axolote'

Editorial

Actualmente, un estudiante que quiera hacerse matemático en la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (FCFM-BUAP), no sólo puede obtener los títulos de Licenciado en Matemáticas o Licenciado en Matemáticas Aplicadas. También puede continuar con la Maestría o el Doctorado en Ciencias Matemáticas, especializándose en alguna de las varias posibles ramas que se desarrollan en la Facultad: análisis matemático, ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos, estadística, probabilidad, topología, educación matemática, modelación matemática, etc., etc., etc. Pero estos logros tienen historia; darla a conocer es crucial, pues los jóvenes deben ser conscientes de que han gozado del privilegio de estudiar en la BUAP y, en particular, en nuestra Facultad, y de que se han hecho profesionistas muy bien preparados, gracias al esfuerzo de sus familias, de sus maestros, de años de luchas sociales, y deben tener la suficiente consciencia social e histórica para retribuir a la sociedad lo que ésta les ha proporcionado. Debemos mantener siempre fresca la memoria de esto hechos.

La Facultad de Ciencias Físico Matemáticas fue fundada en 1950 (antes Escuela de Físico Matemáticas) con la carrera de Física. La carrera de Matemáticas, inició en 1973. Con cincuenta años de experiencia, está consolidada desde hace varias décadas. La creación en 1982 de la Maestría en Ciencias Matemáticas y la creación en 1993 del Doctorado en Ciencias Matemáticas amplían la oferta de posgrado en ciencias exactas de la BUAP y complementan las licenciaturas en Matemáticas y Matemáticas Aplicadas que ofrece la FCFM-BUAP.

Axolote presenta, para no dejar de hablar de matemáticas, un artículo acerca de la solución del tercer problema de los 23 que propuso el gran matemático David Hilbert en el Congreso de París de 1900, como algunos de los principales retos a resolver por los matemáticos del siglo XX; pero principalmente dedicamos este número a reseñar la celebración de los 50 años de la Licenciatura en Matemáticas, los 41 años de la Maestría en Ciencias Matemáticas y los 30 años del Doctorado en Ciencias Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas BUAP, que se llevó a cabo el 23 de noviembre en el auditorio de la FCFM, en dos mesas redondas. La primera mesa redonda, integrada con exalumnos de la licenciatura y del posgrado, tuvo como título *''El legado y el futuro de los programas de matemáticas en la BUAP''* con los temas: (a) reflexiones del pasado, (b) contribuaciones de los egresados (c) desafios actuales y emergentes y (c) visión para el futuro. La segunda mesa redonda se tituló *''Medio siglo de matemáticas en Puebla, evolución y perspectivas''*. Participaron en ella los maestros de la carrera de matemáticas en ese 1973 (Jesús Pérez Romero, Raymundo Bautista Ramos y Fernando Velázquez Castillo), dos de los primeros estudiantes (Juan Angoa y Celestino Soriano) y profesores que contribuyeron a la maestría y el doctorado en matemáticas (Humberto Salazar Ibargüen y Miguel Antonio Jiménez Pozo).

Aparte de las ya acostumbradas secciones de axolote (para pensar; frases célebres; para sonreir, divertirse y reflexionar; recomendación de lecturas; reseña de libro, y la poesía de septiembre – diciembre), tratamos de presentar un resumen de lo que se dijo en las mesas de la celebración, pero desgraciadamente dicho resumen deja mucho que desear, pues la riqueza de las experiencias narradas y las ideas emanadas de dichas mesas, no se puede sustituir con ninguna otra cosa. Sin embargo, en el 54 Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana, que tuvo lugar en nuestra Facultad, en 2021 y en plena pandemia de Covid-19, los profesores María de Jesús López Toriz y Juan Angoa Amador, presentaron una conferencia virtual titulada *La educación matemática universitaria en el siglo XX,* en donde se recrea la emotiva historia de nuestra carrera y de las luchas por conseguirla. Recomendamos mucho que la vean por YouTube en la liga: https://youtu.be/WfxA3NMpq8M?feature=shared

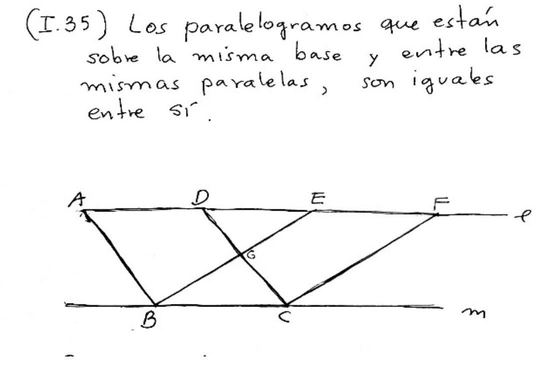
El semestre de otoño está por terminar y desamos a todo los estudiantes y profesores de la Facultad que tengan un buen descanso en vacaciones y un muy buen fin de año en compañía de sus familiares y amigos. Esperamos que regresando al nuevo año 2024 y al semestre de primavera tengamos la oportunidad de seguir editando axolote y recordarles que están invitados a enviar sus aportaciones de divulgación.

El tercer problema de Hilbert

Dr. Agustín Contreras Carreto
Profesor-Investigador
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

Para calcular el área de un rectángulo de lados a y b, usamos la fórmula $A = ab$ que nos enseñaron en la escuela primaria. ¿Cómo se obtuvo esta fórmula? ¿Quién la demostró por vez primera? ¿Fue Euclides? El argumento que algunas veces dan los profesores, consiste en dividir el rectángulo en muchos (ab en total) cuadraditos iguales (unidades cuadradas), sin preguntarnos si esto se puede realizar o no. De hecho, *Max Dehn*, el héroe de este escrito, demostró, en 1903 (ver **[D2]**) que: *Un rectángulo con dimensiones a y b puede ser descompuesto en un número finito de cuadrados más pequeños (baldosas) si , y sólo si,* $\frac{a}{b}$ *es racional* (Ver **[A1]** o **[B1]**).

Quizá nos asombraría saber que Euclides no usaba fórmulas, sino que comparaba las áreas o los volúmenes entre dos figuras, descomponiéndolas y reacomodándolas. Por ejemplo, sin necesidad de tener la fórmula para el área de un paralelogramo, él sabía que *los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas, son iguales entre sí.* (Teorema 35 del libro I de los *Elementos*).



