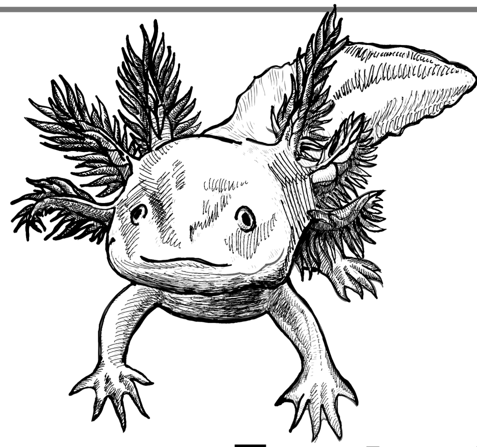
FCFM BUAP



axolote'
Revista mensual de la Academia de Matemáticas

Editorial

Es un placer para la Academia de Matemáticas presentar el cuarto número de axolote, para iniciar el año 2020. La revista nació para impulsar la divulgación en la FCFM con temas relacionados con la matemática, lectura en general, temas filosóficos e información sobre eventos académicos, como por ejemplo, el coloquio mensual de la Academia de Matemáticas. Axolote tiene dos secciones relacionadas con libros: la reseña y la recomendación de un libro, con el fin de motivar al lector a perderse y explorar diferentes emociones a través de las palabras. Anunciamos a los lectores que axolote aparecerá la última semana de cada mes e invitamos a enviar trabajos de divulgación, que serán bienvenidos porque todos somos axolote.

Este 2020 la FCFM cumple 70 años, acontecimiento que se festejará durante todo el año con diferentes eventos. En particular, en el marco del 51 Congreso Nacional de Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana que se llevará a cabo en nuestra Facultad, evento de gran importancia porque promueve el intercambio de ideas, la impartición de conferencias para diferentes niveles educativos, así como eventos culturales. Invitamos a todos a participar en esta celebración.

En este número de axolote hay un artículo de Enrique Barradas relacionado con una pregunta importante: ¿qué son los números? También se encuentra un artículo de Udoso, seudónimo, con un importante mensaje sobre matemática aplicada. Carlos López Andrade escribe sobre algunos conceptos importantes de álgebra. Para sonreír y pensar, se tienen algunos chistes, un poema y algunas frases célebres del filósofo, matemático y físico René Descartes. También se anuncian los eventos del mes de enero y parte de febrero.

Patricia Domínguez Soto

¿Son los números conceptos fundamentales?

¿Qué son los números?

Los números son conceptos fundamentales en la matemática. Los números son la motivación inicial, el punto de partida del que fluye todo lo demás, son primordiales.

Los números parecen muy simples y directos, pero los cálculos con números pueden llegar a ser difíciles. Es mucho más fácil utilizar números que especificar qué son realmente. Los números cuentas cosas, pero no son cosas. Los números se denotan por símbolos, pero no son símbolos. Los números son abstractos, nuestra sociedad se basa en ellos y no funcionaría sin ellos. Los números son producto de nuestra mente, sin embargo, seguirán teniendo significado incluso si la humanidad desaparece por una catástrofe y no quedara ninguna mente para considerarlos. Los números pueden trascender a la humanidad.

Los números pueden representar pequeñas o inimaginables cantidades y los hay de diferentes tipos: naturales, enteros, racionales, irracionales, reales o complejos. Se les puede sumar, restar, multiplicar o dividir y no dejan de ser números. Pueden ser asociativos o conmutativos e incluso distributivos.

Sin números, la sociedad tal como ahora la conocemos no podría existir. Los números están por todas partes, como asistentes ocultos que andan de un lado a otro entre diversos lugares: llevan mensajes, corrigen nuestros errores ortográficos cuando escribimos a máquina, programan nuestras vacaciones, llevan el registro de nuestros bienes, garantizan que nuestras medicinas sean seguras. Los números cuantifican el paso de la vida, del tiempo, del día y la noche, los años, la historia. Señalan el clima, el paso de las estaciones, el comercio, la contabilidad, la vida.

Nadie puede negar los profundos efectos que han tenido en el desarrollo de la civilización. La evolución de la música y las artes en general, han ido de la mano de los números durante los últimos cuatro milenios. Sería difícil desenredar causa y efecto; la innovación y el cambio cultural, o que las necesidades culturales determinan la dirección del progreso o viceversa. Pero, sin embargo, no todas sus aplicaciones han mejorado la condición humana. Los números hacen posible también las armas y guían drones, bombas y misiles hacia sus objetivos específicos. Los números llevan registros, quizás con fines impositivos o financieros, o como prueba legal de propiedad privada. Pero ambas afirmaciones contienen algo de verdadero, porque los números y la cultura evolucionan conjuntamente.

