños respondan que sigue el número dos. Para esta nueva construcción, tienen que volver a construir el “cero y el uno”, lo que implica el uso de la recursividad; por lo tanto, tienen que reproducir el proceso, “el siguiente” se construye, construyendo los anteriores para ser introducidos en la nueva bolsa contenedora que representa al número dos. Este procedimiento se realiza para todos los demás números hasta el 9. Las bolsas van creciendo de tamaño por su contenido.

El siguiente momento de la construcción es con el uso de cubos, cuadrados de foami y puntos, para ir afirmando la construcción a partir de la iteración y la recursividad; se les plantean ejercicios escritos en los que se les solicita identificar el orden a partir del número que está antes y/o después de...

(b) Construcción de la tabla de Pitágoras para suma y multiplicación, y los procesos de conteo a partir del orden.

Se inicia con la actividad denominada “Cambio”, con el uso de dados y fichas de color azul y rojo, la cual consiste en que los niños organizados en equipos lanzan un dado y dependiendo del valor obtenido (1 a 6) toman las fichas de color azul que correspondan, con la consigna de que al reunir 10 hacen el cambio por una roja, la que previamente se les explica que tiene un valor de 10. Al principio de la actividad se construye la recta numérica, escribiendo de color negro los numerales (0 – 9), (11, 12, ...) y de rojo los que representan 10, 20, 30, ... 90. Cada equipo tiene cinco turnos para lanzar el dado y tomar las fichas que correspondan, con la consigna de hacer cambio en el momento en que reúnan diez fichas de color azul. Para finalizar el juego, se representan en la recta numérica las cantidades que obtuvieron cada equipo, representando de la siguiente manera: $10 + 3$; $10 + 5$, ... Gana equipo que muestra en la recta numérica que el total de puntos obtenidos está más alejado del cero.

Con este referente se propone la siguiente actividad: la construcción de las tablas de Pitágoras (+) y (x); con los procedimientos algorítmicos de iteración y recursión

se construyen de acuerdo con el teorema 43 y 50 [8, págs. 109 y 111] los números que siguen al diez se representan como: $10 + 1$, $10 + 2$, $10 + 3$, $10 + 4$, \dots . El número 10 se escribe con color rojo, tanto en la recta numérica como en la tabla de Pitágoras, con la finalidad de que sirva de referente de la nueva unidad. En la tabla de multiplicar se representan siguiendo este patrón como sigue: 3×4 se representa como $10 + 2$; 4×5 como $2 \cdot 10$; 9×6 como $5 \cdot 10 + 4$.

Para promover el proceso del conteo, se propone la actividad de contar a partir del orden con dos, tres y cuatro objetos. Para que ellos encuentren todas las posibles formas de poder contarlos.

Hasta el momento se han trabajado estas actividades con tres grupos: primero, segundo y tercer grado de tres escuelas públicas de educación primaria, de la Ciudad de México. En cada grupo se han trabajado un promedio de 9 sesiones. Cada una de las sesiones se han video grabado. A continuación se presentan los primeros acercamientos de análisis de la observación.

3 Primeros acercamientos de análisis de la observación de la experiencia empírica con el Modelo de Enseñanza.

Considerando que la acción que se pretende observar son las dificultades que tienen los niños para la construcción de los números a partir del orden, se han propuesto las categorías de análisis:

(a) ¿A qué *obstructores* se enfrentan los niños para darle sentido a las acciones encaminadas a la construcción de número natural?

(b) ¿Qué *inferencias analíticas* se promueven para identificar el nivel de la representación y uso de la memoria, que hacen del SMS para generar un esbozo lógico semiótico de la situación problemática y los procesos de significación y sentido de las acciones que van realizando?

(c) ¿Qué *tendencias cognitivas* se identifican en este proceso de construcción, que les permiten transitar de SMS intermedios a otros más abstractos?

Con estos indicadores se pretende observar las dificultades que tienen los niños en tres niveles:

Sintáctico en el uso correcto de signos y símbolos matemáticos ($+ - x$) para la representación de los números con la iteración y la recursión.

Semántico para reconocer las dificultades que tienen para darle sentido a la lógica de construcción de los números, decidir entre un SMS y otro para bosquejar un proceso de solución.

Conocimientos intuitivos para identificar qué usos espontáneos hacen de los números y qué correspondencia tiene con estratos de SMSs, que les permiten hacer

nuevas decodificaciones y desarrollar nuevas tendencias cognitivas.

(1) *Niños de primer grado (6 - 7 años)*

Los niños de primer grado ya habían desarrollado actividades concernientes al sentido numérico; sin embargo, tuvieron mayor dificultad para realizar la construcción de los primeros números (0 - 9).

En el inicio de la construcción del número cero lo relacionaron rápidamente con la palabra de “nada” y después con la noción de *vacío*, ello a partir de las acciones de llenado y vaciado de la bolsa contenedora. La noción de *peso* fue uno de los argumentos de los niños para señalar que la bolsa está vacía:

M: ¿Qué tiene la bolsa?

N₁: Nada.

M: ¿Cómo quedó la bolsa?

N_s: vacía.

M: ¿Cómo podemos saber que mi bolsa está vacía?

N_s: Porque no tiene nada.

N₂: Porque si no metes algo, no tienes nada.

N₃: Si está vacío, no estaba pesado.

En este episodio, se interpreta que el niño está haciendo una *inferencia* al hacer uso de la memoria, al referir al *peso* como lo contrario de *vacío*. Reconocieron y usaron sin problema el numeral cero, haciendo uso eficiente de lo *sintáctico*. Para indicar el orden, se colocó la bolsa que representó al “cero construido” en la recta numérica, como principio de la construcción.

Para continuar con la construcción del siguiente número, se les preguntó a los niños, ¿podemos construir el que sigue?, los niños responden de inmediato que es el número uno. A esta respuesta se les preguntó ¿Cómo le hacemos? A lo cual los niños señalaron una bolsa y colocaron el numeral uno. Por lo que la investigadora les mostró que la bolsa estaba vacía, y por lo tanto, representaba al cero. Ahora preguntó: ¿cómo podemos construir el que sigue? los niños insistían que era el número uno por colocarle el numeral uno, sin identificar que dentro de la bolsa no había elementos. Por lo que se les preguntó por el número cero que se construyó, y se les mostró que para que sea uno debía contener un elemento, el cual era el antecesor (cero). Así que se volvió a insistir, para que ellos dieran el argumento de lo que se necesitaba, para que realmente fuera el número uno. El *obstructor* al que se enfrentaron fue el de reconocer sólo al numeral, por lo que la investigadora les mostró el proceso para la construcción del número uno, tomando otra bolsa más pequeña (del mismo tamaño que la del cero) para construir el cero nuevamente,

comprobando que no tenía elementos; entonces la introdujo en la bolsa del uno, pidiéndole a los niños que verificaran que ahora esta nueva bolsa ya tenía elementos: uno, que en realidad es el “cero construido”, en este proceso se aprecia la iteración y la recursión, ésta última en la importancia de “construir el anterior” para poder construir el “posterior”. Sin embargo, al pedir a los niños que verificaran que era el número contaron dos elementos: la bolsa del cero y la del uno, debido a que la bolsa era transparente, no daban cuenta de que la bolsita del número uno debía contener un elemento: el cero. Por lo que la investigadora volvió a repetir el proceso, para que centraran su atención en la acción de introducir el elemento “cero” en la siguiente bolsa (del uno) como el elemento que contiene la bolsa del uno. Esta dificultad se presentó con los dos números siguientes el dos y el tres, por lo que se optó por cambiar las bolsas transparentes con las bolsas de papel opaco, lo que facilitó el proceso.

Este proceso fue complicado para los niños, en la construcción de cada número se dedicó una sesión de 40 aproximadamente. De acuerdo con Piaget [14, págs. 101-102], esta dificultad se debió a que aún no han consolidado la noción de conservación de la materia. Una vez construidos cada uno de los números, el proceso de identificación del numeral que los representa fue inmediato al momento de teclear en la calculadora el color correspondiente, así como su colocación de acuerdo con el orden en la recta numérica. El *obstructor* estuvo presente al usar el proceso de la recursión, si bien, iteraron correctamente para construir “el que sigue”, se enfrentaron al conflicto de no reconocer que tenían que volver a construir todos los anteriores de la misma manera, sólo se referían a los numerales. Otra de las dificultades que se presentaron al momento de verificar el número de elementos que contiene la bolsa del número uno, pues su respuesta era dos, ya que consideraban tanto la que habían introducido (cero) como la que los contenía. Debido a que las bolsas eran transparentes, fue el obstructor para no usar la noción de conservación para centrar su atención en el proceso de iterar: agregar un elemento. Por lo que la investigadora tuvo que explicar que lo que se cuenta es lo que introducimos, estamos agregando un elemento a la bolsa: entonces la bolsa contiene un elemento que es el cero. De manera similar ocurrió al construir el número dos.

Consideramos que las dificultades que se presentaron al *iterar* el proceso para construir los siguientes números con el uso de la recursividad para repetir el proceso que se hizo con el número anterior (uno), pueden ser consecuencia de las experiencias sociales, culturales y escolares que han aprendido, predominando la repetición de la secuencia numérica oral y escrita sin haberla construido. De forma reiterativa en cada construcción de “*el que sigue*”, los alumnos sólo tomaron las bolsas con el numeral correspondiente, por lo que se tuvo que estar interviniendo para repetir el proceso cuantas veces fuera necesario, usando la técnica de la pregunta para

que reflexionaran sobre el uso de los procesos de iteración y recursión de cada construcción, reconocer quién es mayor y menor por su construcción.

Una vez, que se terminaron de construir los primeros diez números, se pasó a la siguiente actividad con otro material concreto: cubitos de madera, figuras geométricas de foami para que las manipularan y pudieran reconocer y usar la iteración y recursión en la construcción del número que sigue a partir del anterior.

Para la iteración ($n + 1$) los procesos se representaron de la siguiente manera: $1 + 1 = 2$; $2 + 1 = 3$; $3 + 1 = 4, \dots$ se dieron cuenta para construir el que sigue, sólo bastó con agregar uno.

Para la recursividad: $0 + 1 + 2 = 3$; $0 + 1 + 2 + 3 = 6$; $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$;... Les sorprendió mucho darse cuenta de que no es lo mismo tener un conjunto con $0, 1, 2, 3, \dots$ elementos, que hacer la construcción de cada número, pues para construir el siguiente, se requiere de los anteriores, por ejemplo para construir el número cinco necesitaron un total de quince cubos distribuidos de la siguiente manera: (0 cubos) + (1 cubo) + (2 cubos) + (3 cubos) + (4 cubos) + (5 cubos).

Otra de las actividades que trabajaron fue la construcción de la unidad simple y la unidad múltiple, para inducir el conteo con números después del número 9, mismas que sirvieron de referente para la construcción de la tabla de Pitágoras de suma. Esta fue la actividad del “Cambio”, las fichas de color azul para representar a los números del uno al nueve de color azul y rojo para “el cambio” de la nueva unidad (10). El *obstructor* que se presentó fue que los niños centraron su atención en reunir el mayor número de fichas y no hacer el *cambio* cuando tenían 10 azules; la falta de conservación de la materia, les llevó a centrarse en la cantidad y no en el valor. Para verificar qué equipo fue ganador se usó la recta numérica representando las cantidades que obtuvo cada equipo, por ejemplo, una roja y cinco azules se representó como 10 más 5 azules: $10 + 5$, mientras que otro equipo obtuvo $10 + 3$ preguntándoles: qué equipo gana: “¿el que está más lejos del cero o el que está más cerca?”, la representación con el uso de la recta numérica, fue un recurso didáctico que permitió a los niños identificar rápidamente quién era el ganador.

La construcción de la tabla de Pitágoras de suma Teorema 43 [8, pág. 109] se realizó con mayor facilidad, comprendieron el uso de $10 + 1, 10 + 2, 10 + 3, \dots$

En la actividad del Conteo con el principio del orden, se les entregaron dos fichas de diferente color (roja y azul) con la finalidad de que encontraran diferentes maneras de contarlos, es decir, se podían contar: rojo, azul; o azul, rojo. El *obstructor* fue que no le dieron sentido a que se puede contar de manera diferente a partir del primer elemento que se coloca; sólo lo pudieron hacer con dos elementos distintos; cuando se les dieron tres 3 corazones de diferente color, algunos niños lograron encontrar hasta cuatro maneras distintas para contarlos.

(2) Niños de segundo grado (7 - 8 años)

Los alumnos de segundo grado comprendieron y usaron los procesos de iteración y recursividad sin problema, sólo al principio con la construcción del número uno y dos se presentó el problema de centrar su atención en usar las bolsas con numerales, sin construir los anteriores; situación que rápidamente fue resuelta una vez que se les mostró cómo construir el siguiente a partir del anterior. Para la construcción de los primeros diez números se trabajaron en 3 sesiones de 40áproximadamente. Las *tendencias cognitivas* se hicieron presentes al terminar de construir el número nueve al preguntarles:

M: ¿Hubieran imaginado que dentro del número nueve hay todos estos números?

N_s: Nooo! ¡Está bien gordo!

Un alumno se adelante y dice:

N₁: y va ser más gordo que nunca, ¿imagínate el diez?

N₂: Se tendría que tener una bolsa de la basura para el cien.

Los niños pudieron imaginar el tamaño de la nueva bolsa contenedora, lo que es un referente de tendencias cognitivas al *dotar de sentidos intermedios* [4, pág. 123] la construcción del número que sigue y más aún otro mayor, así como *dotar de sentidos a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones* [4, pág. 123].

Las dificultades estuvieron cuando se les propuso realizar el proceso a la inversa, es decir, ir deconstruyendo cada uno de los números a partir del último número que construyeron. Para lo cual el recurso de la recta numérica fue útil, pues permitió que se fuera representando el proceso hacia atrás, lo que implicó $n - 1$, al principio lo estaban haciendo como $n + 1$. Se les ejemplificó con el número nueve, al sacar de la bolsa el último número construido que se iteró a la bolsa y contando que efectivamente estaban todos los números construidos correctamente.

La actividad “Cambio” permitió que los niños rápidamente comprendieran la importancia de cambiar las fichas y poder representarlas tanto en la recta numérica como sintácticamente, por ejemplo, al finalizar la actividad, representaron en la recta numérica las cantidades que habían obtenido, representándolos de la siguiente manera: $10 + 8$, o bien $2 \cdot 10 + 3$. Para encontrar al equipo ganador pudieron representar fácilmente al que logró llegar más lejos del cero.

En la construcción de la tabla de Pitágoras de suma hicieron en un menor tiempo, usaron la iteración del número tantas veces se indicaba en la columna y fila que le correspondía. En la construcción de la tabla de Pitágoras de multiplicación pudieron rápidamente iterar los números que se indican en la columna y la fila

que corresponde, por ejemplo 7 veces 3, lo representaban en la recta numérica y lo escribían en la tabla como $2 \cdot 10 + 1$. Las experiencias han tenido los alumnos de segundo grado, les ha permitido ir consolidando la noción de conservación de la materia, accediendo más rápido en este nivel sintáctico.

(3) Niños de tercer grado (8 - 9 años)

Con los alumnos de 3º el proceso fue mucho más rápido, en una sesión se construyeron los primeros diez números naturales, el uso de la iteración y recursión de los tres primeros números fue complicado al principio, pero cuando identificaron el sentido de la iteración y recursión para construir el siguiente a partir del antecesor, fueron los mismos niños quienes estaban al pendiente de construir cada número que se iba necesitando, iterando el proceso para el siguiente y la recursión para iterar el mismo proceso que se hizo para el anterior. Para referirse a la construcción de cada uno de los números usaron la palabra “pasajeros”:

M: ¿Qué nombre le voy a dar a esta nueva bolsa?

N: Uno.

M: Uno. ¡Muy bien! Y entonces, ya tengo una bolsa con el número uno.

N_s: Sí.

M: Para que yo le pueda poner el uno ¿qué debe tener?, ¿cómo está?

N_s: Vacía.

M: No puede ser el uno. Es el uno hasta que yo lo meta.

N: Lo meto (el niño introduce la bolsa del cero en la bolsa contenedora del uno).

M: Ahora sí es el uno.

N: ¡Hasta que entre el pasajero!

M: ¡Hasta que entre el pasajero! ¡Muy bien!

Las dificultades que tuvieron con la actividad del “Cambio” se generaron cuando se representaron en la recta numérica la nueva unidad (10) e iterarla, es decir, un diez, dos dieces, . . . El uso de la recta numérica fue un auxiliar para que le dieron sentido a esta iteración y hacer un uso sintáctico de las operaciones que estaban realizando: suma y multiplicación, por ejemplo, cuando al final de algunas rondas del juego, cada participante “contaba” las fichas obtenidas, y alguno de ellos tenía 5 fichas rojas y 6 azules, lo representaban de la siguiente forma: $5 \cdot 10 + 6$. Con este antecedente pudieron construir las tablas de Pitágoras de suma y multiplicación poniendo en uso las propiedades de la suma y la multiplicación: conmutativa y el elemento neutro (el cero para la adición y el uno para la multiplicación).

4 Discusión Final

En este último apartado, se precisa que estamos en la primera etapa de la construcción del Modelo Teórico Local [4, pág. 9], fundamentación teórica que sustenta este proyecto de investigación, se ha avanzado en la construcción de cada componente: Modelo de enseñanza, Modelo de comunicación, Modelo de cognición y el Modelo Formal; de acuerdo con Filloy [4, pág. 9], se ha diseñado un Modelo de Enseñanza con base en el modelo formal, se han trabajado 27 sesiones con alumnos de 6 a 8 años, mismas que se videograbaron y se están analizando para el diseño del modelo definitivo de enseñanza.

A partir de lo observado, la toma de datos, los análisis de esos datos serán interpretados en términos del MTL en esta *primera etapa*:

- Problemática: “Observar las dificultades que tienen los niños de 6 a 9 años con el uso de la lógica de los SMS involucrados en la construcción de los números naturales con el modelo de von Neumann”. Se partió de la comprensión y adaptación del modelo formal de von Neumann a un modelo de enseñanza con actividades y uso de material concreto.
- Nuestro marco de referencia constituye el Modelo de Cognición y Comunicación con los aportes piagetianos y la tradición de la psicología soviética, encabezada por Vigotsky, Galperín y Talizina; así como las contribuciones de Pierce en los procesos de significación en el uso y sentido de los SMS.
- En este primer diseño de MTL, la experimentación incluyó el diseño de instrumentos de planeación, observación y medición.
- Se revisó y analizó la estructura del modelo propuesto a partir de las actuaciones de los niños. Pues si bien al principio de las sesiones fue complicado para los niños entender el proceso de construcción de los diez primeros números (0-9), dependió de la edad y grado escolar: los niños de primer grado necesitaron una sesión de 40 minutos para cada número; para los de segundo grado fueron tres sesiones de 40 minutos para cada número; y para los de tercer grado una sesión de 40 minutos. Con este antecedente, se pudo acceder rápidamente a la construcción de las tablas de Pitágoras de suma (para los tres grados) y de multiplicación (para tercer grado). Los niños de primer y segundo pudieron entender y usar sin dificultad las propiedades conmutativa y el cero como el elemento neutro para la suma; y los alumnos de tercer grado entendieron y usaron sin dificultad la propiedad conmutativa y el elemento neutro para la suma y la multiplicación.

- Con los datos obtenidos se realizará su interpretación en términos de Modelo Teórico Local.

Con estos resultados se propone la *segunda etapa* de la investigación, en donde el Modelo Teórico Local, permitirá elegir a la población a estudiar, con alumnos de 6 a 9 años de educación primaria, diseñar y aplicar el instrumento de evaluación que permita seleccionar a los alumnos de acuerdo con el diagnóstico, clasificar a la población para elegir a quienes participarán del Estudio de Casos para ser observados en entrevista clínica, elaborar un reporte de las observaciones de acuerdo con las componentes del Modelo Teórico Local.

- Implementación de un sistema para una enseñanza controlada: “del modelo de la Matemática Formal a un Modelo Matemático Concreto”.
- Diseño y aplicación de un instrumento de evaluación diagnóstica a la población seleccionada, para conocer su eficiencia en el uso de los SMS que se consideran estratos concretos del SMS abstracto.
- Clasificación de la población, proponer dos perfiles de acuerdo con el desempeño en el diagnóstico: alumnos con la propuesta y alumnos sin la propuesta.
- Elección de la población para ser observada en entrevista clínica.
- La observación en este estudio de casos de la población elegida, se realizará apoyándose en las técnicas de esta metodología de investigación.
- Análisis e interpretación de las entrevistas clínicas realizadas.
- Elaboración de un reporte de las observaciones, en términos de los propósitos teóricos del estudio:
 - (a) Modelo de Enseñanza. - recuperar las aportaciones a la Enseñanza a partir de las observaciones generados del modelo propuesto.
 - (b) Modelo de Comunicación. - recuperar los elementos relevantes de la observación, experimentación y entrevistas clínicas, para la generalización del proceso de comunicación.
 - (c) Modelo de Cognición. - Comprender y explicar las dificultades cognitivas que tienen los niños con el uso de la lógica de los SMS involucrados en la construcción del número natural con base en el modelo de von Neumann.
- Analizar, comprender y reportar por los procesos teórico-conceptuales que se promueven a través de la enseñanza y las dificultades que tienen los niños con el uso de la lógica de los SMS involucrados en la construcción de los números naturales.

Bibliografía

- [1] Choate, J. Devaney, R. y Foster, A. (1999). *Iteration: The Tool Kit of Dynamic Activities*. USA: Key Curriculum Press, Innovators in Mathematics Education.
- [2] Deaño, A. y Delval J. (Comps.) (1982). *Jean Piaget, Estudios sobre lógica y psicología*. Madrid: Alianza Editorial.
- [3] Dedekind, R. (2014) ¿Qué son y para qué sirven los números? J. Ferreirós, (Tr. y Ed), Madrid: Alianza Editorial, Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.
- [4] Filloy, Y. E. (1999). *Aspectos Teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- [5] Filloy, E. Rojano T. y Puig L. (2008). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach*. USA: Springer.
- [6] Freudenthal, H. (2002). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers. ebook ISBN 0306-47235X.
- [7] Galperín, P.Y. (1976). *Introducción a la Psicología: un enfoque dialéctico*. España: Pablo del Río Editor.
- [8] Hamilton, N. Ladin, J. (1961). *Set Theory and The Structure of Arithmetic*. USA: Allyn and Bacon, Inc.
- [9] Ifrah, G. (1988). *Las cifras. Historia de una gran invención*. Madrid: Alianza Editorial.
- [10] Isaacs, N. (1967). *Nueva luz sobre la idea de Número en el niño*. Buenos Aires: Paidós.
- [11] Maravilla, C. y Filloy, Y. (2011). *El orden y el conteo en la construcción de los números naturales con el modelo de John von Neumann en niños preescolares*. Tesis de maestría no publicada. México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
- [12] Mosterín, J. (2000). *Los lógicos*. España: Editorial Espasa Calpe. S. A.
- [13] Piaget, J. (1953). *Lógica y Psicología*. En Deaño, A. y Delval J. (Comps.) (1982). *Jean Piaget, Estudios sobre lógica y psicología*. Madrid: Alianza Editorial.

- [14] Piaget, J. (1980). Problemas de Psicología Genética. España: Ariel.
- [15] Piaget, J. y Inhelder, B. (1984). Psicología del niño. España: Morata.
- [16] Pierce, Ch. (1987). Obra Lógico Semiótica. Madrid: Taurus Ediciones.
- [17] S.E.P. (2011). Plan de Estudios 2011. Educación básica. México: SEP.
- [18] Talizina, N. (2000). Manual de Psicología Pedagógica. México: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.
- [19] Talizina, N. Comp. (2001). La formación de las Habilidades del Pensamiento Matemático. México: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.
- [20] Van Heijenoort. J. (1967). From Frege to Gödel: A source Book in Mathematical Logic, 1879 – 1931. USA: Harvard, University.
- [21] William, E. (1999). From Kant to Hilbert. A source Book in the foundations of mathematics. Great Britain: Bookcraft (Bath) Lid Misomer Norton Avon.

Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
Avenida Instituto Politécnico Nacional Número 9, Colonia San Pedro Zacatenco,
CDMX, C.P. 07360

leticia.rodriguez@cinvestav.mx
SMMEef@aol.com

Filosofía, divulgación e historia de las matemáticas

Capítulo 2

Los *Elementos* de Euclides en la enseñanza de las matemáticas en el México colonial

Marco Arturo Moreno Corral
Instituto de Astronomía, UNAM

Resumen

Este trabajo es una reseña sobre investigaciones tendientes a establecer el uso que se hizo de los *Elementos* en el sistema educativo de la Nueva España, texto geométrico escrito por Euclides en el siglo III a. C. También se indican los ejemplares de las diferentes ediciones de esa obra que, a partir de información confiable puede afirmarse que entraron a nuestro país durante los trescientos años de régimen colonial, señalando quiénes fueron los posibles usuarios.

1 Introducción

A lo largo del desarrollo de la cultura occidental han existido unos cuantos libros, que por su trascendencia y su vigencia, se consideran paradigmáticos. En el campo de las matemáticas, existe una obra de este tipo; los *Elementos* escritos por Euclides hacia el año 300 anterior a nuestra era. Este es un texto que, cuando Europa se sumió en la Edad Media, preservó y transmitió la matemática de la Grecia clásica. Cuando comenzó la colonización de América, los europeos implantaron su cultura en el Nuevo Mundo. Fue así que durante el siglo XVI llegaron a la Nueva España grandes remesas de libros, muchos de carácter religioso, pero algo de aquella literatura versó sobre la ciencia de ese tiempo, conformada por disciplinas como la física aristotélica, las matemáticas (aritmética y geometría) y la astronomía [10].

Formando parte de aquellos primeros libros, se hallaban los *Elementos*, texto muy valorado por los europeos de aquel tiempo, pues en él aprendían la ciencia griega que entonces renacía. Como el número de ejemplares de esa obra que entraron a nuestro país durante el período colonial, fue superior al esperado por un hecho fortuito, hace pensar que debieron ser solicitados a los libreros españoles, con el fin expreso de utilizarlos como textos en los cursos de Filosofía Natural, que desde al menos 1541 se impartieron en la Nueva España. Para comprender adecuadamente el desarrollo científico de nuestro país durante los tres siglos de coloniaje, resulta relevante investigar las lecturas que los novohispanos hicieron sobre temas de ese

campo, por lo que aquí se analizará la presencia y uso de los *Elementos* en el sistema educativo colonial.

2 Los *Elementos* de Euclides.

Los *Elementos* son una recopilación de parte importante del saber matemático de los antiguos griegos, aunque los especialistas consideran que ese libro también contiene aportaciones propias de Euclides [3]. Esta obra es fundamentalmente un texto de geometría, ciencia que su autor presentó en forma axiomática, pues a partir de 23 definiciones, 5 postulados y 5 axiomas generales o nociones comunes, demostró teoremas y derivó corolarios [11]. Originalmente estuvo compuesto por trece libros, aunque posteriormente se le agregaron los libros XIV y XV, pero se ha mostrado que son apócrifos [38, 27]. Los seis primeros se ocupan de la geometría plana, mientras que los tres siguientes, tratan de la teoría de los números y el décimo está dedicado a los números irracionales o inconmensurables y los tres últimos estudian los cuerpos sólidos [27].

La historia misma de los *Elementos* resulta interesante [33], pero aquí resumiremos solamente los hechos principales. Durante el primer milenio de nuestra era, este texto, como muchos otros de la antigua cultura griega, se perdió para Europa pero fue preservado por los árabes. En el siglo IX Al Hajjaj ibn Yusuf ibn Matar lo tradujo a su lengua, por lo que importantes matemáticos de esa cultura pudieron estudiarlo, haciendo nuevas traducciones y escribiendo comentarios sobre el texto euclidiano. Hacia el año 1120 Adelardo de Bath tradujo aquella versión al latín, volviendo así a estar disponible para los estudiosos europeos, quienes al redescubrirla, también escribieron comentarios sobre los *Elementos*. El matemático italiano del siglo XIII Giovanni Campano de Novara revisó, corrigió y amplió la versión de Bath, logrando un texto homogéneo, que en 1482 fue utilizado para publicar la primera edición impresa. A partir de entonces, este manual griego de geometría, que es el más antiguo de este tipo que ha llegado hasta nosotros, ha tenido múltiples ediciones en muchos idiomas. Actualmente se considera que después de la *Biblia*, es el texto que mayor número de impresiones ha alcanzado.

El rigor lógico y la manera sistemática utilizada por Euclides a lo largo de todo su libro, resultan muy formativos para los estudiantes, razones que seguramente contribuyeron a que esta obra haya sido usada por tanto tiempo como texto introductorio para comprender la geometría. Sobre este particular, Sotero Prieto, el primer profesor de matemáticas superiores del México moderno, escribió que Euclides “*sistematizó la enseñanza de la Geometría. Puso en orden los trabajos de Eudoxio y de otros platónicos. La superioridad de los Elementos sobre las obras de otros autores, se revela en el gran número de copias que se hizo desde la Antigüedad,*

por lo que no se perdieron: los otros son libros ya perdidos” [26].

3 Temprana presencia de ese libro en el Nuevo Mundo.

La información existente sobre el gran caudal de libros que fluyó a estas tierras a lo largo de los siglos XVI y XVII [21], ha permitido establecer que, entre aquellos textos, entraron a la Nueva España ejemplares de las primeras ediciones impresas de los *Elementos*. Confirma esta afirmación el hecho que el Museo del Estado de Michoacán en Morelia, exhibe un ejemplar del *Euclidis Megarensis Mathematicis Clarissimi Elementorum Geometricorum*, publicado en Basilea en 1537, que de acuerdo a la información que pudimos recabar, formó parte de la biblioteca original del Convento de Tiripetío aproximadamente desde 1549, siendo por ello, el ejemplar más antiguo que se ha preservado entre los que llegaron a nuestro país en el siglo XVI.

El alemán Enrico Martínez, que se radicó en la Nueva España en 1589 ejerciendo las profesiones de cosmógrafo, ingeniero, impresor y escritor, poseyó una biblioteca con algunos libros de ciencia, entre los que se hallaba al menos un ejemplar de la obra geométrica de Euclides, pero hasta el momento no ha sido posible identificar qué edición fue. Como Cosmógrafo de su Majestad, que fue el título que tuvo en estas tierras, tenía la obligación de enseñar matemáticas, lo que al menos hizo con su hijo, quien al mediar el siglo XVII, publicó un texto astronómico-astrológico. Como se dirá más adelante, Martínez hizo uso de la geometría euclidiana para su trabajo matemático.

Como esos ejemplos hubo más, ya que antes del término del siglo XVI, se han podido identificar en los inventarios de libros llegados a la Nueva España, al menos otros diez ejemplares de diferentes ediciones de los *Elementos*. Esa cantidad y el hecho de que en aquellos tempranos años de régimen colonial, traer libros al Nuevo Mundo resultaba muy caro, además de que había que hacer diversas gestiones y cumplir requisitos de control estrictos impuestos tanto por las autoridades civiles como por las religiosas, indican que esas obras fueron encargadas para su estudio y no como meras curiosidades bibliográficas. Entre aquellos primeros libros llegados a América, se hallaba la primera traducción al español de la obra geométrica que nos ocupa; *Los seis primeros libros de la Geometría de Euclides*, traducido por Rodrigo Zamorano y publicado en Sevilla en 1576. Seguramente porque no todos los interesados en el contenido del texto euclidiano dominaban adecuadamente el latín, esta versión castellana fue muy usada por los novohispanos de ese y el siguiente siglo [19].

4 Los usuarios.

¿Pero quiénes fueron los lectores de esos libros?, que por su contenido no eran de lectura fácil, ya que estaban escritos en el lenguaje matemático especializado usado por la ciencia de aquel tiempo. Para tratar de responder esta pregunta, veamos dónde pudo usarse el texto de Euclides. Las diferentes órdenes religiosas que se asentaron en la Nueva España, además de fundar conventos, crearon Casas de Estudios Mayores, donde se enseñaban las disciplinas del *Trivium* (gramática [latín], dialéctica y retórica) y del *Cuadrivium* (aritmética, geometría, astronomía y música); materias que, desde la Edad Media, formaban parte integral de los planes de estudio de la estructura universitaria europea. A partir de 1541, el religioso agustino Alonso de la Veracruz impartió, en la casa de estudio anexa al convento de Tripetío, Michoacán, la cátedra de Artes [2], en la que explicó esas disciplinas. Para ayudar a los estudiantes en una época y lugar donde realmente era difícil hacerse de libros adecuados, fundó ahí una bien surtida biblioteca, de la que parece haber formado parte el ejemplar de los *Elementos* exhibido en el museo michoacano.

Entre 1554 y 1557 de la Veracruz escribió y publicó en la Ciudad de México, tres gruesos volúmenes en latín, donde se ocupó de la Lógica, la Dialéctica, la Física, las Matemáticas y la Astronomía, cubriendo de esa forma los temas del *Trivium* y del *Cuadrivium*. En particular en 1557 publicó el texto *Physica Speculatio* (Especulaciones sobre Física), donde trató las ideas aristotélicas relativas a la materia, el movimiento, el espacio, el tiempo, así como la visión cosmogónica que del universo tuvo Aristóteles [23, 24]. En diferentes secciones de ese libro, fray Alonso recurrió a partes de los *Elementos* de Euclides, dejando ver que suponía el conocimiento de esa obra por parte de sus lectores, lo que indica que, al menos sus alumnos, entraron en contacto con el texto que aquí nos ocupa.

Otro ejemplo del uso temprano de la obra euclidiana en nuestro país, se encuentra en un documento manuscrito resguardado en la Biblioteca Nacional de México [39], formado por un legajo de 319 hojas escrito por el jesuita Antonio Arias quien, como parte de un curso de Filosofía Natural que impartió al finalizar el siglo XVI, incluyó el estudio de la astronomía geocéntrica. Para explicar los movimientos planetarios, habló de los círculos que componen el firmamento y de su proyección en el cielo, haciendo uso de conceptos geométricos de los *Elementos*.

5 El siglo XVII novohispano y el uso de los *Elementos*.

El ya mencionado Enrico Martínez, publicó en 1606 el *Repertorio de los Tiempos e Historia de la Nueva España*, donde se ocupó de diversos temas, dedicando gran parte del libro al binomio Astronomía-Astrología que todavía entonces era conside-

rado parte de la ciencia [20]. Al referirse a los tamaños del Sol y de la Luna, Martínez hizo algunos cálculos, recurriendo explícitamente a la obra de Euclides, pues citó partes del libro XII de los *Elementos*, mostrando así que conocía esa obra. Otro novohispano de la primera parte del siglo XVII que mencionó a Euclides y su libro, fue fray Andrés de San Miguel, arquitecto que construyó varios de los conventos de la orden Carmelita en México. Este personaje dejó un texto manuscrito donde se ocupó de Matemáticas, Astronomía, Física y Arquitectura. En cuanto al valor que daba a la Geometría, escribió que “*sin esta ciencia sería falsa la Arquitectura, la Matemática en todo ciega y muerta la Cosmografía*”. Comenzó la parte geométrica de su manuscrito, citando explícitamente a Euclides [1] e introduciendo varias de las definiciones incluidas en los *Elementos*, como las de punto, línea, superficie, ángulo y otras. Pero San Miguel fue más lejos, pues al desarrollar su texto, aplicó la geometría euclidiana para enseñar a construir y medir diversas figuras como triángulos, rectángulos, círculos y algunos polígonos, todo ello con la intención de utilizarlos en trabajos arquitectónicos y de construcción, así que aquí se tiene un ejemplo no solamente del estudio teórico de la ciencia geométrica usando los *Elementos*, sino también de su aplicación directa en labores prácticas.

Poco después, en el año de 1637, fray Diego Rodríguez fundó en la Real y Pontificia Universidad de México la cátedra de Astrología y Matemáticas [36], primera de este tipo en todas las universidades de América. En sus manuscritos y en el único impreso que ese profesor dejó, se encuentran aplicaciones directas de la geometría euclidiana. La Biblioteca Nacional de México guarda su manuscrito titulado *Tractatus Proemialium disciplinarum Mathematicarum* (Tratado introductorio a las disciplinas matemáticas) [40], en el que ese religioso recomendó el uso de los *Elementos* de Euclides, además en la cuarta parte de ese legajo no impreso, fray Diego escribió sobre *De divisione Geometriae et elementorum Euclidis* (De las divisiones de la Geometría y de los *Elementos de Euclides*), lo que muestra que conocía bien la obra del matemático griego y debió explicarla, al menos en su parte elemental, a los alumnos de aquella primera cátedra americana de ciencias exactas. Como científico de su época, Rodríguez utilizó la geometría euclidiana, pues en el desarrollo de su *Tratado del modo de Fabricar Reloxes* [29], así como en los dibujos que hizo para representar las fases de eclipses lunares que ilustran su manuscrito *Modo de calcular cualquier eclipse de Sol y de Luna* [30], recurrió a conceptos expresados en esa obra.

En torno a este personaje hubo un grupo de novohispanos, no necesariamente alumnos de la Universidad, interesados en las materias que enseñaba, especialmente en las ideas astrológicas. El más notable fue el Obrero Mayor de la Catedral de México, quien en 1655 fue apresado y enjuiciado por poseer libros prohibidos. Este personaje llamado Melchor Pérez de Soto, debe mencionarse, pues la biblioteca que le incautó el Tribunal de la Inquisición [31] es una gran veta para saber

qué leían los novohispanos cultos de mediados del siglo XVII, pero además, por su profesión, este personaje estuvo interesado en los libros técnicos y científicos de su tiempo. En efecto de los 1509 volúmenes que le confiscaron, alrededor de 183 eran de temas que tenían que ver con lo que actualmente llamamos ciencias exactas. ¡Algo verdaderamente notable para el México de aquella época! Entre esas obras se hallaban textos tan importantes como el *De Revolutionibus orbium coelestium* (Sobre las revoluciones de los cuerpos celestes) de Copérnico, el *Epitome astronomicae Copernicae* (Compendio de la astronomía copernicana) de Kepler, el *De Magnete, magneticis que corporibus, et de magno magnete tellure* (Sobre el magnetismo, los cuerpos magnetizados y el gran imán de la Tierra) de William Gilbert y el *General trattato di numeri* (Tratado general de los números) de Nicolo Tartaglia. En cuanto al texto que nos interesa, en el inventario de los libros de Pérez de Soto se han podido identificar 11 ejemplares distintos de los *Elementos*, lo que confirma que al mediar el siglo XVII, esa obra había entrado en nuestra nación en cantidades considerables.

En el testamento del hijo de Enrico Martínez llamado Juan Ruiz [25], dictado en la Ciudad de México en 1675, se mencionan varios instrumentos científicos como globos terrestres y celestes, relojes, ballestillas y compases, así como diversos libros, principalmente astronómicos y astrológicos, aunque también había algunos de matemáticas, entre los que se encontraban “*un libro de xometria en pergamino*”, así como “*un libro pequeño intitulado Vclides*”. Al menos una de estas dos obras era un ejemplar de los *Elementos*. Es importante señalar que en aquella época el costo de los libros era tan alto, que se consideraban como bienes preciados, por lo que frecuentemente eran mencionados en los testamentos. Por cierto, parte de lo listado en el de Juan Ruiz, debió recibirlo años antes como herencia de su padre y maestro, pues eran instrumentos y libros propios de un practicante de la Astronomía de aquella época, difíciles de conseguir en la Nueva España.

Otro importante novohispano de ese periodo del que se tiene constancia que utilizó los *Elementos* en su actividad profesional, fue Carlos de Sigüenza y Góngora, quien ocupó la cátedra de Astrología y Matemáticas de la Real y Pontificia Universidad de México por veintitres años. En su *Libra Astronómica y Filosófica* publicada en 1690 en la capital de la Nueva España, presentó un conjunto de cálculos geométricos en los que apoyó los desarrollos matemáticos que realizó para establecer la trayectoria que siguió en el firmamento el brillante cometa que se vio al finalizar 1680 e iniciar 1681 [34]. Con ese motivo citó explícitamente teoremas demostrados por Euclides, lo que muestra nuevamente el uso que se hizo en nuestro país de tan importante texto clásico.