En la figura de la derecha, ΔDCF y ΔABE son congruentes y tienen, por lo tanto, áreas iguales. Si P y Q son los paralelogramos $ABCD$ y $EBCF$, repectivamente, y si R es el cuadrilátero $ABCF$, se tiene la siguiente igualdad en áreas:

$P = R - \Delta DCF = R - \Delta ABE = Q$ QED

Euclides no necesitó el *método de exhaución de Eudoxo* para desarrollar su teoría del área para polígonos; fue suficiente para él usar el siguiente argumento de disección: *Si dos polígonos P y Q son equidescomponibles, es decir, se pueden dividir en piezas poligonales $P_1, P_2, \cdots, P_n$ y $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$, tales que cada P_i es congruente (isométrica) con la correspondiente Q_i, entonces P y Q tienen la misma área.* De este modo se podría pensar que dos polígonos tienen la misma área si, y sólo si, son equidescomponibles. La justificación plena de este hecho no se logró en tiempos de Euclides, sino hasta el siglo XIX, en el que el matemático húngaro Farkas Bolyai (padre de Johan Bolyai, uno de los iniciadores de la geometría hiperbólica), en 1832, y el oficial alemán Gerwien, en 1833, demostraron independientemente la proposición recíproca del argumento de disección que expresamos arriba: *Si dos polígonos tienen áreas iguales, entonces son equidescomponibles.* (Ver **[B2]** para una demostración).

Euclides usó el método de exhaución en el libro XII de sus *Elementos* y, en particular, en la proposición XII.5, donde demuestra que: *dos pirámides triangulares, con bases iguales (en área) y con la misma altura, tienen volúmenes iguales.* Es claro que una teoría de volumen basada en el método de exhaución es considerablemente más complicada que la noción de área para figuras planas, así que Gauss consideró (en cartas escritas en 1844 y publicadas en 1900, en una edición de su obra completa; ver **[G]**) importante saber si se tendría un teorema como el de Bolyai – Gerwien para poliedros; así, para calcular el volumen de un poliedro, bastaría subdividirlo en subpoliedros congruentes con los que provinieran de una subdivisión de otro poliedro del que sí se conociera su volumen.

En el Congreso Internacional de Matemáticas de 1900 realizado en París, David Hilbert propuso 23 problemas con el objeto de estimular la investigación matemática durante el nuevo siglo (ver **[H2]**). El tercero de estos problemas fue precisamente el planteado por Gauss. También, de los 23, fue el primero que se resolvió. Un alumno de doctorado de Hilbert, el ya citado *Max Dehn*, demostró en ese mismo año 1900 que *un tetraedro y un cubo de igual volumen no son equidescomponibles* (**[D1]**). Una vez más, como con el Quinto postulado, si Euclides no lo pudo hacer mejor, es que no se podía: para definir igualdad de volumen, es necesario un proceso infinito de algún tipo, tal como el método de exhaución. No hay un procedimiento mejor que el que él usó.

Sorprende la sencillez de la solución de Dehn a un problema que había pasado por Gauss y posteriormente por Hilbert. Aquí daremos una versión algebraica moderna de su solución, basada en la plática de Pierre Cartier, No. 646 del Seminario Bourbaki (1985) (ver **[C]**), resumido magistralmente en **[H]**.

En matemáticas contemporáneas, una demostración de que ciertas figuras geométricas no son equivalentes en algún sentido, suele completarse definiendo un invariante que coincide para figuras equivalentes, y mostrando que las figuras en cuestión tienen invariantes diferentes. Esta es la filosofía entre los grupos de homología y homotopía en topología, por ejemplo. El álgebra moderna hace un gran servicio suministrando las herramientas para definir estos invariantes y calcularlos.

Definiremos un cierto grupo abeliano G y, para cada figura poliédrica P, un elemento $\delta(P) \in G$, llamado *invariante Dehn* de P. Mostraremos que δ de figuras congruentes es la misma y que δ es aditiva, en el sentido de que $\delta(P_1 \cup P_2) = \delta(P_1) \cup \delta(P_2)$, para dos figuras P_1 y P_2, cuyos interiores no se superponen. Se sigue que, figuras que son equidescomponibles, tienen el mismo invariante δ. Calcularemos δ de un tetraedro, que será distinto de cero, y δ de un cubo, que será cero. Esto mostrará que un tetraedro y un cubo nunca serán equidescomponibles, aunque tuvieran el mismo volumen.

El invariante de Dehn ha resultado muy útil en el estudio de las variedades topológicas de dimensión baja. En 1965, por ejemplo, Syder demostró (en **[S]**) que si dos poliedros tienen tienen el mismo volumen y el mismo invariante de Dehn, son equidescomponibles.

DEFINICIÓN 1

a) Un poliedro es un cuerpo sólido cuya frontera es una unión finita de polígonos llamados caras. Requerimos que cada dos caras sean ajenas o compartan una arista común, o compartan un vértice común. Finalmente, pedimos que cada arista común a dos caras, no sea común a ninguna otra cara.

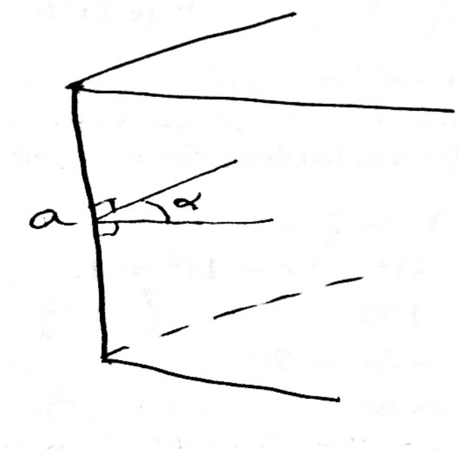
b) Una disección de un poliedro P es una descripción de P como una unión finita de poliedros más pequeños,

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n \,,$$

tal que los poliedros más pequeños tengan, dos a dos, interiores ajenos.

c) Dos poliedros P y Q son equivalentes por disección, o son equidescomponibles, si exsten disecciones $P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n$ y $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_n$ tales que cada P_k es congruente (isométrico) con Q_k.

d) El ángulo diédrico es un ángulo que asociamos a cada arista de un poliedro. Para definir este ángulo, rotamos el poliedro de modo que la arista en cuestión quede vertical, y miramos desde arriba el poliedro. Las dos caras que contienen a nuestra arista aparecen como segmentos de recta; el ángulo diédrico es el ángulo formado por estos segmentos.