José Enrique Barradas Guevara

π $\qquad$ $i = \sqrt{-1}$

Matemáticas Aplicadas

Las matemáticas conllevan un proceso intrínseco de abstracción. El desarrollo histórico de la disciplina esta ligado inseparablemente a la construcción y manejo de conceptos intangibles.
A la vez, invariablemente, en el mismo desarrollo histórico de la disciplina encontramos esfuerzos por dar interpretaciones físicas al hacer matemático y, no pocas veces, es este el motor de la creación de conocimiento matemático.

La curiosidad científica atraviesa periodos difíciles. Pareciera una afirmación absurda debido a la masificación de contenidos disponibles en los medios tradicionales y modernos. Pero en la valorización del conocimiento se ha tomado como máximo estandarte que este conocimiento se incorpore a la lógica económica: Si tu conocimiento produce una nueva mercancía -validez incuestionable- Si tu conocimiento optimiza un proceso que impacte significativamente la acumulación de capital -validez incuestionable- Si tu conocimiento impacta problemas sociales pero no puede ser sujeto a la lógica del mercado -Es loable pero no importante- Si tu conocimiento ofrece nuevas perspectivas del mundo natural o humano sin más -conocimiento puro, acaso interesante, pero sin lugar a dudas, inútil.

En un elevado acto de ignorancia y desprecio a la historia de la labor científica, agentes intentan equiparar el concepto de ciencia con producción tecnológica. La aplicabilidad del conocimiento, en boca de ellos, es la redención de todo mal pensamiento que no esté encaminado a producir plusvalor.

Así, para ajustarme a la norma, para cumplir con los requisitos de un matemático útil a la sociedad, usaré matemáticas y, llevando a cabo el más alto acto que un matemático puede realizar ¡Las aplicaré! Para escribir esta columna de filosofía, literatura y temas afines al malpensar.

Unoso

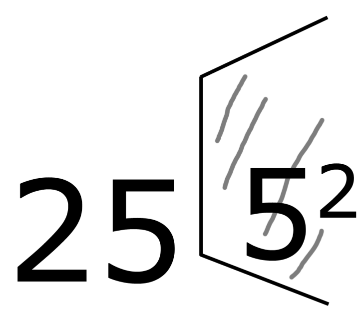
Para sonreír

Fiesta matemática

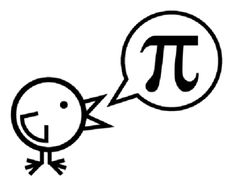
Esto es una fiesta matemática, y va pi y le dice a e^x que está apartado en un rincón:

- "Y tú, ¿no te integras?".

- "Me da lo mismo".



Hoy el veinticinco se mira en el espejo y se siente... factorizado



CERO DISFRAZADO DE INFINITO

axolote'
Revista mensual de la Academia de Matemáticas

Para Pensar: Frases célebres de René Descartes

Nacimiento: 31 de marzo de 1596
Fallecimiento: 11 de febrero de 1650

Filósofo, matemático y físico francés considerado como el padre de la geometría analítica y de la filosofía moderna.

Es conocido como Cartesius, que era la forma latinizada en la que escribía su nombre, onomástico del que se deriva el adjetivo cartesiano usado en el contexto de la matemática: plano cartesiano.

"La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles"

"Los números perfectos, como los hombres perfectos, son muy extraños"

"Pienso y dudo, luego existo"

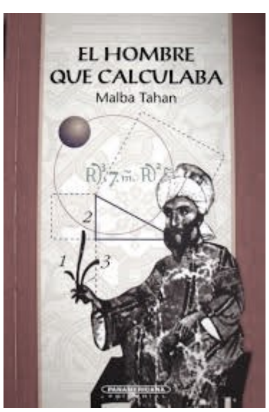
"Dos cosas contribuyen a avanzar: ir más deprisa que los otros, o ir por el buen camino"

"La lectura es una conversación con los hombres más ilustres de los siglos pasados"

"No hay nada repartido de modo más equitativo que la razón: todo el mundo está convencido de tener suficiente"

Recomendación libro del mes de enero

Libro: El hombre que calculaba
Escritor: Malba Tahan
Editorial: Noriega



Obra notablemente didáctica en la que convergen dos facetas de encanto indiscutible: la poesía y la matemática. A través de interesantes historias y leyendas nos adentra en el campo de la matemática con evidente placer y satisfacción

Reseña de Libro

En este espacio se comentan obras de divulgación, filosofía, historia de la ciencia o en particular de la matemática, para crear el entusiasmo en la lectura de ellas o de similares a ellas.