6 El Siglo de la Luces.

Es frecuente que cuando se estudia el desarrollo histórico de la cultura occidental, el siglo XVIII sea llamado *Siglo de las Luces* o de *La Ilustración*, debido a que en aquella centuria, se asumió que, mediante el uso juicioso de la razón, la sociedad alcanzaría un estado de bienestar y de progreso ilimitado, basado en el avance de la ciencia y el desarrollo tecnológico. A pesar que la Nueva España participó de ese proceso, en fecha tan avanzada como 1773, el curso de ciencias de la Real y Pontificia Universidad de México se impartía usando el tratado de astronomía geocéntrica *De Sphaera* (La Esfera) escrito en el siglo XIII por Johannes de Sacrobosco [35]. Aunque entonces la versión que usaban los profesores novohispanos, era el *Textus de Sphaera Ioannis de Sacrobosco: introductoria additione quantum necessarium est commentantio que, ad utilitatem studentium philosophiae parisiensis academie illustratus. Cum compositione annuli astronomici Boneti latensis: et geometria Euclidis megarensis* (Texto de la Esfera de Juan de Sacrobosco, con la adición de un comentario introductorio de cuanto es necesario en la universidad parisina para los estudiantes de filosofía. Con el libro de Bonett de Lattes sobre la composición de los círculos astronómicos y la Geometría de Euclides), que fue publicado en París en 1531, así que los profesores de la Universidad Mexicana lo estaban usando con un retraso de más de doscientos cuarenta años, que si bien para el caso de la geometría no era importante, pues para entonces el saber geométrico seguía siendo el clásico, no era así para el campo astronómico, donde había ocurrido toda una revolución, de la que evidentemente no habían participado los universitarios de esta nación.

Por esas fechas existió en la Nueva España un pequeño grupo que abrazó, entendió y difundió públicamente la ciencia surgida de la Revolución Científica. Dos de ellos –Joaquín Velázquez de León y José Ignacio Bartolache– ocuparon incluso la cátedra universitaria de matemáticas e hicieron esfuerzos serios por modernizar lo que ahí se enseñaba. Desgraciadamente la inercia en la Universidad era tan grande [23], que el escolasticismo seguía siendo la filosofía dominante, así que no pudieron implementar cambios importantes y ambos la dejaron. En particular cuando Bartolache intentó modernizar la enseñanza de las ciencias físico-matemáticas, publicó sus *Lecciones de Matemáticas* [16], donde habló de Euclides y su método deductivo para demostrar teoremas. Además, indicó que para gentes que tuvieran que estudiar las matemáticas sin maestros –como fue el caso de muchos novohispanos que se interesaron en esa disciplina– el libro del autor griego era muy apropiado.

Que esos personajes poseyeron y estudiaron los *Elementos* lo confirma la información que sobre sus bibliotecas particulares nos ha llegado. Los documentos correspondientes [32, 9, 17] muestran que los textos de Euclides formaban parte de ellas. En efecto, en la de Velázquez se hallaba el *Euclides Megarensis geometri-*

corum elementorum libri XV (1516), mientras que en la de Bartolache había dos ejemplares, *Elementos Geométricos de Euclides* (1637) y el *Elementorum libri priores sex* (1756). Benito Díaz de Gamarra que fue otro de esos innovadores, poseyó el *Euclidis Elementa Geometrica* (1666), así como los *Elementa Geometriae qual nova et brevi metodo demonstravit* (1755). Por su parte en la de Antonio León y Gama -otro de aquellos notables personajes- se han identificado cuatro ejemplares de los *Elementos*, entre los que destacan *Les Éléments d'Euclide expliquez d'une maniere nouvelle & tres facile* (1677) comentado por el francés Francois Milliet Dechales y *Les Éléments de Geometrie ou de la mesure de l'entendue qui comprennet Les Éléments D'Euclide*; obra debida a Bernard Lamy y publicado en París en 1731.

En 1774 Gamarra publicó en la capital novohispana sus *Elementa recentioris philosophiae* (Elementos de filosofía moderna) [4], donde se ocupó de la física newtoniana, de la electricidad y del magnetismo. Para facilitar la comprensión de esas disciplinas, incluyó el texto *Elementorum Geometriae quae ad rem physicam plurimum adinet epitome* (Elementos de Geometría resumidos para el uso en física), escrito por Agustín de la Rotea, religioso novohispano interesado en las matemáticas. De esa forma, ambos autores brindaban a los estudiantes novohispanos las bases geométricas necesarias para comprender los desarrollos de la física.

En 1782 Gamarra, como profesor del Colegio de la Congregación del Oratorio de San Miguel Allende, Guanajuato, organizó unas *Academias de Geometría*, donde sus alumnos expusieron los avances que en esa disciplina habían alcanzado. Uno de ellos, Juan Joseph Mazorra y Buenaño, trató sobre la *Utilidad de la Geometría para las Ciencias y Artes: necesidad de ellas para el estudio filosófico* [13] donde, hablando de la matemática que se les enseñaba en aquel colegio, se refirió al texto escrito por de la Rotea y expuso lo que en él se decía sobre los primeros cuatro libros de los *Elementos* de Euclides, confirmando así que en efecto, aquellos alumnos de nivel preparatorio, estudiaban a ese matemático griego.

Un individuo más de aquel reducido grupo de novohispanos, que sin una acción coordinada se interesaron en enseñar la nueva ciencia, fue el relojero Diego de Guadalajara Tello [37], quien en 1789 tenía el nombramiento de director de matemáticas de la Academia de Nobles Artes de San Carlos de la Ciudad de México. Se sabe que ese profesor dejó un manuscrito -ahora perdido- sobre matemáticas, aunque ha subsistido otro que elaboró en 1792 bajo el título de *Representación del director de matemáticas, don Diego de Guadalajara sobre el método con que se propone enseñar en el curso de geometría* [15, 18]. Sin duda este profesor explicó a los alumnos de esa institución los fundamentos de la geometría euclidiana, pues ahí se formaban los arquitectos, pintores, escultores y grabadores de la Nueva España, quienes requerían de conocimientos de esa disciplina para su futura profesión, necesidad que quedó reflejada en los planes de estudio de la Academia de San Carlos, que incluían

al menos dos cursos de geometría.

Otro personaje que debe mencionarse en el contexto que nos viene ocupando es Pedro de Moncada, noble español radicado en la Nueva España, que en 1791 escribió *Exposición de los Elementos de Newton*, obra que quedó manuscrita hasta muy recientemente [14], donde se ocupó de la Óptica y de la Física newtoniana. En la introducción señaló explícitamente que el aprendizaje de esas materias, “*suponía a los jóvenes instruidos de la geometría al menos*”, así que aquí vuelve a tenerse un personaje de fines del siglo XVIII, que insistía que los estudiantes de nivel medio superior de la Nueva España interesados en la ciencia, debían manejar el lenguaje geométrico y para hacerlo, tenían que conocer los *Elementos* de Euclides.

Pero no solamente los novohispanos directamente interesados en los problemas científicos o en la aplicación de la ciencia tuvieron ese libro, pues también hay información que muestra que profesionales de áreas diferentes a las ciencias físico-matemáticas los poseyeron, seguramente porque cuando fueron estudiantes, los usaron en sus cursos generales de filosofía. Como ejemplo puede citarse el caso del oidor de la Audiencia de la Nueva Galicia, José Manuel de la Garza Falcón, quien entre los 518 libros que poseía en el año de 1763 [6] -la gran mayoría sobre leyes y religión- fueron identificados dos ejemplares del texto euclidiano: *Los seis primeros libros, once y doce de los elementos de Euclides* (1688) y el *Euclidis sex libri primi* (1693).

Otro caso similar fue el del Visitador General José de Gálvez, quien en 1765 viajó a la Nueva España y trajo 253 obras de temas diversos, pertenecientes a su rica biblioteca ubicada en su villa madrileña. Entre esos libros se hallaban los *Elements de Geometrie*, comentario escrito en 1674 por Dechales, así como *Los seis primeros libros, once y doce de los Elementos Geométricos del famoso filósofo Euclides*, traducción hecha al español por Sebastián Fernández Medrano y publicada en Amberes en 1728 que, incluía un amplio comentario de este personaje al texto euclidiano. Como se conoce la lista de los libros que Gálvez regresó cuando volvió a España [28], se sabe que esos dos textos se quedaron en nuestro país. Muy probablemente hayan sido los que poseyó León y Gama, quien hizo amistad con el Visitador, que lo vio realizar trabajos científicos en compañía de Velázquez de León, a quien ese funcionario tuvo como colaborador y asesor científico, lo que hace plausible explicar los cuatro ejemplares diferentes del texto de Euclides que poseyó León y Gama, sobre todo si se toma en cuenta que dicho personaje nunca contó con recursos económicos para dedicarlos a solventar su pasión por la Astronomía y las Matemáticas.

7 Comentarios.

Como se ha mostrado a lo largo de este trabajo, desde que se inició el proceso para implantar la ciencia occidental en nuestra nación, se recurrió al texto europeo de matemáticas más usado: los *Elementos*, que sirvió para enseñar a los novohispanos los conocimientos geométricos originados o recopilados por los antiguos griegos.

Siendo las bibliotecas novohispanas una herramienta para el trabajo académico realizado en estas tierras durante los siglos de coloniaje, se han buscado los *Elementos* en aquellas que han sobrevivido o en las ya desaparecidas, pero que se conocen sus inventarios, encontrando que conventos, colegios e individuos distribuidos a lo largo y ancho del país, tuvieron ejemplares de esa obra, incluso regiones tan apartadas del centro neurálgico de la Nueva España como fueron las misiones del territorio de Baja California, poseyeron en sus acervos de libros algunos ejemplares de los *Elementos* [12], confirmado lo que se ha mostrado en este artículo, que ese fue un texto muy usado por los novohispanos.

La importancia que esa obra adquirió durante y después de la Revolución Científica fue grande, pues los *Elementos* siguen vigentes y han sido muy valorados por personajes tan notables como Newton, quien en su biblioteca personal tuvo cinco ejemplares [8] o Adrien-Marie Legendre quien afirmó “*que la geometría era lengua muerta después de Euclides*”. En la actualidad el texto euclidiano sigue siendo impreso, pues hay ediciones modernas en muy diversos idiomas. En México por ejemplo, se han publicado los *Elementos* en una versión bilingüe griego-español hecha en 1944 [5] y más recientemente un comentario que se publicó en 1998 [7] y la razón de ello, es que en las escuelas y facultades donde se estudia matemáticas, todavía son utilizados en los cursos de Geometría Moderna, ya que el método seguido por Euclides continúa considerándose didáctico y formativo.

Agradecimientos

Se agradece al Programa de Apoyo a Proyectos para la Innovación y Mejoramiento de la Enseñanza (PAPIME), de la Universidad Nacional Autónoma de México, por el apoyo otorgado a través del proyecto PE100117, para investigar y publicar estudios sobre las ciencias exactas durante el México colonial y del siglo XIX. También deseo agradecer la eficiente labor de la Lic. María Elena Jiménez Fragozo, responsable de la Biblioteca del Instituto de Astronomía, Campus Ensenada, que me ha permitido acceder a información difícil de consultar. Quiero igualmente agradecer los comentarios hechos a este trabajo por dos árbitros anónimos, que sin duda han contribuido a mejorarlo.

Bibliografía

- [1] Báez, M. E. (1969). *Obras de fray Andrés de San Miguel*. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [2] Basalenque, D. (1886). *Historia de la Provincia de San Nicolás de Tolentino de Michoacán*. México.
- [3] Bunge, M. (2000). “Dos milenios después”. Prólogo a *Leyendo a Euclides* de Beppo Levi. Ver referencia a este último.
- [4] Díaz, de G. J. B. (1774). *Elementa recentioris philosophiae*. Mexici: apud Lic. D. Joseph a Jáuregui. Se puede consultar en la Colección Digital de la Universidad Autónoma de Nuevo León.
- [5] Euclides. (1944). *Elementos de Geometría* I-V. Introducción, versión y notas de Juan David García Bacca. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [6] Fernández, S. R. D. (1999). “Biblioteca del oidor de la Audiencia de la Nueva Galicia Joseph Manuel de la Garza Falcón (1763)”. *Anuario Mexicano de Historia del Derecho* XI-XII 1999-2000.
- [7] Filloy, Y. E. (1998). *Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana*. Grupo Editorial Iberoamericano. México.
- [8] Harrison, J. (1978). *The Library of Isaac Newton*. Cambridge University Press. London.
- [9] Herrejón, P. C. (1988). “Benito Díaz de Gamarra a través de su biblioteca”. *Boletín del Instituto de Investigaciones Bibliográficas*. Segunda época, no. 2, pp. 149-189, México.
- [10] Leonard, I. A. (1997). *Los libros del conquistador*. Fondo de Cultura Económica, México.
- [11] Levi, B. (2000). *Leyendo a Euclides*. Libros del Zorzal. Buenos Aires.
- [12] Mathes, M. (1991). “Oasis culturales en la antigua California: las bibliotecas de las misiones de Baja California 1773”. *Estudios de Historia Novohispana/10*, pp. 368-442. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [13] Mazorra, B. J. J. (1993). “Utilidad de la Geometría para las Ciencias y Artes”. *Errores del entendimiento humano. Academias Filosóficas. Memorial Ajustado*, pp. 195-201. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia.

- [14] Moncada, P. (2006). *Exposición de los Elementos de Newton*. Estudio preliminar y notas de María Eugenia Ponce Alcocer. Universidad Iberoamericana. México.
- [15] Moreno, R. (1969). *Catálogo de los manuscritos científicos de la Biblioteca Nacional*. Boletín de Investigaciones Bibliográficas No. 1, pp. 77-78, enero-junio. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [16] Moreno, R. (1974). “Las Lecciones Matemáticas del Doctor Bartolache (1769)”. *Anuario de Humanidades*. Universidad Iberoamericana vol. II, pp. 221-272. México. Contiene un facsímil de la publicación original.
- [17] Moreno, R. (1989). “La biblioteca de Antonio de León y Gama”. *Ensayos de bibliografía mexicana. Autores, libros, imprenta, bibliotecas*. Primera serie, pp. 167-196. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [18] Moreno, R. (2017). Fuente: texto extraído de www.mcnbiografias.com. Consultado en diciembre de 2017.
- [19] Moreno Corral, M. A. (1992). “Libros de matemáticas llegados a América durante los siglos XVI y XVII”. *Mathesis* vol. VIII, no. 3, 345-363.
- [20] Moreno Corral, M. A. (1999). La Astronomía en el México del siglo XVII, *Ciencias/54*, pp. 52-59 abril-junio.
- [21] Moreno Corral, M. A. (2004). *Implantación de la ciencia europea en el México colonial. Siglos XVI y XVII*. Edición del autor. Ensenada.
- [22] Moreno Corral, M. A. (2004a). “La *physica speculatio*, primer libro de física escrito y publicado en el continente americano”, *Revista Mexicana de Física E* 50(1) 74-80.
- [23] Moreno Corral, M. A. (2014). *Copérnico y el heliocentrismo en México*. 2a edición. Academia Mexicana de Ciencias.
- [24] Moreno Corral, M. A; Lara Andrade, E. (2014). “Génesis y evolución de la enseñanza de la física en el México colonial”. *Latin American Journal of Physics Education* Vol. 8, No. 3, pp. 512-520, septiembre.
- [25] Pérez, S. F. (1925). “Dos familias de impresores mexicanos del siglo XVII”. *Memorias de la Sociedad Científica Antonio Alzate*, T. 43, pp. 503-501, México.
- [26] Prieto, R. S. (1991). *Historia de las Matemáticas*. IMC/Ediciones. Toluca.

- [27] Rey, P. J.; Babini, J. (2000). *Historia de la matemática* vol. 1 *De la antigüedad a la baja Edad Media*. Editorial Gedisa, S. A. Barcelona. Ver en especial la sección dedicada a los *Elementos*.
- [28] Rodas, C. F. (1983). “José de Gálvez Gallardo 1720-1787”. *México en el siglo XVIII*, T. I. Secretaría de Relaciones Exteriores. México.
- [29] Rodríguez, D. (Ms 1521). *Tratado del modo de Fabricar Reloxes*. Colección de Manuscritos/Biblioteca Nacional de México.
- [30] Rodríguez, D. (Ms 1422). *Modo de calcular cualquier eclipse de Sol y Luna*. Colección de Manuscritos/Biblioteca Nacional de México.
- [31] Romero, de T. M. (1920). *Un bibliófilo en el Santo oficio*. Pedro Robredo. México.
- [32] Sánchez, F. R. (1972). “José Ignacio Bartolache. El sabio humanista a través de sus bienes, sus libros e instrumentos de trabajo”. *Boletín del Archivo General de la Nación*. T. XIII, pp. 187-216, México.
- [33] Sarton, G. (1971). *Ciencia antigua y civilización moderna*. Breviarios/155, Fondo de Cultura Económica, México.
- [34] Sigüenza, G. C. (1984). *Libra Astronómica y Filosófica*, pp. 134-137. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [35] Thorndike, L. (1949). *The Sphere of Sacrobosco and its Commentators*. Text in Latin, English translation, and commentary. The University Chicago Press.
- [36] Trabulse, E. (1984). *El círculo roto*. Lecturas Mexicanas/54 pp. 25-65. Fondo de Cultura Económica. México.
- [37] Trabulse, E. (1989). *Historia de la ciencia en México* Apéndices e Índices. Conacyt/Fondo de Cultura Económica. México.
- [38] Vega, L. (1991). Introducción general a *Elementos* Libros I-IV. Biblioteca Clásica Gredos. Madrid.
- [39] Yhmooff, C. J. (1975). *Catálogo de obras manuscritas en latín de la Biblioteca Nacional de México*. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [40] Yhmooff, C. J. (1975a). Op. cit., pp. 310-311.

Instituto de Astronomía, Campus Ensenada. UNAM
Km 107 Carretera Tijuana Ensenada,
Ensenada, Baja California, México. C. P. 22860
`mam@astro.unam.mx`

Topología

Capítulo 3

Génesis del (n, m) -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo

Gerardo Hernández Valdez, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP

Resumen

Dado un continuo X sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$, llamamos (n, m) -ésimo hiperespacio suspensión de X al espacio cociente $C_n(X)/F_m(X)$ con la topología cociente \mathcal{D} , y denotamos a este hiperespacio por $HS_m^n(X)$. A lo largo de este capítulo, se demuestra de manera detallada que $HS_m^n(X)$ es un continuo.

1 Introducción

El concepto de hiperespacio suspensión de X (cuando X es un continuo) fue introducido por el matemático estadounidense Sam B. Nadler (1939 - 2016) en su artículo [8] *A fixed point theorem for hyperspace suspensions* a través del espacio cociente $C_1(X)/F_1(X)$, donde $C_1(X)$ se refiere a los subcontinuos de X y $F_1(X)$ son los subconjuntos de X que consisten de un solo punto. Más tarde, S. Macías generalizó el estudio de este espacio al llamado *n -ésimo hiperespacio suspensión de X* , denotado por $HS_n(X)$, el cual es el espacio cociente $C_n(X)/F_n(X)$. S. Macías se dedicó a mostrar propiedades sobre este espacio en [2] Así, el estudio del (n, m) -ésimo hiperespacio suspensión de X es una generalización de la teoría para $HS_n(X)$.

2 Preliminares

Definición 2.1. Decimos que X es un continuo si (X, d) un espacio métrico no vacío, conexo y compacto.

Definición 2.2. Sea (X, τ) un espacio topológico no vacío. Un hiperespacio de X es una colección de subconjuntos de X con la topología de Vietoris.

Restringiremos nuestra atención a los hiperespacios cuyos puntos (en este caso, subconjuntos de X) sean conjuntos cerrados. Para $n \in \mathbb{N}$, algunos hiperespacios son:

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es cerrado en } X\}, \\ C_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a los más } n \text{ componentes}\}, \\ F_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}. \end{aligned}$$

Procederemos a definir la topología de Vietoris para el espacio 2^X .

Definición 2.3. Sea (X, τ) un espacio topológico. La topología de Vietoris para 2^X es la topología más pequeña, τ_V tal que 2^X tiene la siguiente propiedad: $\{A \in 2^X : A \subset U\} \in \tau_V$ para todo $U \in \tau$, y $\{A \in 2^X : A \subset B\}$ es cerrado bajo la τ_V para todo B cerrado en X bajo τ .

Lo que sigue es conseguir una base para esta topología; para ello, necesitamos la siguiente definición:

Definición 2.4. Sean X un continuo y $S_1, S_2, \dots, S_n \subset X$. El **vietórico** de S_1, S_2, \dots, S_n es

$$\langle S_1, S_2, \dots, S_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^n S_i, A \cap S_i \neq \emptyset \text{ para } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

El siguiente resultado es una propiedad de los vietóricos, que nos ayudará a probar el teorema 2.6.

Lema 2.5. Sean $S_1, S_2, \dots, S_n \subset X$, donde X es un continuo. Entonces

$$\langle S_1, S_2, \dots, S_n \rangle = \left\langle \bigcup_{i=1}^n S_i \right\rangle \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \langle X, S_i \rangle \right).$$

Demostración. Por un lado, sea $A \in \langle S_1, S_2, \dots, S_n \rangle$. Entonces $A \subset \bigcup_{i=1}^n S_i$ y $A \cap S_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Luego, $A \in \langle \bigcup_{i=1}^n S_i \rangle$ y $A \in \langle X, S_i \rangle$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, y la primera contención se sigue. Por otro lado, si $A \in \left\langle \bigcup_{i=1}^n S_i \right\rangle \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \langle X, S_i \rangle \right)$, entonces $A \subset \bigcup_{i=1}^n S_i$ y $A \cap S_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Luego, $A \in \langle S_1, S_2, \dots, S_n \rangle$, y el resultado queda demostrado. \square

Con este resultado, se proporciona una base para la topología τ_V .

Teorema 2.6. Sea (X, τ) un continuo. Considere la colección

$$\mathcal{B}_V = \{\langle U_1, \dots, U_n \rangle : U_i \in \tau, \text{ para } i \in \{1, \dots, n\}, n < \infty\}.$$

Entonces \mathcal{B}_V es una base para τ_V .

Demostración. Usando la notación de la definición 2.4, podemos observar que si U es abierto en X y B es cerrado en X , tenemos que

$$\{A \in 2^X : A \subset U\} = \langle U \rangle, \quad (1)$$

$$\{A \in 2^X : A \subset B\} = 2^X - \langle X, X - B \rangle. \quad (2)$$

Observe que (1) se sigue de la definición 2.4, por lo que mostraremos (2). Para ello, considere $A \in 2^X - \langle X, X - B \rangle$. Luego, $A \notin \langle X, X - B \rangle$. Esto implica que $A \not\subset X$ o $A \cap (X - B) = \emptyset$. Es claro que lo primero no puede ocurrir, por lo que $A \cap (X - B) = \emptyset$, o equivalentemente, $A \subset B$. La otra contención se obtiene de manera análoga. Así, τ_V es la topología más pequeña para 2^X tal que contiene a los conjuntos de la forma $\langle U \rangle$ y $\langle X, U \rangle$ con U abierto en X . Definamos ahora una subbase \mathcal{S} para τ_V :

$$\mathcal{S} = \{\langle U \rangle : U \in \tau\} \cup \{\langle X, U \rangle : U \in \tau\}. \quad (3)$$

Observe que la unión de los elementos de \mathcal{S} es precisamente τ_V . Luego, la colección \mathcal{S}^* que consta de las intersecciones finitas de elementos de \mathcal{S} es una base para τ_V . Así, será suficiente probar que $\mathcal{S}^* = \mathcal{B}_V$. Mostraremos primero que $\mathcal{B}_V \subset \mathcal{S}^*$. Para ello, sean $U_1, U_2, \dots, U_n \in \tau$. Ahora, por lema 2.5, tenemos que el vietórico de U_1, U_2, \dots, U_n se expresa como la intersección del Vietórico de la unión de los U_i y la intersección de los vietóricos $\langle X, U_i \rangle$, y esta intersección se encuentra en \mathcal{S}^* . Queda entonces probada dicha contención. Para ver que $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{B}$, primeramente probaremos que si $U, W \in \mathcal{B}_V$, entonces $U \cap W \in \mathcal{B}_V$. Para esto, puesto que $U, W \in \mathcal{B}_V$, existen $U_i, W_j \in \tau$ con $i \in \{1, \dots, k\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ tales que $U = \langle U_1, \dots, U_k \rangle$ y $W = \langle W_1, \dots, W_m \rangle$. Hagamos ahora $U^* = \bigcup_{i=1}^k U_i$ y $W^* = \bigcup_{j=1}^m W_j$. Veamos entonces que

$$U \cap W = \langle U_1 \cap W^*, \dots, U_k \cap W^*, W_1 \cap U^*, \dots, W_m \cap U^* \rangle. \quad (4)$$

Probaremos (4). Para ello, sea $A \in U \cap W$. Luego, de la definición tenemos que

$$(I) \quad A \subset \bigcup_{i=1}^k U_i = U^*,$$

$$(II) \quad A \cap U_i \neq \emptyset, \quad i \in \{1, \dots, k\},$$

$$(III) \quad A \subset \bigcup_{j=1}^m W_j = W^*,$$

(IV) $A \cap W_j \neq \emptyset$, $j \in \{1, \dots, m\}$.

Notemos que de (I) y (III) obtenemos que $A \in U^* \cup W^*$. De (II) y (IV) tenemos que $A \cap (U^* \cap W_j) \neq \emptyset$ y $A \cap (W^* \cap U_i) \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ y $j \in \{1, \dots, m\}$. Luego, se sigue la primera contención. Ahora, sea $A \in \langle U_1 \cap W^*, \dots, U_k \cap W^*, W_1 \cap U^*, \dots, W_m \cap U^* \rangle$. De la definición 2.4, obtenemos que $A \in U^* \cap W^*$, de donde se obtiene (I) y (III). Además, $A \cap (W_j \cap U^*) \neq \emptyset$ y $A \cap (U_i \cap W^*) \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ y $j \in \{1, \dots, m\}$, de donde se siguen (II) y (IV). Así, se llega a la igualdad y concluimos que $U \cap W \in \mathcal{B}_V$. Entonces, para ver que $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{B}_V$, basta mostrar que la intersección de cualesquiera dos miembros de \mathcal{S}^* es elemento de \mathcal{B}_V . Para ello, notemos que si $U_1, U_2 \in \tau$, se tiene que

$$(I) \langle U_1 \rangle \cap \langle U_2 \rangle = \langle U_1 \cap U_2 \rangle \in \mathcal{B}_V,$$

$$(II) \langle U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle U_1, U_1 \cap U_2 \rangle \in \mathcal{B}_V,$$

$$(III) \langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle X, U_1, U_2 \rangle \in \mathcal{B}_V.$$

Con esto, se llega a la contención deseada y se sigue el resultado. \square

Procederemos con el siguiente teorema, el cual será de utilidad más adelante.

Teorema 2.7. *Sean X, Y dos continuos homeomorfos. Entonces, 2^X es homeomorfo a 2^Y .*

Demostración. Al ser X y Y homeomorfos, existe $h : X \rightarrow Y$ homeomorfismo. Definamos $h^* : 2^X \rightarrow 2^Y$ como sigue: $h^*(A) = h(A)$ para todo $A \in 2^X$. Puesto que A es cerrado y h es homeomorfismo, tenemos que $h(A)$ es cerrado en Y , por lo que $h^*(A) \in 2^Y$. Veamos ahora que h^* es suprayectiva. Para ello, sea $B \in 2^Y$. Al ser B cerrado en Y , tenemos que $h^{-1}(B) \in 2^X$ y así, $h^*(h^{-1}(B)) = B$ y la conclusión se sigue. Ahora, al ser h biyectiva, se tiene que h^* es inyectiva, por lo que h^* es un biyección. Para mostrar que es un homeomorfismo, veamos primeramente dos igualdades:

$$(I) (h^*)^{-1}(\langle W_1, \dots, W_n \rangle) = \langle h^{-1}(W_1), \dots, h^{-1}(W_n) \rangle \text{ con } W_i \text{ abiertos en } Y \text{ para } i \in \{1, \dots, n\},$$

$$(II) h^*(\langle U_1, \dots, U_m \rangle) = \langle h(U_1), \dots, h(U_m) \rangle.$$

Mostraremos (I). Sea $A \in (h^*)^{-1}(\langle W_1, \dots, W_n \rangle)$; luego, $h^*(A) \in \langle W_1, \dots, W_n \rangle$, pero $h^*(A) = h(A)$, por lo que $h(A) \subset \bigcup_{i=1}^n W_i$ y $h(A) \cap W_i \neq \emptyset$ para $i \in \{1, \dots, n\}$.

Ahora, dado que h es biyección, lo anterior es equivalente a $A \subset \bigcup_{i=1}^n h^{-1}(W_i)$ y

$A \cap h^{-1}(W_i) \neq \emptyset$. Por ende, $A \in \langle h^{-1}(W_1), \dots, h^{-1}(W_n) \rangle$. Análogamente se llega a la segunda inclusión, y utilizando argumentos similares, se muestra (II).

De (I), se deduce que h^* es continua, pues la imagen inversa de todo básico es abierto, y de (II) obtenemos que $(h^*)^{-1}$ es continua, pues h^* es una función abierta. La conclusión se obtiene de esto último. \square

El siguiente paso es inducir una métrica al espacio 2^X . Para ello, se tienen las siguientes definiciones

Definición 2.8. Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $x \in X$ y $A \in 2^X$ la distancia de x a A es

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \{d(x, a)\}, \quad (5)$$

y si $r > 0$, la nube centrada en A con respecto a la métrica d como

$$N_d(r, A) = \{x \in X : d(x, A) < r\}. \quad (6)$$

Ahora, considerando lo anterior, definimos la métrica de Hausdorff.

Definición 2.9. Sea (X, d) un espacio métrico con métrica acotada. La función $H_d : 2^X \times 2^X \rightarrow \mathbb{R}^+$ se define para $A, B \in 2^X$ como

$$H_d(A, B) = \inf_{r > 0} \{A \subset N_d(r, B), B \subset N_d(r, A)\}. \quad (7)$$

Veamos que esta función en realidad es una métrica:

Teorema 2.10. *La función H_d definida anteriormente es una métrica para 2^X , y se conoce como la métrica de Hausdorff.*

Demostración. Observe primero que al ser d una métrica para X , se sigue que H_d es una función bien definida y no negativa. Además, de la definición es claro que es simétrica, es decir, $H_d(A, B) = H_d(B, A)$.

Ahora, sean $A, B \in 2^X$ tales que $H_d(A, B) = 0$. Veamos que $A = B$. Sean $a \in A$ y $r_n = \frac{1}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Luego, dado que $A \subset N_d(r_n, B)$, existe $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en B tal que $d(a, b_n) < r_n$. Puesto que B es cerrado en X , se sigue que $a \in B$. Análogamente, tenemos que $B \subset A$ y obtenemos la igualdad. Por otro lado, si $A = B$, de (7) se sigue que $H_d(A, B) = 0$.

Para probar la desigualdad triangular, necesitaremos el siguiente resultado que proviene directamente de la definición: dados $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, se tiene que $A \subset N_d(H_d(A, B) + \varepsilon, B)$.

Sean $A, B, C \in 2^X$ y considere $\varepsilon > 0$, y $a \in A$. Por el resultado discutido anteriormente, tenemos que existe $b \in B$ tal que

$$d(a, b) < H_d(A, B) + \varepsilon. \quad (8)$$

De la misma manera, dado que $b \in B$, existe $c \in C$ tal que

$$d(b, c) < H_d(B, C) + \varepsilon. \quad (9)$$

Utilizando la desigualdad triangular de la métrica d y de (8) y (9) tenemos que

$$d(a, c) < H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon. \quad (10)$$

Puesto que $a \in A$ fue arbitrario, concluimos que

$$A \subset N_d(H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon, C). \quad (11)$$

De manera análoga, comenzando con $c \in C$ arbitrario y utilizando la simetría de H_d , se tiene que

$$C \subset N_d(H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon, A). \quad (12)$$

Finalmente, de (11) y (12), y al ser ε arbitrario, se obtiene $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C)$. Concluimos que H_d es una métrica para 2^X . \square

Una vez definida una métrica para 2^X surge el cuestionamiento natural de la comparación de la topología inducida por la métrica H_d y la topología de Vietoris. En efecto, ambas topologías coinciden, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.11. *Sea X un continuo con métrica d . Entonces 2^X es metrizable, es decir, $\tau_V = \tau_{H_d}$.*

Demostración. Mostraremos primero que $\tau_V \subset \tau_{H_d}$. Observemos que basta con demostrar que $\langle U \rangle, \langle X, U \rangle \in T_{H_d}$ con $U \in \tau$, pues dichos abiertos dan pie a τ_V . Primeramente, si $U = X$, tendríamos que $\langle U \rangle = 2^X$ y por definición de topología, llegaríamos a $\langle U \rangle \in \tau_V$.

Supongamos entonces que $U \neq X$, y sea $A \in \langle U \rangle$. Considere

$$\varepsilon = d(A, X - U) = \inf_{a \in A, x \in X - U} \{d(a, x)\}. \quad (13)$$

Notemos que $\varepsilon > 0$, pues $A \subset U$ y A es compacto. Veamos que $B_d(\varepsilon, A) \subset \langle U \rangle$. Para ello, sea $B \in B_{H_d}(\varepsilon, A)$. Entonces $H_d(A, B) < \varepsilon$ y de (7), se tiene que $B \subset N_d(\varepsilon, A)$. Ahora, si $b \in B$, tenemos que

$$\inf_{a \in A} \{d(a, b)\} < \inf_{a \in A, x \in X - U} \{d(a, x)\}, \quad (14)$$

y de aquí, $b \in U$ por lo que $B \subset U$, lo que es equivalente a $B \in \langle U \rangle$. Luego, $\langle U \rangle \in \tau_{H_d}$.

Veamos que $\langle X, U \rangle \in \tau_{H_d}$. Sea $A \in \langle X, U \rangle$. Entonces $A \cap U \neq \emptyset$, por lo que existe $x \in A \cap U$. Dado que $x \in U$ y U es abierto en X , existe $\delta > 0$ tal que $B_d(\delta, x) \subset U$. Basta probar que $B_{H_d}(\delta, A) \subset \langle X, U \rangle$ para lograr la conclusión deseada. Sea $B \in B_{H_d}(\delta, A)$, entonces $H_d(A, B) < \delta$ y por (7) se sigue que $A \subset N_d(\delta, B)$; dado que $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta$ y por la elección de δ , tenemos que $b \in U$. Así, $B \cap U \neq \emptyset$ y concluimos que $B \in \langle X, U \rangle$, por lo que $\langle X, U \rangle \in \tau_{H_d}$.

Veamos ahora que $\tau_{H_d} \subset \tau_V$. Para este fin, probaremos que para cada abierto $B_{H_d}(r, A)$ con $r > 0$ y $A \in 2^X$, existen U_1, \dots, U_m abiertos en X tales que $A \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle \subset B_{H_d}(r, A)$.

Sea $A \in 2^X$ y $r > 0$. Como A es compacto y no vacío existen abiertos U_1, \dots, U_m de X tales que

$$(I) \quad A \subset \bigcup_{i=1}^m U_i,$$

$$(II) \quad A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para todo } i \in \{1, \dots, m\},$$

$$(III) \quad \text{diám}(U_i) < r \text{ para todo } i \in \{1, \dots, m\}.$$

De (I) y (II), tenemos que $A \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle$. Ahora, sea $K \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle$; observemos que si $k \in K$, entonces existe $n \in \{1, \dots, m\}$ tal que $k \in U_n$ y de (II) y (III), se sigue que $K \subset N_d(r, A)$. Además, como $K \cap U_i \neq \emptyset$ para cada i , por (I) y (III), tenemos que $A \subset N_d(r, K)$. Concluimos que $H_d(A, K) < r$, por lo que $A \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle \subset B_{H_d}(r, A)$. Por lo tanto, se tiene que $\tau_{H_d} \subset \tau_V$ y con esto, las topologías coinciden. \square

Con este resultado, tenemos que será equivalente tomar la topología de Vietoris y la topología inducida por la métrica de Hausdorff para 2^X .

3 Hiperespacios 2^X , $C_n(X)$, $F_n(X)$

Nuestro siguiente objetivo será mostrar que si X es un continuo, entonces 2^X , $C_n(X)$ y $F_n(X)$ son continuos. Comenzaremos con un teorema:

Teorema 3.1. *Sean X un continuo con métrica d y $n \in \mathbb{N}$. Si D_n denota la métrica en X^n dada por*

$$D_n((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \text{máx}\{d(x_1, y_1), \dots, d(x_n, y_n)\}, \quad (15)$$

para cada par $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in X^n$, entonces la función $f_n : X^n \rightarrow F_n(X)$ definida por $f_n((x_1, \dots, x_n)) = \{x_1, \dots, x_n\}$ es suprayectiva y satisface la ecuación

$$H_d(f_n((x_1, \dots, x_n)), f_n((y_1, \dots, y_n))) \leq D_n((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)). \quad (16)$$

Demostración. Sea $A = \{x_1, \dots, x_m\} \in F_n(X)$, donde $m \leq n$. Considere $(x_1^*, \dots, x_m^*, x_{m+1}^*, \dots, x_n^*)$ donde $x_i^* = x_i$ para $i \in \{1, \dots, m\}$ y $x_j^* = x_m$ para $j \in \{m+1, \dots, n\}$. Así, es claro que $f_n((x_1^*, \dots, x_n^*)) = A$ y se sigue que f_n es suprayectiva.

Sean $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in X^n$ y $r = D_n((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))$, y $\varepsilon > 0$. Así, $D_n((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) < r + \varepsilon$. Esto implica que para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, tenemos que $d(x_j, y_j) < r + \varepsilon$; entonces, para cada $x_j \in f_n((x_1, \dots, x_n))$, se tiene que $y_j \in f_n((y_1, \dots, y_n))$ y $d(x_j, y_j) < r + \varepsilon$. Con esto, llegamos a que

$$f_n((x_1, \dots, x_n)) \subset B_d(r + \varepsilon, f_n((y_1, \dots, y_n))), \quad (17)$$

De manera análoga, tenemos que $f_n((y_1, \dots, y_n)) \subset B_d(r + \varepsilon, f_n((x_1, \dots, x_n)))$ y por (7), se tiene que $H_d(f_n((x_1, \dots, x_n)), f_n((y_1, \dots, y_n))) \leq r + \varepsilon$. Al ser ε arbitrario, el resultado se sigue. \square

Como consecuencia de este teorema, tenemos los siguientes corolarios.

Corolario 3.2. *Sea X un continuo con métrica d y $n \in \mathbb{N}$. Entonces la función $f_n : X^n \rightarrow F_n(X)$ del teorema anterior es continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Haciendo $\delta = \varepsilon$, y por (16), se obtiene el resultado. \square

Corolario 3.3. *Si X es un continuo, entonces $F_n(X)$ es un continuo para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Al ser X un continuo, se sigue que X^n es un continuo con métrica D_n . Luego, dado que f_n es continua, preserva conexidad y compacidad, por lo que $F_n(X)$ es un continuo. \square

Para ver que 2^X es un continuo, necesitamos ver que sea un conjunto conexo, y compacto, pues ya tenemos que es metrizable y no vacío. Para ver la compacidad, procederemos encontrando una subsucesión convergente a cada sucesión en 2^X , por ello es necesario definir la convergencia en 2^X como lo haremos a continuación.