DEFINICIÓN 2: *Sea G el conjunto de expresiones*

$$(a_1, \alpha_1) + (a_2, \alpha_2) + \ldots + (a_n, \alpha_n),$$

donde, para cada $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $a_i \in \mathbb{R}$ y α_i es un número real módulo π, es decir, $\alpha_i \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, módulo la relación de equivalencia generada por los dos tipos de operaciones:

$$(a_1, \alpha_1) + (a_1, \alpha_2) = (a_1, \alpha_1 + \alpha_2)$$

$$(a_1, \alpha_1) + (a_2, \alpha_1) = (a_1 + a_2, \alpha_1)$$

Definimos la adición añadiendo una expresión a otra para formar una expresión más larga, sin que importe el orden de los términos.

LEMA 1: *El conjunto G, junto con la operación binaria definidos en* **1***, es un grupo abeliano (llamado el producto tensorial* $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ *).*

Demostración: Debemos mostrar la existencia de una identidad aditiva y de inversos multiplicativos. Primero notemos que, usando las reglas de operación definidas, para todo $a \in \mathbb{R}$, se tiene

$$(a, 0) = (a, 0) + (0, 0) = (a, 0) + (a, 0) + (-a, 0) = (a, 0) + (-a, 0) = (0, 0)$$

Análogamente, para toda $\alpha \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$,

$$(0, \alpha) = (0, \alpha) + (0, 0) = (0, \alpha) + (0, \alpha) + (0, -\alpha) = (0, \alpha) + (0, -\alpha) = (0, 0)$$

Si $O = (0, 0)$, entonces, para cada (a, α),

$$O + (a, \alpha) = (0, 0) + (a, \alpha) = (a, 0) + (a, \alpha) = (a, \alpha)$$

Así, O es una identidad aditiva.

Dado cualquier (a, α), si añadimos $(-a, \alpha)$, obtenemos $(0, \alpha) = O$; así, $(-a, \alpha)$ es un inverso aditivo. Entonces G es un grupo abeliano. Por simplicidad denotaremo O por 0. ■

DEFINICIÓN 3: *Para todo sólido poliédrico P en* $\mathbb{R}^3$*, definimos su* ***invariante de Dehn****,* $\delta(P) \in G$*, como sigue: para cada arista de P, sea a su longitud, y sea α el ángulo diédrico (medido en un plano perpendicular a la arista) en el interior del sólido entre los dos planos que forman la arista. Tomamos α en radianes a ser un número positivo reducido (mod π). Entonces definimos*

$$\delta(P) = \sum (a_i, \alpha_i),$$

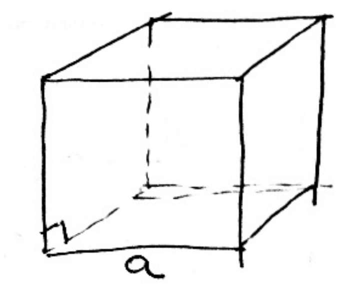
donde la suma se toma sobre todas las aristas de P.

EJEMPLOS:

1) Sea P un cubo cuyas aristas tienen longitud a. El ángulo diédrico entre dos caras es un ángulo recto, así que $\delta(P) = 12\,(a, \frac{\pi}{2})$, pues hay 12 aristas de longitud a. Ahora, en el grupo G, se tiene:

$$(a, \tfrac{\pi}{2}) = (\tfrac{a}{2}, \tfrac{\pi}{2}) + (\tfrac{a}{2}, \tfrac{\pi}{2}) = (\tfrac{a}{2}, \pi) = 0.$$

Entonces $\delta(P) = 0$.



2) El mismo razonamiento muestra que, para todo paralelepípedo rectangular P, $\delta(P) = 0$.

3) Sea P un tetraedro regular de aristas de longitud a. Entonce P tiene 6 aristas de longitud a, todas con el mismo ángulo diédrico α. Así, $\delta(P) = 6\,(a, \alpha)$.

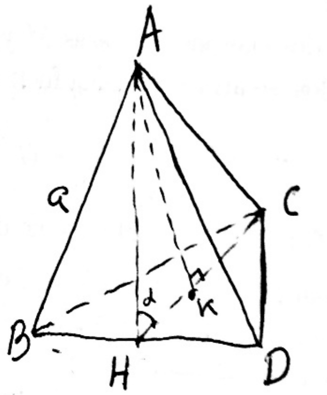
Podemos calcular el valor de α dibujando las alturas de dos de las caras. Obtenemos un triángulo Δ AHC, con $AC = a$, y con $AH = HC = \frac{\sqrt{3}}{2a}$, la altura de un triángulo equilátero de lado a. La perpendicular bajada desde A a la cara BCD del tetraedro, la corta en un punto K, equidistante de B, C y D, así que es el centroide de Δ BCD, lo que implica que $HK = \frac{1}{3} HC$.

De aquí concluimos que:

$$cos\ \alpha = \frac{HK}{AH} = \frac{HK}{HC} = \frac{1}{3},$$

y esto determina el ángulo α.

PROPOSICIÓN 1: *Sean P y P' dos poliedros en $\mathbb{R}^3$. Entonces:*



(a) Si P y P' son congruentes, $\delta(P) = \delta(P')$.

(b) Si P y P' tienen interiores que no se intersectan, $\delta(P \cup P') = \delta(P) + \delta(P')$.

(c) Si P y P' son equivalentes por disección, $\delta(P) = \delta(P')$.

***Demostración**:* La proposición *(a)* es cierta porque, para dos poliedros congruentes dados, hay una correspondencia biunívoca o biyección entre el conjunto de vértices de uno y el conjunto de vértices del otro, de tal forma que las aristas correspondientes de uno y de otro son congruentes y los ángulos diédricos correspondientes son también congruentes.