Libro: Coronel lagrimas
Autor: Carlos Fonseca
Editorial y año: Anagrama, Barcelona, España, 2015

Nos enfrentamos a una obra que burla cualquier clasificación, Coronel lagrimas de Carlos Fonseca, es la "biografía" de alguien muy parecido al matemático Alexander Grothendieck (1928-2014). Se tienen fuertes sospechas que es él, ya que se describe a alguien que al final de su vida se escapa a los Pirineos, lo cual coincide con Grothendieck, que fue un gran matemático con la pasión a flor de piel y que buscó la estructura universal y su obra nos regala varias estructuras que sintetizan los comportamientos de varias regiones de la matemática. En el Coronel lagrimas, encontramos en forma literaria la descripción de la pasión por la creación y sus abismos y fracturas existenciales a las que nos lleva, pero más que la anécdota y los datos creo que Fonseca nos inventa un personaje y así cumple con la ley de toda literatura inventar una realidad que nos afirme nuestra realidad, que nos describa a lo interior y a lo exterior una realidad humana, creo nos regala con datos fantásticos que no importa si sean verdaderos, ya que sólo son parte de la descripción de un personaje, que a los matemáticos nos seduce y apasiona, ya que es cierto que Grothendieck, dejo una obra fundamental para la matemática y una nueva visón del quehacer matemático, y luego desapareció sin explicación; esta obra describe bajo una nube de pirotecnia verbal un tal vez literario de sus días en los Pirineos. Léase no para documentar, pero a falta de más datos inventar a un ya no-matemático en su pasión laxa y tenue de todos los días.

J. Juan Angoa Amador

Poesía del mes de enero

PALABRAS Y NÚMEROS

Autora: Gloria Fuentes

En el cielo una luna se divierte.
En el suelo dos bueyes van cansados.
En el borde del río nace el musgo.
En el pozo hay tres peces condenados.
En el seco sendero hay cuatro olivos,
en el peral pequeño, cinco pájaros
seis ovejas en el redil del pobre,
-en su zurrón duermen siete pecados-
Ocho meses tarda en nacer el trigo,
nueve días tan solo el cucaracho;

diez estrellas cuento junto al chopo.
Once años tenía,
doce meses hace que te espero,
por este paragua trece duros pago.

El [7,4]-código de Hamming su codificación y decodificación

Hoy en día, las redes de comunicación comparten el mismo principio fundamental de operación, ya sea que se trate de paquetes de datos a través de la Internet, o señales en una red telefónica, o vía satélite, y también en el almacenamiento digital de datos, la información se transmite de la misma manera, a través de un canal de comunicación ruidoso. El ruido provoca errores que impiden obtener una buena transmisión de la información, produciéndose pérdida de información, falta de seguridad y fiabilidad en la red o sistema.

La Figura 1 describe el proceso de comunicación en su forma más simple; la forma en la que se almacena o transmite información, la cual atraviesa por un medio ruidoso que modificará la información. Esto, por supuesto, no es deseable para ningún sistema que realice este proceso de comunicación.

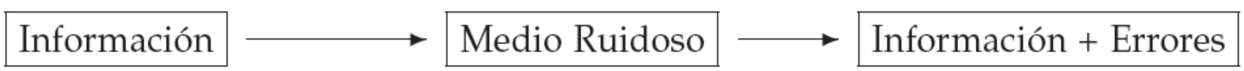


Figura 1: Proceso de comunicación, esquema sin código.

Con la aplicación de las ideas de la teoría de la información y la teoría de la codificación es posible detectar y corregir los errores introducidos por el canal.

En relación a la teoría de la información cabe mencionar un par específico de modelos matemáticos, la fuente simétrica binaria y el canal simétrico binario.

La *fuente simétrica binaria* (la fuente, para abreviar) es un objeto que emite uno de dos posibles símbolos, los cuales tomamos como “0” y “1”, a una tasa de R símbolos por unidad de tiempo. Llamaremos a estos símbolos bits, una abreviación de dígitos binarios. Los bits emitidos por la fuente son aleatorios, y un “0” es igualmente probable de ser emitido que un “1”.