Definición 3.4. Sea $A_n \in 2^X$ para $n \in \mathbb{N}$. Definimos el límite inferior y superior de la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como

$$\begin{aligned} \liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in X : \text{para cada } U \in \tau, x \in U, \text{ existe } N \in \mathbb{N} \\ \text{tal que } A_n \cap U \neq \emptyset, n \geq N\} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in X : \text{para cada } U \in \tau, x \in U, \text{ existe } M \subset \mathbb{N} \text{ infinito} \\ \text{tal que } A_n \cap U \neq \emptyset, n \in M\} \end{aligned} \quad (19)$$

Diremos que la sucesión converge a A si $\liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n = \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$.

Continuamos con ciertas propiedades consecuencias de la definición:

Lema 3.5. Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X . Entonces, se cumple lo siguiente.

- (I) $\liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n$,
- (II) $\liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y $\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ son cerrados en X ,
- (III) $\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$,
- (IV) Sean $A, B \in 2^X$ y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son dos sucesiones en 2^X que convergen a A y B , respectivamente. Si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para cada n , entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

Demostración. (I) De la definición, tenemos que un elemento en $\liminf_{n \in \mathbb{N}}$ cumple cierta propiedad a partir de un número natural dado, mientras que $\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ cumple la propiedad para cualquier subconjunto infinito de \mathbb{N} .

(II) Sea $M \subset \mathbb{N}$ infinito y $m \in M$. Luego, A_m^c es abierto en X , y así, $\bigcup_{m \in M} A_m^c$ es abierto en X . Sea $x \in \bigcup_{m \in M} A_m^c$, luego, existe $\delta > 0$ tal que $x \in B_d(\delta, x) \subset \bigcup_{m \in M} A_m^c$. Entonces, $B_d(\delta, x) \cap A_m = \emptyset$ para $m \in M$. Análogamente, $\liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es cerrado en X .

(III) Puesto que $A_n \in 2^X$ para todo n , existe $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en X , y al ser éste compacto, existe $\{a_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ subsucesión convergente a $x \in X$. Luego, para todo U abierto en X tal que $x \in U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$ para $n \geq N$. Concluimos que $x \in \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

(IV) Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $x_n \in A_n \cap B_n$. Por la compacidad de X , existe $\{x_{n_k}\}$ subsucesión convergente a $x \in X$. Luego, por la definición de convergencia y (III), $x \in \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$ y $x \in \limsup_{n \in \mathbb{N}} B_n = B$. Luego, $x \in A \cap B$. \square

Probaremos un último resultado que será de utilidad para mostrar la compacidad de 2^X :

Teorema 3.6. Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en 2^X con X un continuo con métrica d . Entonces $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A en el sentido de la definición 3.4 si y solo si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A según la métrica de Hausdorff.

Demostración. Supongamos primero que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A en el sentido de la definición 3.4. Puesto que $A = \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, de (III) del lema 3.5 se sigue que $A \neq \emptyset$, por lo que $A \in 2^X$. Sea $\varepsilon > 0$, y observe que $A = \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset N_d(\varepsilon, A)$ y al ser $N_d(\varepsilon, A)$ abierto en X , se tiene que $(N_d(\varepsilon, A))^c$ es compacto. Sean $x_n \in A_n$ para $n \in \mathbb{N}$, y supongamos que $x_n \in (N_d(\varepsilon, A))^c$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ subsucesión que converge a $x \in (N_d(\varepsilon, A))^c$. Si U es abierto que contiene a x , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_j} \in U$ para $j \geq N$. Esto es, $A_{n_j} \cap U \neq \emptyset$, y así, $x \in \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$, lo cual es una contradicción. Se sigue que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset N_d(\varepsilon, A)$ para $n \geq N_1$.

Ahora, como A es un compacto no vacío, existe $k \in \mathbb{N}$ y U_1, \dots, U_k abiertos en X tales que

- $A \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$,
- $\text{diám}(U_i) < \varepsilon$,
- $U_i \cap A \neq \emptyset$ para $i \in \{1, \dots, k\}$.

Entonces, dado que $A = \liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n$, existen, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$ números naturales M_j tales que $A_n \cap U_j \neq \emptyset$ para $n \geq M_j$. Considere $N_2 = \max\{M_1, \dots, M_k\}$. Si $a \in A$, entonces $a \in \liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $a \in U_j$ y así, $U_j \cap A_n \neq \emptyset$ para $j \geq N_2$. Puesto que $\text{diám}(U_j) < \varepsilon$, concluimos que $a \in N_d(\varepsilon, A_n)$ para $n \geq N_2$. Haciendo $N = \max\{N_1, N_2\}$, observe que se cumple lo anterior. Concluimos que $H_d(A, A_n) < \varepsilon$ para $n \geq N$.

Por otro lado, supongamos que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A según la métrica de Hausdorff. Veamos primero que $\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset A$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H_d(A_n, A) < \varepsilon$ para $n \geq N$. Por (7), tenemos que $A_n \subset N_d(\varepsilon, A)$ para $n \geq N$. Si $a \in \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, tenemos que $d(a, x) < \varepsilon$ para $x \in A$. Al ser ε arbitrario, se sigue que $\liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset A$.

Veamos finalmente que $A \subset \liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Sea $\varepsilon > 0$ y $a \in A$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H_d(A, A_n) < \varepsilon$ para $n \geq N$ y por (7), tenemos que $A \subset N_d(\varepsilon, A_n)$ para $n \geq N$. Entonces $B_d(\varepsilon, a) \cap A_n \neq \emptyset$ para $n \geq N$ y al ser ε arbitrario, se tiene que $a \in \liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

De lo anterior y usando (I) del lema 3.5, se obtiene el resultado. \square

Podemos probar finalmente que 2^X es compacto.

Teorema 3.7. *Si X es un compacto, entonces 2^X es un compacto.*

Demostración. Por el teorema 3.6, es suficiente con demostrar que toda sucesión en 2^X posee una subsucesión convergente en el sentido de la definición 3.4. Sea

$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en 2^X . Definiremos sucesiones $\{A_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{A_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$, ..., $\{A_n^m\}_{n \in \mathbb{N}}$, ... como sigue: sea $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base numerable para X . Defínase $\{A_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}$ por $A_n^1 = A_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Supongamos ahora que de manera inductiva hemos definido la sucesión $\{A_n^m\}_{n \in \mathbb{N}}$. Se definirá $\{A_n^{m+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ en alguna de las siguientes dos maneras:

1. Si $\{A_n^m\}_{n \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión $\{A_{n_j}^m\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $(\limsup_{j \in \mathbb{N}} A_{n_j}^m) \cap U_m = \emptyset$, haremos que $\{A_n^{m+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ sea dicha sucesión.
2. Si toda subsucesión de $\{A_n^m\}_{n \in \mathbb{N}}$ posee un punto de su límite superior en U_m entonces sea $\{A_n^{m+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $A_n^{m+1} = A_n^m$.

Consideremos la sucesión diagonal $\{A_n^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, la cual es una subsucesión de $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Supongamos que $\{A_n^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no converge; por (I) del lema 3.5, tenemos que existe $x \in \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n^n$ que no está en el límite inferior. Por esto, existe $U_m \in \mathcal{U}$ tal que $a \in U_m$ y $U_m \cap A_{n_j}^{n_j} = \emptyset$ para alguna subsucesión $\{A_{n_j}^{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ de $\{A_n^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Luego, $\{A_{n_j}^{n_j}\}_{j=m}^\infty$ es una subsucesión de $\{A_n^m\}_{n \in \mathbb{N}}$. Así, $\{A_n^m\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface (I), por lo que $(\limsup_{j \in \mathbb{N}} A_{n_j}^m) \cap U_m = \emptyset$, pero $a \in (\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n^{m+1}) \cap U_m = \emptyset$; y como $\{A_n^n\}_{n=m+1}^\infty$ es una subsucesión de $\{A_n^{m+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$, tenemos que $(\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n^n) \cap U_m = \emptyset$, lo cual es una contradicción, pues $x \in (\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n^n) \cap U_m$. Se sigue que $\{A_n^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge y así, 2^X es compacto. \square

Con este teorema, finalmente podemos mostrar que 2^X es un continuo, siempre y cuando X lo sea.

Teorema 3.8. *Si X es un continuo con métrica d , entonces 2^X es un continuo.*

Demostración. Por el corolario 3.3, $F_n(X)$ es un continuo para cada $n \in \mathbb{N}$. Considere $\mathcal{F}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(X)$. Observemos que $\mathcal{F}(X)$ es conexo, pues es al unión de conexos que comparten al menos un punto. Veremos que $\mathcal{F}(X)$ es denso en 2^X . Sea $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$. Al ser A compacto, existen $x_1, \dots, x_m \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{k=1}^m B_d(\varepsilon, x_k)$. Observe que $\{x_1, \dots, x_m\} \in \mathcal{F}(X)$, $A \subset N_d(\varepsilon, \{x_1, \dots, x_m\})$ y $\{x_1, \dots, x_m\} \subset N_d(\varepsilon, A)$. Entonces $H_d(\{x_1, \dots, x_m\}, A) < \varepsilon$ y se sigue que $\mathcal{F}(X)$ es denso en 2^X , por lo que 2^X será conexo. Por el teorema 3.7, tenemos que 2^X es un continuo. \square

Finalmente probaremos que $C_n(X)$ es un continuo cuando X lo sea. Para ello, es necesario el siguiente teorema, que se encuentra en [1, 1.13]:

Teorema 3.9. *Si X es un continuo, entonces $C(X)$ es un continuo.*

Para mostrar que $C_n(X)$ es un continuo para cada n , necesitamos algo de teoría:

Definición 3.10. Definimos el espacio 2^{2^X} como la familia de los subconjuntos no vacíos y cerrados de 2^X con la métrica de Hausdorff H_d^2 definida para todo $\mathcal{A}_\infty, \mathcal{A}_\in \in 2^{2^X}$ como

$$H_d^2(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \inf_{r>0} \{ \mathcal{A}_1 \subset N_{H_d}(r, \mathcal{A}_2), \mathcal{A}_2 \subset N_{H_d}(r, \mathcal{A}_1) \}. \quad (20)$$

Observe que la demostración de que H_d^2 es métrica, es análoga a la de H_d . Considere el siguiente lema

Lema 3.11. *Sea X un espacio métrico compacto con métrica d . Sea $\sigma : 2^{2^X} \rightarrow 2^X$ dada por $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Entonces σ está bien definida y satisface la desigualdad, para todo $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in 2^{2^X}$,*

$$H_d(\sigma(\mathcal{A}_1), \sigma(\mathcal{A}_2)) \leq H_d^2(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2). \quad (21)$$

En particular, σ es continua.

Demostración. Probaremos que $\sigma(2^{2^X}) \subset 2^X$. Sea $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$. Sea $x \in X$ punto límite de \mathcal{A} ; buscamos que $\sigma(\mathcal{A})$ sea cerrado en X . Existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en $\sigma(\mathcal{A})$ que converge a x . Luego, para cada x_n , existe $L_n \in \mathcal{A}$ tal que $x_n \in L_n$, pues $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Observe que \mathcal{A} es compacto en 2^{2^X} , por lo que existe $\{L_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ subsucesión convergente a $L_0 \in \mathcal{A}$. Además, $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge a x , y por (IV) del lema 3.5, se obtiene $x \in L_0$. Luego, $x \in \sigma(\mathcal{A})$ y así, es cerrado en X y por ende compacto, por lo que pertenece a 2^X . Ahora probaremos (21). Sean $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in 2^{2^X}$, $\mathcal{A}_1 = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_1} A$, $\mathcal{A}_2 = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_2} A$ y $\lambda = H_d(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$. De (7), se tiene que, sin pérdida de generalidad, $\mathcal{A}_1 \not\subset N_d(\lambda, \mathcal{A}_2)$, por lo que existe $z \in \mathcal{A}_1$ tal que $d(z, x) \geq \lambda$ para todo $x \in \mathcal{A}_2$. Ahora, como $z \in \mathcal{A}_1$, existe $A^* \in \mathcal{A}_1$ tal que $z \in A^*$; de donde se obtiene que $A^* \not\subset N_d(\lambda, \mathcal{A}_2)$ para todo $L \in \mathcal{A}_2$. Por (7), obtenemos $H_d(A^*, L) \geq \lambda$ para $L \in \mathcal{A}_2$. Esto es, $A^* \notin N_{H_d}(\lambda, \mathcal{A}_2)$ y así, $\mathcal{A}_1 \not\subset N_{H_d}(\lambda, \mathcal{A}_2)$. Entonces, $H_d^2(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \geq \lambda$. Con esto se prueba la desigualdad y haciendo $\varepsilon = \delta$, llegamos a que σ es continua. \square

Corolario 3.12. *Sea X un continuo con métrica d . Entonces $C_n(X)$ es un continuo para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Puesto que $C(X)$ es un continuo, tenemos por corolario 3.3, que $F_n(C(X))$ es un continuo. Ahora, sea σ definida como en el lema 3.11, y observemos que $\sigma(F_n(C(X))) = C_n(X)$. Así, $C_n(X)$ es un continuo para cada $n \in \mathbb{N}$. \square

4 Hiperespacio $HS_m^n(X)$

Se define el espacio en cuestión, conocido como (n, m) -ésimo hiperespacio de suspensión de X .

Definición 4.1. Sea X un continuo y $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$. El (n, m) -ésimo hiperespacio de suspensión de X , denotado por $HS_m^n(X)$, es el espacio cociente $C_n(X)/F_m(X)$, el cual se obtiene de $C_n(X)$ encogiendo $F_m(X)$ a un punto bajo la topología cociente.

Nuestro interés se basará en mostrar que, efectivamente, $HS_m^n(X)$ es un continuo. Para ello, necesitaremos algunos resultados previos, comenzando con al definición de topología cociente:

Definición 4.2. Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea \mathcal{D} una colección de subconjuntos de X no vacíos y ajenos dos a dos tales que su unión es X . Llamaremos a esa colección \mathcal{D} una partición de X . Sea

$$\tau(\mathcal{D}) = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{D} : \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \tau\}. \quad (22)$$

El espacio $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es conocido como el espacio cociente de X , y $\tau(\mathcal{D})$ se conoce como la topología cociente.

Definición 4.3. Sean X y Y espacios topológicos y $p : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva. Se dice que p es una función cociente si cumple que dado $U \subset Y$ es abierto en Y si y solo si $p^{-1}(U)$ es abierto en X .

En nuestro caso, dado un espacio topológico X y una partición \mathcal{D} , denotaremos por $p_X : X \rightarrow \mathcal{D}$ a la función cociente.

Teorema 4.4. *Sea X un espacio topológico y \mathcal{D} una partición. Entonces la función $p_X : X \rightarrow \mathcal{D}$ donde $p_X(x)$ es el único elemento de la partición que contiene a x es la función cociente.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}$. Observemos que $p_X^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. De la definición de topología cociente, y por la observación anterior, tenemos que \mathcal{U} es abierto en \mathcal{D} si y solo si $p_X^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en X . \square

Considere los siguientes resultados, que serán de gran ayuda para mostrar que $HS_m^n(X)$ es un continuo.

Teorema 4.5. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua suprayectiva, X un espacio métrico compacto y Y un espacio Hausdorff. Entonces Y es metrizable.*

Demostración. Sea $f : X \rightarrow Y$ como en las hipótesis del teorema. Dado que f es continua, se tiene que Y es compacto y además es Hausdorff, por lo que bastará con demostrar que Y posee una base numerable. Sea \mathcal{B}_X una base numerable para X . Para cada subconjunto finito \mathcal{C} de \mathcal{B}_X , sea $E(\mathcal{C}) = Y - f(X - \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C)$ y considere

$\mathcal{P} = \{E(\mathcal{C}) : c(\mathcal{C}) < \infty\}$. Veamos ahora que \mathcal{P} es numerable. Observemos que dicho conjunto consta de los subconjuntos finitos de un conjunto numerable. Como \mathcal{B}_X es un conjunto numerable, existe una función biyectiva $g : \mathcal{B}_X \rightarrow \mathbb{N}$. Construyamos una función $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$, donde \mathcal{F} es el subconjunto de \mathcal{B}_X de todos los conjuntos finitos, definida por $f(\mathcal{C}) = \prod_{k \in g(\mathcal{C})} p_{k+1}$, donde p_n denota el n -ésimo número primo y

definamos $f(\emptyset) = 1$. Si $\mathcal{R}, \mathcal{S} \in \mathcal{F}$ tales que $f(\mathcal{R}) = f(\mathcal{S})$, dado que la descomposición en primos es única, tendremos que $g(\mathcal{R}) = g(\mathcal{S})$. Y como g es una biyección, tenemos que $\mathcal{R} = \mathcal{S}$. Así, f es inyectiva. Luego, se sigue que \mathcal{F} es a lo más numerable, y por como se construyó \mathcal{P} , se sigue que es a lo más numerable. Puesto que X es compacto y Y es Hausdorff, f es una función cerrada. Se sigue que los elementos de \mathcal{P} son abiertos en Y . Ahora, sea U abierto en Y y $x \in U$. Puesto que f es continua y Y es Hausdorff, $f^{-1}(\{x\})$ es un compacto del abierto $f^{-1}(U)$ y como \mathcal{B}_X es una base, existe un subconjunto finito \mathcal{C}_0 de \mathcal{B}_X tal que

$$f^{-1}(\{x\}) \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}_0} C \subset f^{-1}(U).$$

Se sigue que $x \in E(\mathcal{C}_0) \subset U$. Concluimos que \mathcal{P} es una base numerable para Y y así, es metrizable. \square

Corolario 4.6. *El espacio cociente $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ de un espacio métrico compacto X es metrizable si y solo si es Hausdorff.*

Demostración. Observe que $p_X : X \rightarrow \mathcal{D}$ es una función continua y así, si el espacio cociente es Hausdorff, podemos aplicar el teorema 4.5 para ver que el espacio cociente será metrizable. Por otro lado, si el espacio cociente es metrizable, podemos encontrar abiertos al rededor de cada punto de \mathcal{D} tales que no se intersecten. \square

Corolario 4.7. *El espacio cociente de un continuo es un continuo si y solo si es Hausdorff.*

Demostración. Observe que si el espacio cociente es Hausdorff, podemos usar el corolario 4.6 y que p_X preserva conexidad para observar que dicho espacio será un continuo. Por otro lado, si el espacio es Hausdorff, por el corolario 4.6 es metrizable y se sigue el resultado. \square

Buscamos generar espacios cociente continuos a partir de espacios continuos, pero no será óptimo siempre revisar si el espacio es Hausdorff y así, metrizable. Para ello, introducimos la definición:

Definición 4.8. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una partición \mathcal{D} de X es semi continua superiormente (scs) si cada vez que $D \in \mathcal{D}$, $U \in \tau$ y $D \subset U$, existe $V \in \tau$ con $D \subset V$ tal que si $A \in \mathcal{D}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subset U$.

Observe que esta definición se basa únicamente en la forma en que la partición \mathcal{D} está siendo tomada, por lo que se utilizará la topología cociente.

Definición 4.9. Si \mathcal{D} es una partición de X , entonces cualquier subconjunto de X que sea la unión de una subcolección de \mathcal{D} se dirá \mathcal{D} -saturado.

Lema 4.10. Sea (X, τ) un espacio topológico, \mathcal{D} una partición de X y p_X la función cociente. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

- (I) \mathcal{D} es semi continua superiormente,
- (II) p_X es una función cerrada,
- (III) si $D \in \mathcal{D}$, $U \in \tau$, y $D \subset U$, entonces existe $V \in \tau$ tal que $D \subset V \subset U$ es \mathcal{D} -saturado.

Demostración. Mostraremos que (I) implica (II). Sea C cerrado en X . Sea $x \in p_X^{-1}(\mathcal{D} - p_X(C))$; así, $p_X(x) \in \mathcal{D} - p_X(C)$. Veamos que $p_X(x) \cap C = \emptyset$. Supongamos por el contrario, que $y \in p_X(x) \cap C$, entonces $p_X(x) \cap p_X(y) \neq \emptyset$ y así, $p_X(x) = p_X(y)$ y se seguiría que $p_X(x) \in p_X(C)$, lo cual es una contradicción. Tenemos entonces que $p_X(x) \subset X - C$. Como $X - C$ es abierto y \mathcal{D} semi continua superiormente, existe $V \in \tau$ con $p_X(x) \subset V$ tal que si $v \in V$, entonces $p_X(v) \subset X - C$. Supongamos que $p_X(v) \in p_X(C)$, entonces $p_X(v) = p_X(y)$ para algún $y \in C$ y así, $y \in p_X(v) \cap C$, entonces $p_X(v) \not\subset X - C$, lo cual contradice la definición de v . Por lo tanto, $p_X(V) \subset \mathcal{D} - p_X(C)$. Luego, $x \in V \subset p_X^{-1}(\mathcal{D} - p_X(C))$ y se sigue que es abierto. Finalmente, como p_X es la función cociente, se sigue que $p_X(C)$ es cerrado en \mathcal{D} .

Veamos que (II) implica (III). Sean $D \in \mathcal{D}$ y $U \in \tau$ tal que $D \subset U$. Considere $V = p_X^{-1}(\mathcal{D} - p_X(X - U))$. Notemos que V es abierto puesto que p_X es cerrado y $D \subset V \subset U$. Para ver que V es \mathcal{D} -saturado, veamos que $V = \bigcup(\mathcal{D} - p_X(X - U))$. Sea $v \in V$. Entonces $v \in p_X(V) \in \mathcal{D} - p_X(X - U)$ y así, $v \in \bigcup \mathcal{D} - p_X(X - U)$. Por otro lado, si $v \in \bigcup \mathcal{D} - p_X(X - U)$, entonces existe $A \in \mathcal{D} - p_X(X - U)$ tal que $v \in A$. Luego, $p_X(v) = A$. Así, $v \in p_X^{-1}(\mathcal{D} - p_X(X - U))$, y por lo tanto se cumple (III).

Finalmente, se sigue de la definición que (III) implica (I). □

Teniendo en cuenta este lema, procederemos a probar el resultado principal para nuestro fin.

Lema 4.11. *Si $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es un espacio cociente con una partición semi continua superior de un espacio (X, τ) con la propiedad T_1 , entonces \mathcal{D} es una partición cerrada de X .*

Demostración. Considere la función cociente p_X . Al ser \mathcal{D} semi continua superior, se tiene por lema 4.10 que p_X es una función cerrada. Ahora, si $x \in X$, dado que τ es T_1 , tenemos que $\{x\}$ es un subconjunto cerrado de X . Luego, $p_X(\{x\})$ es cerrado en X . Al ser x arbitrario, se sigue que todo elemento de la partición \mathcal{D} es un subconjunto cerrado en X . \square

Teorema 4.12. *Todo espacio cociente que proviene de una partición semi continua superiormente de un espacio métrico compacto es metrizable.*

Demostración. Observemos que por el corolario 4.6, bastará con demostrar que el espacio cociente es Hausdorff. Sea X un espacio métrico compacto con topología τ , \mathcal{D} una partición semi continua superior de X y p_X la función cociente. Sean $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ con $D_1 \neq D_2$. Por lema 4.11, D_1 y D_2 son subconjuntos disjuntos cerrados de X y además X es normal, existen $U_1, U_2 \in \tau$ tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y $D_1 \subset U_1, D_2 \subset U_2$. Puesto que \mathcal{D} es semi continua superior, por lema 4.10, existen $V_1, V_2 \in \tau$ tales que $D_1 \subset V_1 \subset U_1$ y $D_2 \subset V_2 \subset U_2$ con V_1, V_2 \mathcal{D} -saturados. Observamos ahora que $D_1 \in p_X(V_1)$ y $D_2 \in p_X(V_2)$. Como V_1 y V_2 son \mathcal{D} -saturados, $p_X^{-1}(p_X(V_1)) = V_1$ y $p_X^{-1}(p_X(V_2)) = V_2$ son abiertos y ajenos. Por lo tanto, el espacio $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es Hausdorff. \square

Corolario 4.13. *Todo espacio cociente de una partición semi continua superior de un continuo es un continuo.*

Demostración. Tenemos que por el teorema 4.12, tenemos que el espacio cociente será metrizable y además, tendremos que se preservará la compacidad y conexidad, pues la función cociente es continua. \square

Lema 4.14. *Sea X normal y $F \subset X$ cerrado en X . Si $\mathcal{D} = \{F\} \cup \{\{x\} : x \in X - F\}$, entonces \mathcal{D} es semi continua superior.*

Demostración. Sea $D \in \mathcal{D}$ y U abierto en X tal que $D \subset U$. Por la definición de \mathcal{D} , obtenemos dos casos:

CASO 1. Si $D = \{x\}$, para algún $x \in X - F$, tenemos que D y F son cerrados en X . Puesto que X es normal, existen U_1, U_2 ajenos tales que $D \subset U_1$ y $F \subset U_2$. Sea $V = U \cap U_1$. Así, tenemos que $D \subset V \subset U$ y notemos que $V = \bigcup_{x \in V} \{x\}$. Así, V es \mathcal{D} -saturado.

CASO 2. Si $D = F$, haciendo $V = U$, que a su vez $U = \{F\} \cup \bigcup_{x \in U-F} \{x\}$, tenemos que V es \mathcal{D} -saturado.

De ambos casos y utilizando el lema 4.10 (III), tenemos que \mathcal{D} es semi continua superiormente. \square

Con esta teoría, concluimos que

Corolario 4.15. *Si X es un continuo, y $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, entonces $HS_m^n(X)$ es un continuo.*

Demostración. Considere $\mathcal{D} = \{F_m(X)\} \cup \{\{A\} : A \in C_n(X) - F_m(X)\}$. Puesto que $C_n(X)$ es normal y $F_m(X)$ es cerrado al ser compacto, tenemos que \mathcal{D} es semi continua superior por lema 4.14. Finalmente, por el corolario 4.13, se sigue que $HS_m^n(X)$ es un continuo. \square

En trabajos como [6] y [7] es común denotar por $q_X : C_n(X) \rightarrow H_m^n(X)$ a la función cociente la cual es suprayectiva y denotaremos $q_X(F_m(X)) = F_X^m$.

Lema 4.16. *La función $q_X : C_n(X) - F_m(X) \mid C_n(X) - F_m(X) \rightarrow HS_m^n(X) - \{F_X^m\}$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Observe que de la definición 4.3, tenemos que q_X es bicontinua, y al restringir su dominio, obtenemos la biyección. \square

5 Ejemplos

En la presente sección se presentan algunos ejemplos de hiperespacios suspensión cuando X es un continuo en específico.

Intervalo unitario

Es claro que el intervalo unitario $[0, 1]$ es un continuo, pues es un intervalo cerrado de \mathbb{R} , de donde se sigue la compacidad y conexidad. Además, al ser subespacio de un espacio métrico, éste es métrico. Construiremos $HS([0, 1])$, el hiperespacio suspensión del intervalo unitario. Para ello, busquemos la caracterización de los hiperespacios $C([0, 1])$ y $F([0, 1])$. Primero, observemos que

$$C([0, 1]) = \{[a, b] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\}. \quad (23)$$

Esto ocurre pues por definición, $C([0, 1])$ son los subcontinuos de $[0, 1]$. Ahora, consideremos la función $\gamma : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma([a, b]) = (a, b)$ es un

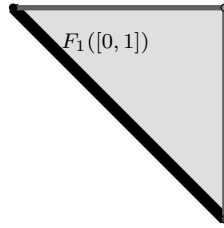


Figura 1: $C([0,1])$

Más aún, el conjunto de los conjuntos unipuntuales $F_1([0,1])$ está representado por la diagonal del triángulo. Ahora, como buscamos hacer que todo elemento de $F_1([0,1])$ se convierta en un punto a través de la topología cociente, encogeremos la diagonal de T a un solo punto. Entonces, el hiperespacio suspensión de $[0,1]$ se puede ver en a figura 2.

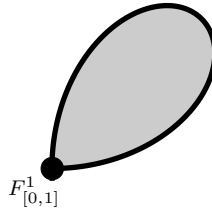


Figura 2: $HS([0,1])$

La circunferencia unitaria, S^1

Consideremos la circunferencia unitaria en \mathbb{R}^2 centrada en el origen. Lo que sigue es buscar una representación para $C(S^1)$. Para cada subarco A de S^1 sea $m(A)$ el punto medio de A en S^1 y sea $\ell(A)$ la longitud de A . Ahora definamos la función $\phi : C(S^1) \rightarrow D^1$, donde D^1 es el disco unitario, por

$$\phi(A) = \begin{cases} [1 - (\ell(A)/2\pi)m(A) & \text{si } A \neq S^1, \\ (0, 0) & \text{si } A = S^1. \end{cases}$$

Para ver cómo se comporta la función, considere la figura 3.

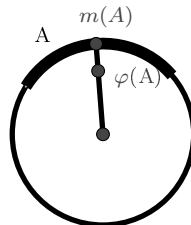


Figura 3: Imagen de A bajo ϕ

homeomorfismo entre $C([0, 1])$ y el triángulo $T = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq a \leq b \leq 1\}$. Entonces, T es una representación de $C([0, 1])$ y se muestra en la figura 1.

Veamos que φ es un homeomorfismo. Para ello, sean $A, B \in C(S^1)$ tales que $A \neq B$. Por esto, se tiene que $m(A) \neq m(B)$. Ahora, si alguno de estos coincide con S^1 , tenemos que $\varphi(A) \neq \varphi(B)$. Si ninguno coincide con S^1 , tenemos que aunque $\ell(A) = \ell(B)$, por el hecho de que $m(A) \neq m(B)$, se sigue que $\varphi(A) \neq \varphi(B)$. Así, φ es inyectiva. Ahora, sea $(s, t) \neq (0, 0)$, donde $s, t \in [0, 1]$. Considere $\lambda = [1 - (\ell(A)/2\pi)]$ y $\frac{1}{\lambda}(s, t)$. Ahora, es claro que podemos hacer que éste sea el punto medio de algún arco en S^1 y efectivamente, dicho arco será la preimagen de (s, t) . Así, la función es sobreyectiva y por lo tanto, biyectiva.

Ahora, observe que φ es una función de un espacio compacto a un espacio Hausdorff como lo es D^1 , por lo que si mostramos la continuidad, tendríamos también la continuidad de la inversa. Así, considere $A \in C(S^1)$ de manera que $A \neq S^1$. Luego, existe $r > 0$ tal que $B_{H_d}(r, A) \cap S^1 = \emptyset$. Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $0 < \delta \leq \min\{r, \varepsilon, 1, \frac{\varepsilon^2 6}{\delta}\}$. Sea $B \in B_{H_d}(\frac{\delta}{3})$. Entonces $H_d(A, B) < \frac{\delta}{3}$. De aquí,

$$|\ell(B) - \ell(A)| < 2sen^{-1} \left(\frac{\delta}{6} \right), \quad (24)$$

$$\|m(B) - m(A)\| < \frac{\delta}{3}. \quad (25)$$

Ahora, como $\delta \leq 1$, tenemos que $2sen^{-1} \left(\frac{\delta}{6} \right) < 2 \left(\frac{\delta}{6} \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{3}$. Considere ahora lo siguiente

$$\begin{aligned} \|\varphi(A) - \varphi(B)\| &= \|[1 - \frac{\ell(A)}{2\pi}]m(A) - [1 - \frac{\ell(B)}{2\pi}]m(B)\| \\ &= \|m(A) - m(B)\| + \frac{1}{2\pi} \|\ell(A)m(A) - \ell(B)m(B)\| \\ &\leq \|m(A) - m(B)\| + \frac{1}{2\pi} \|\ell(A)m(A) - \ell(A)m(B)\| \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \|\ell(A)m(B) - \ell(B)m(B)\| \\ &= \|m(A) - m(B)\| + \frac{1}{2\pi} |\ell(A)| \cdot \|m(A) - m(B)\| \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \|m(B)\| \cdot |\ell(A) - \ell(B)|. \end{aligned}$$

Como A es un arco en S^1 , $|\ell(A)| \leq 2\pi$ y dado que $m(B)$ se encuentra en S^1 , $\|m(B)\| = 1$. Utilizando (24) y (25) tenemos que:

$$\begin{aligned} \|\varphi(A) - \varphi(B)\| &\leq \|m(A) - m(B)\| + \|m(A) - m(B)\| + |\ell(A) - \ell(B)| \\ &< \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hasta aquí, hemos probado que φ es continua si $A \neq S^1$. Veamos que φ es continua en S^1 . Para esto, consideremos una sucesión de arcos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que tiende a S^1 . Luego, por el comportamiento de la función, es claro que entre más grande sea el arco A_n , su longitud tiende a 2π y así, $\varphi(A_n)$ tiende al origen. Como esta

sucesión tiende a S^1 , tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(A_n) = (0, 0)$, y concluimos que φ es continua en S^1 .

Con esto, probamos que φ es continua y por lo mencionado anteriormente, un homeomorfismo. Así, podemos modelar $C(S^1)$ como el disco unitario. Lo que sigue es identificar al hiperespacio $F_1(S^1)$. Para ello, consideremos la imagen bajo φ de $\{p\}$ donde p es un punto en S^1 . Observe que $\ell(\{p\}) = 0$ y $m(\{p\}) = p$, por lo que $\varphi(\{p\}) = p$. Con esto, es claro que $F_1(S^1)$ se puede identificar precisamente como S^1 en D^1 , lo cual lo mostramos en la figura 4.

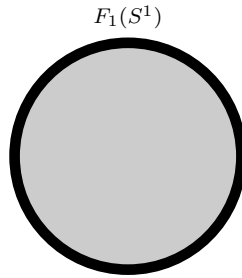


Figura 4: Modelo de $C(S^1)$

Finalmente, haciendo uso de la topología cociente, haremos de S^1 un solo punto, formando una especie de gota elíptica en \mathbb{R}^3 como se muestra en la siguiente figura 5. Observe que el vértice de la gota es precisamente $F_{S^1}^1$.

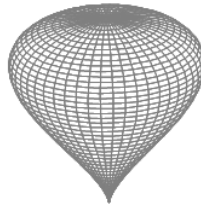


Figura 5: Modelo de $HS(S^1)$

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por haber dedicado su valioso tiempo y empeño para la revisión de este trabajo, gracias a sus sugerencias y comentarios es como se obtuvo la calidad del contenido de este material.

Bibliografía

- [1] Sam B. Nadler Jr., *Hyperspaces of sets*, Marcel Dekker, New york, Basel (1979).
- [2] Sergio Macías, *On the n -fold hyperspace suspension of continua*, Topol. Appl. 138, 125-138 (2004).
- [3] Sam B. Nadler Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, New york, Basel (1992).
- [4] Alejandro Illanes y Sam B. Nadler Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker, New york, Basel (1999).
- [5] Sergio Macías, *Topics on Continua*, Chapman & Hall, Boca Ranton (2005).
- [6] David Herrera-Carrasco, Alejandro Illanes, Fernando Macías-Romero, Francisco Vázquez-Juárez *Finite graphs have unique hyperspace $HS_n(X)$* , Topol. Proc. 44 (2014) 75-95.
- [7] José Guadalupe Anaya, David Maya, Francisco Vázquez-Juárez *The hyperspace $HS_n^m(X)$ for a finite graph X is unique*, Topol. and its App. 234 (2018) 428-439.
- [8] Sam B. Nadler Jr., *A fixed point theorem for hyperspace suspensions*, Houston Journal of Mathematics, Vol. 5 (1979) 125-132.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

ghernandez@alumnos.fcfm.buap.mx

jmacias@fcfm.buap.mx

dherrera@fcfm.buap.mx

Capítulo 4

Complejos cúbicos difusos

David Herrera Carrasco, Adolfo Maceda Méndez, Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP

Resumen

La teoría de complejos cúbicos ha sido utilizada para definir y estudiar propiedades topológicas de imágenes digitales binarias. Por otra parte, la matemática difusa se ha empleado para estudiar las imágenes digitales en tonos de gris, pero no se contaba con una generalización del concepto de complejo cúbico mediante conjuntos difusos que resultase útil para fines similares. En este capítulo se ilustra, con varios ejemplos en el caso bidimensional, la teoría de complejos cúbicos difusos desarrollada en [7].

1 Introducción

En este capítulo se presentan algunos de los resultados más importantes de la teoría de complejos cúbicos difusos desarrollada en [7] y se ilustra con diversos ejemplos y figuras en el caso bidimensional los conceptos principales de la misma. Primero, se hace un recuento de la definición y propiedades de los complejos cúbicos ordinarios. Posteriormente, se presentan algunos antecedentes de la teoría de conjuntos difusos, a partir de los cuáles se propone una extensión del concepto de complejo cúbico. Se propone una definición de conexidad y se introducen los conceptos de máximo y mínimo regional para estos complejos. Por último, se propone una definición de sus grupos de homología y se ilustra la relación entre estos y el concepto de conexidad.

2 Celdas

Definición 2.1. Una k -celda o celda k -dimensional en \mathbb{R}^n es un conjunto de la forma

$$s(x, \Lambda) = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \quad (1)$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$, Λ es un subconjunto de $\{1, 2, \dots, n\}$ con k elementos, e

$$I_\lambda = \begin{cases} \{x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{1}{2}\} & \text{si } \lambda \in \Lambda, \\ \{x_\lambda + \frac{1}{2}\} & \text{si } \lambda \notin \Lambda. \end{cases}$$

Los 2^k elementos que la forman son sus vértices. Cuando no sea relevante indicar el elemento x ni el conjunto Λ , se escribirá simplemente s .

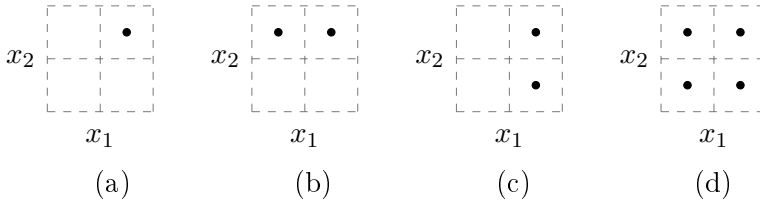


Figura 1: Celdas en \mathbb{R}^2 . En (a) se muestra la 0-celda $s^{(0)}(x)$, en (b) la 1-celda $s(x, \{1\})$, en (c) la 1-celda $s(x, \{2\})$ y en (d) la 2-celda $s^{(2)}(x)$, donde $x = (x_1, x_2)$.

En la figura 1 se muestran celdas de dimensiones 0, 1 y 2 en \mathbb{R}^2 .

La 0-celda $s(x, \emptyset)$ se denotará simplemente por $s^{(0)}(x)$.

Definición 2.2. Dado $x \in \mathbb{Z}^n$, la n -celda centrada en x se define como

$$s^{(n)}(x) = s(x, \{1, 2, \dots, n\}).$$

Nótese que los vértices de la n -celda centrada en x son los vértices del cubo unitario con centro en x . Además, cualquier k -celda $s(x, \Lambda)$ está contenida en la n -celda $s^{(n)}(x)$.

Para estudiar diversas propiedades de las celdas es importante saber cuando una de ellas está contenida en otra. En el siguiente lema se dan condiciones necesarias y suficientes para esto.

Lema 2.3. Sean

$$\begin{aligned} s_1 &= s(x, \Lambda_1), \\ s_2 &= s(y, \Lambda_2), \end{aligned}$$

dos celdas en \mathbb{R}^n . Si $s_1 \subset s_2$, entonces:

1. $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$,

2. $x_\lambda = y_\lambda$ si $\lambda \in \Lambda_1$ o $\lambda \notin \Lambda_2$,
3. $x_\lambda \in \{y_\lambda - 1, y_\lambda\}$ si $\lambda \in \Lambda_2 - \Lambda_1$.

Recíprocamente, si se satisfacen estas tres condiciones, entonces $s_1 \subset s_2$.

Cuando la celda s_1 está contenida en la celda s_2 , se dice que s_1 es una *cara* de s_2 . Si además $s_1 \neq s_2$, se dice que s_1 es una *cara propia* de s_2 .