Para demostrar *(b)*, comparando la unión $P \cup P'$ a los dos pedazos *P y P'*, hay tres maneras en el que las aristas de $P \cup P'$ pueden ser diferentes que el agregado de las aristas de P y de P'. En cada caso probaremos que la contribución a δ es la misma:

Caso 1 Un arista de P y una arista de P' se pueden pegar para formar una sola arista de $P \cup P'$. En este caso, el ángulo α de la arista esa arista en $P \cup P'$ será la suma de, $\alpha + \alpha'$, de los ángulos de las correspondientes aristas en P y en P'.

Como $(a, \alpha + \alpha') = (a, \alpha) + (a, \alpha')$ en G, las contribuciones a δ coinciden.

Caso 2 Dos aristas de longitudes a en P y b en P', que tienen el mismo ángulo α, se pueden unir, extremo con extremo, para formar una sola arista de $P \cup P'$.

Como $(a + b, \alpha) = (a, \alpha) + (b, \alpha)$ en G, la contribución a δ es la misma.

Caso 3 Dos aristas de P y P' se pueden pegar para hacer una sola cara. En este caso no hay arista correspondiente en $P \cup P'$, pero los ángulos diédricos, α y α', de dicha arista en P y P', sumarán π.

Como $(a, \alpha) + (a, \alpha') = (a, \pi) = 0$ en G, la contribución a δ no cambia.

Hay algunas posibilidades adicionales, pero son esencialmente equivalentes a las analizadas arriba. Entonces δ es aditiva. ■

LEMA 2: *Un elemento $(a, \alpha) \in G$ es cero si y sólo si $a = 0$ o $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$, es decir, α es un múltiplo racional de π .*

***Demostración**:* Primero supongamos que $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$, de modo que $\alpha = \frac{r}{s}\pi$, con $r, s \in \mathbb{Z}$. Entonces, en G se tiene:

$$(a, \alpha) = s(\tfrac{1}{s}\ a, \alpha) = (\tfrac{1}{s}\ a, s\alpha) = (\tfrac{1}{s}\ a, r\pi) = 0.$$

Inversamente, supongamos que $a \neq 0$. Definiremos un homomorfismo de grupos

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}.$$

De la siguiente manera: Pensemos a $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. Como $a \neq 0$, $a\,\mathbb{Q}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}$, de dimensión 1. Escojamos un subespacio complementario, V, tal que todo elemento de $b \in \mathbb{R}$ se puede escribir de manera única como $b = ra + v$, donde $r \in \mathbb{Q}$ y $v \in V$. Dado $g = \sum (b_i, \beta_i) \in G$, escribamos, para cada i, $b_i = r_i\, a + v_i$, con $r_i \in \mathbb{Q}$ y $v_i \in V$, y definamos

$$\varphi\, (g) = \sum r_i\, \beta_i \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}.$$

Debemos comprobar que φ está bien definida:

●) Si $\beta_i \in \pi\mathbb{Z}$, entonces $r_i\, \beta_i \in \pi\mathbb{Q}$, así que está bien definida sobre $\beta_i \ (mod\ \pi)$.

●●) φ respeta la relación de equivalencia usada para definir G, pue si

$$(b, \beta) = (b_1, \beta) + (b_2, \beta)$$

y

$$b_1 = r_1\, a + v_1\,,$$

$$b_2 = r_2\, a + v_2\,,$$

entonces

$$b = (r_1 + r_2)\, a + (v_1 + v_2).$$

Así,

$$\varphi(b, \beta) = (r_1 + r_2)\beta = \varphi\, (b_1, \beta) + \varphi\, (b_2, \beta).$$

Por otro lado, si

$$(b, \beta) = (b, \beta_1) + (b, \beta_2)$$

y $b = ra + v$, entonces

$$\varphi(b, \beta) = r\, (\beta_1 + \beta_2) = \varphi\, (b, \beta_1) + \varphi\, (b, \beta_2).$$

Entonces φ está bien definida.

Como $a = 1 \cdot a + 0$, se tiene que $\varphi(a, \alpha) = \alpha \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$. Así, si $(a, \alpha) = 0$ en G, se sigue que $\varphi(a, \alpha) = 0 \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$, y entonces $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$, que era lo que deseábamos probar. ■

LEMA 3: *Si α es un ángulo tal que $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, entonces α no es un múltiplo racional de π.*

Demostración: Es fácil deducir, mediante un triángulo rectángulo adecuado, que $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$. Nuestra prueba consistirá en mostrar que, para todo número natural n, $\tan\, (n\alpha) \notin \{0, \infty\}$. Esto es suficiente para demostrar que α no es un múltiplo racional de π, pues si existiera $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha = \frac{m}{n}\pi$, entonces $n\alpha = m\pi$, con lo cual $\tan\, (n\alpha) \in \{0, \infty\}$.

Mediante la fórmula:

$$tan\ (n+1)\alpha = \frac{\tan\alpha + \tan n\alpha}{1 - \tan(\alpha)\tan(n\alpha)}\ ,$$

tenemos que:

$$tan\ \alpha = 2\sqrt{2} \Rightarrow tan\ 2\alpha = -\frac{4}{7}\sqrt{2} \Rightarrow tan\ 3\alpha = \frac{10}{23}\sqrt{2} \Rightarrow \cdots$$

Más generalmente, si $tan\ n\alpha = \frac{a}{b}\sqrt{2}$, con a y b enteros, entonces $tan\ (n+1)\alpha = \frac{a+2b}{b-4a}\sqrt{2}$. De este modo probamos, inductivamente, que, para todo número natural n, $tan\ n\alpha$ es un múltiplo racional de $\sqrt{2}$. Consideremos la transformación que, a cada pareja ordenada, (a, b), de números enteros, le asocia la pareja $(a + 2b, b - 4a)$, pero considerando a a y b como elementos de $\mathbb{Z}_3$. Comenzando con $a = 2$ y $b = 1$, obtenemos:

$$(2, 1) \longmapsto (1, 2) \longmapsto (2, 1) \longmapsto \cdots$$

Concluimos que, para todo n natural,

$$tan\ n\alpha = \frac{a}{b}\sqrt{2},\ \text{con } (a, b) \equiv (2, 1) \text{ o } (a, b) \equiv (1, 2) \pmod 3$$

En particular, ni a ni b son 0. Entonces $tan\ (n\alpha) \notin \{0, \infty\}$. ■

COROLARIO 1: *Si P es un tetraedro regular, entonces $\delta(P) \neq 0$*

Demostración: Como vimos en 3) del ejemplo 1, $\delta(P) = 6\,(\ a,\ \alpha\ )$, donde $cos\ \alpha = \frac{1}{3}$. Por el Lema 3, α no es un múltiplo racional de π, así que, por el Lema 2, $(\ a,\ \alpha\ ) \neq 0$. ■

Corolario 2 (Solución de Dehn al tercer problema de Hilbert)

En $\mathbb{R}^3$, un tetraedro no es equivalente por disección a un cubo.