En \mathbb{R}^2 , las caras propias de la 2-celda $s^{(2)}((x_1, x_2))$, mostradas en la figura 2, son las 1-celdas

$$s((x_1, x_2), \{1\}), s((x_1, x_2), \{2\}), s((x_1 - 1, x_2), \{1\}), s((x_1, x_2 - 1), \{2\})$$

y las 0-celdas

$$s^{(0)}((x_1, x_2)), s^{(0)}((x_1 - 1, x_2)), s^{(0)}((x_1 - 1, x_2 - 1)), s^{(0)}((x_1, x_2 - 1)).$$

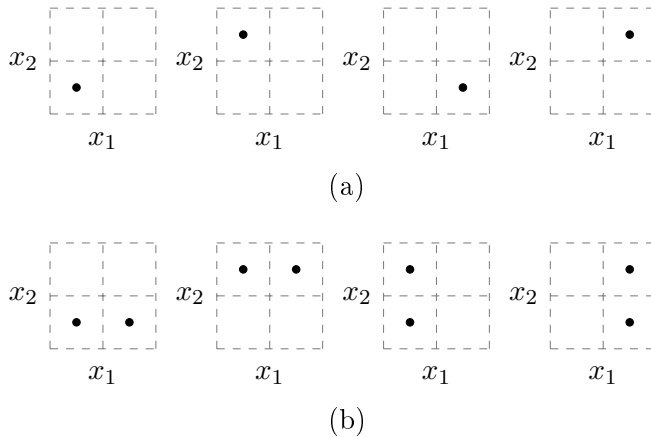


Figura 2: Caras propias de la 2-celda $s = s^{(2)}((x_1, x_2))$ En (a) se muestran las cuatro 0-celdas que son caras propias de s y en (b) las cuatro 1-celdas que son caras propias de s .

3 Complejos cúbicos

Definición 3.1. Un complejo cúbico en \mathbb{R}^n es cualquier colección de celdas en \mathbb{R}^n .

Ejemplo 3.2. El conjunto

$$\mathbf{K} = \left\{ s^{(0)}((0, 0)), s((1, 0), \{1\}), s((1, 1), \{2\}), s((2, 1), \{1\}), s^{(2)}((2, 1)) \right\}.$$

es un complejo cúbico formado por una 0-celda, tres 1-celdas. y una 2-celda.

En particular, el conjunto de todas las celdas en \mathbb{R}^n es un complejo cúbico que se denota por $|\mathbb{Z}^n|$. También el conjunto vacío es un complejo cúbico.

Definición 3.3. Un complejo cúbico \mathbf{L} es un subcomplejo de un complejo cúbico \mathbf{K} si $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$.

Ejemplo 3.4. El complejo cúbico

$$\mathbf{L} = \{s((1, 0), \{1\}), s((1, 1), \{2\})\}$$

es un subcomplejo del complejo cúbico del ejemplo 3.2.

Definición 3.5. El complemento de un complejo cúbico \mathbf{K} en \mathbb{R}^n es el conjunto de las celdas en \mathbb{R}^n que no pertenecen a \mathbf{K} . Se denota por \mathbf{K}^c .

Ejemplo 3.6. Algunos elementos del complemento del complejo cúbico del ejemplo 3.2 son las 0-celdas

$$s^{(0)}((1, 0)), s^{(0)}((1, 1)), s^{(0)}((2, 1)), s^{(0)}((2, 0))$$

y las dos 1-celdas

$$s((2, 0), \{1\}), s((2, 1), \{2\}).$$

Es claro que $(\mathbf{K}^c)^c = \mathbf{K}$. Además, la colección de complejos cúbicos es cerrada bajo uniones, intersecciones y complemento.

Definición 3.7. Una celda s es una cara de un complejo cúbico \mathbf{K} si existe una celda s' en \mathbf{K} tal que s es cara de s' .

De acuerdo con la definición de complejo cúbico, puede ocurrir que una celda sea cara de un complejo cúbico sin pertenecer a él.

Ejemplo 3.8. Un complejo cúbico formado únicamente por una 1-celda, no contiene a las dos 0-celdas que son caras propias de dicha 1-celda.

Ejemplo 3.9. Las 0-celdas y 1-celdas del ejemplo 3.6 son caras del complejo cúbico del ejemplo 3.2, aunque no pertenecen a él.

En la colección de los complejos cúbicos se define un operador que permitirá estudiar ciertas propiedades de tipo topológico.

Definición 3.10. Dado un complejo cúbico \mathbf{K} , su frontera es el complejo cúbico cuyos elementos son las celdas que son caras tanto de \mathbf{K} como de \mathbf{K}^c . Se denota por $\delta(\mathbf{K})$.

Ejemplo 3.11. La frontera de un complejo cúbico formado por una 0-celda es el mismo, mientras que la frontera de un complejo cúbico formado por una 1-celda consta de los dos vértices de la 1-celda.

Ejemplo 3.12. La frontera del complejo cúbico del ejemplo 3.2 está formada por las cinco 0-celdas

$$s^{(0)}((0, 0)), s^{(0)}((1, 0)), s^{(0)}((2, 0)), s^{(0)}((1, 1)), s^{(0)}((2, 1))$$

y las cinco 1-celdas

$$s((1, 0), \{1\}), s((2, 0), \{1\}), s((1, 1), \{2\}), s((2, 1), \{1\}), s((2, 1), \{2\}).$$

Una propiedad importante de la frontera de un complejo cúbico es la siguiente.

Teorema 3.13. Si \mathbf{K} es un complejo cúbico, entonces $\delta(\delta(\mathbf{K})) \subset \delta(\mathbf{K})$.

A partir del operador frontera se pueden definir algunos conceptos topológicos para un complejo cúbico.

Definición 3.14. Sea \mathbf{K} un complejo cúbico.

1. La cerradura de \mathbf{K} es $\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \cup \delta(\mathbf{K})$.
2. El interior de \mathbf{K} es $\mathbf{K}^0 = \mathbf{K} - \delta(\mathbf{K})$.
3. El complejo cúbico \mathbf{K} es cerrado si $\delta(\mathbf{K}) \subset \mathbf{K}$.
4. El complejo cúbico \mathbf{K} es abierto si $\mathbf{K} \cap \delta(\mathbf{K}) = \emptyset$.

Ejemplo 3.15. La cerradura de un complejo cúbico formado por una 0-celda es él mismo y por tanto es cerrado, mientras que su interior es vacío.

Ejemplo 3.16. Los complejos cúbicos \emptyset y $|\mathbb{Z}^n|$ son cerrados y abiertos.

Ejemplo 3.17. El complejo cúbico del ejemplo 3.2 no es ni cerrado ni abierto, de acuerdo con el ejemplo 3.12. Su cerradura se obtiene de su frontera al agregarle la única 2-celda de \mathbf{K} , mientras que su interior consta únicamente de la 2-celda mencionada.

En general, un complejo cúbico \mathbf{K} es cerrado si $\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{K}$ y es abierto si $\mathbf{K} = \mathbf{K}^0$.

Observación 3.18. Por el teorema 3.13, la frontera de un complejo cúbico es un complejo cúbico cerrado.

Los complejos cúbicos cerrados se caracterizan por la siguiente propiedad.

Teorema 3.19. *Un complejo cúbico es cerrado si, y sólo si, contiene todas las caras de sus celdas.*

Un concepto que resulte útil en algunas demostraciones relacionadas con el interior de un complejo cúbico es el de estrella de una celda s .

Definición 3.20. La estrella de una celda s en \mathbb{R}^n es el complejo cúbico

$$\text{str}(s) = \{s' : s \subset s'\}.$$

Ejemplo 3.21. En \mathbb{R}^2 , la estrella de la 0-celda $s^{(0)}(x)$ es el complejo cúbico formado por

1. la 0-celda $s^{(0)}(x)$,
2. las cuatro 1-celdas

$$s(x, \{1\}), s(x, \{2\}), s(x + (1, 0), \{1\}), s(x + (0, 1), \{2\})$$

3. las cuatro 2-celdas centradas en los puntos x , $x + (1, 0)$, $x + (0, 1)$ y $x + (1, 1)$, respectivamente.

En la figura 3 se muestran las celdas de esta estrella.

Ejemplo 3.22. La estrella de la 1-celda $s(x, \{1\})$ está formada por esta celda y por las dos 2-celdas centradas en x y en $x + (0, 1)$, mientras que la estrella de la 1-celda $s(x, \{2\})$ está formada por la 1-celda $s(x, \{2\})$ y por las dos 2-celdas centradas en x y en $x + (1, 0)$.

En la figura 4 se muestran las celdas de esta estrella.

Utilizando el concepto de estrella de una celda se pueden caracterizar las celdas que pertenecen al interior de un complejo cúbico.

Teorema 3.23. *Dado un complejo cúbico \mathbf{K} , una celda s pertenece a \mathbf{K}^0 si, y sólo si, $\text{str}(s) \subset \mathbf{K}$.*

Corolario 3.24. *Un complejo cúbico \mathbf{K} es abierto si, y sólo si, para cada $s \in \mathbf{K}$, $\text{str}(s) \subset \mathbf{K}$.*

Todos los conceptos descritos hasta este punto corresponden a objetos matemáticos “discretos”. Con el fin de asociarles una imagen geométrica, se define su realización poliédrica.

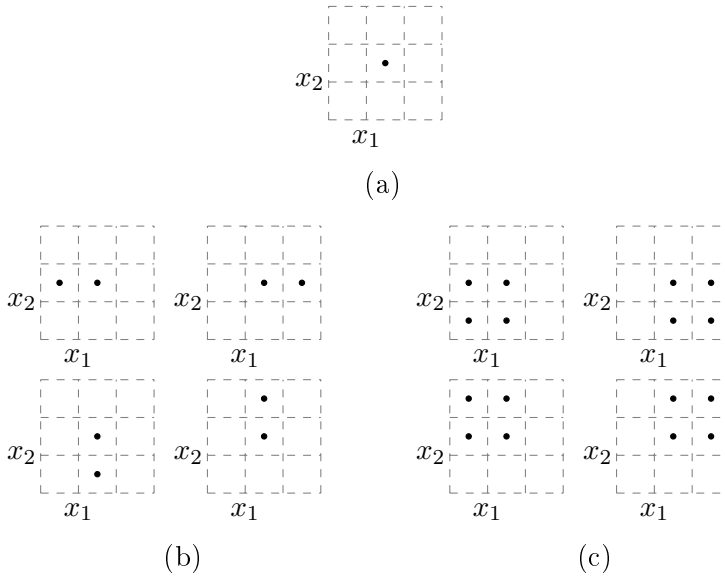


Figura 3: Celdas de la estrella de la 0-celda $s = s(x, \emptyset)$, con $x = (x_1, x_2)$. En (a), (b) y (c) se muestran las 0-celdas, 1-celdas y 2-celdas de $\text{str}(s)$, respectivamente.

4 Realización poliédrica

Para establecer relaciones entre las propiedades topológicas de los complejos cúbicos y las de ciertos subconjuntos de \mathbb{R}^n , se propone una definición de su realización poliédrica.

En lo sucesivo, se considera \mathbb{R}^n con la topología usual.

En primer lugar se propone la definición de realización poliédrica de una celda.

Definición 4.1. La realización poliédrica de la k -celda 1 es

$$|s(x, \Lambda)| = J_1 \times J_2 \times \dots \times J_n,$$

donde

$$J_\lambda = \begin{cases} (x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{1}{2}) & \text{si } \lambda \in \Lambda, \\ \{x_\lambda + \frac{1}{2}\} & \text{si } \lambda \notin \Lambda. \end{cases}$$

Esta realización poliédrica se denota por $|s|$.

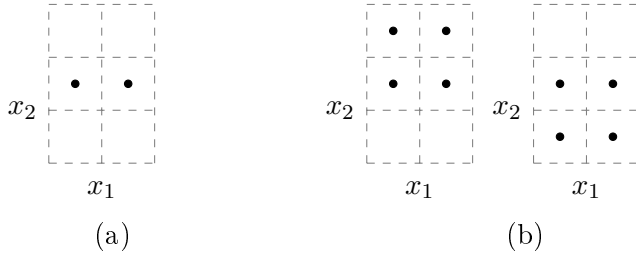


Figura 4: Celdas de la estrella de la 1-celda $s = s((x_1, x_2), \{1\})$. En (a) se muestra la única 1-celda y en (b) las dos 2-celdas de $\text{str}(s)$.

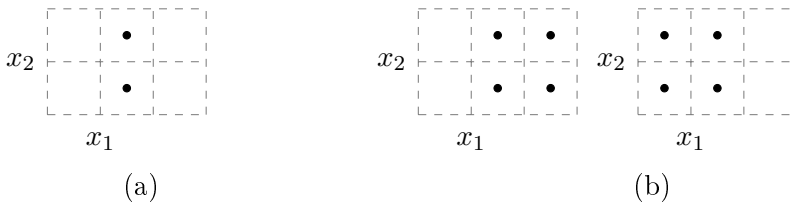


Figura 5: Celdas de la estrella de la 1-celda $s = s((x_1, x_2), \{2\})$

Nótese que la realización poliédrica de una k -celda está definida como el producto cartesiano de k intervalos abiertos y de $n - k$ puntos. En particular, la realización poliédrica de una n -celda es un conjunto abierto en \mathbb{R}^n .

Ejemplo 4.2. En la figura 6 se muestra la realización poliédrica de celdas de dimensiones 0, 1 y 2 en \mathbb{R}^2 .

Utilizando la realización poliédrica de una celda, a cada complejo cúbico se le asocia un subconjunto de \mathbb{R}^n que será muy importante para estudiar algunas de sus propiedades.

Definición 4.3. Dado un complejo cúbico no vacío \mathbf{K} , su realización poliédrica es el subconjunto de \mathbb{R}^n dado por la unión de las realizaciones poliédricas de sus celdas. Se denota por $|\mathbf{K}|$.

Ejemplo 4.4. En la figura 7 se muestra la realización poliédrica del complejo cúbico del ejemplo 3.2.

Ejemplo 4.5. En la figura 8 se muestra la realización poliédrica de las estrellas de celdas de dimensiones 0 y 1.

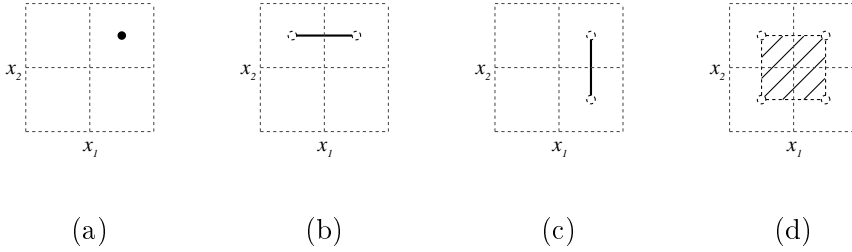


Figura 6: Realización poliédrica de celdas en \mathbb{R}^2 . En (a) se muestra la realización poliédrica de la 0-celda $s^{(0)}((x_1, x_2))$, en (b) la de la 1-celda $s((x_1, x_2), \{1\})$, en (c) la de la 1-celda $s((x_1, x_2), \{2\})$ y en (d) la de la 2-celda $s^{(2)}((x_1, x_2))$

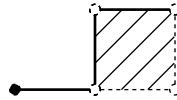


Figura 7: Realización poliédrica del complejo cúbico del ejemplo 3.2

A partir de la realización poliédrica, representada geoméricamente, es posible indicar cuáles son las celdas que forman al complejo cúbico.

Ejemplo 4.6. En la figura 9 se muestra la realización poliédrica de un complejo cúbico. A partir de ella se observa que el complejo cúbico está formado por tres celdas de dimensión 0, cinco celdas de dimensión 1 y tres celdas de dimensión 2.

Una de las propiedades más importantes de la realización poliédrica está dada en el siguiente teorema.

Teorema 4.7. *Para todo complejo cúbico \mathbf{K} , $\text{Fr}(|\mathbf{K}|) = |\delta(\mathbf{K})|$.*

De acuerdo con la definición 3.14 y utilizando este teorema, se deduce la siguiente equivalencia entre las propiedades de un complejo cúbico y las propiedades topológicas de su realización poliédrica.

Teorema 4.8. *Un complejo cúbico \mathbf{K} es cerrado (abierto) si, y sólo si, su realización poliédrica $|\mathbf{K}|$ es un subconjunto cerrado (abierto) de \mathbb{R}^n .*

Otra consecuencia es la relación estrecha entre las propiedades de la adherencia e interior de un complejo cúbico y las correspondientes de su realización poliédrica.

Teorema 4.9. *Para todo complejo cúbico \mathbf{K} :*

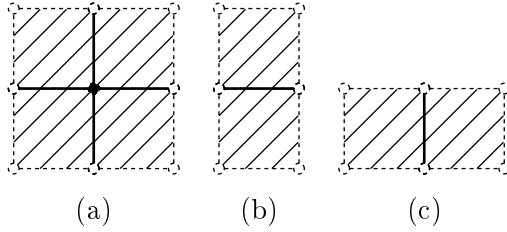


Figura 8: Realización poliédrica de la estrella de una (a) 0-celda, (b) 1-celda horizontal, (c) 1-celda vertical.

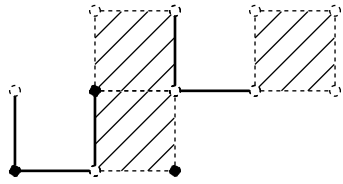


Figura 9: Realización poliédrica de un complejo cúbico.

1. $|\overline{\mathbf{K}}| = \overline{|\mathbf{K}|}$,
2. $|\mathbf{K}^0| = |\mathbf{K}|^0$.

5 Conexidad

Una propiedad topológica importante de los complejos cúbicos es la de conexidad. En primer lugar, se establece una relación de conexidad entre dos celdas de un complejo cúbico.

Definición 5.1. Sea \mathbf{K} un complejo cúbico no vacío. Dos celdas s y s' en \mathbf{K} están en relación de conexidad en \mathbf{K} si existe una sucesión de celdas $s_1 = s, s_2, \dots, s_m = s'$ en \mathbf{K} tal que s_i es cara de s_{i+1} o bien s_{i+1} es cara de s_i , para todo $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$.

Es claro que esta es una relación de equivalencia en \mathbf{K} . Sus clases de equivalencia son las *componentes conexas* de \mathbf{K} . Se dice que el complejo cúbico \mathbf{K} es *conexo* si tiene una única componente conexas.

Se tienen las siguientes relaciones entre la conexidad de un complejo cúbico y la conexidad de su realización poliédrica.

Teorema 5.2. Si \mathbf{K} es un complejo cúbico conexo, entonces $|\mathbf{K}|$ es un conjunto arco-conexo.

Teorema 5.3. *Si \mathbf{K} es un complejo cúbico tal que $|\mathbf{K}|$ es un conjunto conexo, entonces \mathbf{K} es conexo.*

Ejemplo 5.4. En la figura 10 se muestra la realización poliédrica de un complejo cúbico conexo y la de uno que no es conexo, de acuerdo con los resultados anteriores.

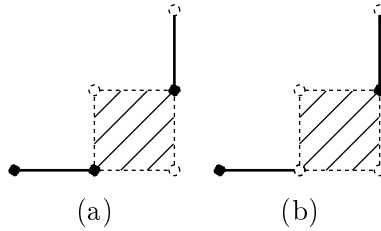


Figura 10: Conexidad de complejos cúbicos. En (a) se muestra la realización poliédrica de un complejo conexo y en (b) la de uno disconexo.

Corolario 5.5. *Dado un complejo cúbico, las componentes conexas de su realización poliédrica coinciden con sus componentes arco-conexas.*

Corolario 5.6. *Si \mathbf{K} es un complejo cúbico, la función que a cada componente conexa \mathbf{L} de \mathbf{K} le asigna su realización poliédrica $|\mathbf{L}|$ es una biyección entre el conjunto de componentes conexas de \mathbf{K} y el conjunto de componentes arco-conexas de $|\mathbf{K}|$.*

Este resultado permite determinar el número de componentes conexas de un complejo cúbico utilizando las componentes arco-conexas de su realización poliédrica. Esto último puede hacerse empleando grupos de homología.

6 Grupos de homología

La realización poliédrica de un complejo cúbico permite establecer la siguiente definición de los grupos de homología y los números de Betti de un complejo cúbico arbitrario. Además, se pueden emplear teoremas de topología algebraica para estudiar sus propiedades.

Definición 6.1. Dado un complejo cúbico \mathbf{K} , su m -ésimo grupo de homología se define como

$$H_m(\mathbf{K}) = H_m(|\mathbf{K}|)$$

donde $H_m(|\mathbf{K}|)$ es el m -ésimo grupo de homología singular de la realización poliédrica de \mathbf{K} . Si estos grupos son finitamente generados, el m -ésimo número de Betti de \mathbf{K} es igual al rango de $H_m(|\mathbf{K}|)$ y se denota por $\beta_m(\mathbf{K})$.

En el caso de que \mathbf{K} sea un complejo cúbico cerrado en \mathbb{R}^n , estos grupos coinciden con los grupos de homología cúbica definidos en, por ejemplo, [1, 3].

Es sabido que el 0-número de Betti de un espacio topológico es igual al número de sus componentes arco-conexas de él. Utilizando el corolario 5.6 se deduce el siguiente resultado.

Teorema 6.2. *Para cualquier complejo cúbico \mathbf{K} , el 0-número de Betti $\beta_0(\mathbf{K})$ coincide con el número de componentes conexas del complejo cúbico \mathbf{K} .*

A partir de los números de Betti se define la característica de Euler de un complejo cúbico.

Definición 6.3. Dado un complejo cúbico \mathbf{K} cuyos grupos de homología sean finitamente generados, su característica de Euler se define como

$$\chi(\mathbf{K}) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \beta_m(\mathbf{K}).$$

De acuerdo con las definiciones anteriores,

$$\chi(\mathbf{K}) = \chi(|\mathbf{K}|).$$

Se demuestra que si \mathbf{K} es un complejo cúbico finito y $\alpha_k(\mathbf{K})$ es el número de k -celdas de \mathbf{K} , entonces, para un complejo cúbico cerrado

$$\chi(\mathbf{K}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_k(\mathbf{K}).$$

En el caso de que \mathbf{K} sea un complejo cúbico abierto, las demostraciones en [8] pueden generalizarse para cualquier valor de n a fin de obtener una fórmula para calcular su característica de Euler a partir del número de celdas de cada dimensión.

Teorema 6.4. *Si \mathbf{K} es un complejo cúbico abierto finito*

$$\chi(\mathbf{K}) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \alpha_{n-j}(\mathbf{K}).$$

En el caso bidimensional, el 1-número de Betti corresponde a la cantidad de agujeros del complejo cúbico.

Ejemplo 6.5. En la figura 11 se muestra la realización poliédrica de un complejo cúbico cerrado \mathbf{K} . Este complejo cúbico tiene una componente conexa y dos agujeros, por lo que $\beta_0(\mathbf{K}) = 1$ y $\beta_1(\mathbf{K}) = 2$. Además, $\beta_2(\mathbf{K}) = 0$. Su característica de Euler es $\chi(\mathbf{K}) = 1 - 2 + 0 = -1$. Por otra parte, $\alpha_0(\mathbf{K}) - \alpha_1(\mathbf{K}) + \alpha_2(\mathbf{K}) = 13 - 15 + 1 = -1$.

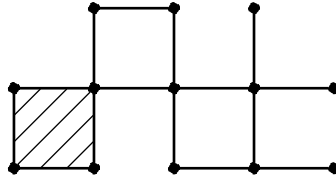


Figura 11: Realización poliédrica de un complejo cúbico cerrado.

Ejemplo 6.6. En la figura 12 se muestra la realización poliédrica de un complejo cúbico abierto \mathbf{K} . El complejo tiene dos componentes y un agujero, por lo que $\beta_0(\mathbf{K}) = 2$ y $\beta_1(\mathbf{K}) = 1$. Como en el ejemplo anterior, $\beta_2(\mathbf{K}) = 0$. Su característica de Euler es $\chi(\mathbf{K}) = 2 - 1 + 0 = 1$. Por otra parte, $\alpha_0(\mathbf{K}) - \alpha_1(\mathbf{K}) + \alpha_2(\mathbf{K}) = 0 - 11 + 12 = 1$.

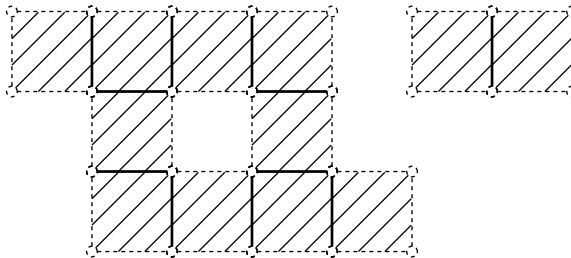


Figura 12: Realización poliédrica de un complejo cúbico abierto.

7 Conjuntos difusos

En la matemática difusa, el concepto principal es el de conjunto difuso. En este tipo de conjuntos, en lugar de indicar que un elemento pertenece o no pertenece a dicho conjunto, se asigna a cada elemento de un conjunto X un valor numérico que representa el grado de pertenencia de dicho elemento a un conjunto difuso. Si un elemento pertenece a X , este grado es 1, mientras que si no pertenece, el grado

es 0. Se puede encontrar una explicación más amplia sobre el origen y aplicaciones estos conjuntos en [4].

A partir de esta sección, I denota al intervalo unitario $[0, 1]$.

Definición 7.1. Dado un conjunto ordinario X , un conjunto difuso en X es una función $A : X \rightarrow I$. Al valor de A en un elemento $x \in X$ se le llama el grado de pertenencia de x al conjunto difuso A .

Cualquier subconjunto ordinario Y de X se puede identificar con un conjunto difuso en X mediante su función característica.

Definición 7.2. Dado $a \in I$, se define \underline{a} como el conjunto difuso en X que tiene el valor constante a .

En particular, $\underline{0}$ es la función característica del conjunto vacío y $\underline{1}$ es la función característica de X .

Definición 7.3. Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de subconjuntos difusos en X . Se define la unión de esta colección como el conjunto difuso $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ cuya regla de correspondencia está dada por

$$\left(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) (x) = \sup\{A_\lambda(x) : \lambda \in \Lambda\}, x \in X$$

y su intersección es el conjunto difuso $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ con regla de correspondencia

$$\left(\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) (x) = \inf\{A_\lambda(x) : \lambda \in \Lambda\}, x \in X.$$

El complemento de un conjunto difuso A en X es el conjunto difuso A^c con regla de correspondencia

$$A^c(x) = 1 - A(x).$$

Estas definiciones generalizan las definiciones usuales de unión, intersección complemento e inclusión entre conjuntos ordinarios si se considera su función característica. Además, estas operaciones son conmutativas, asociativas, distributivas y satisfacen las leyes de De Morgan. No se cumple, en general, que $A \vee A^c = \underline{1}$ o $A \wedge A^c = \underline{0}$.

Algunas propiedades de los conjuntos difusos se pueden estudiar utilizando los conjuntos ordinarios llamados niveles. Además, estos conjuntos se utilizan para generalizar diversos conceptos de la matemática tradicional a conjuntos difusos.

Definición 7.4. Dado un conjunto difuso A en X y $a \in I$, se define el a -nivel superior cerrado de A como el conjunto ordinario $A_{[a]} = \{x \in X : A(x) \geq a\}$. De manera similar se denotan

$$\begin{aligned} A_{(a)} &= \{x \in X : A(x) > a\}, \\ A^{[a]} &= \{x \in X : A(x) \leq a\}, \\ A^{(a)} &= \{x \in X : A(x) < a\}. \end{aligned}$$

El conjunto $A_{(0)}$ es el soporte de A y se denota por $\text{supp}(A)$.

Definición 7.5. El rango de un conjunto difuso A es

$$\text{rank}(A) = \{a \in I : a = A(x) \text{ para algún } x \in X\}.$$

8 Topología difusa

Con el fin de emplear los conjuntos difusos en el estudio de propiedades topológicas de imágenes en tonos de gris, se utilizará la siguiente definición de espacio topológico difuso, propuesta en [2].

Definición 8.1. A una colección τ de conjuntos difusos en X que satisface las condiciones:

1. $\underline{0}, \underline{1} \in \tau$;
2. $A, B \in \tau$ implica $A \wedge B \in \tau$;
3. $A_\lambda \in \tau, \lambda \in \Lambda$ implica $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$;

se le llama una topología difusa en X y (X, τ) es un espacio topológico difuso. Los elementos de τ son los conjuntos abiertos. Un conjunto difuso en X es cerrado si su complemento es abierto respecto a esta topología.

Aunque hay diversos métodos para construir este tipo de topologías, para los fines de este capítulo la construcción más importante hace uso de un tipo especial de funciones definidas sobre un espacio topológico ordinario (X, T) llamadas funciones semicontinuas inferiormente (ver, por ejemplo, [5]).

Definición 8.2. Dado un espacio topológico ordinario (X, T) , una función $f : X \rightarrow I$ es semicontinua inferiormente si $f^{[a]} = \{x \in X : f(x) \leq a\}$ es un conjunto cerrado en X , para todo $a \in I$.

Se verifica que un subconjunto A de X es abierto si y sólo si su función característica es semicontinua inferiormente.

Una propiedad importante de estas funciones está dada en el siguiente teorema.

Teorema 8.3. *Dado un espacio topológico (X, T) , la colección de las funciones de X en I que son semicontinuas inferiormente constituye una topología difusa en X*

La función característica de un conjunto cerrado es un conjunto difuso cerrado respecto a esta topología. Además, un conjunto difuso A en X es abierto si, y sólo si, cada conjunto $A^{[a]}$ es cerrado. Equivalentemente, cada $A_{(a)}$ debe ser un conjunto abierto para que A sea un conjunto abierto. También, el conjunto difuso A es cerrado si cada conjunto $A_{[a]}$ es cerrado, es decir, si cada $A^{(a)}$ es abierto.

A la topología del teorema anterior se le denota por $\omega(T)$. Al par $(X, \omega(T))$ se le considera la copia difusa del espacio topológico (X, T) . Cuando no haya lugar a confusión, se escribirá $\omega(X)$ en lugar de $\omega(T)$. La topología difusa $\omega(X)$ tiene un papel muy importante, dado que se utiliza para indicar si alguna extensión de un concepto de la topología tradicional es buena [6].

9 Complejos difusos

En esta sección se presentan las definiciones de celda difusa y de complejo cúbico difuso propuestas en [7].

Una celda difusa se define como un conjunto difuso cuyas propiedades se relacionan con las de las celdas ordinarias definidas en la sección 2.

Definición 9.1. Una k -celda difusa en \mathbb{R}^n es un conjunto difuso \mathbf{s} en \mathbb{R}^n cuyo soporte es una k -celda y que es constante en dicho soporte. El valor de k es la dimensión de la celda difusa y el valor constante mencionado es el grado de la celda, denotado por $\text{deg}(\mathbf{s})$. Los elementos de su soporte son sus vértices. El conjunto de todas las celdas difusas se denota por $|\mathbb{Z}^n|_I$.

A la celda difusa con soporte $s(x, \Lambda)$ y grado a se le representará por $s(x, \Lambda, a)$. Cuando Λ sea el conjunto vacío, se utilizará la notación $s^{(0)}(x, a)$ y si $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$, se escribirá $s^{(n)}(x, a)$.

En el caso particular de que la celda tenga grado 1, esta definición coincide con la de función característica de una celda ordinaria.

En las figuras siguientes el grado de pertenencia se representa mediante diferentes tonos de gris. Se conviene en que el color negro corresponde al grado de pertenencia 1 y el color blanco corresponde al grado de pertenencia 0

Ejemplo 9.2. La figura 13 muestra un ejemplo de una 2-celda difusa de grado 0.3.

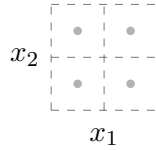


Figura 13: 2-celda difusa con grado de pertenencia 0.3.

A partir de estas celdas difusas se definen los complejos cúbicos difusos.

Definición 9.3. Un complejo cúbico difuso \mathbb{K} es cualquier colección de elementos de $|\mathbb{Z}^n|_I$ tal que celdas difusas diferentes tienen distintos soportes.

En el caso de que todas las celdas del complejo cúbico difuso tengan grado de pertenencia 1, esta definición coincide con la de complejo cúbico ordinario, identificando cada celda con su función característica.

Ejemplo 9.4. El conjunto \mathbb{K} formado por la 0-celda difusa $s^{(0)}((1, 1), 1)$, las tres 1-celdas difusas

$$s((1, 1), \{1\}, 0.5), s((2, 1), \{2\}, 1), s((2, 2), \{1\}, 0.5)$$

y la 2-celda difusa $s^{(2)}((2, 1), 0.2)$, es un complejo cúbico difuso.

Para los complejos cúbicos difusos se definen su soporte y sus conjuntos de nivel de forma similar al caso de los conjuntos difusos. La diferencia principal es que estos objetos son complejos cúbicos ordinarios.

Definición 9.5. Dado un complejo cúbico difuso \mathbb{K} , su soporte es el complejo cúbico ordinario definido por

$$\text{supp}(\mathbb{K}) = \{\text{supp}(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in \mathbb{K}\},$$

y su fondo, denotado por $\text{Bk}(\mathbb{K})$ es el complejo complemento de su soporte.

Definición 9.6. Si \mathbb{K} es un complejo cúbico difuso, para cada $a \in I - \{0\}$, su a -nivel superior cerrado $\mathbb{K}_{[a]}$ es la colección de los soportes de sus celdas difusas de grado $\geq a$. El conjunto $\mathbb{K}_{[0]}$ es, por definición, el complejo cúbico $|\mathbb{Z}^n|$. De manera similar, para $a \neq 0$ se define

$$\mathbb{K}^{(a)} = \{\text{supp}(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in \mathbb{K}, \text{deg}(\mathbf{s}) < a\} \cup \text{Bk}(\mathbb{K})$$

mientras que $\mathbb{K}^{(0)}$ es el complejo cúbico vacío. Para todo $a \in I$ se definen

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{(a)} &= \{\text{supp}(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in \mathbb{K}, \text{deg}(\mathbf{s}) > a\}, \\ \mathbb{K}^{[a]} &= \{\text{supp}(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in \mathbb{K}, \text{deg}(\mathbf{s}) \leq a\} \cup \text{Bk}(\mathbb{K}). \end{aligned}$$

Nótese que $\mathbb{K}_{(0)} = \text{supp}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^{[0]} = \text{Bk}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_{(1)} = \emptyset$ y $\mathbb{K}^{[1]} = |\mathbb{Z}^n|$.

Ejemplo 9.7. Para el complejo difuso del ejemplo 9.4, su soporte es el complejo ordinario formado por las celdas

$$s^{(0)}((1, 1)), s((1, 1), \{1\}), s((2, 1), \{2\}), s((2, 2), \{1\}), s^{(2)}((2, 1)).$$

El conjunto $\mathbb{K}_{[0.5]}$ está formado por las celdas

$$s((1, 1), \emptyset), s((1, 1), \{1\}), s((2, 1), \{2\}), s((2, 2), \{1\})$$

y el conjunto $\mathbb{K}_{[1]}$ está formado por las celdas

$$s^{(0)}((1, 1)), s((2, 1), \{2\}).$$

Observación 9.8. Los conjuntos de nivel satisfacen

$$\mathbb{K}_{[a]} = (\mathbb{K}^{(a)})^c$$

y

$$\mathbb{K}^{[a]} = (\mathbb{K}_{(a)})^c.$$

Los complejos cúbicos difusos se clasifican en cerrados o abiertos, dependiendo de las propiedades de sus conjuntos de nivel, de forma similar a la caracterización de los conjuntos abiertos o cerrados respecto a la topología difusa de las funciones semicontinuas inferiormente mencionada en la sección 8.

Definición 9.9. Un complejo cúbico difuso \mathbb{K} es:

1. cerrado si $\mathbb{K}_{[a]}$ es un complejo cúbico cerrado para todo $a \in I$,
2. abierto si $\mathbb{K}^{[a]}$ es un complejo cúbico cerrado para cada $a \in I$.

Si las celdas del complejo cúbico difuso tienen grado igual a 1, estas definiciones coinciden con las de complejo cúbico cerrado y complejo cúbico abierto, respectivamente.

Ejemplo 9.10. El complejo difuso del ejemplo 9.4 no es cerrado, porque la realización poliédrica de su soporte, mostrada en la figura 14, no es un conjunto cerrado en \mathbb{R}^2 .

Sin embargo, si se le agregan las 0-celdas difusas

$$s^{(0)}((2, 1), 1), s^{(0)}((3, 1), 0.2), s^{(0)}((2, 2), 1), s^{(0)}((3, 2), 0.5)$$

y las 1-celdas difusas

$$s((2, 1), \{1\}, 0.2), s((3, 1), \{1\}, 0.2)$$

se obtiene un complejo difuso cerrado.

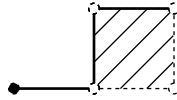


Figura 14: Realización poliédrica del 0-nivel superior del complejo cúbico difuso del ejemplo 9.4.

Ejemplo 9.11. El complejo cúbico difuso que consta de las 1-celdas difusas

$$s((1, 2), \{1\}, 0.2), s((2, 2), \{2\}, 0.2)$$

y de las 2-celdas difusas

$$s^{(2)}((1, 1), 0.5), s^{(2)}((1, 2), 0.2), s^{(2)}((2, 2), 0.5)$$

es abierto.

Por la observación 9.8, es claro que un complejo cúbico difuso \mathbb{K} es:

1. cerrado si, y sólo si, $\mathbb{K}^{(a)}$ es un complejo cúbico abierto para cada $a \in I$.
2. abierto si, y sólo si, $\mathbb{K}_{(a)}$ es un complejo cúbico abierto para todo $a \in I$.

Para algunas discusiones posteriores, relacionadas con conceptos de conexidad, será útil la siguiente definición.

Definición 9.12. El rango de un complejo cúbico difuso \mathbb{K} cuyo fondo es vacío, denotado por $\text{rank}(\mathbb{K})$, es el conjunto de elementos $a \in I$ para los cuales existe una celda difusa $\mathbf{s} \in \mathbb{K}$ tal que $\text{deg}(\mathbf{s}) = a$. Si el fondo de \mathbb{K} es no vacío, se agrega el elemento 0 al conjunto anterior.

10 Realización poliédrica

Con el fin de estudiar algunas propiedades topológicas de un complejo difuso y de ilustrar geoméricamente algunos conceptos posteriores, en [7] se propone una definición de su realización poliédrica como un subconjunto difuso de \mathbb{R}^n .

Definición 10.1. Si \mathbf{s} es una celda difusa, su realización poliédrica es el conjunto difuso en \mathbb{R}^n , $|\mathbf{s}| : \mathbb{R}^n \rightarrow I$ cuyo soporte es la realización poliédrica del soporte de \mathbf{s} y cuyo grado de pertenencia en los puntos de su soporte es $\text{deg}(\mathbf{s})$. La realización poliédrica de un complejo cúbico difuso \mathbb{K} se define como el conjunto difuso en \mathbb{R}^n dado por

$$|\mathbb{K}| = \bigvee_{\mathbf{s} \in \mathbb{K}} |\mathbf{s}|.$$

En el caso de una celda de grado 1, esta definición coincide con la de función característica de la realización poliédrica de su soporte. En consecuencia, si las celdas de un complejo cúbico difuso son de grado 1, esta definición coincide con la de la función característica de la realización poliédrica de su soporte.

Ejemplo 10.2. En la figura 15 se muestra la realización poliédrica del complejo cúbico difuso del ejemplo 9.4.

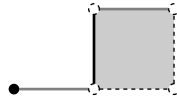


Figura 15: Realización poliédrica del complejo difuso del ejemplo 9.4

Ejemplo 10.3. En la figura 16 se muestra la realización poliédrica del complejo difuso cerrado del ejemplo 9.10.