Demostración: Por la proposición 1, si un tetraedro y un cubo fueran equivalentes por disección, tendrían el mismo invariante de Dehn. Pero hemos visto que el invariante de Dehn de cualquier cubo es cero, mientras que el invariante de Dehn de un tetraedro es distinto de cero, como acabamos de ver en el corolario anterior. ■

Referencias

[A] M. Aigner, G. M. Ziegler: *Proofs from THE BOOK*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 2013.
[A1] A. Contreras Carreto: *¿El área de un rectángulo? ¡Pero si es muy fácil!*, revista Axolote, enero-abril de 2022, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, BUAP.
[B1] D. Benko: *A new Approach to Hibert's Third Problem*, Amer. Math. Montly, **114** (2007), 665-676.
[B2] V. G. Boltyanskii: *Figuras equivalents y equidescomponibles*, Editorial Limusa-Wiley, S. A., México 1973.
[C] P. Cartier: *Décomposition des Polyédres: le point sur le troisiéme probléme de Hilbert*, Sémin. Bourbaki (1984-1985), No. 646
[D1] M. Dehn: *Ueber raumgleiche Polyeder*, Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften, Mathematisch-physikalische Klasse (1900), 465-478.
[D2] M. Dehn: *Ueber den Rauminhalt,* Mathematische Annalen **55** (1902).
[G] C. F. Gauss: *"Congruenz und Symmetrie": Briefwechsel mit Gerling,* pp. 240-249 in: Werke, Band VIII, Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen; B. G. Teubner, Leipzig 1900.
[H1] R. Hartshorne: *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer-Verlag, New York Berlin Heildelberg 2000.
[H2] D. Hilbert: *Mathematical Problems*, Lecture delivered at the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900, Bulletin Amer. Math. Soc. **8** (1902), 423-479.
[S] J. P. Syder: *"Sur la decomposition des polyèdres"*, Comm. Math. Helv. **16** (1943-1944), pp. 266-273.

Resumen de la mesa redonda:
El legado y futuro de los programas de matemáticas en la BUAP

Moderador y autor del resumen: Gabriel Kantún Montiel

Participantes:
Franco Barragán Mendoza
Florencio Corona Vázquez
Daniela Cortez Toto
Patricia Domínguez Soto
Raúl Escobedo Conde
Esperanza Guzmán Ovando
Víctor Manuel Méndez Salinas
Fabián Valdivia Pérez

1. Participantes mesa redonda de exalumnos

El 23 de noviembre de 2023 en el auditorio de la FCFM a las 11:30 am se llevó a cabo la mesa redonda de exalumnos con título ‘‘El legado y futuro de los programas de matemáticas en la BUAP’’ como parte de la celebración de los 50 años de la licenciatura en matemáticas y los 41 y 30 años de los posgrados en matemáticas de nuestra facultad. El moderador de la mesa fue Gabriel Kantún Montiel y los exalumnos participantes fueron: Franco Barragán Mendoza, Florencio Corona Vázquez, Daniela Cortez Toto, Patricia Domínguez Soto, Raúl Escobedo Conde, Esperanza Guzmán Ovando, Víctor Manuel Méndez Salinas y Fabián Valdivia Pérez*,* véase la fotografía 1.

Como resultado de las discusiones de la mesa, se produjo la siguiente declaración:

Declaración de Egresados

La matemática, como disciplina, requiere tiempo para el desarrollo maduro de ideas. En el pasado, nuestros grupos de clases eran pequeños, y como estudiantes, a menudo cuestionábamos nuestras habilidades en las materias. Sin embargo, la experiencia nos ha demostrado que estamos bien preparados. Los desafíos que enfrentamos son compartidos por estudiantes de matemáticas en todo el mundo.

La fuerza de nuestro programa radica en la calidad de nuestros profesores y estudiantes. Aunque hoy en día disponemos de menos tiempo en las aulas, debemos preservar la abstracción y, al mismo tiempo, mantener una visión clara de qué queremos y para qué sirve. Debemos asegurarnos comprender los procesos detrás de los conceptos y de no comprometer nunca el rigor matemático.

Los profesores de la BUAP son modelos a seguir, y aprendemos de su ejemplo en la organización de eventos, la formación de grupos académicos y la creación de nuevos programas. Aunque no se nos proporciona una formación formal en gestión, adquirimos estas habilidades sobre la marcha. No podemos pasar por alto las labores de divulgación matemática que realizamos.

Nuestros egresados se encuentran laborando en diversas Facultades de la BUAP, así como en instituciones de todo el país. En todas las preparatorias y universidades se requieren matemáticas, y allí están nuestros egresados. Los egresados de la carrera de física también han recibido una sólida formación matemática impartida por el cuerpo docente de la licenciatura en matemáticas.

Anteriormente, la mayoría de los egresados comenzaban a trabajar con una licenciatura, pero en la actualidad, el posgrado ofrece capacitación a profesionales de todo el sur del país. Nuestra investigación en matemáticas ha alcanzado reconocimiento a nivel internacional, y hemos fortalecido grupos de investigación en varias universidades. El programa de doctorado ha contribuido significativamente al desarrollo de programas académicos de reciente creación, donde hasta un 70% de la planta académica está compuesta por egresados de la BUAP.

En el pasado, las matemáticas se desarrollaban en respuesta a amenazas, como durante la era soviética. En la actualidad, respondemos a oportunidades tecnológicas, como el Big Data, pero siempre manteniendo la rigurosidad matemática. Es crucial fortalecer la conexión entre las matemáticas y campos como la informática.

Históricamente, los matemáticos han hecho contribuciones significativas en diversas áreas de la sociedad, sobre todo en la ingeniería y la tecnología. Sería valioso crear comunidades del saber. Crear genealogías que nos den identidad, que resalten nuestras raíces y nos llenen de orgullo por haber estudiado matemáticas en la BUAP.