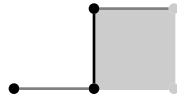


Figura 16: Realización poliédrica del complejo difuso cerrado del ejemplo 9.10.

Ejemplo 10.4. En la figura 17 se muestra la realización poliédrica del complejo difuso abierto del ejemplo 9.11.

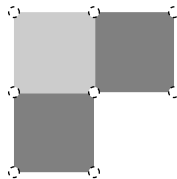


Figura 17: Realización poliédrica del complejo difuso abierto del ejemplo 9.11.

Algunas relaciones entre los α -niveles de un complejo cúbico difuso y los de su realización poliédrica se presentan en el siguiente teorema. Estas permiten demostrar propiedades del complejo cúbico difuso a partir de propiedades de su realización poliédrica

Teorema 10.5. *Sea \mathbb{K} un complejo cúbico difuso. Para todo $a \in I$:*

$$|\mathbb{K}_{[a]}| = |\mathbb{K}|_{[a]}.$$

Demostración. Si $a \neq 0$, dado $x \in |\mathbb{K}|_{[a]}$, se cumple $|s|(x) \geq a$ para una única celda difusa $s \in \mathbb{K}$. Con esto, $x \in \text{supp}(s)$ y $\text{deg}(s) \geq a$, de donde $\text{supp}(s) \in \mathbb{K}_{[a]}$ y $x \in |\mathbb{K}_{[a]}|$.

Ahora, si $x \in |\mathbb{K}_{[a]}|$, entonces $x \in |s|$ para alguna celda $s \in \mathbb{K}_{[a]}$. Como $s = \text{supp}(s')$ para alguna celda difusa $s' \in \mathbb{K}$ con $\text{deg}(s') \geq a$, entonces $|\mathbb{K}|(x) = |s'|(x) \geq a$, con lo que $x \in |\mathbb{K}|_{[a]}$.

Cuando $a = 0$, es clara la igualdad. □

Propiedades similares son válidas para los otros conjuntos de nivel.

Utilizando el teorema 10.5 se obtiene la siguiente caracterización importante de los complejos cúbicos difusos cerrados (abiertos) en términos de la copia difusa de \mathbb{R}^n definida anteriormente. Este resultado es una generalización del teorema 4.8.

Teorema 10.6. *Un complejo cúbico difuso es cerrado (abierto) si, y sólo si, su realización poliédrica es un conjunto difuso cerrado (abierto) en \mathbb{R}^n con respecto a la topología difusa $\omega(\mathbb{R}^n)$.*

11 Conexidad de complejos cúbicos difusos

En esta sección se presentan definiciones relacionadas con el concepto de conexidad para complejos cúbicos difusos y se mencionan algunas de sus propiedades.

La conexidad de un complejo cúbico difuso se define a partir de la conexidad de sus a -niveles superiores cerrados.

Definición 11.1. Un complejo cúbico difuso \mathbb{K} es conexo si todo a -nivel superior cerrado $\mathbb{K}_{[a]}$ es un complejo cúbico conexo.

Ejemplo 11.2. El complejo cúbico difuso formado por las 0-celdas

$$s^{(0)}((1, 1), 0.2), s^{(0)}((2, 1), 0.5),$$

las 1-celdas

$$s((1, 1), \{1\}, 0.2), s((2, 1), \{2\}, 0.5), s((2, 2), \{1\}, 0.7)$$

y la 2-celda $s^{(2)}((2, 1), 0.7)$, es conexo. Si se cambia la 0-celda $s^{(0)}((1, 1), 0.2)$ por $s^{(0)}((1, 1), 0.7)$, se obtiene un complejo difuso que no es conexo. La realización poliédrica de estos complejos difusos se muestra en la figura 18.

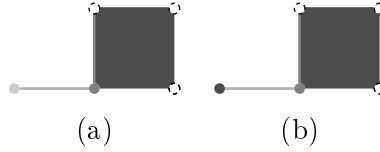


Figura 18: Conexidad de complejos difusos. En (a) se muestra la realización poliédrica de un complejo difuso conexo y en (b) la de uno que no es conexo.

En el caso de los complejos cúbicos difusos que no son conexos, se propone el concepto de máximo regional. Se mostrará que este tiene, en varios sentidos, propiedades similares al de componente conexa.

Definición 11.3. Sea \mathbb{K} un complejo cúbico difuso. Un máximo regional de \mathbb{K} de nivel $a > 0$ es un complejo cúbico ordinario \mathbf{L} que satisface:

1. \mathbf{L} es una componente conexa del complejo cúbico $\mathbb{K}_{[a]}$,
2. Para todo $b > a$, $\mathbf{L} \cap \mathbb{K}_{[b]} = \emptyset$.

En el caso de que las celdas del complejo cúbico difuso sean de grado 1, esta definición coincide con la de componente conexa de un complejo cúbico.

De manera análoga, los mínimos regionales tienen un papel similar al de las componentes conexas del complemento de un subconjunto del plano.

Definición 11.4. Un mínimo regional de nivel a , $0 < a < 1$, de \mathbb{K} es un complejo cúbico ordinario \mathbf{L} tal que

1. \mathbf{L} es una componente conexa del complejo cúbico $\mathbb{K}^{[a]}$.
2. Para todo $b < a$, $\mathbf{L} \cap \mathbb{K}^{[b]} = \emptyset$.

Si el fondo de \mathbb{K} es no vacío, un mínimo regional de nivel 0 de \mathbb{K} es una componente conexa de $\text{Bk}(\mathbb{K})$.

Definición 11.5. Un extremo regional de nivel a de \mathbb{K} es cualquier complejo cúbico ordinario que es un máximo o un mínimo regional de nivel a de \mathbb{K} .

Ejemplo 11.6. Sea \mathbb{K} el complejo cúbico difuso formado por la 0-celda $s^{(0)}((2, 2), 0.2)$, las 1-celdas

$$s((1, 2), \{1\}, 0.5), s((2, 2), \{1\}, 0.5), s((2, 1), \{2\}, 0.5), s((2, 2), \{2\}, 0.5)$$

y las 2-celdas

$$s^{(2)}((1, 1), 0.5), s^{(2)}((2, 1), 0.7), s^{(2)}((1, 2), 0.7), s^{(2)}((2, 2), 0.5).$$

El complejo cúbico formado por la 0-celda $s^{(0)}((2, 2))$ es un mínimo regional de nivel 0.2 de \mathbb{K} . Por otra parte, los complejos cúbicos $\{s^{(2)}((2, 1))\}, \{s^{(2)}((1, 2))\}$ son máximos regionales de nivel 0.7 de \mathbb{K} . En la figura 19 se muestra la realización poliédrica de este complejo difuso.

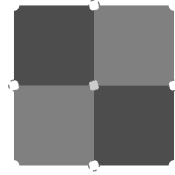


Figura 19: Realización poliédrica del complejo difuso del ejemplo 11.6, con dos máximos regionales de nivel 0.7 (las dos 2-celdas de tono más oscuro) y un mínimo regional de nivel 0.2 (la 0-celda del centro).

Por otra parte, en la figura 20 se muestra la realización poliédrica de los a -niveles superiores cerrados de este complejo difuso, correspondientes a los valores 0.7, 0.5 y 0.2

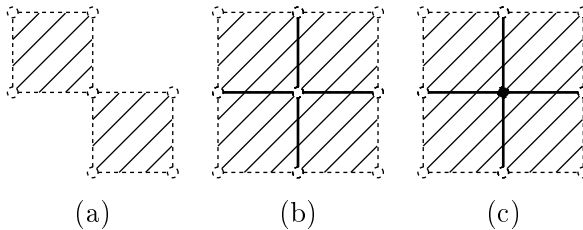


Figura 20: Realización poliédrica de los a -niveles superiores cerrados del complejo difuso del ejemplo 11.6, correspondientes a los valores (a) $a = 0.7$, (b) $a = 0.5$ y (c) $a = 0.2$.

Las componentes conexas de los a -niveles superiores cerrados de un complejo cúbico difuso tienen propiedades similares a las de las componentes conexas de un complejo cúbico ordinario, como se ilustra en los siguientes teoremas.

Teorema 11.7. *Si \mathbb{K} es un complejo cúbico difuso y $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ son componentes conexas de $\mathbb{K}_{[a_1]}$ y de $\mathbb{K}_{[a_2]}$, respectivamente, con $a_1 > a_2$, entonces $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2 = \emptyset$ o $\mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_2$.*

Demostración. Es claro que $\mathbb{K}_{[a_1]} \subset \mathbb{K}_{[a_2]}$. Como \mathbf{L}_1 es un subcomplejo conexo de $\mathbb{K}_{[a_2]}$ y \mathbf{L}_2 es una componente conexa de $\mathbb{K}_{[a_2]}$, la condición $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2 \neq \emptyset$ implica $\mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_2$. \square

Teorema 11.8. *Si \mathbb{K} es un complejo cúbico difuso cerrado entonces sus máximos regionales son complejos cúbicos cerrados.*

Demostración. Si \mathbf{L} es un máximo regional de nivel a de \mathbb{K} , entonces su realización poliédrica $|\mathbf{L}|$ es, por el corolario 5.5, una componente conexa del conjunto cerrado $|\mathbb{K}_{[a]}|$ en \mathbb{R}^n y, por tanto, es un conjunto cerrado. Así, \mathbf{L} es un complejo cúbico cerrado. \square

Este resultado es similar al correspondiente para las componentes conexas de un conjunto cerrado en un espacio topológico.

En el caso de los mínimos regionales se tiene el siguiente resultado análogo.

Teorema 11.9. *Los mínimos regionales de un complejo cúbico difuso abierto son complejos cúbicos cerrados.*

El siguiente teorema muestra una relación importante entre conexidad y máximos regionales de un complejo cúbico difuso.

Teorema 11.10. *Un complejo cúbico difuso \mathbb{K} con rango finito es conexo si, y sólo si, tiene un único máximo regional.*

Demostración. Sean $a_1 < a_2 \dots < a_k$ los elementos del rango de \mathbb{K} . Si \mathbb{K} es conexo, entonces $\mathbb{K}_{[a_k]}$ es un máximo regional de nivel a_k . Además, para todo $a < a_k$, $\mathbb{K}_{[a]}$ es conexo y contiene a $\mathbb{K}_{[a_k]}$, por lo que no hay máximos regionales de nivel a de \mathbb{K} .

Ahora, si \mathbb{K} tiene un único máximo regional, como cualquier componente conexa de $\mathbb{K}_{[a_k]}$ es un máximo regional de nivel a_k de \mathbb{K} , se deduce que $\mathbb{K}_{[a_k]}$ es conexo y corresponde al único máximo regional de \mathbb{K} . Además, una componente conexa \mathbf{L} de $\mathbb{K}_{[a_{k-1}]}$ no es un máximo regional de \mathbb{K} , por lo que $\mathbf{L} \cap \mathbb{K}_{[a_k]} \neq \emptyset$ y $\mathbf{L} \cup \mathbb{K}_{[a_k]}$ es un complejo cúbico conexo contenido en $\mathbb{K}_{[a_{k-1}]}$ y por tanto $\mathbf{L} = \mathbf{L} \cup \mathbb{K}_{[a_k]}$. Así, $\mathbb{K}_{[a_k]} \subset \mathbf{L}$. Se deduce que $\mathbb{K}_{[a_{k-1}]}$ tiene una única componente conexa y en consecuencia es conexo. El mismo razonamiento se puede aplicar a los complejos cúbicos $\mathbb{K}_{[a]}$ para los elementos restantes a en el rango de \mathbb{K} . Por tanto, \mathbb{K} es conexo. \square

En el caso de que el rango de un complejo cúbico difuso sea finito, se puede dar una caracterización más simple de sus máximos regionales.

Teorema 11.11. *Sea \mathbb{K} un complejo cúbico difuso con rango finito y sean*

$$a_1 < \dots < a_k,$$

sus elementos no nulos.

1. *Las componentes conexas de $\mathbb{K}_{[a_k]}$ son máximos regionales de nivel a_k de \mathbb{K} .*
2. *Si $l < k$, una componente conexa de $\mathbb{K}_{[a_l]}$ es un máximo regional de nivel a_l de \mathbb{K} si, y sólo si, $\mathbf{L} \cap \mathbb{K}_{[a_{l+1}]} = \emptyset$.*

Para los mínimos regionales se tiene una caracterización similar en el caso de que el fondo de \mathbb{K} sea vacío.

Teorema 11.12. *Dado \mathbb{K} un complejo cúbico difuso, sean*

$$a_1 < \dots < a_k,$$

los elementos no nulos de su rango y sea $a_0 = 0$. Para $1 \leq l < k$, una componente conexa de $\mathbb{K}^{[a_l]}$ es un mínimo regional de \mathbb{K} de nivel a_l si, y sólo si, $\mathbf{L} \cap \mathbb{K}^{[a_{l-1}]} = \emptyset$.

Los mínimos regionales tienen una estrecha relación con el complemento de las secciones del complejo cúbico difuso, como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 11.13. *Sea \mathbb{K} un complejo cúbico difuso con $\text{rank}(\mathbb{K}) = \{a_0, \dots, a_k\}$, donde $a_0 < \dots < a_k$. Si \mathbf{L} es un mínimo regional de nivel a_i de \mathbb{K} para algún $i < k$ y $a_i \neq 0$, entonces es una componente conexa de $(\mathbb{K}_{[a_{i+1}]})^c$.*

Demostración. Basta observar que $(\mathbb{K}_{[a_{i+1}]})^c = \mathbb{K}^{(a_{i+1})} = \mathbb{K}^{[a_i]}$ si $i < k$ y $a_i \neq 0$. \square

De forma similar se demuestra que si \mathbf{L} es un máximo regional de nivel a_i del complejo cúbico difuso \mathbb{K} , entonces es una componente conexa de $(\mathbb{K}^{[a_{i-1}]})^c$.

Utilizando este resultado, se deducen las siguientes propiedades de los extremos regionales.

Teorema 11.14. *Sea \mathbb{K} un complejo cúbico difuso con rango finito.*

1. *Si \mathbb{K} es cerrado, sus mínimos regionales son complejos cúbicos abiertos.*
2. *Si \mathbb{K} es abierto, sus máximos regionales son complejos cúbicos abiertos.*

12 Grupos de homología

A cada complejo cúbico difuso se le pueden asociar grupos de homología utilizando sus a -niveles superiores cerrados.

Definición 12.1. Dado un complejo cúbico difuso \mathbb{K} con soporte finito y rango $\text{rank}(\mathbb{K}) = \{a_0, \dots, a_k\}$, su m -ésimo grupo de homología de nivel a_i se define como

$$H_m(\mathbb{K}, a_i) = H_m(|\mathbb{K}_{[a_i]}|, |\mathbb{K}_{[a_{i+1}]}|).$$

donde el lado derecho es el m -ésimo grupo de homología singular del par topológico $(|\mathbb{K}_{[a_i]}|, |\mathbb{K}_{[a_{i+1}]}|)$ y $\mathbb{K}_{[a_{k+1}]}$ es, por convención, el complejo cúbico vacío. El rango de este grupo, cuando es finito, es el m -ésimo número de Betti de nivel a_i y se denota por $\beta_m(\mathbb{K}, a_i)$. La característica de Euler de nivel a_i se define como

$$\chi(\mathbb{K}, a_i) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \beta_m(\mathbb{K}, a_i).$$

En el caso de que \mathbb{K} sea un complejo difuso cerrado, denotando por $\alpha_k(\mathbb{K}, a_i)$ el número de k -celdas de $\mathbb{K}_{[a_i]}$ que no pertenecen a $\mathbb{K}_{[a_{i+1}]}$, se demuestra que

$$\chi(\mathbb{K}, a_i) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_k(\mathbb{K}, a_i).$$

Es sabido que si X es un espacio topológico arco-conexo y A es cualquier subconjunto no vacío de X , entonces el 0-grupo de homología singular $H_0(X, A)$ es trivial. También se sabe que $H_0(X, \emptyset)$ es isomorfo a $H_0(X)$ para cualquier espacio topológico X . De esto se deduce que, en general, si X tienen un número finito de componentes arco-conexas, entonces el rango de $H_0(X, A)$ es igual al número de componentes arco-conexas de X que no tienen elementos de A . Por esto, el 0-número de Betti del par $(|\mathbb{K}_{[a_i]}|, |\mathbb{K}_{[a_{i+1}]}|)$ es igual al número de componentes de $|\mathbb{K}_{[a_i]}|$ que no contienen elementos de $|\mathbb{K}_{[a_{i+1}]}|$. Aplicando el teorema 11.11, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 12.2. *El número de máximos regionales de nivel a_i de un complejo cúbico difuso \mathbb{K} es $\beta_0(\mathbb{K}, a_i)$.*

Cuando todas las celdas de \mathbb{K} tienen grado 1, $\beta_0(\mathbb{K}, 1)$ es igual al número de componentes arco-conexas del soporte de \mathbb{K} y por lo tanto este teorema es una generalización del teorema 6.2.

Ejemplo 12.3. En la figura 21 se muestra la realización poliédrica de las nueve 0-celdas difusas, las doce 1-celdas difusas y las cuatro 2-celdas difusas de un complejo cúbico difuso \mathbb{K} . El tono de gris más claro corresponde a celdas con grado de pertenencia 0.4 y el más oscuro corresponde a celdas de grado 0.7. En este caso, $a_0 = 0$, $a_1 = 0.4$ y $a_2 = 0.7$. Los a -niveles superiores correspondientes a los valores 0.7 y 0.4 se muestran en la figura 22. El 0-nivel superior es el complejo cúbico $|\mathbb{Z}^2|$.

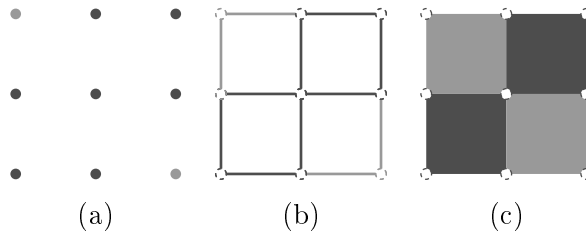


Figura 21: Realización poliédrica de (a) las nueve 0-celdas, (b) las doce 1-celdas y (c) las cuatro 2-celdas del complejo cúbico difuso del ejemplo 12.3.

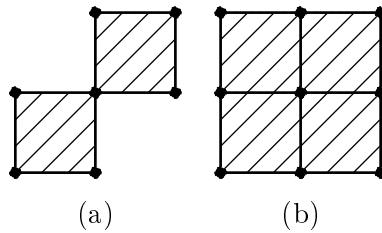


Figura 22: a -niveles superiores del complejo cúbico difuso del ejemplo 12.3 correspondientes a los valores (a) $a_2=0.7$ y (b) $a_1=0.4$.

En el siguiente cuadro se muestran los números de Betti, el número de celdas y la característica de Euler por niveles de este complejo cúbico difuso.

i	a_i	β_0	β_1	β_2	α_0	α_1	α_2	χ
1	0.4	0	0	0	2	4	2	0
2	0.7	1	0	0	7	8	2	1

Agradecimientos

Agradecemos encarecidamente a los árbitros su revisión exhaustiva del trabajo. Sus sugerencias y comentarios permitieron mejorar sustancialmente una primera versión del mismo.

Bibliografía

- [1] B. Dubrovin, S. Novikov, A. Fomenko, *Geometría Moderna. Métodos de la teoría de homología*, Mir, Moscú, 1984.
- [2] C.L. Chang, *Fuzzy topological spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 24 (1968), no. 1, 182–190.
- [3] T. Kaczynski and K. Mischaikow and M. Mrozek, *Computational Homology*, Springer Verlag, 2004.
- [4] E. E. Kerre, *A Historical Overview of Fuzzy Mathematics*, New Mathematics and Natural Computation 1 (2005), no. 1, 1–26.
- [5] R. Lowen, *Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 56 (1976), 621–633.
- [6] R. Lowen, *Matemática difusa y complejos cúbicos*, Revista de Matemática. Teoría y Aplicaciones 24 (2017) no. 2, 201–255.
- [7] A. Maceda-Méndez, *Connectedness in fuzzy topological spaces*, Rocky Mountain Journal of Mathematics 11 (1981), 427–433.
- [8] M. A. Rodríguez Pineda, *El concepto de índice de un punto lattice en el análisis homotópico de 2D y 3D imágenes y su realización algorítmica*, Ph.D.thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 1997.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Tecnológica de la Mixteca
Carretera a Acatlima, Km 2.5,
Huajuapán de León, Oaxaca, C.P. 69000

dherrera@fcfm.buap.mx

admm@mixteco.utm.mx

fmacias@fcfm.buap.mx

Análisis matemático

Capítulo 5

Aproximación de funciones con PyChebFun

Juana Elisa Escalante Vega¹, Esteban Escamilla Navarro^{2,3},
Francisco Sergio Salem Silva²

¹FEI, ²FM-UV, ³FI-UV

Resumen

Con el crecimiento de la potencia de los procesadores de las computadoras, es fácil asumir que se puede realizar toda clase de algoritmos con ellas. Sin embargo, éstas siguen presentando problemas de optimización, lo que ha llevado al estudio de algoritmos para resolver éstos problemas. Un ejemplo de ello son los algoritmos que forman el sistema ChebFun implementado en Matlab, desarrollado por Bates y Threfethen. Dentro del software libre, se ha desarrollado su equivalente PyChebFun en el lenguaje Python, desarrollada por Chris Swierczewski, mantenido por Oliver Verdier. En este artículo estudiaremos los conceptos que hacen a la biblioteca PyChebFun eficiente para la aproximación de funciones. También se verán varias de las utilidades que incluye esta biblioteca.

1 Introducción

En la actualidad es conveniente aprovechar las capacidades que poseen las computadoras para hacer cálculos que podrían ser prácticamente imposibles de resolver analíticamente. Para usar estas capacidades de manera eficiente, es muy importante entender la teoría que las sustentan. En este sentido se desarrolla este trabajo. En particular, se dan todos los conceptos necesarios para definir a las series de Chebyshev y se demuestra que éstas series son eficientes para la aproximación de funciones (véase [4]), lo que hace pertinente el uso de una computadora para desarrollar métodos que aprovechan la estructura de su serie de Chebyshev, en particular, el cálculo de raíces aproximadas que resulta sorprendentemente rápido debido a que esto se hace a través de la transformada rápida de Fourier (véase [2]), el cálculo de su integral por medio de una cuadratura y el cálculo de derivadas por medio de métodos espectrales (véase [5]).

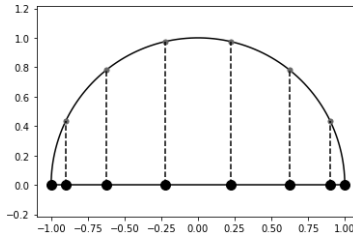


Figura 1: Ocho puntos de Chebyhsev

2 Bases: Puntos, Polinomios, y Series de Chebyshev

Definición 2.1. Para $n \in \mathbb{N}$, los n puntos de Chebyshev son $x_j = \cos \frac{j\pi}{n-1}$ para $j = 0, 1, \dots, n-1$

Si se toma la partición del intervalo $[0, \pi]$, constituida por $0, \frac{\pi}{n-1}, \dots, \frac{(n-2)\pi}{n-1}, \pi$, los puntos de Chebyhsev son las proyecciones sobre el eje X de los puntos que están en la parte superior del círculo unitario, con ángulos determinados por la partición (véase Figura 1).

Estos puntos son muy importantes en la teoría de aproximación, ya que en muchos casos, corrige el fenómeno de Runge y hace la aproximación "más eficiente" (véase [4]). PyChebFun usa éstos puntos para crear sus aproximaciones.

Definición 2.2. El k -ésimo polinomio de Chebyshev está dado por

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x), k \in \mathbb{N}, x \in [-1, 1]$$

Por medio del análisis complejo, se puede demostrar que $T_k(x) = \frac{1}{2}(z^k + z^{-k})$ para $z = x + iy, |z| = 1$, que es la parte real del polinomio z^k . Esto facilita la demostración de la siguiente ley de recurrencia para polinomios de Chebyshev (véase [5]):

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

con

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x$$

confirmando que $T_k(x)$ es un polinomio de grado k . El Cuadro 1 muestra los primeros polinomios de Chebyshev usando la ley de recurrencia.

Además, estos polinomios forman una base para el conjunto de los monomios y, en general, para los polinomios (véase [4]) en \mathbb{R} . Como ejemplo, el siguiente código con PyChebFun:

Cuadro 1: Polinomios de Chebyshev

k	$T_k(x)$	k	$T_k(x)$
0	1	3	$4x^3 - 3x$
1	x	4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
2	$2x^2 - 1$	5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$

```
In [2]: x = Chebfun.from_function(lambda x:x)
```

```
In [3]: print (x)
```

```
<Chebfun(2)>
```

Primero se genera el objeto Chebfun en la línea 2. El objeto Chebfun es un polinomio que interpolará a la función en los puntos de Chebyshev, y es una combinación lineal de polinomios de Chebyshev. A partir de este momento, toda operación y/o modificación sobre x seguirá generando objetos Chebfun. Al imprimir la variable x , Python dice que ha creado un objeto Chebfun con 2 elementos. Estos elementos son los puntos de Chebyshev usados para interpolar:

```
In [4]: print (x.coefficients())
```

```
[ 0.  1.]
```

El método `.coefficients` regresa los coeficientes correspondientes a los polinomios de Chebyshev en orden ascendente para formar al objeto Chebfun, en este caso, x . Es decir:

$$x = 0 \cdot T_0(x) + 1 \cdot T_1(x) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x$$

Teniendo el objeto Chebfun en la variable x , se procede a definir y como el objeto Chebfun elevado a la 4. Es decir:

```
In [5]: y = x**4
print (y.coefficients())
```

```
[ 0.375  0.    0.5   0.    0.125]
```

esto es:

$$x^4 = \frac{3}{8} \cdot T_0(x) + \frac{1}{2} \cdot T_2(x) + \frac{1}{8} T_4(x)$$

Por los ejemplos, se podría intuir que todo polinomio en \mathbb{R} se puede reescribir como una combinación lineal finita de polinomios de Chebyshev. Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 2.3. Una serie de Chebyshev está dada por $\sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x)$, con $a_k \in \mathbb{R}$

Por lo tanto, un Chebfun es una serie truncada de Chebyshev. Como la utilidad de PyChebFun no se limita a polinomios, se presenta el siguiente teorema para justificar su uso en funciones en \mathbb{R} :

Teorema 2.4. Si la función f es Lipschitz continua en $[-1, 1]$, tiene una representación única como una serie de Chebyshev absoluta y uniformemente convergente

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x)$$

Además, sus coeficientes están dados por:

$$a_k = \frac{c}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \qquad c = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 2 & k \geq 1 \end{cases}$$

No se indagará en la demostración. La clave es la relación que hay entre la serie de Chebyshev para $x \in [-1, 1]$, la serie de Laurent para $|z| = 1$ y la serie de Fourier para $\theta \in [-\pi, \pi]$ (véase [4]).

El comando `.from_fuction` en PyChebFun permite usar estos conceptos para crear objetos aproximados en gran medida a funciones (mientras éstas sean Lipschitz). Un ejemplo en PyChebFun es el siguiente código que genera la Figura 2:

```
In [6]: import numpy as np

        f = Chebfun.from_function(lambda x: np.exp(x**2)
                                / (1+x**10))
```

```
In [7]: from pychebfun import plot
        import matplotlib.pyplot as plt

        plot(f, '.')
        plt.show()
```

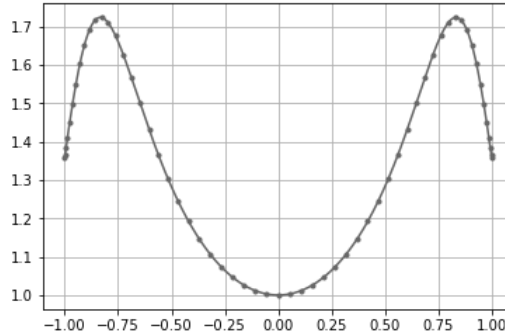


Figura 2: Gráfica de $f(x) = \frac{e^{x^2}}{1+x^{10}}$

PyChebFun ha obtenido los coeficientes a_k para $\frac{e^{x^2}}{1+x^{10}} = \sum_{k=0}^N a_k T_k(x)$, encontrando una N que aproxime suficientemente los valores de la función con los valores de la serie. Esto se obtiene por medio de un algoritmo adaptivo que revisa la diferencia obtenida entre la función y la serie truncada. Si no es suficientemente pequeña (el error mínimo de la computadora usada), usa otro valor de N .

La función `plot()` importada de PyChebFun es diferente a la función `plot` usada en la biblioteca "`matplotlib.pyplot`". Los puntos en la gráfica de la función son los puntos usados para crear el objeto `Chebfun`. Los coeficientes de la serie son obtenidos por medio de la Transformada Discreta de Fourier (véase [2]):

- Dados $y_j = f(x_j)$ evaluados para $x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n-1}\right)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$

1) Se genera un vector

$$V = [y_0, y_1, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1] = [v_0, v_1, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n, \dots, v_{2n-3}]$$

de longitud $2n-2$

2) Para los coeficientes a_k :

o Si $k = 0$ o $k = n-1$:

$$a_k = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{j=0}^{2n-3} v_j \cos\left(\frac{j\pi}{n-1}\right)$$

o Para $k = 1, 2, \dots, n-2$:

$$a_k = \frac{1}{n-1} \sum_{j=0}^{2n-3} v_j \cos\left(\frac{j\pi}{n-1}\right)$$

En particular, para la función $\frac{e^{x^2}}{1+x^{10}}$, se tienen 59 coeficientes:

```
In [8]: print (len(f.coefficients()))
        print (f.size())
```

```
59
```

```
59
```

El método `.size()` muestra la cantidad de puntos de Chebyshev usados para interpolar, y el comando `len()` arroja el tamaño del vector `f.coefficients()`. Por el código anterior, se puede ver que la cantidad de coeficientes coincide con la cantidad de puntos de Chebyshev usados para interpolar.

3 Métodos para Series de Chebyshev

Intervalos y operaciones

Hasta ahora, se han trabajado con funciones en el intervalo $[-1, 1]$. Se pueden usar intervalos del tipo $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ para un Chebfun como sigue:

```
In [9]: f_cos = Chebfun.from_function(
        lambda x:np.cos(x), [-np.pi, np.pi])
        f_sin = Chebfun.from_function(
        lambda x:np.sin(x), [-np.pi, np.pi])

        plt.grid()
        plot(f_cos, '.', color='blue')
        plot(f_sin, '.', color='red')
        plt.show()
```

En este caso, se ha usado el intervalo $[-\pi, \pi]$ para las funciones $\cos x$ y $\sin x$, graficados en la Figura 3.

Los Chebfuns se pueden sumar y multiplicar entre ellos y por un escalar. Por ejemplo:

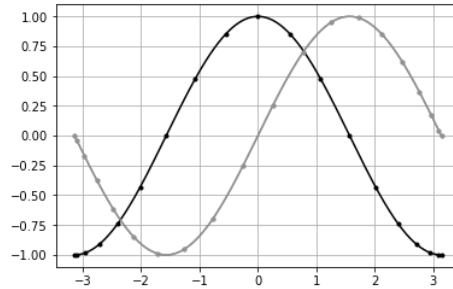


Figura 3: Gráficas de coseno y seno en $[-\pi, \pi]$

```
In [10]: suma = f_cos + f_sin
         producto = f_cos * f_sin

         print (suma)
         print (producto)

         print (.5*suma)
         print (2*producto)
```

```
<Chebfun(20)>
<Chebfun(26)>
<Chebfun(20)>
<Chebfun(26)>
```

El print a las variables muestra que se han generado objetos Chebfuns nuevos operando las funciones definidas anteriormente. Se muestra además las gráficas de los Chebfuns en la Figura 4:

```
In [11]: plt.grid()
         plot(suma, '.', color='blue')
         plot(producto, '.', color='red')
         plt.show()
```

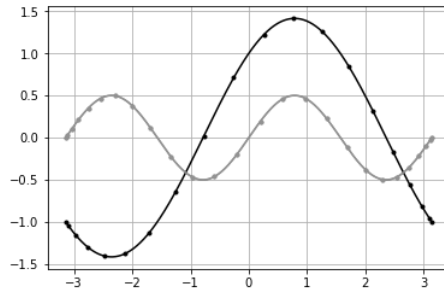



Figura 4: Gráficas de la suma y producto de coseno y seno

Cálculo aproximado de raíces

Una serie de Chebyshev es un polinomio. Entonces existe una matriz cuyos valores propios corresponden con las raíces de la serie de Chebyshev. Esta matriz es conocida como matriz compañera (esto se justifica en [1]) con el siguiente teorema:

Teorema 3.1. *Las raíces del polinomio $\sum_{k=0}^n a_k T_k(x)$, con $a_n \neq 0$ son los valores propios de la matriz cuadrada de dimensión n :*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{a_0}{2a_n} & -\frac{a_1}{2a_n} & -\frac{a_2}{2a_n} & \dots & -\frac{a_{n-2}}{2a_n} + \frac{1}{2} & -\frac{a_{n-1}}{2a_n} \end{bmatrix}$$

Los elementos que no se muestran en la matriz son cero.

En PyChebFun, el método `.roots()` encuentra las raíces aproximadas de una función encontrando los valores propios de su matriz compañera. Como ejemplo se usan las funciones suma y producto, definidas anteriormente:

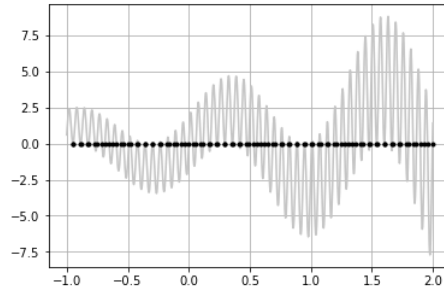


Figura 5: Gráfica de $tig(x) = 2e^{\frac{1}{2}x}(\sin 5x + \sin 101x)$

```
In [12]: print (suma.roots())
```

```
[-0.78539816  2.35619449]
```

```
In [13]: print (producto.roots())
```

```
[-3.14159265e+00 -1.57079633e+00  3.14159265e+00
 1.96615291e-17
 1.57079633e+00]
```

Otro ejemplo más ilustrativo es el de la Cola del Tigre, presentado por Threfethen:

```
In [14]: tt = Chebfun.from_function(lambda
        x:2*np.exp(.5*x)*(np.sin(5*x) + np.sin(101*x)),
        [-1,2])

from time import time
start = time()
raiztt= tt.roots()
end = time()

plot(tt, color='orange')
plt.plot(raiztt, np.zeros(len(raiztt)), '.', color='blue')
plt.grid(True)
plt.show()
```

La línea continua en la Figura 5 es la Cola del Tigre, y los puntos son las raíces

de la función. Además, se incluyen comandos necesarios para calcular el tiempo que le tomó a PyChebFun hacer los cálculos.

Cabe destacar que se han calculado más de 90 raíces en 36 centésimas de segundos, como se puede ver aplicando los siguientes comandos:

```
In [15]: print (len(raiztt))
         print (end-start)

96
0.036095619201660156
```

Cálculo aproximado de integrales

Se puede calcular la integral aproximada de una función del tipo $\int_a^b f(x)dx$ obteniendo su Serie de Chebyshev y usando la Cuadratura de Clenshaw-Curtis (véase [3]). A continuación se describe:

Teorema 3.2 (Cuadratura de Clenshaw-Curtis). *Sea $f(x)$ en $[-1, 1]$, con serie de Chebyshev $\sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x)$ tal que su serie de Chebyshev converge uniformemente. Entonces*

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = a_0 + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{2a_k}{1 - k^2}$$

En PyChebFun, se usa el método .sum() para obtener la integral aproximada de una función por medio del teorema 3. Por ejemplo:

```
In [14]: cos = Chebfun.from_function(
         lambda x:np.cos(x))
         print (cos.sum())

1.68294196962
```

Este código muestra el resultado aproximado de $\int_{-1}^1 \cos x dx$. Comparando resultados con la integral exacta evaluada en Python:

```
In [23]: print (np.sin(1)-np.sin(-1))

1.68294196962
```

se puede ver que el resultado es exacto, al menos en 12 dígitos. Si se requiere integrar en otro intervalo, se modifica desde la creación del Chebfun:

```
In [15]: sin = Chebfun.from_function(
          lambda x:np.sin(x), [0, np.pi])
          print (sin.sum())

2.0
```

donde se ha integrado $\int_0^\pi \sin x dx$. Para finalizar, se muestra la integral aproximada de la función $\cos e^{x^2} + \sin 25x^2$ en el intervalo por defecto:

```
In [16]: funcion = Chebfun.from_function(lambda
          x:np.cos(np.exp(x**2))-np.sin(25*x**2))
          print(funcion.sum())

0.0144800014078
```

Otro método que ocupa la cuadratura de Clenshaw-Curtis es `.dot()`, que obtiene el producto escalar de Hilbert dado por $\int_a^b f(x)g(x)dx$ de la siguiente manera:

```
In [17]: print(f_cos.dot(f_sin))

2.04878586898e-16
```

Este resultado es congruente con el hecho de que las funciones coseno y seno son ortogonales bajo el producto escalar de Hilbert.

Cálculo aproximado de derivadas

Para calcular la derivada de una función en un intervalo, PyChebFun usa de las técnicas de derivación espectrales (véase [5]) bajo el método `.differentiate()`. Por ejemplo:

```
In [18]: der_cos = f_cos.differentiate()

          plot(f_cos, color='blue')
          plot(der_cos, color='red')
          plot(-(f_sin), 'o', color='red')
          plt.grid(True)
          plt.show()
```

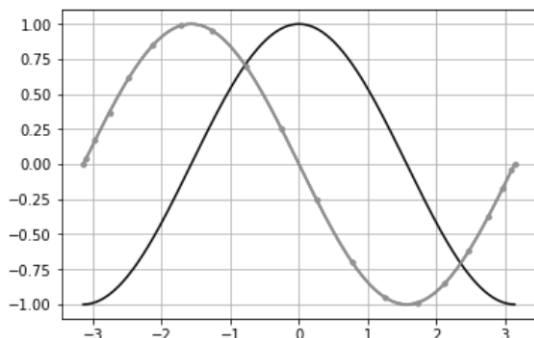


Figura 6: Gráfica de la función coseno y su derivada

En el código anterior, se le da a la variable `der_cos` la derivada del objeto `f_cos`, que se le ha asignado anteriormente la función coseno en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Se procede a hacer la gráfica de los objetos `f_cos` y `der_cos`, y se grafican algunos puntos del objeto `-(f_sin)`, que es el negativo de la función seno de $[-\pi, \pi]$. Se puede ver que los puntos de `-(f_sin)` están dentro de la gráfica de la derivada del coseno, que precisamente es `-seno` (véase Figura 6).

Se puede calcular el valor de la derivada en un punto específico:

```
In [19]: derivada = funcion.differentiate()
print (derivada(.5))
-26.217824155040766
```

Se ha usado la función $\cos e^{x^2} + \sin 25x^2$ en el intervalo por defecto, y se ha calculado el valor de la derivada en $x = \frac{1}{2}$

4 Conclusiones

El trabajo combinado de los métodos que usan las series de Chebyshev en PyChebFun brindan al interesado una selección de métodos computacionales para la aproximación de funciones, con un margen de error menor a 1×10^{-16} , lo que demuestra que es un sistema preciso y eficiente para el trabajo con funciones. Más aún, el sistema tiene el potencial de permitir la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, de difícil resolución analítica. Se espera poder continuar el estudio de los métodos que podrían permitir a PyChebFun resolver éstas ecuaciones, para poder incluirlo al sistema.

Bibliografía

- [1] Boyd, J. P., Solving Transcendental Equations, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014.
- [2] Chu, Eleanor, INSIDE the FFT BLACK BOX: Serial and Parallel Fast Fourier Transform Algorithms, CRC Press LLC, 2000.
- [3] Mason, J. C., Chebyshev Polynomials, Chapman & Hall/CRC, 2003.
- [4] Trefethen, L. N., Approximation Theory and Approximation Practice, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013.
- [5] Trefethen, L. N., Spectral Methods in Matlab, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.

Laboratorio Nacional de Informática Avanzada, LANIA

Rebsamen No. 80, Colonia Isleta

Xalapa, Ver. C.P. 91090

Facultad de Matemáticas, UV

Gonzalo Aguirre Beltrán s/n, Zona Universitaria, Col. Isleta

Xalapa, Ver. C.P.91090

Facultad de Informática, UV

Avenida Xalapa s/n, Colonia Obrero Campesino

Xalapa, Ver. C.P. 91020

escamilla.een@gmail.com

fsergios@gmail.com

jescalante@uv.mx

Probabilidad y estadística

Capítulo 6

VaR y CVaR con cópulas elípticas: una aplicación a portafolios de inversión bivariados con análisis retrospectivo

Jacobo Guzmán Trujillo, María Teresa Verónica Martínez Palacios, Ambrosio Ortiz Ramírez

Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional

Resumen

En este trabajo se analiza la capacidad predictiva de los métodos: simulación histórica (SH), paramétrico (P) y simulación Monte Carlo (SMC) para el cálculo del Valor en Riesgo (VaR) y Valor en Riesgo Condicional (CVaR). Se supone que los rendimientos logarítmicos de los activos siguen una distribución bivariada con estructura de dependencia caracterizada por cópulas elípticas, posteriormente con una serie de precios históricos de AMXL, WALMEX y tipo de cambio FIX del periodo 30/06/2014 al 29/12/2017, se calcula el VaR y el CVaR por simulación Monte Carlo con cópula gaussiana y t-Student, y con los métodos SH, P y SMC al 99 % de confianza. Se considera una diversificación simple al invertir 50 % en cada activo seleccionado o un título por cada activo. Para verificar las ventajas de este procedimiento con cópulas sobre los modelos estándar de estimación del VaR, se ejecuta un análisis retrospectivo (backtesting) del 30/12/2016 al 29/12/2017 con 252 observaciones. La evidencia empírica muestra que el modelo con cópula t-Student es el más eficiente para los portafolios (AMXL, FIX), (FIX, WALMEX) y (AMXL, WALMEX) puesto que fue el que presentó el menor número de excepciones de VaR y CVaR.

1 Introducción

En los últimos años la innovación de metodologías para la medición de los riesgos financieros se ha expandido. Dado que las crisis han ocasionado estragos en el sistema financiero internacional, se han propuesto métodos que cuantifiquen de forma precisa y apropiada los riesgos a los que se está expuesta una entidad, para así poder gestionarlos y controlarlos lo más acertadamente posible. Según [15] algunas de las entidades financieras más importantes han sufrido cuantiosas pérdidas debido a que no se prestó la suficiente atención a la exposición por los riesgos financieros, por ejemplo, la bancarrota del banco inglés Barings, el desastre del condado de

Orange en Florida, el banco Daiwa en Japón y la crisis subprime con el colapso del banco Lehman Brothers que tuvo consecuencias de una magnitud inesperada, hechos que dieron lugar al replanteamiento de medidas regulatorias más robustas como lo es Basilea III¹.

Uno de los métodos que ha tenido varias extensiones es el Valor en Riesgo² (VaR). Como paradigma en la medición del riesgo financiero, este método tiene su origen en la mitad de la década de los noventa y hoy en día es una métrica estándar en la medición del riesgo mercado [28]. Se hace énfasis en que la definición de VaR es válida únicamente para condiciones normales de mercado, ya que en momentos de crisis o turbulencias, la pérdida esperada se define con pruebas de *stress* o valores extremos. Una medida alterna al VaR es el Valor en Riesgo Condicional (CVaR) [25], cuyo propósito es medir el riesgo más allá del VaR, es decir, la pérdida esperada en la cola de la distribución de pérdidas y ganancias, pues el VaR no es una medida de riesgo coherente [1]. Las técnicas estadísticas estándar para estimar el VaR y CVaR de un portafolio de inversión y que se usan en este trabajo son : el método paramétrico, simulación Monte Carlo y simulación histórica [4].

Una de las desventajas de la estimación del VaR es que se supone normalidad de los rendimientos de los activos individuales y correlación lineal simple como estructura de dependencia entre los diferentes activos de riesgo del portafolio, ambos supuestos se han criticado, en particular sobre el supuesto de normalidad, los conglomerados de volatilidad y el exceso de curtosis [3], pues en la práctica se ha observado, que la mayoría de los activos no siguen un comportamiento estrictamente normal, además de que las transformaciones de los datos podrían afectar los cálculos, otra limitación es que la correlación no está definida a menos que las varianzas de las variables aleatorias sean finitas. Por otra parte, el riesgo de un portafolio está directamente relacionado con la dependencia de los activos que lo componen, por lo que si la *dependencia* entre los activos no es lineal, puede acarrear una valoración inadecuada de la exposición al riesgo, por lo tanto, una estructura de dependencia bien identificada y tratada de forma idónea ayudará a llevar a cabo una medición de riesgos con mayor precisión.

Una manera de resolver los problemas derivados de lo anterior es con teoría de cópulas [23] y adaptarla a la medición del VaR y del CVaR en un contexto de administración de riesgo de mercado. El término cópula se deriva del latín “cópula” y se refiere a unión, conexión, entrelazar. Fue usado por primera vez en un contexto

¹Basilea III es un estándar mundial de regulación voluntaria sobre la adecuación del capital de los bancos, de pruebas de estrés y de riesgo de liquidez. Uno de sus objetivos principales es reforzar los requerimientos de capital de los bancos mediante el aumento de liquidez bancaria y disminuir el apalancamiento bancario.

²VaR: Pérdida máxima que puede tener un portafolio dado un horizonte temporal y un nivel de confianza, bajo condiciones normales de mercado.

matemático por Abe Sklar en 1959 [26] en un teorema que describe la relación funcional que existe entre las marginales y su función de distribución, en el cual el objetivo de las cópulas es encontrar la distribución conjunta que mejor refleje la relación entre las variables aleatorias X e Y y que garantice que la distribución condicional asociada represente fielmente esa relación de dependencia, es decir, se toma en cuenta toda la estructura de dependencia del fenómeno analizado sin partir de supuestos sobre sus distribuciones, esto para después utilizarse en el cálculo de métricas de riesgo. Por lo que analizar el comportamiento conjunto de los diferentes factores de riesgo, resulta de vital importancia para la correcta medición del riesgo de mercado. En [6] se desarrolla una introducción formal a los conceptos y resultados básicos sobre cópulas, además de su utilidad para estudiar y medir dependencia de variables aleatorias, como consecuencia del Teorema de Sklar.

El objetivo principal de este trabajo es proponer y aplicar una metodología para calcular el VaR y CVaR mediante cópulas elípticas de tres portafolios de inversión bivariados compuestos por las acciones de AMXL y WALMEX cotizadas en la bolsa mexicana de valores (BMV) y el tipo de cambio peso-dólar (FIX) publicado por el Banco de México, es decir, estimar el VaR y CVaR de los portafolios: (AMXL, FIX), (FIX, WALMEX) y (AMXL, WALMEX) con los tres métodos estándar y con las cópulas elípticas (cópula: t-student y gaussiana), tomando los precios de cierre en el periodo 30/06/2014 al 29/12/2017 con un nivel de confianza del 99%. Se considera un título por cada activo del portafolio. Para los portafolios bivariados se selecciona el tipo de cambio FIX puesto que es una de las series más volátiles en el mercado, esto para analizar cómo influye su comportamiento en las otras dos series seleccionadas, las cuales son de las más representativas en cuanto a ponderación y porcentaje de la BMV. De esta forma las cópulas se usan con la idea de capturar toda la estructura de dependencia entre las series y así obtener una estimación más precisa para la pérdida máxima que puedan tener los portafolios y después realizar un análisis de *backtesting* con el cual se pretende comprobar la hipótesis: si con información al día t la pérdida pronosticada por el VaR para el día siguiente ($t+1$), es rebasada por la pérdida real del día ($t+1$), a las cuales se les llaman excepciones, por lo que el modelo más eficiente será el que tenga menor número de excepciones.

Este trabajo está organizado como sigue. En la siguiente sección se presenta una introducción a la teoría de cópulas. En la sección 3 se describe la cópula producto y su relación la cotas de Fréchet-Hoeffding [10], [13], así como las cópulas elípticas y Arquimedianas. En la sección 4 se plantean los métodos de simulación de Monte Carlo para cópulas. En la sección 5 se describen los principales métodos de estimación de los parámetros de cópulas. En el apartado 6 se plantea los métodos para calcular el VaR y CVaR por cópulas. En la sección 7 se analizan y discuten los resultados obtenidos del VaR por cópula y se realiza el *backtesting*. Por último, se

concluye en la sección 8.

2 Introducción a la teoría de cópulas

En esta sección se presentan las principales propiedades de las cópulas. Hay muchas definiciones equivalentes de cópula pero la más general es la siguiente.

Definición 2.1. Una cópula de dimensión d es una función C de $[0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ que cumple con las siguientes propiedades:

- i) $C(u_1, \dots, u_d)$ es creciente en cada componente $u_i \in [0, 1], i = 1, \dots, d$.
- ii) $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ para toda $u_i \in [0, 1], i = 1, \dots, d$.
- iii) Para toda $(u_1, \dots, u_d), (u'_1, \dots, u'_d) \in [0, 1]^d$ con $u_i < u'_i$ se tiene:

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(v_{j1}, \dots, v_{jd}) \geq 0,$$

donde $v_{j1} = u_j$ y $v_{j2} = u'_j, \quad \forall j = 1, \dots, d$.

La primera y la tercera propiedad indican que las cópulas son funciones conexas y que todos los cubos de dimensión d con vértices en $[0, 1]^d$ tienen un volumen C no negativo. Ambas propiedades garantizan que las cópulas son funciones de distribución en el cubo unitario de dimensión d , mientras que la segunda propiedad implica que las cópulas tienen distribuciones marginales uniformes. De esto se tiene la siguiente definición equivalente de cópula.

Definición 2.2. Una cópula de dimensión d es una distribución de dimensión d con distribuciones marginales uniformes.

Observe que al considerar variables aleatorias X_1, \dots, X_d con funciones de distribución univariadas F_{X_1}, \dots, F_{X_d} y las variables aleatorias $U_i = F_{X_i}(X_i), i = 1, \dots, d$ con distribución uniforme en $[0, 1]$, una cópula se puede interpretar como la distribución conjunta de las distribuciones marginales.

La teoría sobre cópulas ha mostrado un desarrollo notable desde el trabajo de [26]. Sin embargo, muchos resultados ya habían sido demostrados en [13] y [14] por W. Hoeffding quien podría haber sido el fundador de la teoría de cópulas si hubiera considerado la dependencia estocástica en el cubo unitario $[0, 1]^2$ en vez de sobre $[-1/2, 1/2]^2$ como lo había hecho. Las cópulas permiten que las distribuciones marginales se separen de la estructura de dependencia. El teorema de Sklar une las

cópulas con funciones de distribución de modo que, por un lado, cada función de distribución puede “descomponerse” en su distribución marginal y (al menos) una cópula y, por otro lado, se obtiene una cópula (única) al “desacoplar” cada función de distribución multivariada (continua) de sus distribuciones marginales.

Teorema 2.3. *(Teorema de Sklar). Sea F una función de distribución multivariada con marginales F_1, \dots, F_d , entonces existe la cópula C tal que*

$$F(x_1, \dots, x_d) = C[F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)], \quad x_1, \dots, x_d \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Si F_i son continuas para $i = 1, \dots, d$ entonces C es única. De lo contrario, C se determina de forma única en $F_1(\overline{\mathbb{R}}) \times \dots \times F_d(\overline{\mathbb{R}})$.

Inversamente, si C es una cópula y son funciones de distribución univariadas, entonces la función F definida anteriormente es una función de distribución multivariada con marginales F_1, \dots, F_d .

La demostración del teorema de Sklar se puede consultar en [26], [23]. La representación en el Teorema de Sklar se puede usar para construir nuevas distribuciones multivariadas al cambiar la función cópula o las distribuciones marginales. Para una distribución multivariada continua arbitraria, se puede determinar su cópula a partir de la transformación:

$$C(u_1, \dots, u_d) = F[F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)], \quad u_1, \dots, u_d \in [0, 1], \quad (1)$$

donde F_i^{-1} son funciones de distribución marginales inversas.

Las cópulas son invariantes bajo transformaciones monótonas crecientes. Esta propiedad es muy útil en la práctica, donde con frecuencia resulta más apropiado describir la dependencia o la independencia en lugar de la correlación o la falta de correlación. El siguiente resultado hace referencia a esta propiedad.

Teorema 2.4. *Sea $X = (X_1, \dots, X_d)^\top$ un vector aleatorio con marginales continuas, cópula C_X y T_1, \dots, T_d funciones estrictamente crecientes en el rango(X_1), ..., rango(X_d). Sea $Y = (Y_1, \dots, Y_d)^\top$, $Y_i = T_i(X_i)$ un vector aleatorio con cópula C_Y . Entonces $C_X = C_Y$ casi siempre.*

Una variable aleatoria de dimensión d determina una cópula a través de sus distribuciones conjunta y marginal. Además, las transformaciones crecientes monótonas en la variable aleatoria no afectan a la cópula. Estas son las principales ideas utilizadas para obtener la cópula gaussiana: la variable aleatoria $X = (X_1, \dots, X_d)^\top$ con distribución normal multivariada y cópula C_X se transforma en la variable estandarizada $Z = (Z_1, \dots, Z_d)^\top$, $Z_j \sim \mathcal{N}(0, 1)$. La cópula de la variable aleatoria Z

es C_X . Dado que la función cópula es una distribución multivariada con marginales uniformes, se deduce que la densidad de la cópula se puede determinar al derivar:

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_d}, u_1, \dots, u_d \in [0, 1].$$

Al considerar el teorema 2.3 y la ecuación (1) se puede escribir la función de densidad $f(\cdot)$ de la distribución bivariada F en términos de una cópula como sigue:

$$f(x_1, \dots, x_d) = c[F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)] \prod_{i=1}^d f_i(x_i), \quad x_1, \dots, x_d \in \overline{\mathbb{R}}. \quad (2)$$

3 Tipos de cópulas

Dado que existen muchas funciones que satisfacen los supuestos del teorema 2.3, deben clasificarse por construcción y propiedades. En esta parte se consideran algunas de las principales, como son: cópulas simples, cópulas elípticas y cópulas Arquimedianas.

Cópulas simples

Casos especiales, como independencia, dependencia perfecta positiva o negativa, se pueden representar mediante una función cópula. Si d variables aleatorias $X = (X_1, \dots, X_d)$ son estocásticamente independientes del teorema 2.3, entonces la estructura de tal relación está dada por la cópula producto:

$$\prod(u_1, \dots, u_d) = \prod_{j=1}^d u_j. \quad (3)$$

Las cópulas están limitadas, esto significa que para todo $u = (u_1, \dots, u_d)^\top \in [0, 1]^d$:

$$W(u_1, \dots, u_d) \leq C(u_1, \dots, u_d) \leq M(u_1, \dots, u_d)$$

donde:

$$M(u_1, \dots, u_d) = \min(u_1, \dots, u_d)$$

se le conoce como la cota superior de Fréchet-Hoeffding y

$$W(u_1, \dots, u_d) = \max\left(\sum_{i=1}^d u_i - d + 1, 0\right)$$

es la cota inferior de Fréchet-Hoeffding. Mientras que W no es una cópula para $d > 2$, M es una cópula para toda d . Ambas estructuras representan la dependencia positiva perfecta y negativa perfecta. A partir de esta observación, se puede concluir que una cópula arbitraria C refleja la dependencia que se encuentra entre la dependencia negativa perfecta y la dependencia positiva. La figura 1 muestra las cotas de Fréchet-Hoeffding y la cópula producto, se observa esta relación de dependencia de manera empírica.

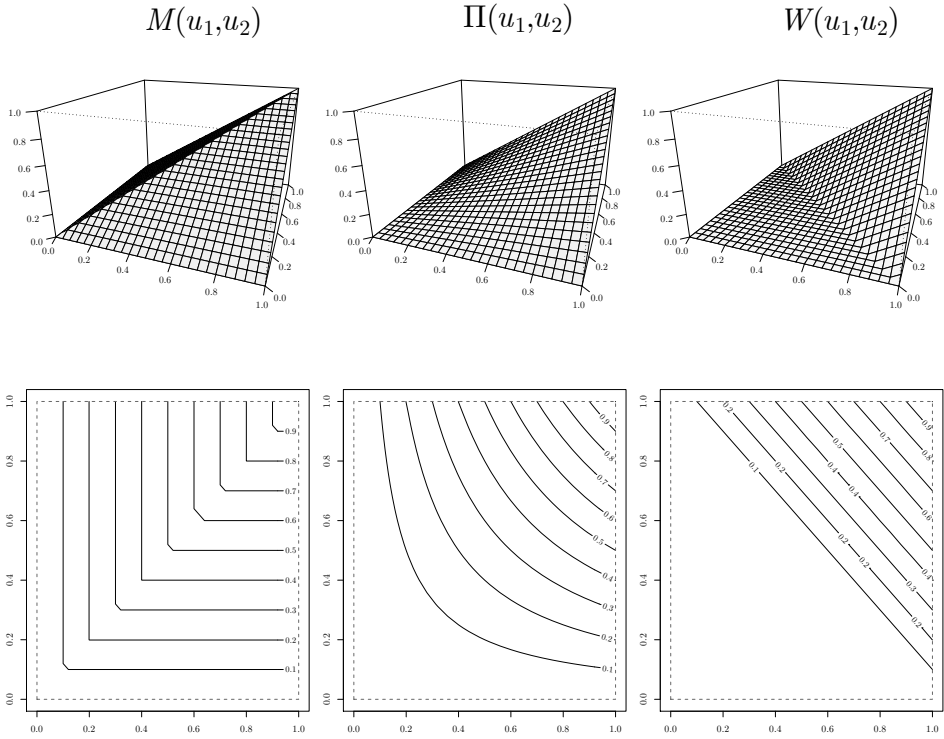


Figura 1: Cota superior de Fréchet–Hoeffding $M(u_1, u_2)$, cópula producto $\Pi(u_1, u_2)$, Cota inferior de Fréchet–Hoeffding $W(u_1, u_2)$. Fuente: elaboración propia.

Cópulas elípticas

El amplio uso de las distribuciones Gaussiana (o Normal) y t -Student ha hecho que las cópulas elípticas también sean importantes en la teoría y aplicaciones. La construcción de tales cópulas se basa directamente en el teorema 2.3.

Definición 3.1. (Distribución elíptica). Si Y es un vector aleatorio de dimensión d y para algún vector μ en \mathbb{R}^d , alguna matriz $d \times d$ simétrica definida no negativa

Σ y alguna función $\phi : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$, la función característica $\varphi_{Y-\mu}$ es de la forma $\varphi_{Y-\mu}(t) = \phi(t^\top \Sigma t)$, se dice que Y tiene una distribución elíptica con parámetros μ, Σ y ϕ la función característica de Y .

Las cópulas elípticas se derivan de las distribuciones elípticas utilizando el Teorema 2.3.

Cópula Gaussiana

La cópula gaussiana representa la estructura de dependencia de la distribución normal multivariada, lo que significa que las distribuciones marginales normales se combinan con una cópula gaussiana para formar distribuciones normales multivariadas. La combinación de distribuciones marginales no normales con una cópula gaussiana da como resultado distribuciones meta-gaussianas, es decir, distribuciones donde solo la estructura de dependencia es gaussiana.

Para deducir la cópula Gaussiana sea $X = (X_1, \dots, X_d)^\top \sim \mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$ con $X_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j)$ para $j = 1, \dots, d$. Una cópula C_X existe:

$$F_X(x_1, \dots, x_d) = C_X [F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)],$$

donde F_j es la función de distribución de X_j y F_X la función de distribución de X .

Sea $Y_j = S_j(X_j)$, $S_j(x) = (x - \mu_j)/\sigma_j$. Entonces $Y_j \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y $(Y_1, \dots, Y_d)^\top \sim \mathcal{N}_d(0, \Theta)$, donde Θ es la matriz de correlación asociada a Σ . Una cópula C_Θ^G es una cópula gaussiana y se denota como:

$$F_Y(y_1, \dots, y_d) = C_\Theta^G [\Phi(y_1), \dots, \Phi(y_d)]. \tag{4}$$

La expresión explícita para la cópula gaussiana se obtiene al reescribir la ecuación anterior y haciendo $u_j = \phi(y_j)$:

$$\begin{aligned} C_\Theta^G(u_1, \dots, u_d) &= F_Y [\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)] \\ &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_d)} (2\pi)^{-\frac{d}{2}} |\Theta|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} r^\top \Theta^{-1} r\right) dr_1 \dots dr_d. \end{aligned}$$

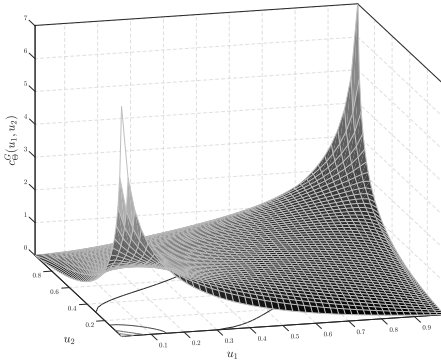
Como $S_j(x)$ es creciente se deduce del Teorema 2.4 que:

$$C_X = C_\Theta^G.$$

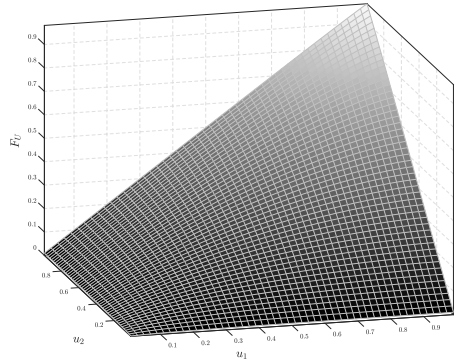
Por lo tanto, cualquier distribución normal multivariada se puede construir a partir de sus distribuciones marginales y una cópula gaussiana C_Θ^G con matriz de correlación Θ .

Si $\Theta = I_d$ la cópula gaussiana se convierte en la cópula producto:

$$\begin{aligned}
 C_{I_d}^G(u_1, \dots, u_d) &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_d)} (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^d r_j^2\right) dr_1 \dots dr_d \\
 &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} r_1^2\right) dr_1 \times \dots \times \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_d)} \exp\left(-\frac{1}{2} r_d^2\right) dr_d \\
 &= \Phi(\Phi^{-1}(u_1)) \dots \Phi(\Phi^{-1}(u_d)) \\
 &= \prod_{k=1}^d (u_k).
 \end{aligned}$$



(a) Densidad cópula gaussiana.



(b) Función de distribución cópula gaussiana.

Fuente: elaboración propia.

Figura 2: Función de densidad (a) y función de distribución acumulada (b) de una cópula gaussiana $c_{\Theta}^G(u_1, u_2), \Theta = 0.5$.

La densidad de la cópula gaussiana (figura 2) se obtiene al derivar la ecuación (4):

$$\begin{aligned}
 |2\pi\Theta|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^\top \Theta^{-1} x\right) &= c_{\Theta}^G[\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_d)] \\
 &\times \prod_{j=1}^d (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_j^2\right)
 \end{aligned}$$

al reordenar términos y definir $\varphi_j = \Phi(u_j), j = 1, \dots, d, \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)^\top$:

$$c_\Theta^G(u_1, \dots, u_d) = |\Theta|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \varphi^\top (\Theta^{-1} - I_d) \varphi \right]. \quad (5)$$

Cópula *t*-Student

La cópula *t*-Student tiene una estructura de dependencia a partir de la distribución *t* multivariada, se obtiene de forma similar.

Sea $X = (X_1, \dots, X_d)^\top \sim t_d(\nu, \mu, \Sigma)$ y $Y = (Y_1, \dots, Y_d)^\top \sim t_d(\nu, 0, \Theta)$ donde Θ es la matriz de correlación asociada a Σ . La única cópula de Y es la cópula *t*-Student $C_{\nu, \Theta}^t$. De manera similar como se hizo para la cópula normal se sigue de Teorema 2.4 que $C_X = C_{\nu, \Theta}^t$.

Para $u = (u_1, \dots, u_d)^\top \in [0, 1]^d$ la cópula *t*-Student está dada por:

$$C_{\nu, \Theta}^t(u_1, \dots, u_d) = t_{\nu, \Theta} [t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_d)]$$

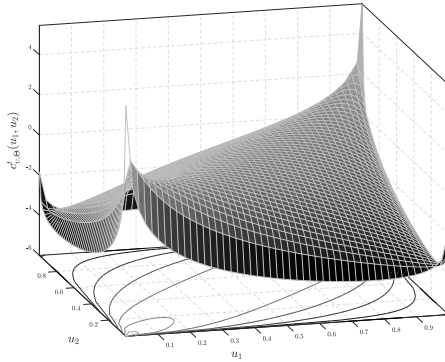
donde t_ν^{-1} es la función cuantil de la distribución *t* univariada y $t_{\nu, \Theta}$ es la función de distribución de Y . La densidad de la cópula *t* (figura 3) está dada por:

$$c_{\nu, \Theta}^t(u_1, \dots, u_d) = \frac{t_{\nu, \Theta} [t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_d)]}{\prod_{j=1}^d t_{\nu, \Theta} [t_\nu^{-1}(u_j)]}. \quad (6)$$

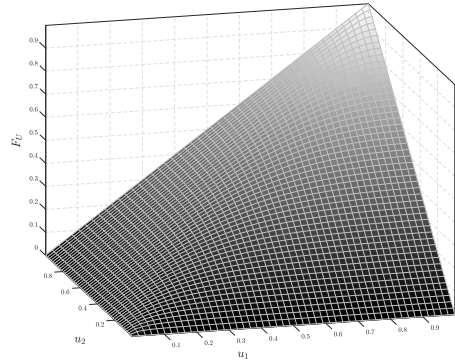
Con $\varphi_j = t_\nu^{-1}(u_j)$ para $j = 1, \dots, d$, la densidad de la cópula *t* se puede expresar como:

$$c_{\nu, \Theta}^t(u_1, \dots, u_d) = |\Theta|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+d}{2}) [\Gamma(\frac{\nu}{2})]^{d-1} (1 + \frac{1}{\nu} \varphi^\top \Theta^{-1} \varphi)^{-\frac{\nu+d}{2}}}{[\Gamma(\frac{\nu+1}{2})]^d \prod_{j=1}^d (1 + \frac{1}{\nu} \varphi_j^2)^{-\frac{\nu+1}{2}}}. \quad (7)$$

En [7], [8] se pueden consultar propiedades y caracterizaciones adicionales de las cópulas elípticas. Además, dos familias de distribuciones elípticas son las distribuciones Pearson tipo II y tipo VII, a partir de las que se pueden construir otro tipo de cópulas elípticas [24].



(a) Densidad cópula t -Student.



(b) Función de distribución cópula t -Student.

Fuente: elaboración propia.

Figura 3: Función de densidad (a) y función de distribución acumulada (b) de una cópula t -Student $c_{\Theta}^t(u_1, u_2)$, $\Theta = 0.8$, $\nu = 5$.

Cópulas Arquimedianas

A diferencia de las cópulas elípticas, las cópulas Archimedeanas no se construyen usando el Teorema 2.3, sino que están relacionadas con la transformada de Laplace de funciones de distribución univariadas. Sea \mathbb{L} la clase de transformadas de Laplace que consiste en funciones diferenciables estrictamente decrecientes [17], es decir:

$$\mathbb{L} = \left\{ \phi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1] \mid \phi(0) = 1, \phi(\infty) = 0; (-1)^j \phi^{(j)} \geq 0; j = 1, \dots, \infty \right\}.$$

La función $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$C(u_1, \dots, u_d) = \phi \left[\phi^{-1}(u_1) + \dots + \phi^{-1}(u_d) \right], u_1, \dots, u_d \in [0, 1]$$

es una cópula Archimediiana de dimensión d , donde $\phi \in \mathbb{L}$ y se le denomina generador de la cópula, además $C(u_1, \dots, u_d)$ satisface las condiciones de la Definición 2.1. Las principales cópulas Arquimedianas son: cópula Frank [9] que es la única cópula arquimediiana elíptica, cópula Gumbel [12] que se utiliza con frecuencia en aplicaciones en finanzas y cópula de Clayton [2] que, a diferencia de la cópula Gumbel, tiene más masa en la cola inferior y menos en la superior.

4 Simulación Monte Carlo para cópulas

La simulación Monte Carlo resulta ser una solución rápida y confiable en la solución de problemas en finanzas cuantitativas y otras disciplinas que involucran procesos estocásticos. La simulación requiere que las variables aleatorias se generen a partir de alguna distribución en particular. De acuerdo con [23] una de las principales aplicaciones de las cópulas es la simulación Monte Carlo, por lo que muestras de variables pseudo-aleatorias de una cópula en específico se pueden generar y mostrar el resultado en una gráfica, lo que permite visualizar propiedades de dependencia como la dependencia de cola inferior y superior³. Una descripción más detallada de los métodos presentados en esta sección está en los capítulos 6 y 7 de [5], y en [27].

Método de la inversa condicional

La simulación de d variables pseudo-aleatorias con distribución conjunta definida por la cópula C y d distribuciones marginales $F_j, j = 1, \dots, d$ puede hacerse por diferentes técnicas.

Sea la distribución marginal de dimensión j de la cópula C_j para $j = 2, \dots, d-1$ como: $C_j(u_1, \dots, u_j) = C(u_1, \dots, u_j, 1, \dots, 1)$ y la derivada de C_j con respecto a los primeros $j-1$ argumentos como:

$$c_{j-1}^j(u_1, \dots, u_j) = \frac{\partial^{j-1} C_j(u_1, \dots, u_j)}{\partial u_1, \dots, \partial u_{j-1}}. \quad (8)$$

La probabilidad $P(U_j \leq u_j, U_1 = u_1, \dots, U_{j-1} = u_{j-1})$ se escribe como:

$$\lim_{\Delta u_1, \dots, \Delta u_{j-1} \rightarrow 0} \frac{C_j(u_1 + \Delta u_1, \dots, u_{j-1} + \Delta u_{j-1}, u_j) - C_j(u_1, \dots, u_j)}{\Delta u_1, \dots, \Delta u_{j-1}} = c_{j-1}^j(u_1, \dots, u_j).$$

Por lo tanto, la distribución condicional $\Psi(u_j)$ (dados fijos u_1, \dots, u_{j-1}) es una función del cociente de las derivadas:

$$\begin{aligned} \Psi(u_j) &= P(U_j \leq u_j | U_1 = u_1, \dots, U_{j-1} = u_{j-1}) \\ &= \frac{P(U_j \leq u_j, U_1 = u_1, \dots, U_{j-1} = u_{j-1})}{P(U_1 = u_1, \dots, U_{j-1} = u_{j-1})} \\ &= \frac{c_{j-1}^j(u_1, \dots, u_j)}{c_{j-1}^{j-1}(u_1, \dots, u_{j-1})}. \end{aligned}$$

³Las definiciones de dependencia de cola para vectores aleatorios multivariados se relacionan principalmente con sus funciones de distribución marginales bivariadas. En términos generales, la dependencia de cola describe el cociente del límite que una marginal excede un cierto umbral dado que la otra marginal ya ha excedido ese umbral, véase [17].

Los pasos para generar d números pseudo-aleatorios con distribuciones marginales dadas por $F_j, j = 1, \dots, d$ y estructura de dependencia dada por la cópula C son:

1. Generar v_1, \dots, v_d números pseudo-aleatorios independientes y distribuidos uniformemente en el intervalo $[0, 1]$.
2. Generar números pseudo-aleatorios $j = 1, \dots, d$ de acuerdo con $u_j = \Psi^{-1}(v_j)$. Los números pseudo aleatorios u_1, \dots, u_d tienen distribuciones marginales uniformes en $[0, 1]$ y estructura de dependencia dada por la cópula C .
3. Hacer $x_j = F_j^{-1}(u_j)$. Los números pseudo aleatorios x_1, \dots, x_d se distribuyen según las distribuciones marginales deseadas y estructura de dependencia dada por la cópula C .

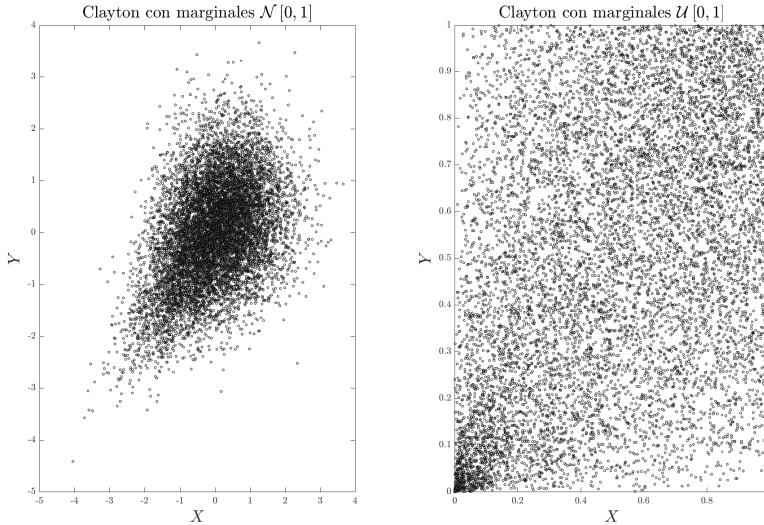


Figura 4: Simulación por monte carlo de 10,000 variables pseudo-aleatorias con marginales distintas con estructura de dependencia dada por una cópula Clayton con $\theta = 0.71$.

Fuente: elaboración propia.

En figura 4 del lado izquierdo se observan 10,000 realizaciones por monte carlo de variables pseudo-aleatorias con marginales normales estándar y estructura de dependencia dada por una cópula Clayton con $\theta = 0.71$, y en el lado derecho 10,000 realizaciones por monte carlo de variables pseudo-aleatorias con marginales uniformes en $[0, 1]$ y misma estructura de dependencia.

Si C es la cópula Gaussiana los pasos de la simulación son:

1. Generar números pseudo aleatorios v_1, \dots, v_d distribuidos como una $\mathcal{N}(0, \Theta)$.
2. Hacer $u_j = \Phi(v_j), j = 1, \dots, d$. Los números pseudoaleatorios $u = (u_1, \dots, u_d)$ tienen distribuciones marginales uniformes en $[0, 1]$ y estructura de dependencia dada por C_{Θ}^G .
3. Hacer $x_j = F_j^{-1}(u_j)$. Los números pseudo aleatorios x_1, \dots, x_d se distribuyen con las distribuciones marginales y estructura de dependencia requeridas.

Si t es la cópula t -Student los pasos de la simulación son:

1. Generar números pseudo aleatorios v_1, \dots, v_d distribuidos como $t_d(v, 0, \Theta)$.
2. Hacer $u_j = t_{\nu}(v_j), j = 1, \dots, d$ donde t es la distribución t_{ν} con ν grados de libertad. Los números pseudo aleatorios $u = (u_1, \dots, u_d)$ tienen distribuciones marginales uniformes en $[0, 1]$ y estructura de dependencia dada por $C_{\nu, \Theta}^t$.
3. Hacer $x_j = F_j^{-1}(u_j)$. Los números pseudo aleatorios x_1, \dots, x_d se distribuyen con las distribuciones marginales y estructura de dependencia requeridas.

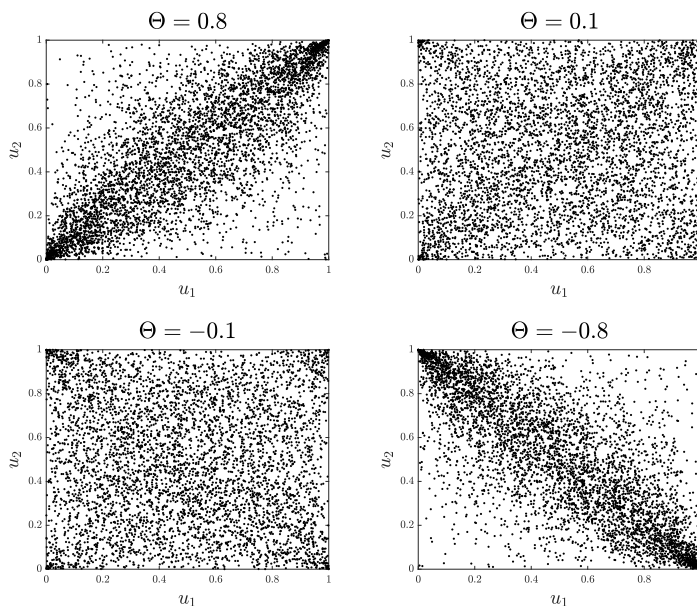


Figura 5: Simulación por monte carlo de 5,000 muestras de una cópula t -Student con $\nu = 3$ y diferente correlación Θ .

Fuente: elaboración propia.

Si las distribuciones marginales son t , los números pseudo-aleatorios se distribuyen de acuerdo a una t multivariada. En otro caso, es una meta distribución t . Al repetir N veces alguno de los procedimientos anteriores se produce una muestra de Monte Carlo $(x_{j,t})_{t=1}^N$, para $j = 1, \dots, d$ de una variable aleatoria con la distribución requerida.

En la figura 5 se simulan 5,000 muestras de una cópula t -Student con $\nu = 3$ y diferentes valores de Θ . Observe que u_1 y u_2 muestran dependencia lineal cuando Θ se aproxima a ± 1 , pero independencia completa cuando Θ se aproxima a 0.

5 Métodos de estimación de cópulas

La estimación de una distribución multivariada basada en una cópula comprende la estimación de los parámetros de la cópula θ así como las marginales $F_j, j = 1, \dots, d$, no obstante, todos los parámetros de la cópula y de las marginales también se pueden estimar en un sólo paso. Las propiedades y la bondad de ajuste del estimador dependen en gran medida de la estimación de las marginales $F_j, j = 1, \dots, d$. Se debe distinguir entre una especificación paramétrica y no paramétrica [27]. Si solo interesa la estructura de dependencia, el estimador de $\{\delta_1, \dots, \delta_d, \theta\}$ debe ser independiente de cualquier modelo paramétrico para las marginales. Sin embargo, en aplicaciones prácticas, es deseable contar con un modelo de distribución completo y por lo tanto, los modelos paramétricos son los adecuados para la estimación de las marginales.

Para la estimación no paramétrica de las marginales, se puede mostrar la consistencia y la normalidad asintótica de los estimadores de máxima verosimilitud (MV) y derivar los momentos a partir de la distribución asintótica [22]. La estimación por MV se puede realizar simultáneamente para los parámetros de las marginales y de la función cópula. De manera alternativa, se puede aplicar un procedimiento de dos etapas, donde en la primera se estiman los parámetros de las marginales y en la segunda los parámetros de la cópula.

En [19] se comparan propiedades asintóticas de tres métodos semi-paramétricos para estimar parámetros de algunas cópula mediante máxima pseudo-verosimilitud del estimador por momentos con la rho de Spearman y con la tau de Kendall. Se utiliza simulación de monte carlo para examinar el desempeño de los diferentes estimadores con muestras finitas y calcular la eficiencia relativa asintótica.