La universidad debe ser un lugar donde se promueva el intercambio de conocimientos, ya que esto rara vez ocurre en otras partes de la sociedad. Debemos luchar contra economizar el conocimiento, luchar contra la inmediatez.

Es esencial que todos los actores participemos en las autoevaluaciones, conforme a la Ley General de Educación, para prepararnos de manera efectiva para el futuro.

Debemos garantizar que el perfil de egreso esté actualizado y considerar la inclusión de materias relacionadas con la computación, el análisis numérico y las tecnologías emergentes, lo cual fortalecerá nuestra conexión con la industria.

Resumen mesa de la redonda: Medio siglo de matemáticas en Puebla, evolución y perspectivas

Moderador y autor del resumen: Agustín Contreras Carreto

Participantes:
Juan Angoa Amador
Raymundo Bautista Ramos
Miguel Antonio Jiménez Pozo
José de Jesús Pérez Romero
Humberto Salazar Ibargüen
Celestino Soriano Soriano
Fernando Velázquez Castillo

2. Participantes de la mesa redonda profesores

El 23 de noviembre de 2023 en el auditorio de la FCFM, a las 11:30 AM, comenzó la mesa redonda de profesores con el título ‘‘Medio siglo de matemáticas en Puebla, evolución y retos actuales’’ como parte de la celebración de los 50 años de la licenciatura en matemáticas y los 41 y 30 años de los posgrados en matemáticas de nuestra Facultad. El moderador de la mesa fue el profesor Agustín Contreras Carreto y los profesores participantes fueron: Juan Angoa Amador, Raymundo Bautista Ramos, Miguel Antonio Jiménez Pozo, José de Jesús Pérez Romero, Humberto Salazar Ibargüen, Celestino Soriano Soriano y Fernando Velázquez Castillo; véase la fotografía 2.

Introducción:

Hoy es el día de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, porque un 23 de noviembre, pero de 1956, se logra la autonomía de nuestra Universidad; en efecto, ese día se publica en el Diario Oficial, la Ley Orgánica, ya de la Universidad Autónoma de Puebla.

En esta reunión venimos a festejar, primero que nada, los 50 años de la segunda y definitiva fundación de la carrera de matemáticas en la Universidad Autónoma de Puebla, me parece que el 3 de mayo. Eso fue en 1973, año en que también hubo un temblor de 8.7 grados, en la escala de Richter, el 28 de agosto, que destruyó gran parte del Municipio de Ciudad Serdán. Allí, todos los universitarios, incluyendo los profesores y estudiantes de la nueva carrera de matemáticas, apoyaron solidariamente a dicho municipio. Le retribuyeron a la sociedad el apoyo que ésta le dio a la universidad, en su intento de transformación académica y democrática, contra los arteros ataques perpetrados por la ultraderecha poblana, encabezada por el entonces gobernador, para frenar dicho proceso. Como respuesta a estos ataques, la SMM, presidida por Santiago López de Medrano, decidió organizar su congreso de ese año en Puebla; y fue de lujo, porque la conferencia inaugural la dio nada menos que René Thom, considerado uno de los grandes matemáticos del siglo XX. Así que estos pocos estudiantes, empujados por sus pocos profesores, tuvieron un inicio luminoso. Todos ellos eran jóvenes, y revolucionarios, como deben ser los jóvenes. Echaron a andar audazmente sin detenerse hasta que, 50 años después, lograron la Facultad que gozan ustedes, jóvenes: dos licenciaturas de matemáticas (puras y aplicadas), con muchos maestros, muchas áreas de investigación y posible desarrollo, con posgrados de calidad, con congresos internacionales, etc. Parafraseando a Newton, si ustedes pueden ahora ser mejores matemáticos, es porque están parados sobre los hombros de gigantes. 50 años son suficientes para tener mucho que platicar, pero afortunadamente no son tantos como para no tener la fortuna de poder contar con la presencia de los mismísimos gigantes sobre los que ustedes están parados, que serán los encargados de hacer vívido este relato. Los presentaré por el orden de los temas a desarrollar: los 50 años de la licenciatura, los 41 de la maestría y los 30 del doctorado en matemáticas. Contará cada uno con a lo más 10 minutos, en una primera ronda y, si sobra tiempo, habrá una pequeña segunda ronda.

I. Los primeros maestros

José de Jesús Pérez Romero: Promotor de la cultura y de la Ciencia. Ha trabajado por la juventud de Atlixco, de donde es originario. Fundó allí, junto con el dramaturgo Héctor Azar, el grupo de teatro y cultura Antonio Caso (ahora José Martí). También fundó la Casa de la Ciencia y la biblioteca “el Carolinito”. Inició la Feria de las Matemáticas y la Noche de las Estrellas en Atlixco. Estudió en la Escuela de Físico-Matemáticas de la UAP y en la UNAM, matemáticas e ingeniería química. Trabajó en el Instituto Mexicano del Petróleo en matemáticas aplicadas, para después doctorarse en Kansas Tech University. Fue de los primeros maestros de la ECFM y profesor durante muchos años de la misma. También fue director del Instituto de Ciencias de la UAP.

Raymundo Bautista Ramos: Fue profesor de la FCFM-BUAP durante varios años e investigador y director del Dpto. de Matemáticas del ICUAP; Investigador y director del Instituto de Matemáticas de la UNAM, entre 1984 y 1994. Considerado desde siempre como uno de los más importantes algebristas de nivel internacional, actualmente es Investigador Emérito del Centro de Ciencias Matemáticas de la UNAM en Morelia, Michoacán.

Fernando Velázquez Castillo: Entrañable colega profesor, decano de nuestra Academia de Matemáticas. Hombre de gran sensibilidad, siempre está preocupado por la situación del país y de la realidad política, y está constantemente contribuyendo a la consciencia social de nosotros, sus compañeros de la Academia de Matemáticas, de la que fue coordinador durante varios años.

II. Los primeros estudiantes

Celestino Soriano Soriano: De los más queridos maestros de nuestra Facultad. Todos en esta Facultad estamos seguros que es el mejor maestro de cálculo de una y varias variables, diferencial e integral. Su trabajo como profesor es realmente ejemplar.