Sea X una variable aleatoria de dimensión d con distribuciones marginales univariadas paramétricas $F_j(x_j; \delta_j), j = 1, \dots, d$. Además, sea una cópula perteneciente a una familia paramétrica $\mathcal{C} = C_\theta, \theta \in \Theta$. La distribución de X se puede expresar como:

$$F_X(x_1, \dots, x_d) = C [F_1(x_1; \delta_1), \dots, F_d(x_d; \delta_d); \theta],$$

y su densidad como:

$$f(x_1, \dots, x_d; \delta_1, \dots, \delta_d, \theta) = c[F_1(x_1; \delta_1), \dots, F_d(x_d; \delta_d); \theta] \prod_{j=1}^d f_j(x_j; \delta_j),$$

donde:

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_d}.$$

Para una muestra de observaciones $(x_t)_{t=1}^T$, $x_t = (x_{1,t}, \dots, x_{d,t})^\top$ y un vector de parámetros $\alpha = (\delta_1, \dots, \delta_d, \theta)^\top \in \mathbb{R}^{d+1}$, la función de verosimilitud está dada por:

$$L(\alpha; x_1, \dots, x_T) = \prod_{t=1}^T f(x_{1,t}, \dots, x_{d,t}; \delta_1, \dots, \delta_d, \theta),$$

y la función l :

$$l(\alpha; x_1, \dots, x_T) = \sum_{t=1}^T \ln c[F_1(x_{1,t}; \delta_1), \dots, F_d(x_{d,t}; \delta_d); \theta] + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^d \ln f_j(x_{j,t}; \delta_j).$$

El vector de parámetros $\alpha = (\delta_1, \dots, \delta_d, \theta)^\top$ contiene d parámetros δ_j a partir de los marginales y el parámetro θ de la cópula. Todos estos parámetros se pueden estimar en un solo paso. Sin embargo, en aplicaciones prácticas es más eficiente un procedimiento de estimación en dos pasos.

Estimación por máxima verosimilitud

En el método de estimación por Máxima Verosimilitud (MV), el vector de parámetros α se estima en un solo paso como:

$$\tilde{\alpha}_{MV} = \max_{\alpha} l(\alpha).$$

Las estimaciones $\tilde{\alpha}_{MV} = (\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_d, \tilde{\theta})^\top$ resuelven $\left(\frac{\partial l}{\partial \delta_1}, \dots, \frac{\partial l}{\partial \delta_d}, \frac{\partial l}{\partial \theta}\right) = 0$. De acuerdo con la teoría estándar sobre la estimación por MV esta es eficiente y asintóticamente normal. Sin embargo, su cálculo de manera numérica resulta ser muy demandante.

Inferencia sobre las marginales

En el método inferencia sobre las marginales (IM), los parámetros δ_j de las distribuciones marginales se estiman en el primer paso y se utilizan en el segundo paso para estimar el parámetro de dependencia θ como sigue:

1. Para $j = 1, \dots, d$ el logaritmo de la función de verosimilitud para cada una de las marginales es:

$$l_j(\delta_j) = \sum_{t=1}^T \ln f_j(x_{j,t}; \delta_j)$$

y los parámetros estimados:

$$\hat{\delta}_j = \max_{\delta} l_j(\delta_j).$$

2. El logaritmo de la pseudo función de verosimilitud denotada por l es:

$$l(\theta; \hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_d) = \sum_{t=1}^T \ln c \left[F_1(x_{1,t}; \hat{\delta}_1), \dots, F_d(x_{d,t}; \hat{\delta}_d); \theta \right].$$

se maximiza en θ para obtener la estimación del parámetro de dependencia $\hat{\theta}$.

Las estimaciones $\hat{\alpha}_{IM} = (\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_d, \hat{\theta})^\top$ resuelven $(\frac{\partial l_1}{\partial \delta_1}, \dots, \frac{\partial l_d}{\partial \delta_d}, \frac{\partial l}{\partial \theta}) = 0$. Una revisión exhaustiva sobre este método está en [16]. Hay que considerar que este procedimiento no conduce a estimadores eficientes, sin embargo, como se argumenta en [17] la pérdida en la eficiencia es relativa. La ventaja del procedimiento IM radica en la amplia reducción de los cálculos numéricos.

Método de máxima verosimilitud canónica

En el método de máxima verosimilitud canónica (MVC), las distribuciones marginales univariadas se estiman mediante la función de distribución empírica F . Las propiedades asintóticas de los estimadores multietapa de no dependen explícitamente del tipo del estimador no paramétrico, sino de sus propiedades de convergencia. Para $j = 1, \dots, d$ se sigue que:

$$\hat{F}_j = \frac{1}{T+1} \sum_{t=1}^T \mathbf{1}(x_{j,t} \leq x),$$

la función l :

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln c \left[\hat{F}_1(x_{1,t}), \dots, \hat{F}_d(x_{d,t}); \theta \right]$$

y el estimador de los parámetros de la cópula $\hat{\theta}_{\text{MVC}}$ está dado por:

$$\hat{\theta}_{\text{MVC}} = \arg \max_{\theta} l(\theta).$$

Observe que el primer paso de los métodos IM y MVC se estiman las distribuciones marginales. Después de estimar las marginales, se obtiene una *muestra* $\{u_t\}$ de pseudo-observaciones transformadas en el cubo unitario de dimensión d y se utiliza en la estimación de la cópula. Así como en el método IM, el estimador semi-paramétrico θ es asintóticamente normal bajo condiciones de regularidad adecuadas.

Estimación de la cópula gaussiana

De una muestra de pseudo-observaciones $\{u_t\}_{t=1}^T$ con $u = (u_1, \dots, u_d)^\top \in [0, 1]$, la densidad de la cópula normal está dada por:

$$c_{\Theta}^G(u_1, \dots, u_d) = |\Theta|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \varphi^\top (\Theta^{-1} - I_d) \varphi \right].$$

y la función l es:

$$l(\theta; u_{1,t}, \dots, u_{d,t}) = -\frac{T}{2} \ln |\Theta| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \varphi_t^\top (\Theta^{-1} - I_d) \varphi_t$$

donde: $\varphi_t = (\varphi_{1,t}, \dots, \varphi_{d,t})^\top$ y $\varphi_{j,t} = \Phi^{-1}(u_{j,t})$.

El estimador máximo verosímil de Θ es: $\hat{\Theta} = \arg \max_{\Theta \in \mathcal{Q}} l(\Theta)$. donde \mathcal{Q} es el conjunto de todas las matrices identidad triangulares inferiores. La maximización es factible pero lenta cuando se consideran varias dimensiones. Se puede obtener una solución aproximada usando el estimador máximo verosímil para la matriz de covarianza Σ como:

$$\Sigma = \arg \max_{\Sigma} l(\Sigma)$$

entonces el estimador es:

$$\Sigma = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varphi_t \varphi_t^\top$$

al definir $\Upsilon = \text{diag}(\hat{\Sigma}_{ii})$ se obtiene $\hat{\Theta} = \Upsilon^{-1} \hat{\Sigma} \Upsilon^{-1}$.

Estimación de la cópula t-Student

Uno de los métodos de estimación para la cópula t -Student se basa en la estimación de la τ de Kendall por el método de los momentos. Para una pseudo-muestra $\{u_t\}_{t=1}^T$ donde $u = (u_1, \dots, u_d)^\top \in [0, 1]$ el coeficiente τ para cada par de observaciones $i, j = 1, \dots, d$ está dado por:

$$\hat{\rho}_\tau(u_i, u_j) = \left(\frac{T}{2} \right) \sum_{1 \leq t_1 \leq t_2 \leq T} \text{signo}(u_{i,t_1} - u_{i,t_2})(u_{j,t_1} - u_{j,t_2}).$$

Cada elemento de la matriz de correlación Θ se estima como:

$$\hat{\Theta}_{ij} = \text{sen} \left[\frac{\pi}{2} \hat{\rho}_\tau(u_i, u_j) \right].$$

El parámetro ν se estima por máxima verosimilitud con la matriz Θ fija. En este caso, el logaritmo natural de la pseudo función de verosimilitud denotado por l es:

$$l(\nu; u_{1,t}, \dots, u_{d,t}) = \sum_{t=1}^T \ln [c_{\nu, \Theta}^t(u_{1,t}, \dots, u_{d,t})]$$

donde $c_{\nu, \Theta}^t(u_{1,t}, \dots, u_{d,t})$ se define en (3). El estimador para el número de grados de libertad es entonces:

$$\hat{\nu} = \arg \max_{\nu \in \mathbb{N}} l(\nu).$$

6 Cálculo del VaR y CVaR por Cópulas

El requerimiento de capital de las instituciones financieras depende de la magnitud del riesgo de sus portafolios. El riesgo asociado a un portafolio puede originarse de:

1. Variaciones en el precio de los activos financieros que componen un portafolio (riesgo de mercado).
2. Variaciones en el comportamiento de los deudores, por ejemplo: un portafolio de crédito al consumo (riesgo de crédito).
3. Variaciones por el evento de que una posición larga o corta no pueda ser ejecutada o cubierta en condiciones normales para renovar pasivos o contratar otros. (riesgo de liquidez).
4. Incertidumbre relacionada con factores tecnológicos, personales y naturales que pueden influir en el valor del portafolio (riesgo operacional).

Para modelar el riesgo de un portafolio, se deben identificar los activos sujetos a riesgo y sus factores de riesgo así como los cambios en el valor del portafolio causados por los factores de riesgo evaluados [21]. Los cambios negativos reflejados por pérdidas son relevantes para la administración del riesgo. El Valor en riesgo es una medida que cuantifica el riesgo de un portafolio. Esta medida y su precisión son de crucial importancia para determinar el requerimiento de capital de las instituciones financieras y es una de las razones por las cuales se ha prestado mayor atención a los métodos para el cálculo del VaR.

Las pérdidas y las probabilidades asociadas con ellas (distribución de pérdidas) son necesarias para describir el grado de riesgo de un portafolio. Cuanto más riesgo tiene un portafolio, mayor es la probabilidad de que las pérdidas sean mayores que cierta cantidad. En otras palabras, a mayor riesgo, mayores son las pérdidas mínimas para una determinada probabilidad (también llamado nivel). Esta es una definición del VaR: el VaR es un cuantil de la distribución de pérdidas del portafolio que representa las pérdidas mínimas para un cierto nivel [18]. Si se realiza un análisis de la distribución de las pérdidas se verifica que las pérdidas grandes están influenciadas por pérdidas simultáneas en los factores de riesgo. Por lo tanto, la distribución de las pérdidas depende de la distribución conjunta de los factores de riesgo.

Un modelado preciso de la distribución conjunta de los factores de riesgo es fundamental para investigar y calcular el VaR. Una práctica convencional para modelar distribuciones conjuntas de rendimientos financieros es aproximarlos mediante distribuciones normales multivariadas. Sin embargo, eso implica que las estructuras de dependencia de los rendimientos se reducen a una sola clase. Incluso si se omite la estructura de autocorrelación, el supuesto de una distribución normal multivariada significa que se cumplen los siguientes supuestos:

- i)* Distribución simétrica de rendimientos.
- ii)* Las colas de la distribución no son relativamente pesadas.
- iii)* Dependencia lineal.

La evidencia empírica de estos supuestos rara vez se verifica y se necesita un modelo alternativo, con una estructura de dependencia más flexible y distribuciones marginales arbitrarias. Estas son exactamente las características de las cópulas. Las cópulas son muy útiles para modelar y estimar distribuciones multivariadas. La versatilidad de las cópulas se deriva básicamente del Teorema de Sklar [26], que afirma que cada distribución conjunta se puede “desacoplar” en sus distribuciones marginales y una cópula C responsable de la estructura de dependencia. Dos factores importantes [21] que en la práctica se basan en este teorema son:

1. La construcción de distribuciones multivariadas se puede hacer en dos pasos independientes: la especificación de distribuciones marginales (no necesariamente idénticas) y la especificación de una estructura de dependencia. Las cópulas “unen” las distribuciones marginales en una distribución multivariada con la estructura de dependencia deseada.
2. Las distribuciones conjuntas pueden estimarse por separado a partir de una muestra de observaciones: las distribuciones marginales se estiman primero, después la estructura de dependencia.

El enfoque de cópulas es mas eficaz que el supuesto de normalidad, las distribuciones marginales con colas asimétricas, típicas para rendimientos financieros, se pueden combinar con diferentes estructuras de dependencia, lo que resulta en distribuciones multivariadas (diferentes de la normal multivariada) que describen mejor las características empíricas de distribución de rendimientos financieros. También las cópulas pueden adaptarse a un modelado dinámico y se pueden adaptar a diversos portafolios, cópulas con distintas propiedades pueden asociarse a portafolios de acuerdo con estructuras específicas de dependencia. Además, los parámetros de una cópula pueden cambiar a medida que transcurre el tiempo, lo que refleja la evolución de la dependencia entre los activos financieros. En resumen, la estimación del VaR con cópulas es superior a cualquier método basado en el supuesto de normalidad.

Planteamiento del problema

Se muestra la extensión del problema clásico de asignación de activos a modelos basados en cópula. Considere un agente con una función de utilidad del tipo Coeficiente de Aversión Relativa al Riesgo (*Constant Relative Risk Aversion: CRRA*), de la forma: $U(x) = (1 - \kappa)^{-1}x^{1-\kappa}$ que se dispone a asignar su riqueza a d activos riesgosos. Sea $S_t = (S_{1,t}, \dots, S_{d,t})^\top$ el vector de dimensión d de precios de los activos y sus rendimientos bajo composición continua al tiempo $t + 1$ por $X_{t+1} = (X_{1,t+1}, \dots, X_{d,t+1})^\top$ donde $X_{t+1} = \ln(S_{t+1}) - \ln(S_t)$. Sea $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d)^\top$ el vector de pesos del portafolio. Sea F_{t+1} la función de distribución de dimensión d de X_{t+1} con media μ_{t+1} y matriz de covarianza Σ_{t+1} . El objetivo es pronosticar F_{t+1} para el periodo de tiempo $t + 1$ usando los datos hasta el tiempo t . El estimador se denota por \hat{F}_{t+1} con la media $\hat{\mu}_{t+1}$, la matriz de covarianza por $\hat{\Sigma}_{t+1}$ y la densidad \hat{f}_{t+1} . El objetivo del inversionista es maximizar la utilidad esperada al tiempo $t + 1$. Esto conduce al problema de optimización:

$$\max_{\omega \in \mathcal{W}} \mathbb{E}_{\hat{F}_{t+1}} \left[U(1 + \omega^\top X_{t+1}) \right]. \tag{9}$$

En el caso de que no haya una restricción de ventas en corto sea $\mathcal{W} = \{\omega \in [0, 1]^d : \omega^\top \mathbf{1} = 1\}$ en otro caso $\mathcal{W} = \{\omega \in \mathbb{R}^d : \omega^\top \mathbf{1} = 1\}$. La esperanza condicional en (9) implica que se integra la utilidad con respecto a la distribución pronosticada \hat{F}_{t+1} . Esto reduce el problema en (9) a:

$$\max_{\omega \in \mathcal{W}} \int \dots \int U(1 + \omega^\top X_{t+1}) \hat{f}_{t+1}(X_{t+1}) dX_{t+1}.$$

Existen varios enfoques paramétricos alternativos para modelar la función \hat{F}_{t+1} . Sea $\Sigma_{d,t+1}$ la matriz diagonal que contiene solo la diagonal principal de Σ_{t+1} . Entonces se puede escribir $\Sigma_{t+1} = \sqrt{\Sigma_{d,t+1}} \Omega_{t+1} \sqrt{\Sigma_{d,t+1}}$, donde Ω_{t+1} denota la matriz de correlación. Un enfoque estándar es suponer que los rendimientos de los activos siguen una distribución normal como sigue:

$$\frac{(X_t - \mu_t)}{\sqrt{\Sigma_{d,t+1}}} \sim \mathcal{N}_d(0, \Omega_t), \tag{10}$$

donde los momentos condicionales μ_t y Σ_t pueden ser modelados por ejemplo, por un proceso de tipo GARCH.

Para introducir una distribución basada en cópulas en la asignación de activos, se omite el supuesto de normalidad y suponga que $F = C(F_1, \dots, F_d)$. Por lo tanto, (10) se cambia por:

$$\frac{(X_t - \mu_t)}{\sqrt{\Sigma_{d,t+1}}} \sim C(F_1, \dots, F_d) \tag{11}$$

con algunas formas funcionales dadas por la cópula y distribuciones marginales por definir. Los parámetros de los momentos condicionales de la cópula y de las distribuciones marginales se estiman por el método de máxima verosimilitud.

VaR de los rendimientos de un portafolio

Si el rendimiento de la acción i al tiempo t se denota como X_{it} , entonces el valor del portafolio V al tiempo t se define [11] de manera recursiva como :

$$V_t = V_{t-1} \left(1 + \sum_{i=1}^d \omega_i X_{it} \right), \tag{12}$$

donde ω_i con $i = 1, \dots, d$ son los pesos del portafolio correspondientes a cada activo. De acuerdo con esta notación, el rendimiento del portafolio está dado por:

$$R_p^t = \frac{V_t}{V_{t-1}} - 1 = \sum_{i=1}^d X_{it} \omega_i.$$

Para un conjunto de activos se puede considerar un portafolio con pesos iguales, es decir, $\omega_i = 1/d$ para $i = 1, \dots, d$. El rendimiento del portafolio es variable aleatoria y su distribución depende en gran medida de la distribución subyacente de sus componentes.

Si se omite el subíndice del tiempo, la función de distribución de R_p es:

$$F_{R_p}(\varepsilon) = P(R_p \leq \varepsilon). \tag{13}$$

Luego al resolver $F_{R_p}(\varepsilon) = \alpha$ se encuentra $R_\alpha = \text{VaR}(\alpha)$.

Una de las principales ventajas de las cópulas es el hecho de que permiten un modelado diverso del comportamiento de la cola de las distribuciones multivariadas. Dado que el comportamiento de cola explica los valores atípicos simultáneos de los rendimientos de los activos, es de especial interés en la administración de riesgo. El VaR de un portafolio al nivel α se define como el α -cuantil inferior de la distribución de los rendimientos del portafolio, es decir:

$$\text{VaR}(\alpha) = F_{R_p}^{-1}(\alpha). \tag{14}$$

El VaR es una medida razonable del riesgo con el supuesto que los rendimientos son modelados por una distribución elíptica. Además, tal supuesto implica que minimizar la varianza en el problema de Markowitz también minimiza el VaR, el déficit esperado (*expected shortfall*) y cualquier otra medida coherente de riesgo. Sin embargo, esta afirmación no se cumple en el caso no elíptico. Además, con respecto al efecto de la diversificación, la varianza es la más pequeña (más grande) para correlación negativa (positiva) perfecta de los activos. Esto también se aplica al VaR en el caso elíptico, sin embargo, no se cumple para distribuciones no elípticas. Esto implica que, para la distribución basada en cópulas gaussianas, el VaR se debe usar con precaución y complementarse con pruebas de *stress*.

El objetivo es determinar ε tal que $P(R_p \leq \varepsilon) = \alpha$ Observe que:

$$R_p = \omega^\top X = \sum_{i=1}^d \omega_i X_i = \sum_{i=1}^d \omega_i F_i^{-1}(u_i),$$

donde F_i denota las distribuciones marginales de los rendimientos de los activos individuales $u_i = F_i(X_i) \sim U[0, 1]$ para toda $i = 1, \dots, d$ y $u_1, \dots, u_d \sim C$. La cópula C define la estructura de dependencia entre los rendimientos de los activos. Esto implica que:

$$F_{R_p}(\varepsilon) = P(R_p \leq \varepsilon) = \int_{\mathcal{U}} c(u_1, \dots, u_d) du_1 \dots du_d, \tag{15}$$

con:

$$\mathcal{U} = \{[0, 1]^{d-1} \times [0, u_d(\varepsilon)]\}, \quad u_d(\varepsilon) = F_d\{\varepsilon/\omega_d - \sum_{i=1}^{d-1} \omega_i F_i^{-1}(u_i)/\omega_d\}. \quad (16)$$

Para un α fijo, el VaR se determina resolviendo numéricamente (15) para ε . La integración numérica multidimensional directa es una tarea un tanto tediosa que puede simplificarse sustancialmente utilizando integración por Monte Carlo. Para este propósito, se generan muestras aleatorias de C por simulación.

En una primera fase se estima a partir de los datos la matriz de covarianza $\hat{\Sigma} = (\hat{\Sigma}_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$, el vector de medias $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_i)_{i=1,\dots,d}$ y estimar (o suponer) las distribuciones marginales $\hat{F}_i(\cdot)$ para $i = 1, \dots, d$. Después se simulan $u_1, \dots, u_d \in \mathcal{U}$ de (16). Primero se simula el vector u de una dimensión $d - 1$:

$$u_1, \dots, u_{d-1} \sim U(0, 1).$$

De acuerdo con u sea $x = \{x_i\}_{i=1,\dots,d-1}$ que para marginales normales es igual a:

$$x_i = \Phi^{-1}(u_i) \sqrt{\hat{\Sigma}_{ii}} + \hat{\mu}_i, \quad i = 1, \dots, d - 1,$$

y para marginales t :

$$x_i = t^{-1}(u_i) \sqrt{\frac{\nu_i - 2}{\nu_i} \hat{\Sigma}_{ii}} + \hat{\mu}_i, \quad i = 1, \dots, d - 1,$$

donde $i = 1, \dots, d$ son los grados de libertad de las distribuciones marginales. Esta transformación da como resultado un vector x con distribución normal o t -Student con los mismos parámetros que el conjunto de datos real.

VaR de las pérdidas y ganancias de un portafolio

En esta parte se presentan los supuestos y pasos para estimar el VaR a partir de las pérdidas y ganancias de un portafolio lineal utilizando cópulas de acuerdo con [11]. Suponga que al tiempo t un portafolio lineal compuesto por d posiciones $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_d\}$ con $\omega_i \in \mathbb{Z}$ en activos con precios logarítmicos $Y_t = \ln S_t$. El valor V_t del portafolio esta dado por:

$$V_t = \sum_{j=1}^d w_j e^{Y_{j,t}}. \quad (17)$$

La función de pérdidas y ganancias (PyG) se define como $L_{t+1} = (V_{t+1} - V_t)$. Sea $X_{t+1} = (Y_{t+1} - Y_t)$ el incremento en t y su efecto en los factores de riesgo del periodo t hasta $t + 1$, la función L_{t+1} se puede escribir como:

$$\begin{aligned} L_{t+1} &= (V_{t+1} - V_t) \\ &= \sum_{j=1}^d w_j S_{j,t} [e^{X_{j,t+1}} - 1]. \end{aligned}$$

La función PyG, expresa el cambio absoluto en el valor del portafolio del periodo t a $t + 1$. La función de distribución de L sin el subíndice de tiempo es:

$$F_L(x) = P(L \leq x). \tag{18}$$

Por definición, el VaR al nivel α de un portafolio ω se define como el α -cuantil de F_L :

$$\text{VaR}(\alpha) = F_L^{-1}(\alpha).$$

Se deduce de (18) que F_L depende de la distribución de dimensión d de los rendimientos logarítmicos F_X . En general, la distribución de pérdidas F_L depende de un proceso aleatorio que representa los factores de riesgo que influyen en las pérdidas y ganancias de un portafolio. En este caso, los rendimientos logarítmicos son una elección adecuada del factor de riesgo. Por lo tanto, modelar su distribución es esencial para obtener los cuantiles de la distribución de pérdidas y ganancias F_L .

La distribución univariada F_L depende de la distribución F_X de dimensión d . Con cópulas, las distribuciones marginales F_{X_j} de cada incremento univariado se pueden modelar por separado a partir de su estructura de dependencia y luego unirse para construir la distribución multivariada F_X . Para obtener el VaR, el parámetro de dependencia y la función de distribución se estiman a partir de una serie de rendimientos y se utilizan para generar muestras de pérdidas y ganancias del portafolio mediante simulación Monte Carlo. Los cuantiles a diferentes niveles son las estimaciones del VaR.

Para un portafolio ω con d activos y una muestra $\{x_{j,t}\}_{t=1}^T$ con $j = 1, \dots, d$ de rendimientos logarítmicos, el VaR al nivel α se estima como sigue:

1. Determinar y estimar las distribuciones marginales $F_j(x_j)$.
2. Especificación de una familia de cópula paramétrica $C(u_1, \dots, u_d; \theta)$ y estimación del parámetro de dependencia $\hat{\theta}$.
3. Generar trayectorias con $X_{T+1} \sim C(u_1, \dots, u_d; \hat{\theta})$.

4. Generar conjunto de pérdidas y ganancias $L_{T+1}(X_{T+1})$ de acuerdo con la cópula elegida.
5. Estimación del $\widehat{\text{VaR}}_{T+1}(\alpha)$, que es el cuantil al nivel α de $L_{T+1}(X_{T+1})$.
6. El $\text{CVaR}_\alpha = E(l | l \leq \text{VaR}_\alpha)$, donde l es la parte del vector de PyG que son menores que el VaR.

Con el procedimiento anterior se calcula de VaR al horizonte de tiempo elegido. Para una ventana de tiempo $s = k, \dots, T$ se genera una serie de $\{\widehat{\text{VaR}}_t\}_{t=k}^T$. Posteriormente, se ejecuta un análisis de *backtesting* para evaluar el desempeño de la familia de cópulas C especificada. Los valores estimados para el VaR se comparan con realizaciones reales $\{l_t\}$ del portafolio, una excepción que ocurre por cada l_t menor que $\widehat{\text{VaR}}_t(\alpha)$. El cociente entre el número de excepciones y el número de observaciones determina la razón de excepciones $\hat{\alpha}$:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{T-r} \sum_{t=r}^T \mathbf{1}\{l_t < \widehat{\text{VaR}}_t(\alpha)\}.$$

7 Análisis y discusión de resultados

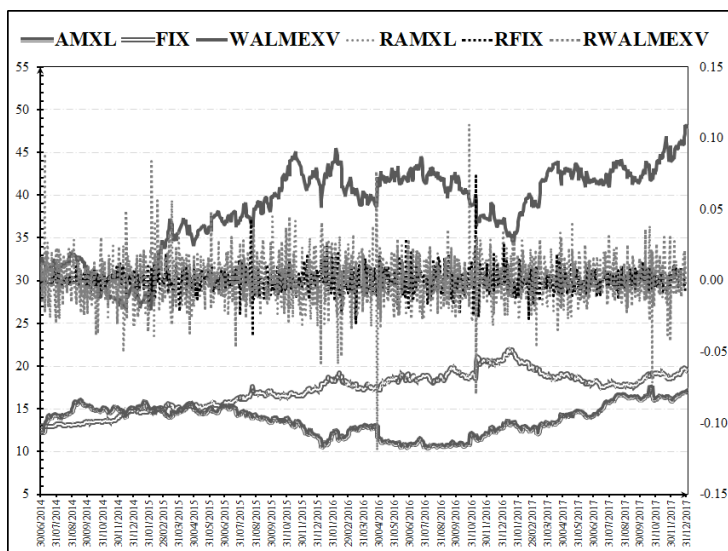


Figura 6: Precios de cierre y rendimientos de AMXL, WALMEXV y FIX.

Fuente: elaboración propia.

Con precios de cierre diarios obtenidos de la base de datos *economática* del periodo 30/06/2014 al 29/12/2017, con el objetivo de analizar en ese periodo una hipotética estructura de dependencia y cómo influye la volatilidad del tipo de cambio FIX en las series financieras AMXL Y WALMEXV cotizadas en la BMV en portafolios de inversión bivariados (AMXL, FIX), (AMXL, WALMEXV) Y (FIX, WALMEXV). Las acciones de América Móvil y Walmart de México como se muestra en la figura 6 poseen la misma característica de heterocedasticidad (volatilidad no constante) y se aprecian los periodos de alta o baja volatilidad denominados conglomerados de volatilidad.

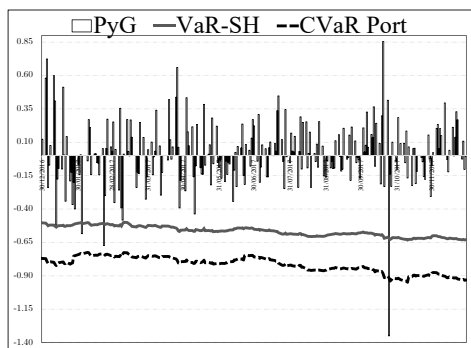
Asimismo el tipo de cambio FIX presenta su periodo de volatilidad más alto a finales de 2016 y principios de 2017, que es cuando toma posición el presidente de los Estados Unidos de América, y se observa que las tres series presentan una alta volatilidad por sus conglomerados. En la figura 6 se observan altos periodos de volatilidad en las tres series durante el periodo de análisis. Por ejemplo, se observa que AMXL sigue un comportamiento similar en volatilidad al tipo de cambio FIX, por lo que una alta volatilidad en el tipo de cambio implica alta volatilidad en las series de rendimientos AMXL Y WALMEXV. Mientras que la serie de precios de WALMEXV presenta mayor variabilidad en precios con una tendencia hacia la alza en el periodo de *backtesting*.

Resultados y análisis del Backtesting

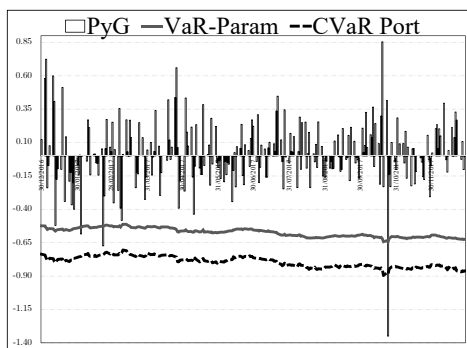
En esta parte se calcula el VaR y CVaR por tres métodos: histórico, paramétrico, Monte Carlo y con cópulas elípticas: cópula gaussiana y cópula *t*-student por Monte Carlo al 99 % a un día. El método de estimación de los parámetros de las cópulas es IM. Se analizan los resultados obtenidos de dichos modelos mediante el *backtesting* con la prueba de Kupiec (Véase Apéndice 9). Para realizar el *backtesting* por simulación histórica del primer portafolio (AMXL, FIX) durante el 2017, se considera un título por cada acción y con precios de cierre a partir del viernes 30/12/2016 como primer dato, 2/01/2017 como segundo dato y así sucesivamente, hasta concluir el 29/12/2017, se obtiene la posición normal del portafolio, la posición back, las pérdidas y ganancias reales del portafolio y se compara con el VaR.

Los resultados del *backtesting* del modelo VaR por simulación histórica del portafolio AMXL-FIX, se observan tres excepciones (con dos observaciones muy cercanas al VaR) y considerando la tabla de Kupiec “región de no rechazo para el número de observaciones fuera del VaR” reporta que para un periodo de 255 días como es el caso, son aceptables hasta 6 excepciones y recalca que mientras más alto sea el nivel de confianza se presentan menos excepciones, por ejemplo, si se hubiese tomado el nivel de confianza de 95 %, hasta un máximo de 20 excepciones se considerarían aceptables en el modelo, por lo que el modelo de simulación his-

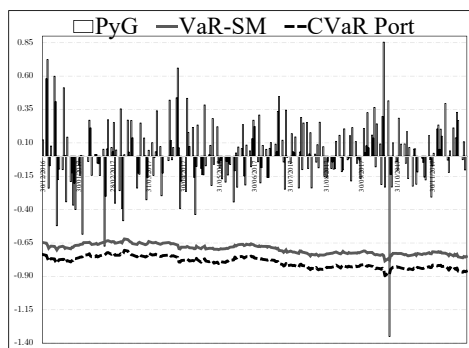
tórica resulta aceptable aún con las 3 excepciones que se presentaron durante el periodo. El promedio del VaR para este modelo en el periodo dado es de \$0.5656, registrándose la pérdida real más alta el 24/10/2017 por \$1.35 cuando el VaR de ese día fue de \$0.6190, seguida de la pérdida de \$0.67 el 21 de febrero del mismo año cuando el VaR había registrado \$0.5083 y otra más el 02/02/2017 por \$0.58 con el VaR de \$0.5017 cuando el tipo de cambio paso de \$20.45 a \$19.91 pesos por dólar. La eficiencia del modelo es de: $(252 - 3)/252 = 249/252 = 0.9881 = 98.81\%$.



(a) Backtesting por simulación histórica.



(b) Backtesting por método paramétrico.



(c) Backtesting por simulación Monte Carlo.

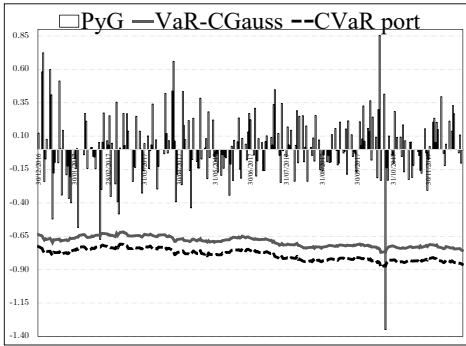
Fuente: elaboración propia.

Figura 7: Resultados de *backtesting* del portafolio AMXL-FIX por método de Simulación histórica (a), paramétrico (b) y Simulación Monte Carlo (c) al 99 %.

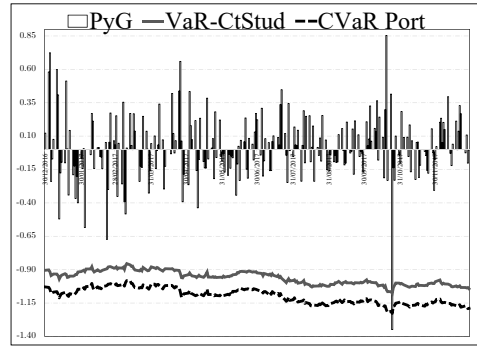
Para el *backtesting* de modelo VaR paramétrico del portafolio AMXL-FIX, se observan tres excepciones en las mismas fechas y de acuerdo a la tabla de Kupiec,

resulta aceptable. El promedio del VaR para este modelo en el periodo dado es de \$0.5735 con una eficiencia de 98.81%. En el *backtesting* del modelo VaR por simulación Monte Carlo del portafolio AMXL-FIX, se observan dos excepciones en las mismas fechas de los casos anteriores y de acuerdo a la tabla de Kupiec, resulta aceptable. El promedio del VaR para este modelo en el periodo dado es de \$0.6951, lo cual es ligeramente mayor a los dos modelos anteriores, con una eficiencia de 99.21%.

Los resultados del *backtesting* con cópulas elípticas son:



(a) Backtesting por cópula gaussiana.



(b) Backtesting por cópula *t*-Student.

Fuente: elaboración propia.

Figura 8: Resultados de *backtesting* del portafolio AMXL-FIX por cópula gaussiana (6.8(a)) y cópula *t*-Student (6.8(b)) al 99%.

Los resultados del *backtesting* del modelo VaR con cópula gaussiana del portafolio AMXL-FIX, se observan dos excepciones y de acuerdo a la tabla de Kupiec, resulta aceptable. Se observa que tiene una excepción menos que el VaR por simulación histórica y paramétrico, pero igual de aceptable que el método de simulación Monte Carlo con dos excepciones. El promedio del VaR para este modelo en el periodo dado es de \$0.6911, con una eficiencia de 99.21%. En el *backtesting* del modelo VaR por cópula *t*-student del portafolio AMXL-FIX, se observa una excepción, por lo que este modelo es aceptable con una eficiencia del 99.6%. El promedio del VaR para el periodo dado es de \$0.9604, lo cual se distingue de las anteriores al ser aproximadamente una tercera parte mayor que el VaR de los modelos restantes.

El cuadro 1 muestra el número de excepciones de cada modelo de VaR y CVaR para los tres portafolios considerados en el estudio. Es importante señalar que para

los cinco modelos se observa una excepción que corresponde al 24/10/2017, ya que de acuerdo con la serie de precios, la acción de AMXL tuvo una caída en su precio de \$17.69 a \$16.46, que representa una variación de -6.93 %.

Cuadro 1: Resumen de número de excepciones de VaR y CVaR para los tres portafolios y cinco modelos.

Excepciones de VaR y CVaR										
Modelo	SH		C_{Θ}^G		$C_{v,\Theta}^t$		SMC		Param.	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR
AMXL-FIX	3	1	2	1	1	1	2	1	3	1
FIX-WALMEXV	3	0	2	0	0	0	2	0	3	0
AMXL-WALMEXV	3	0	2	1	0	0	2	1	3	1
Total	9	1	6	2	1	1	6	2	9	2

Fuente: elaboración propia.

8 Conclusiones

La modelación del riesgo mediante cópulas con una estructura de dependencia y distribuciones marginales resulta ser un método alternativo y eficiente en comparación con los métodos usuales. La ventaja de las cópulas se desprende del Teorema de Sklar el cual afirma que cada distribución conjunta se puede escribir en términos de sus distribuciones marginales y una cópula C que describe la estructura de dependencia entre las variables subyacentes.

En este trabajo se aplicó una metodología para calcular el VaR y CVaR al 99 % a un horizonte de un día mediante cópulas elípticas de tres portafolios de inversión bivariados compuestos por las acciones de WALMEX Y AMXL cotizadas en la bolsa mexicana de valores (BMV) y el tipo de cambio peso-dólar (FIX) publicado por el Banco de México, del periodo 30/06/2014 al 29/12/2017. Asimismo se calcula el VaR y CVaR por tres métodos: simulación histórica, paramétrico y simulación monte carlo. Para verificar las ventajas de los modelos con cópulas elípticas se ejecuta un análisis de *backtesting* para el periodo 30/12/2016 al 29/12/2017 que corresponde a 252 observaciones.

De acuerdo a los cinco análisis del *backtesting* realizados para el portafolio (AMXL, FIX), el modelo VaR con cópula t -student considerando un nivel de confianza de 99 %, resultó ser el modelo más eficiente con 1 excepción, comparado con los demás modelos los cuales presentaron dos excepciones: VaR por simulación

Monte Carlo y VaR por cópula gaussiana y presentando tres excepciones los modelos: VaR por simulación histórica y VaR paramétrico. Para el portafolio (FIX, WALMEX) y de acuerdo con sus cinco respectivos *backtesting*, el modelo VaR con cópula *t*-student resultó ser el modelo más eficiente con cero excepciones, los modelos VaR por simulación Monte Carlo y VaR por cópula gaussiana presentaron dos excepciones, y con tres excepciones los modelos VaR por simulación histórica y VaR paramétrico. Para el portafolio (AMXL, WALMEX), se obtuvieron resultados similares. Por lo tanto, en general se concluye que el modelo con cópula *t*-student es el modelo más eficiente en la medición del riesgo mercado al presentar el menor número de excepciones de VaR y CVaR para los tres portafolios bivariados.

Una explicación de la evidencia empírica es que las marginales con distribución *t*-student tienen más densidad en las colas que la distribución normal, por lo que el enfoque paramétrico no mide el VaR adecuadamente. La cópula gaussiana no tiene esta ventaja y las marginales pueden ser elegidas arbitrariamente. Los resultados respaldan esta propiedad y muestran que el VaR basado en cópulas al 99 % son diferentes. A diferencia de la cópula *t*-student, independientemente de la correlación ρ en $(-1,1)$, la cópula gaussiana no describe la dependencia de cola. En consecuencia, la cópula *t*-student conduce a un VaR más conservador que la cópula gaussiana, es decir, si las distribuciones marginales indican dependencia de cola es preferible la cópula *t*-student.

Por último, la teoría de cópulas muestra una tendencia creciente; sin embargo, el estudio de las cópulas dista mucho de ser completo. La investigación continúa en temas como la extensión de cópulas bivariadas al caso multivariado y la incorporación de series de tiempo en aplicación de cópulas para modelar con mayor precisión la estructura de dependencia de un conjunto de datos. Es importante destacar que existen diversas líneas de investigación acerca del desarrollo pruebas de bondad de ajuste para el caso multivariado y sus distribuciones.

Agradecimientos

El presente trabajo ha sido apoyado por el proyecto de investigación: “*Métricas para la medición del riesgo mercado con cópulas*” clave SIP-20170171 de la Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional. De la misma manera, los autores agradecemos a los árbitros sus valiosas observaciones y recomendaciones.

Bibliografía

- [1] Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, y D. Heath, (1999). *Coherent Measures of Risk*. *Mathematical Finance*, **9**(3), 203-228. <https://doi.org/10.1111/1467->

9965.00068

- [2] Clayton, D. G. (1978). *A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence*. *Biometrika*, **65**(1), 141–151.
- [3] Cont, R. (2001), *Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues*, *Quantitative Finance*, **1**(2), 223–236. <https://doi.org/10.1080/713665670>
- [4] De Lara, A. (2005). *Medición y control de riesgos financieros*. (3a edición). Editorial Limusa, México.
- [5] Embrechts, P., A. J. McNeil y R. Frey (2015). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*. Revised edition. Princeton University Press.
- [6] Erdelyi-R., A. (2009). *Cóputas y dependencia de variables aleatorias: una introducción*, *Miscelánea Matemática*, **48**, 7–28.
- [7] Fang, H.-B., Fang, K.-T. y S. Kotz (2002). *The Meta-elliptical Distributions with Given Marginals*, *J. Multivariate Anal.*, **82**(1), 1–16. <https://doi.org/10.1006/jmva.2001.2017>
- [8] Fang, H.-B., Fang, K.-T. y S. Kotz (2009). *Corrigendum to: The meta-elliptical distributions with given marginals* [*J. Multivariate Anal.* **82**(1), (2002), 1–16; mr 1918612]. *J. Multivariate Anal.*, **82**(1):222–223. <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2004.10.001>
- [9] Frank, M. J. (1979). *On the simultaneous associativity of $f(x, y)$ and $x + y - f(x, y)$* . *Aequationes Mathematicae*, **19**(1), 194–226.
- [10] Frechet, M. (1951). *Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données*, *Ann. Univ. Lyon* **14**, (Sect. A Ser. 3), 53–77.
- [11] Giacomini, E. y Härdle, W. (2005). *Value-at-risk calculations with time varying copulae*. En *Proceedings 55th International Statistical Institute, Sydney 2005*. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2894445>
- [12] Gumbel, E. J. (1960). *Distributions des valeurs extrêmes en plusieurs dimensions*, *Publications de l'Institut de statistique de l'Université de Paris*, **9**, 171–173.

- [13] Hoeffding, W. (1940). *Masstabinvariante Korrelationstheorie*. Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin, **5**(3), 179–233.
- [14] Hoeffding, W. (1941). *Masstabinvariante Korrelationsmasse für diskontinuierliche Verteilungen*. Archiv für die mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung, **7**, 49–70.
- [15] Hull, J. C. (2014). *Options, Futures, and Other Derivatives*, 9th edition, Pearson.
- [16] Joe, H. y Xu, J. J. (1996). *The estimation method of inference functions for margins for multivariate models*, Technical Report 166, Department of Statistics, University of British Columbia.
- [17] Joe, H. (1997). *Multivariate models and dependence concepts*, Chapman & Hall, London.
- [18] Jorion, P. (2007). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. Third Edition. McGraw-Hill.
- [19] Kojadinovic, I., Yan, J. (2010). *Comparison of three semiparametric methods for estimating dependence parameters in copula models*, Insur Math Econ **47**(1), 52–63. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2010.03.008>
- [20] Kupiec, P. *Techniques for verifying the accuracy of risk management models*, Journal of Derivatives, **3**(2) (1995), 73–84. <https://doi.org/10.3905/jod.1995.407942>
- [21] Kuziak, K. (2013). *Vulnerability of Copula-VaR to Misspecification of Margins and Dependence Structure* en: Algorithms from and for Nature and Life-Classification and Data Analysis, Lausen, B., Van den Poel, D., Utsch, A. (eds.). Series: Studies in Classification, Data Analysis, and Knowledge Organization, 387–395, Springer International Publishing Switzerland. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00035-0_39
- [22] Liebscher, E. (2009). *Semiparametric estimation of the parameters of multivariate copulas*. Kybernetika **45**(6), 972–991.
- [23] Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*, Second edition, Springer-Verlag, New-York.
- [24] Rémillard, B. (2013). *Statistical Methods for Financial Engineering*, CRC Press. Boca Raton, FL, USA.

- [25] Rockafellar R. T. y S. Uryasev, *Optimization of conditional value-at-risk*, Journal of Risk, **2**(3) (2000), 21–41.
- [26] Sklar, A. (1959). *Fonctions de répartition á n dimensions et leurs marges*. Publications de L'Institut Statistique de L'Université de Paris, **8**, 229–231.
- [27] Trivedi, P.K. y Zimmer, D.M. (2007). *Copula Modeling: An Introduction for Practitioners*. Foundations and Trends in Econometrics, **1**(1), 1–111. <http://dx.doi.org/10.1561/0800000005>
- [28] Venegas-Martínez, F., Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre. Segunda edición, Cengage, México (2008).

Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional
Plan de Agua Prieta no. 66, Col. Plutarco Elías Calles, Delegación Miguel Hidalgo
Ciudad de México, C.P. 11340

jacobi_gt_log1@hotmail.com
mmartinezpa@ipn.mx
amortiz@ipn.mx

9 Prueba de Kupiec

El análisis retrospectivo (*backtesting*) es un proceso basado solamente en observaciones pasadas que sirve para comprobar si el cálculo del VaR es acertado con respecto a los resultados de pérdidas y ganancias observadas. Consiste en contar el número de veces que las pérdidas observadas exceden el VaR. La metodología para su cálculo es la siguiente:

1. Las pérdidas y ganancias se calculan con cambios en la valuación o *Mark-to-Market*.
2. Se debe comparar periódicamente el VaR observado ajustado a un día con las pérdidas y ganancias diarias.
3. Los errores o excepciones detectados se calculan contando el número de veces que las pérdidas y ganancias exceden al VaR observado.
4. El nivel de eficiencia del modelo será: número de excepciones (N)/número de observaciones (T).

El análisis retrospectivo consiste en contar las veces que las pérdidas y/o ganancias exceden el VaR durante un periodo. Se supone que N es el número de observaciones que exceden la pérdida o ganancia y para un nivel de confianza dado $(1-p)$ se prueba si la N observada es estadísticamente diferente a la probabilidad de error p que se considera para el cálculo del VaR. La probabilidad de observar N excesos durante un periodo de T observaciones en total, se explica con una distribución binomial dada por:

$$(1 - p)^{T-N} p^N.$$

La decisión práctica que se necesita tomar consiste en determinar si la relación de excesos de pérdidas y/o ganancias contra las observaciones totales, 1.5 %, 6 %, 16 %, etc., es estadísticamente diferente a la probabilidad que se utiliza para el cálculo del valor en riesgo, es decir, 1 %, 5 %, 10 %, etc.

Cuadro 2: Región de no rechazo para el número de observaciones fuera del VaR, N .

Nivel de confianza	Numero de observaciones: T		
	255	510	1000
p			
0.01	$N < 7$	$1 < N < 11$	$4 < N < 17$
0.025	$2 < N < 12$	$6 < N < 21$	$15 < N < 36$
0.05	$6 < N < 21$	$16 < N < 36$	$37 < N < 65$
0.075	$11 < N < 28$	$27 < N < 51$	$59 < N < 92$
0.10	$16 < N < 36$	$38 < N < 65$	$81 < N < 120$

Fuente: elaboración propia con base en [18].

Kupiec [20] desarrolló unas regiones de confianza con base en una distribución chi-cuadrada con un grado de libertad (véase cuadro 2), considerando la hipótesis nula de que p es estadísticamente igual a la probabilidad utilizada para el VaR contra la hipótesis alternativa de que p sea diferente a dicha probabilidad. Estas regiones fueron determinadas de los extremos de la máxima verosimilitud dada por:

$$L = -2\ln((1 - p)^{T-N} p^N) + 2\ln((1 - (N/T))^{T-N} (N/T)^N)$$

Con c : nivel de confianza, p : probabilidad de error, N : número de veces que se excedió el límite de VaR sobre T días, N/T : frecuencia en la que las pérdidas exceden el VaR.

Modelación matemática

Capítulo 7

Hacia una estimación automática de la edad ósea

José Luis Tonatiúh Banda Escobar, Salvador Eugenio Ayala Raggi, Aldrin Barreto Flores
FCE, BUAP

Resumen

La madurez ósea de una persona normalmente se estima a partir de una radiografía de la mano no dominante por medio de una evaluación subjetiva, realizada por un radiólogo experto, esta prueba otorga información relevante para médicos de otras especialidades que buscan un diagnóstico de posibles desordenes de crecimiento. En este trabajo se presenta un método semi-automático de aprendizaje para estimar la edad ósea. Se consideran cinco regiones de interés (ROIs), que se encuentran entre los huesos metarcapianos y falanges, las cuales son determinadas colocando puntos estratégicos. Las ROIs obtenidas son re-ordenadas en un sólo vector para obtener vectores de características de cada mano. El método consiste de dos etapas, entrenamiento y evaluación, para el cual se utilizaron imágenes radiográficas de hombres y mujeres en un rango de 1 a 18 años de edad ósea. La etapa de entrenamiento se enfoca en estructurar vectores de características de 300 imágenes etiquetadas por su edad ósea para cada género, con el fin de tener un conjunto de prototipos que será usado en un clasificador de regresión. La segunda etapa se centra en aproximar la edad ósea de una imagen radiográfica desconocida, obteniendo su vector de características y comparándolo con el conjunto de prototipos. La edad es determinada usando el clasificador k-NN ponderado. Con un conjunto de 100 imágenes de evaluación para cada género, se demuestra que es posible obtener un error medio absoluto (MAE) de edad estimada, similar al error de edad obtenido con algunos algoritmos encontrados en el estado del arte usando sólo cinco regiones pequeñas (ROIs) de cada radiografía.

1 Introducción

La estimación de edad ósea, un indicador del grado de maduración de una persona que no necesariamente es igual a la edad cronológica, es un estudio médico, comúnmente realizada por radiólogos, este indicador es utilizado por médicos de otras especialidades para diagnosticar posibles desordenes de crecimiento que pueden ser

debidos a problemas genéticos, trastornos hormonales o enfermedades sistémicas. El método más común para estimar la edad ósea consiste en usar una imagen radiográfica de la mano no dominante (usualmente la mano izquierda) la cual es analizada por el radiólogo para realizar la evaluación en dónde el rango útil para determinar la edad ósea usando este método es de 1 a 18 años debido a que es el periodo más importante relacionado con el crecimiento de niños, además, después de 18 años el interés médico para estimar la edad ósea decrece así como los cambios en la estructura de los huesos se vuelve menos apreciable que en edades tempranas.

Los métodos más utilizados para realizar la evaluación ósea son usualmente subjetivos porque se basan en comparaciones visuales de la radiografía con un conjunto de imágenes estandarizadas de un manual [9]. La subjetividad es inherente en los métodos tradicionales provocando resultados diferentes dependiendo de la persona que haya realizado la prueba. Para reducir la subjetividad, otros métodos como [17], [13] se basan en puntuar individualmente diferentes regiones de huesos y luego obtener una suma ponderada para estimar la edad ósea. A pesar de ser menos subjetivo que el método en [9], el [17] consume más tiempo y lo vuelve poco práctico para realizar la evaluación diariamente.

La edad ósea es un indicador aceptado [10, 15] para conocer el grado de maduración de una persona durante la etapa de crecimiento, la subjetividad inherente en los métodos tradicionales puede evitarse utilizando enfoques de reconocimiento por computadora. Se han propuesto varios trabajos [1], [2], [5], [12], [14], [11]. Algunos de ellos funcionan como sistemas expertos, generalmente se basan en la extracción de características muy específicas de los huesos y compararlas con valores predefinidos por expertos radiólogos [14]. Otros trabajos utilizan de nuevo las características muy específicas de los huesos, pero la clasificación se lleva a cabo mediante métodos de aprendizaje automático que normalmente requieren una etapa de entrenamiento con un gran conjunto de ejemplos [7, 11, 12].

En [11], Hsieh determina las características geométricas de las ROI definidas en los huesos carpianos para las edades de 1 a 8 años, y propone una red neuronal artificial para estimar la edad ósea. En [7], Giordano automatiza el método de Tanner y Whitehouse [17] mediante técnicas de procesamiento de imágenes con el fin de segmentar las regiones de metáfisis, la epífisis y la diáfisis de los huesos para obtener un vector de características compuesto por un número reducido de longitudes y áreas calculado a partir de esas regiones. Después, utiliza un algoritmo de clasificación basado en modelos ocultos de Markov para estimar la edad ósea.

Se han desarrollado trabajos que sólo utilizan métodos de aprendizaje automático, como Spampinato [16] que propuso clasificar con métodos conocidos como redes neuronales y además permitió que el algoritmo automáticamente eligiera las características de clasificación en las imágenes radiográficas que diferencian mejor

las edades óseas usando ejemplos de entrenamiento. Con un enfoque de aprendizaje profundo (deep learning), utiliza una red neuronal convolucional para aprender automáticamente las características. Se utilizan las imágenes de la mano entera y no es necesario definir regiones especiales de interés. A pesar de que la precisión del método anterior es alta (un MAE o error medio absoluto de 0,8 años), debe mencionarse que requiere una gran cantidad de imágenes de entrenamiento (1400 imágenes tomadas de una base de datos pública en [6]).

Hay poco trabajo que implica características de bajo nivel como píxeles. Esto sucede porque los píxeles de una imagen no siempre representan el mismo lugar de un objeto que se va a reconocer. El mismo objeto en una segunda imagen puede haber sido desplazado, girado, escalado o incluso adoptado otra perspectiva. Sin embargo, los píxeles pueden usarse como características de clasificación siempre y cuando las imágenes estén correctamente alineadas antes de realizar la comparación. En [3] Ayala-Raggi utiliza una apariencia alineada de toda la mano como un vector característico para ser clasificado por el algoritmo de regresión k-NN que estima la edad ósea. Se calcula un modelo de apariencia activa [4] especialmente diseñado para imágenes de mano radiográficas con el propósito segmentar la radiografía de evaluación y alinearla con una forma estándar, después se compara con un conjunto de prototipos de radiografías alineadas. A pesar de que el método funciona (MAE de 1.8 años), se observa que el conjunto de datos reducido que utilizaron para determinar el error, no es suficiente, considerando a la gran cantidad de características implicadas.

A diferencia de los enfoques anteriores, en este trabajo se propone utilizar sólo cinco pequeñas regiones de interés para estimar la edad ósea (menos del 10 de la superficie de la mano). Estas regiones se localizan entre los huesos metacarpianos y falanges, fueron seleccionadas porque los cambios en la apariencia observada de 1 a 18 años es más notable que en otras regiones y por lo tanto pueden ser utilizadas como características para estimación de la edad ósea. Aquí, los píxeles pueden utilizarse como características de bajo nivel gracias a la alineación de las pequeñas ROI. Se propone un método simple pero original para calcular el tamaño (escala), de cada ROI relacionado con el tamaño de la mano en la imagen. Del mismo modo, también se calcula un ángulo de rotación con el fin de normalizar las ROI en tamaño y rotación. Las ROI normalizadas se re-ordenan para formar un vector de características el cual es usado con un algoritmo de regresión k-NN para estimar la edad ósea de una radiografía desconocida. Se muestra que es posible obtener un error (MAE) de estimación cercano a un año al comparar la edad ósea estimada por el algoritmo desarrollado y la edad reportada en la base de datos utilizada [6], siempre y cuando las regiones estén correctamente alineadas en escala y rotación.

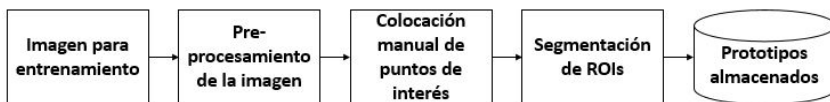


Figura 1: Etapa de entrenamiento.

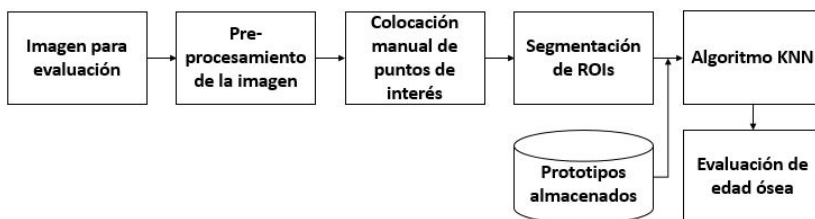


Figura 2: Etapa de evaluación.

2 Sistema general

El método propuesto para la estimación de la edad ósea consiste en dos etapas principales: entrenamiento y evaluación, como se muestra en las Figuras 1 y 2. Se lleva a cabo un pre-procesamiento tanto en la etapa de entrenamiento como en la de evaluación como un primer paso antes de la extracción de características. Este proceso segmenta la mano en la imagen, elimina posibles etiquetas de la radiografía así como objetos no deseados en el fondo, finalmente con el objetivo de estandarizar se ajusta el contraste, antes de entrar en el sistema.

El segundo paso en las etapas de entrenamiento y evaluación es la colocación manual de los puntos de referencia (puntos de interés) en ubicaciones estratégicas dentro de la imagen radiográfica. El tercer paso, también presente en ambas etapas, corresponde a la segmentación y normalización en escala y rotación de cinco ROIs utilizadas para formar un vector de características.

Por último, el cuarto paso es diferente para cada etapa. En el entrenamiento, se almacena el vector de características como un prototipo etiquetado por edad dentro de una base de datos. En la evaluación, se utiliza el vector de características como un prototipo para ser clasificado por el algoritmo de regresión k-NN basado en funciones de base radial. Este clasificador de regresión estima la edad ósea por regresión a partir de los prototipos de entrenamiento etiquetados por edad ósea almacenados durante la etapa de entrenamiento.

3 Pre-procesamiento de la imagen

Las imágenes radiográficas originales podrían ser diferentes entre sí, ya sea por tener un contraste diferente o por contener objetos no deseados o marcadores radiológicos presentes en el fondo que rodea la mano. En esta sección, se describen las dos fases utilizadas para el pre-procesamiento de las imágenes radiológicas.

Segmentación de la mano

El contraste en las ROI utilizadas en este trabajo debe ajustarse de tal manera que la intensidad de gris de las regiones óseas y la intensidad de gris del fondo deben ser muy similares en todas las imágenes del sistema para poder hacer comparaciones entre ellas. Dado que las ROIs utilizadas en este trabajo son pequeñas regiones situadas entre los huesos metacarpianos y falanges, entonces la cantidad de osificación visible y el fondo dependen en gran medida de la edad ósea. Si la cantidad de osificación visible es diferente en dos imágenes, obtendremos diferentes intensidades de grises para la osificación y el fondo cuando aplicamos el mismo criterio de ajuste de contraste a ambas imágenes, por ejemplo, una ecualización del histograma. En tal caso, no es posible comparar las imágenes satisfactoriamente.

En la imagen radiográfica completa, aunque la cantidad de osificación es diferente para cada edad ósea, esta diferencia es mucho más pequeña y menos perceptible que la presente en las pequeñas ROIs seleccionadas. Como consecuencia, en lugar de llevar a cabo el ajuste de contraste de cada ROI por separado, se decide ajustar el contraste a las imágenes radiográficas completas. Sin embargo, el fondo que rodea la mano no es parte de ella, por lo que es necesario segmentar la región de la mano con el fin de ajustar el contraste sólo a esta zona de la imagen.

Entonces, es necesaria una fase de segmentación de la mano antes de llevar a cabo el ajuste de contraste. Se utiliza una variación del algoritmo *floodingfill* descrito en [8] para segmentar la región de la mano. Una vez que la mano está segmentada, se utiliza una máscara binaria como se muestra en la Figura 3 con el fin de hacer el ajuste de contraste en esa región.

Ajuste de contraste

La imagen binaria de la mano obtenida en la última sección se utiliza para ajustar el contraste sólo dentro de la región de la mano. Se propone realizar este ajuste de contraste mediante un mapeo lineal simple basado en una media máxima y una media mínima de los valores de las intensidades de nivel de gris en la imagen. Para obtener estos valores, primero se calcula la media μ y la desviación estándar σ de las intensidades de los píxeles. Entonces, la media máxima y mínima se pueden



Figura 3: Ejemplo de máscara binaria usada para ajuste de contraste local.

calcular como $MeanMax = \mu + 1.5\sigma$ y $MeanMin = \mu - 1.5\sigma$. A partir de estos dos valores es posible hacer un mapeo lineal de todos los valores de gris a un nuevo rango de 0 a 255. La Figura 4 ilustra este proceso de ajuste del contraste.



(a) Imagen radiográfica con contraste original



(b) Imagen radiográfica con contraste corregido

Figura 4: Ajuste de contraste en la región de la mano

4 Colocación manual de puntos estratégicos

Con el fin de obtener cinco ROIs estratégicas, se propone una colocación manual de 10 puntos de interés que serán denominados puntos de referencia, cinco de ellos situados entre las falanges proximal e intermedia y los demás entre los metacarpianos y falanges proximales. La disposición de los 10 puntos de referencia se representa

en la Figura 5. Además, se propone ubicar el punto de referencia exactamente en la posición intermedia entre los huesos, en donde no hay algún tipo de osificación, como se muestra en la Figura 6.

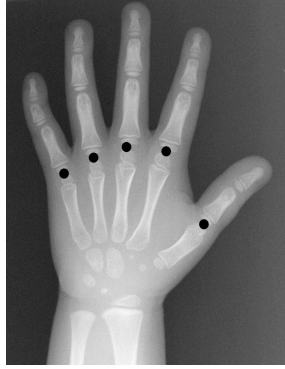


Figura 5: Posición de 10 puntos para segmentar las ROIs propuestas.

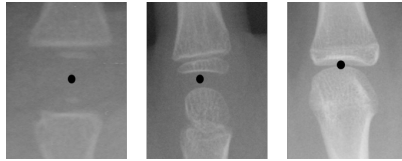


Figura 6: Los puntos son colocados en la región intermedia que no presenta osificación.

5 Segmentación de ROIs

Una vez completado el proceso de colocación de puntos de referencia, el siguiente paso es extraer las ROIs. En este trabajo se propone utilizar sólo cinco ROIs para determinar la edad ósea. Los cinco puntos de referencia situados entre las falanges proximal e intermedia se utilizan como una referencia geométrica para calcular el ángulo de inclinación θ de cada ROI con respecto a la vertical, como se muestra en la Figura 7.

El tamaño de cada ROI se calcula en base a la distancia entre los dos puntos en el mismo dedo multiplicado por un factor constante. Se resume el proceso para extraer cada ROI alineada en tamaño y orientación en el siguiente algoritmo:

1. Calcular la distancia entre los puntos de referencia de cada dedo.

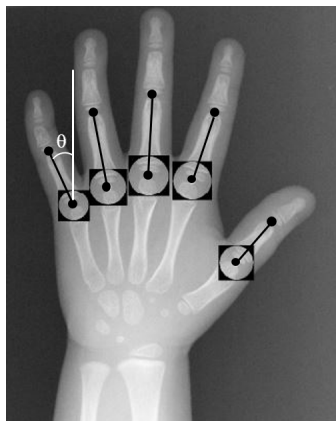


Figura 7: ROIs utilizadas. Ángulo θ es calculado usando el punto ubicado entre las falanges proximal e intermedia en el mismo dedo. El tamaño de la ROI es calculado usando la distancia entre ambos puntos en el mismo dedo multiplicado por un factor constante.

2. Multiplicar la distancia por una constante D para cada dedo. Obteniendo así el tamaño del ROI.
3. Segmentar la ROI cuadrada para cada dedo.
4. Calcular el ángulo θ entre la vertical y la línea imaginaria entre los dos puntos de referencia para cada dedo.
5. Rotar cada ROI para que el nuevo ángulo θ sea igual a cero.
6. Re-dimensionar cada ROI para tener un nuevo tamaño de 32×32 .
7. Aplicar una máscara binaria circular a cada imagen ROI (diámetro = 32) para preservar sólo los mismos píxeles de imagen antes de la rotación.

La Figura 8 muestra el proceso descrito. Una vez segmentadas las cinco ROIs de una imagen, el siguiente paso es formar un vector de características o prototipo que se almacenará en una base de datos o se utilizará como un prototipo de evaluación para la estimar la edad ósea.

6 Formado del vector de características o prototipo

El prototipo se forma ordenando en un vector columna cada uno de las cinco ROIs de tal manera que su nuevo tamaño sea 1×1024 (líneas por columnas) en lugar

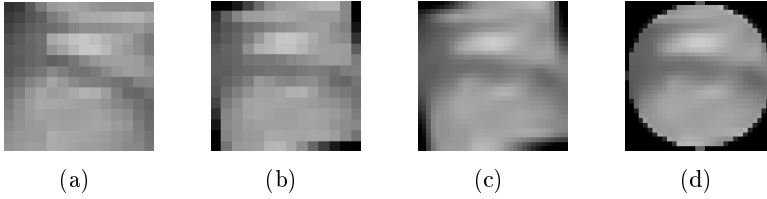


Figura 8: Proceso de alineación y normalización de cada ROI. (a)ROI inicial. (b)ROI rotada. (c)ROI re-dimensionada. (d)ROI enmascarada.

de 32×32 . Los cinco vectores de línea se concatenan para formar solamente un vector de línea con un tamaño de 1×5120 . Durante la etapa de entrenamiento, los prototipos se almacenan, y cada uno es etiquetado con su edad ósea correspondiente de la base de datos. Durante la evaluación, el prototipo formado será analizado por un algoritmo de regresión k-NN para estimar su edad ósea.

7 Regresión con el clasificador k-NN

Finalmente la edad ósea se estima por el algoritmo de regresión k-NN similar a la clasificación utilizada en [3]. Una vez que ya se formo el vector característico de la imagen es posible usar el algoritmo que se describe a continuación:

1. Calcular la distancia euclidiana d entre el vector característico de la muestra y los prototipos.
2. Conservar solo los k prototipos con menor distancia d .
3. Calcular la ponderación de cada uno de los k prototipos en función de la distancia obtenida.

$$W_i = \exp \frac{-d_i^2}{2\alpha^2}$$

Con $\alpha = \frac{d_i}{2}$ y d_i es la menor distancia calculada.

4. Calcular la edad ósea sumando las etiquetas (edades) ponderadas de los k prototipos.

$$Edad = \frac{\sum_{i=1}^K W_i A_i}{\sum_{i=1}^K W_i}$$

Donde A_i representa la edad ósea respectiva de cada prototipo.

8 Conjunto de imágenes utilizado y resultados

Se utilizó una base de datos pública descrita en [6] la cual está disponible en <http://ipilab.usc.edu/BAAweb/>, contiene imágenes radiográficas de la mano izquierda de personas en un rango de edad ósea de 0 a 18 años. La base de datos contiene la imágenes separadas por edad ósea, género (femenino y masculino) y por raza (asiático, afroamericano, hispano y caucásico). Para probar el algoritmo se elige separar las imágenes únicamente por género, es decir, se tienen dos conjuntos en dónde cada uno está compuesto por 400 imágenes que incluyen todas las edades óseas y todos los tipos de raza de la base de datos.

Re-dimensionado de las imágenes originales

Las imágenes originales en la base datos son de diferentes tamaños. Normalmente, la dimensión vertical (columna) es 256 y la dimensión horizontal (renglón) es menor de 256 pero no siempre la misma. Entonces, se tomó la parte central de las imágenes (donde se encuentra la mano) y se agregaron dos bandas laterales a la cuales el color se calculó a partir de los píxeles en cada borde lateral de la imagen tomada. Para obtener una imagen final de 256×256 .

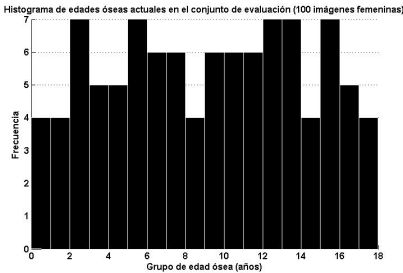
Estimación de la edad ósea

El sistema fue probado para el grupo femenino y el masculino por separado usando 100 imágenes de prueba. La Figura 9 muestra los histogramas de edad ósea correspondientes a cada grupos de pruebas (femenino y masculino), mostrando un equilibrio de edad adecuado con el fin de demostrar la capacidad del algoritmo para estimar la edad ósea independientemente de la edad y el origen étnico.

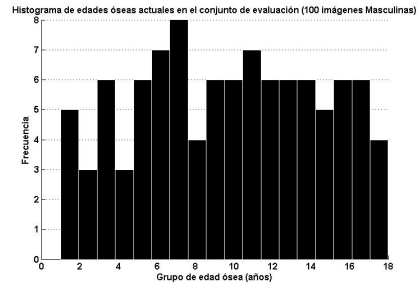
Se usaron 300 imágenes de todas las razas y edades para la etapa de entrenamiento. Cada imagen fue etiquetada manualmente con los 10 puntos de referencia, y se formo el vector de características para cada imagen. Se evaluó el sistema calculando el error medio absoluto (MAE) entre el vector formado con las 100 edades óseas actuales y uno formado con las 100 edades óseas estimadas por el sistema. De forma similar, se calculó el error medio cuadrático calculado entre los vectores anteriores.

La evaluación se realizó variando k de $k = 2$ a $k = 26$, y se obtuvieron los mejores resultados con $k = 7$ para las imágenes femeninas y $k = 10$ para las imágenes masculinas como se muestra en la Figura 10.

Finalmente, la Figura 11 muestra gráficamente una comparación entre las edades óseas actuales y las estimadas, ordenadas de menor a mayor. Se observa en ambas gráficas una mayor separación de los valores actuales y estimados de la edad en los

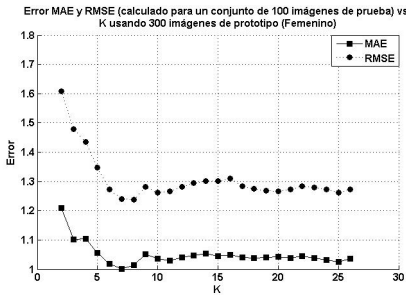


(a) Histograma del grupo femenino

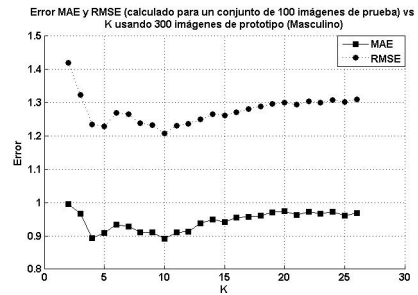


(b) Histograma del grupo masculino

Figura 9: Histogramas de la edad ósea actual del conjunto de imágenes usadas para evaluación (100 por cada grupo).

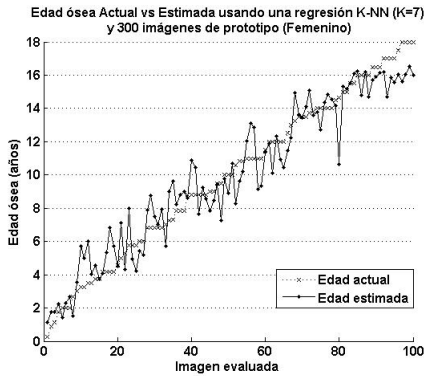


(a) Error de edad (años) en función de k (femenino)

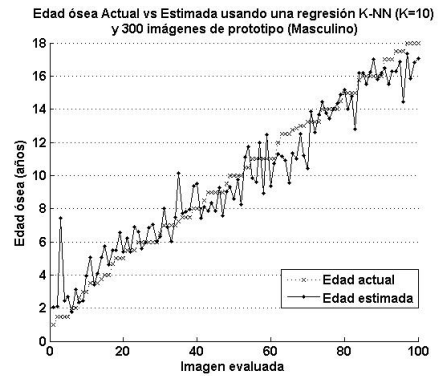


(b) Error de edad (años) en función de k (masculino)

Figura 10: Error de estimación con 300 imágenes de entrenamiento para cada conjunto con 100 imágenes de evaluación, variando el parámetro k del algoritmo k-NN.



(a) Edad ósea actual vs Edad ósea estimada (femenino)



(b) Edad ósea actual vs Edad ósea estimada (masculino)

Figura 11: Edad ósea actual vs Edad ósea estimada, usando 300 prototipos de entrenamiento y 100 imágenes de evaluación donde la edad ósea actual fue ordenada de menor a mayor. Se uso el valor de k con el menor error MAE obtenido para cada grupo.

límites del rango de edad, 1 y 18 años. Esto podría ser consecuencia de la naturaleza del enfoque k-NN para la interpolación, pero no sería así con extrapolación de edades.

La Tabla 1 muestra los errores reportados para diferentes métodos encontrados en la literatura. En el método propuesto, al promediar el MAE para el grupo femenino y el MAE para el masculino, se obtiene un $MAE = 0.95$ años.

9 Conclusiones y trabajo futuro

En este artículo se propone un algoritmo simple para estimar la edad ósea a partir de cinco pequeñas ROIs centradas alrededor de cinco puntos de referencia ubicados estratégicamente sobre una imagen radiográfica de una mano.

Los resultados muestran que el error entre la estimación de edad ósea obtenida por el algoritmo y la reportada en la base de datos es de $MAE = 1.0$ y $RMSE = 1.24$ años para el grupo femenino y $MAE = 0.89$ y $RMSE = 1.21$ años para el grupo masculino, el error MAE en este trabajo es similar al error MAE, reportado en algunos trabajos revisados en la literatura Tabla 1, que es alrededor de 1 año.

A diferencia de otros métodos de aprendizaje automático, este método necesi-

Tabla 1: Comparación de algunos métodos revisados en la literatura

Método	Banco de imágenes	MAE(años)
Propuesta	Digital Hand Atlas Database System [6]	* 0.95 años
Ayala-Raggi et al [3]	Imagen Exakta laboratories (165 imágenes)	1.8 años
Spampinato et al [16]	Digital Hand Atlas Database System [6]	0.8 años
Giordano et al [7]	Conjunto de imágenes privadas (360 imágenes)	0.41 años

ta relativamente pocas imágenes de entrenamiento (se usaron 300 imágenes para entrenar cada grupo) para alcanzar prácticamente el mismo error de edad que los otros métodos reportan como en [16] en dónde se utilizan alrededor de 1400 imágenes para entrenamiento. Se considera que las contribuciones son las siguientes: 1. Un algoritmo original para alinear las regiones de interés de las imágenes radiográficas. El método calcula el tamaño de las ROIs a segmentar en función de las posiciones relativas de la ubicación de los puntos de referencia. Luego, normaliza (en orientación y escala) las ROIs para ser utilizados en la formación de vectores de características. 2. Una forma original de formar vectores alineados de características útiles para una clasificación exitosa. 3. Una forma de obtener características para clasificación que permiten realizar una estimación en imágenes desconocidas y discriminantes basadas en la aplicación de una corrección adecuada del contraste a las imágenes involucradas.

Como trabajo futuro, se esta desarrollando un algoritmo completamente automático para detectar los puntos de referencia utilizados en este trabajo.

Agradecimientos

Se agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el otorgamiento de la beca de Maestría No. 612237 para cursar el programa de Maestría en Ingeniería Electrónica, Opción Instrumentación Electrónica, y a la Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, por el valioso apoyo brindado para desarrollar el método descrito en este trabajo.

Bibliografía

- [1] Adeshina, S.A., Cootes, T.F., Adams, J.E., *Evaluating different structures for predicting skeletal maturity using statistical appearance models*, In: In Proc. MIUA. (2009).
- [2] Aja-Fernández, S., de Luis-Garcia, R., Martin-Fernandez, M.A., Alberola-López, C., *A computational tw3 classifier for skeletal maturity assessment a computing with words approach*, Journal of Biomedical Informatics **37** (2004) 99–107.
- [3] Ayala-Raggi, S., Montoya, F., Barreto-Flores, A., Sánchez-Urrieta, S., Portillo-Robledo, J., Bautista-López, V., *A supervised incremental learning technique for automatic recognition of the skeletal maturity, or can a machine learn to assess bone age without radiological training from experts?*, International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence (2017).
- [4] Cootes, T.F., Edwards, G.J., Taylor, C.J., *Active appearance models*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence **23** (2001) 681–685.
- [5] Cunha, P., Moura, D.C., Guevara López, M.A., Guerra, C., Pinto, D., Ramos, I., *Impact of ensemble learning in the assessment of skeletal maturity*, Journal of Medical Systems **38** (2014) 87.
- [6] Gertych, A., Zhang, A., Sayre, J., Pospiech-Kurkowska, S., Huang, H., *Bone age assessment of children using a digital hand atlas*, Computerized Medical Imaging and Graphics **31** (2007) 322–331.
- [7] Giordano, D., Kavasidis, I., Spampinato, C., *Modeling skeletal bone development with hidden Markov models*, Computer Methods and Programs in Biomedicine **124** (2016) 138–147.
- [8] Gonzalez, R.C., Woods, R.E., *Digital Image Processing (3rd Edition)*, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA (2006).
- [9] Greulich, Pyle, S., *Radiographic atlas of skeletal development of hand wrist*, Stanford University Press 2nd ed. (1971).
- [10] Hernández, M., *Maduración ósea y predicción de talla*, Bol. Pediatr. (1991) 32141:265–272.
- [11] Hsieh, C.W., lang Jong, T., Chou, Y.H., Tiu, C.M., *Computerized geometric features of carpal bone for bone age estimation*, Chinese Medical Journal **120** (9) (2007) 767–770.

- [12] Liu, H., Chou, Y., Tiu, C., Lin, C., Chen, C., Hwang, C., Hsieh, C., Jong, T., *Bone age pre-estimation using partial least squares regression analysis with a priori knowledge*, In: 2014 IEEE International Symposium on Medical Measurements and Applications, MeMeA 2014, Lisboa, Portugal, (2014) 164–167.
- [13] Molinari, L., Gasser, T. Largo, R., *Tw3 bone age: Rus/cb and gender differences of percentiles for score and score increments*, *Annals of human biology* **31**(4) (2004) 421–435.
- [14] Niemeijer, M., van Ginneken, B., Maas, C., Beek, F., Viergever, M., *Assessing the Skeletal Age From a Hand Radiograph: Automating the Tanner-Whitehouse Method*, In Sonka, M., Fitzpatrick, J., eds.: SPIE Medical Imaging. Volume 5032., SPIE, SPIE (2003) 1197–1205.
- [15] Pérez, R., *Valoración y utilidad de la edad ósea en la práctica clínica*, *Form. Act. Pediatr. Aten. Prim.* (2011) 4;253-7.
- [16] Spampinato, C., Palazzo, S., Giordano, D., Aldinucci, M., Leonardi, R., *Deep learning for automated skeletal bone age assessment in x-ray images*, *Medical Image Analysis* **36** (2017) 41-51.
- [17] Tanner, J., Whitehouse, R., Cameron, N., Marshall, W., Healy, M., Goldstein, H., *Skeletal maturity and prediction of adult height (tw2 method)*, Academic Press, London 2nd ed. (1975).

Facultad de Ciencias de la Electrónica, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

tonatiuhbanda@gmail.com

saraggi@ece.buap.mx

abarreto@ece.buap.mx

Índice de autores

Ayala Raggi, Salvador Eugenio, 159

Banda Escobar, José Luis Tonatiúh, 159

Barreto Flores, Aldrin, 159

Escalante Vega, Juana Elisa, 105

Escamilla Navarro, Esteban, 105

Filloy Yagüe, Eugenio, 5

Guzmán Trujillo, Jacobo, 121

Hernández Valdez, Gerardo, 51

Herrera Carrasco, David, 51, 73

Maceda Méndez, Adolfo, 73

Macías Romero, Fernando, 51, 73

Martínez Palacios, María Teresa Verónica, 121

Moreno Corral, Marco Arturo, 35

Ortiz Ramírez, Ambrosio, 121

Rodríguez González, María Leticia, 5

Salem Silva, Francisco Sergio, 105

Matemáticas y sus aplicaciones 10
su composición, diseño y cuidado, estuvo a cargo de
David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero
se terminó de imprimir el 26 de octubre de 2018, en los talleres
de El Errante editor, S. A. de C. V., sito en Privada Emiliano Zapata 5947
Col. San Baltazar Campeche, Puebla, Pue., México
El tiraje consta de 500 ejemplares.