José Juan Angoa Amador: También muy reconocido profesor de nuestra Facultad. Filósofo y poeta, aparte de matemático. Es un profesor con mucha iniciativa, que ha promovido la formación de grupos de trabajo y la publicación de textos para la licenciatura y para la difusión de la topología.

III. El posgrado en Matemáticas

Kanttinatinathan Sithananthan: Fue profesor de esta Facultad, entonces Escuela de Ciencias Físico-Matemáticas, durante varios años. Por la dificultad para pronunciar su nombre, él mismo nos decía que le dijéramos simplemente Sito o Anán. Fue coordinador de la Maestría en Matemáticas en nuestra Escuela, desde 1983 hasta 1991, cuando se fue a trabajar al Tecnológico de Monterrey, Campus Querétaro.

Humberto Salazar Ibargüen: Fue director de la FCFM, desde octubre de 1992, hasta septiembre de 1996; director del DCYTIC de la BUAP, de abril de 2015, a octubre de 2021. Actualmente es responsable del Centro Interdisciplinario de Investigación y Enseñanza de la Ciencia.

Miguel Antonio Jiménez Pozo: Renombrado matemático cubano, nacionalizado mexicano, profesor e investigador de la FCFM, desde julio de 1994. Organizó en 1995 la importante Tercera serie de Conferencias Internacionales de Aproximación y Optimización del Caribe, junto con la Escuela de Verano conjunta entre las universidades Lomonosov de Moscú y la BUAP. Pertenece a la Academia Mexicana de Ciencias.

Resumen de la mesa redonda:

Los profesores, José de Jesús Pérez Romero, Raymundo Baustista Ramos y Fernando Velázquez Castillo, José Juan Angoa Amador y Celstino Soriano Soriano hablaron sobre la creación de la carrera en matemáticas, sus antecedentes y el ambiente que se vivía en Puebla alrededor de 1973. Las luchas que tuvo que librar la Universidad contra los arteros ataques de la ultraderecha poblana. El apoyo de la sociedad poblana y la comunidad matemática del país y, en particular, el de la Sociedad Matemática Mexicana, que decidió organizar su Congreso de 1973 en el edificio Carolino de la entonces Universidad Autónoma de Puebla (UAP). También en el tema de la evolución, principalmente de la maestría y del doctorado en ciencias matemáticas, hablaron Humberto Salazar Ibargüen y Miguel A. Jiménez Pozo. El profesor K. Sithananthan no pudo participar, porque no se pudo conectar por internet.

En el tema de los retos actuales, el profesor Miguel Antonio Jiménez Pozo manifestó su preocupación de que la planta de profesores de matemáticas no sólo está envejeciendo, sino que está disminuyendo, por el fallecimiento o la jubilación de varios de sus miembros, y las políticas laborales de la Universidad y del Estado no están permitiendo la apertura de las plazas adecuadas para sustituirlos. Los jóvenes matemáticos, por muy talentosos y preparados que sean, no cuentan con oportunidades de trabajo en el que retribuyan a la sociedad, con todo su bagaje de conocimientos, lo que a ésta le ha costado dicha preparación. Éste, en efecto, es todo un reto que tendremos que enfrentar en la Universidad y en el país.

El profesor Raymundo Bautista Ramos propuso a los jóvenes la discusión periódica de temas matemáticos de buen nivel, como el estudio y la divulgación de las demostraciones de las conjeturas de Fermat y de Poincaré, y el planteamiento de algunos problemas abiertos importantes, para promover la emoción de la aventura matemática, el gozo de seguir aprendiendo y el entendimiento de los problemas fundamentales de la matemática actual. Por otro lado, el profesor José de Jesús Pérez Romero nos informó de las actividades matemáticas que ha promovido en Atlixco, en escuelas de diferentes niveles (primaria, secundaria y bachillerato), para ir desarrollando el gusto por la matemática desde antes de llegar a la carrera.

Para Pensar: Frases célebres

***Luis Rivera Terrazas* (1912-1989)**: Ingeniero civil, astrónomo, luchador social y rector de la Universidad Autónoma de Puebla; promovió e impulsó la investigación científica, fundó la segunda escuela de Físico Matemáticas de la República Mexicana, En 1972 Luis Rivera, junto con algunos personales docentes de la Escuela de Ciencias Físico Matemáticas forma un grupo de investigación enfocado en la Física de Bajas Temperaturas. Este grupo llevó a Rivera a fundar el entonces Instituto de Ciencias de la Universidad Autónoma de Puebla (ICUAP), ahora Instituto de Física de la BUAP (IFUAP), del cual fue director durante su primer año (1974 - 1975), antes de ser el rector de la BUAP de 1975 a 1981.

"La Universidad Autónoma de Puebla es producto y expresión de la sociedad mexicana"

"La Universidad Autónoma de Puebla como cualquier otra institución de educación superior, tiene la obligación de producir profesionales, científicos, artistas, etc., de muy alto nivel académico, pero no sólo en función de los intereses y necesidades de las actuales estructuras económicas del país, sino además en función de los grandes problemas que afronta México, tales como la salud, la educación popular y vivienda, que afectan a la gran mayoría del pueblo, y también en función de la independencia económica, política, científica y tecnológica de nuestro país".

Para sonreír, divertirse y reflexionar

1 + 1 = 3

para 1's suficientemente grandes

Estimadas Matemáticas:

NO soy tu terapeuta, ve y resuelve tus propios problemas.

Teorema: **Todos los números enteros positivos son interesantes.**

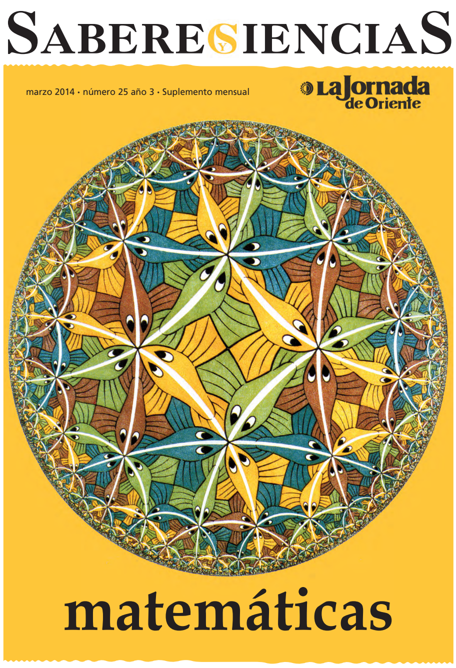
Prueba: **Asumamos lo contrario. Esto quiere decir que existe un mínimo entero positivo que no es interesante. ¡Pero ése es muy interesante! Lo que causa una contradicción.**
Por lo tanto, el teorema es verdadero.

Recomendación de lecturas

Título: *¿Qué es la escuela de matemáticas de la BUAP?*

Autor: *Juan Angoa Amador*

Editorial: *Saberes y Ciencias número 25 año 3,*
Suplemento de la Jornada de Oriente



Título: *La escuela de Física Matemáticas fue un trabajo en equipo se respiraba entusiasmo: Pérez Romero*

Autor: *Denise Lucero Mosqueda*

Editorial: *Saberes y Ciencias número 25 año 3,*
Suplemento de la Jornada de Oriente

Título: *La Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP*

Autor: *Alberto Cordero Dávila*

Editorial: *Saberes y Ciencias número 105,*
Jornada de Oriente

Título: *70 años de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP*

Autor: *Cupatitzio Ramírez Romero*

Editorial: *Saberes y Ciencias número 105,*
Jornada de Oriente

Ligas a las lecturas recomendadas:

https://saberesyciencias.com.mx/category/numeros/numero_25/

https://saberesyciencias.com.mx/category/numeros/numero_105/

Reseña de libro

Título: *Puebla en 1964 memorias de una gesta heroica. El pueblo y la comunidad universitaria en defensa del derecho a disentir.*

Autor: *Raúl Carpinteyro Vera*

Editorial: *Benemérita Universidad Autónoma de Puebla*

Los entonces estudiantes universitarios, que en octubre de 1964, como líderes y dirigentes estudiantiles, tuvimos el honor, que sólo la casualidad ofrece, de ser actores y responsables de la conducción de un movimiento social que como nunca antes en Puebla se ha visto, en el que la sociedad civil por entero se solidarizó con la comunidad universitaria y confió en los jóvenes la conducción de una gesta por demás heroica, a riesgo de nuestra propia vida enfrentamos la imposición de una ley lesiva a toda la sociedad, sin claudicar en momento alguno.

Poema de septiembre-diciembre

ODA AL NÚMERO CERO

Enrique Morón (C'adiar, Granada 1942): Poeta y dramaturgo Español.

*Redonda negación, la nada existe
encerrada en tu círculo profundo
y ruedas derrotado por el mundo
que te dio la verdad que no quisiste.
Como una luna llena es tu figura
grabada en el papel a tinta y sueño.
Dueño de ti te niegas a ser dueño
de toda la extensión de la blancura.
Tu corazón inmóvil y vacío
ha perdido la sangre que no tuvo.
Es inútil segar donde no hubo
más que un cuerpo en el cuerpo sin baldío.
Redonda negación, redonda esencia
que no ha podido ser ni ha pretendido.
Sólo la nada sueña no haber sido
porque no ser es ser en tu existencia.*

Actividades: Academia de Matemáticas en la FCFM

Licenciatura en Matemáticas
Cierre de semestre otoño 2023: 6 de diciembre de 2023
Subida de calificaciones: 7 de diciembre de 2023
Inicio de semestre primavera 2024: 4 de enero 2024

Posgrado en Matemáticas
Avance de tesis:27 noviembre al 1 de diciembre de 2023
Cierre de semestre otoño 2023: 16 de diciembre de 2023
Subida de calificaciones: 19 de diciembre de 2023
Inicio de semestre primavera 2024: 4 de enero de 2024

Foto de la celebración de los 50, 41 y 30 años de la Licenciatura, la Maestría y el Doctorado en Matemáticas de la FCFM, BUAP.

Se recomienda la ponencia "La educación matemática universitaria en el siglo XX", presentada en el 54 Congreso de la SMM en 2021, por María de Jesús López Toriz y Juan Angoa Amador, para complementar los festejos del 50 aniversario de la licenciatura en matemáticas en la siguiente liga:

httsp://youtu.b/WfxA3NMpq8M?feature=shared

Publicaciones de la Academia de Matemáticas

Libro de Matemáticas y sus aplicaciones de la FCFM , BUAP
Publica capítulos expositivos y artículos de investigación. Los trabajos recibidos para su publicación son sometidos a un estricto arbitraje.

Se invita a enviar trabajos para el tomo de 2024. Los trabajos deben ser enviados a alguno de los Editores: David Herrera Carrasco dherrera@fcfm.buap.mx y Fernando Macías Romero fmacias@fcfm.buap.mx
Los trabajos recibidos después del 6 de enero (del año en curso) se tomarán en cuenta para un año después.

Libro de Topología y sus aplicaciones de la FCFM , BUAP
Publica capítulos expositivos y artículos de investigación. Los trabajos recibidos para su publicación son sometidos a un estricto arbitraje.

Se invita a enviar trabajos para el tomo de 2024. Los trabajos deben ser enviados a alguno de los Editores: José Juan Angoa Amador jangoa@fcfm.buap.mx, Raúl Escobedo Conde escobedo@fcfm.buap.mx, María de Jesús López Toriz mjlopez@fcfm.buap, Agustín Contreras Carreto acontri@fcfm.buap.mx

La publicación del libro es anual, según sean las condiciones económicas del cuerpo académico de topología y sus aplicaciones.

Se invita a la comunidad a enviar trabajos de divulgación, problemas matemáticos para resolver, comentarios, etc., al e-mail axolote.fcfm@gmail.com
Las contribuciones deberán estar escritas en word con letra times new roman de 12 puntos.

Compiladores: Docentes de la Academia de Matemáticas, véase lista de docentes en www.fcfm.buap.mx/academiam/

Editores:
Patricia Domínguez Soto,
Agustín Contreras Carreto,
José Juan Angoa Amador

Colaboradores:
Carlos Cabrera Ocañas (IMATE, UNAM)

Diseño logo: Santiago Sienra y Guillermo Sienra (Facultad de Ciencias, UNAM)

axolote’