El *canal simétrico binario* (CSB para abreviar) es un objeto a través del cual es posible transmitir un bit por unidad de tiempo. Sin embargo el canal no es completamente fiable; hay una probabilidad fija p (llamada la probabilidad de errores de bits en bruto), $0 \leq p \leq 1/2$, de que el bit de salida no sea el mismo bit de entrada, como se ilustra en la Figura 2.

En lo que concierne a la teoría de la codificación es la responsable de estudiar a los códigos detectores-correctores de errores para dar solución al problema central de la teoría de la comunicación, el cual consiste en lograr construir un sistema de codificación y de decodificación que haga posible la comunicación confiable, eficaz y segura, además, que sea de bajo costo para las aplicaciones prácticas, es decir, requerimos buenos códigos detectores-correctores de errores capaces de ser implementados para tener una buena transmisión de la información.

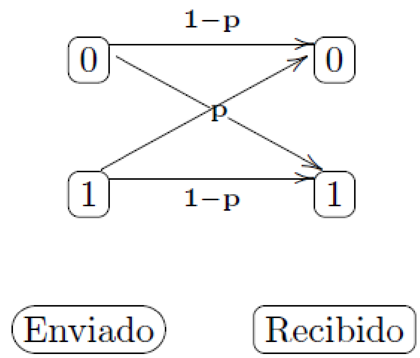


Figura 2: Canal simétrico binario.

Figura 3: Proceso de comunicación, esquema con código.

La Figura 3 proporciona un esquema el cual añade al proceso de comunicación los medios necesarios para conseguir así una comunicación confiable sobre un canal ruidoso. Observemos que añadimos una codificación antes del canal y una descodificación después. El codificador codifica el mensaje fuente s obteniendo un mensaje transmitido t, al realizar la codificación lo que realmente ocurre es que se agrega redundancia al mensaje original de algún modo para reducir la probabilidad de fracaso y mejorar la probabilidad de éxito. El canal añade ruido al mensaje transmitido, produciendo el mensaje recibido r, donde el mensaje recibido r es el mensaje transmitido t con posibles errores. Posteriormente, el decodificador decodifica el mensaje recibido r para obtener un mensaje de salida $\hat{s}$, esta decodificación se realiza para tratar de detectar y corregir los errores, y así obtener un mensaje de salida $\hat{s}$ el cual deseamos que sea lo suficientemente parecido al mensaje original s.

Esta solución de sistema hace más confiable la comunicación, pero aún se tienen limitantes, como los desarrollos tecnológicos y los avances teóricos.

Analicemos desde un punto de vista simple a los códigos de bloque detectores-correctores de errores para el canal simétrico binario.

El camino más simple para añadir redundancia útil en una transmisión consiste en ser capaces de detectar y corregir errores, y tener una sola oportunidad para codificar, transmitir y decodificar. Nos gustaría comunicarnos con probabilidad de error muy pequeña y con una tasa grande.

Un **código de bloque** es una regla para convertir una secuencia de bits fuente s de longitud k, en una secuencia transmitida t de N bits de longitud. A esta secuencia transmitida t se le llamará **palabra-código**. Para añadir redundancia, hacemos N más grande que k. En un código de bloque lineal, los bits extras $M = N - k$ están en función de los k bits originales; estos bits extras son conocidos como **bits de chequeo de paridad**. Además, la razón o cociente de proporcionalidad $R = k/N$, es llamada la **tasa** del código.

Un ejemplo de un código de bloque lineal es el [7, 4]-código de Hamming, el cual transmite $N = 7$ bits por cada $k = 4$ bits fuentes, tiene $M = N - k = 7 - 4 = 3$ bits de chequeo de paridad, y una tasa de $R = k/N = 4/7$. La familia de códigos de Hamming fueron descubiertos por Marcel Golay en 1949 y por Richard Hamming en 1950 de manera independiente.

Antes de describir el método de codificación sistemático para el [7, 4]-código de Hamming mencionaremos que la **paridad** es la cualidad de ser par o impar de cualquier número, en el caso de una secuencia binaria tenemos:

Paridad par: el valor asignado es 0 y esto se cumple cuando el número de unos que tengamos sea par o dicho de otra manera que la suma de esos unos sea 0 módulo 2.

Paridad impar: el valor asignado es 1 y esto se cumple cuando el número de unos que tengamos sea impar o que la suma de esos unos sea 1 módulo 2.

Codificación del [7, 4]-código de Hamming

El [7, 4]-código de Hamming es un código de bloque lineal, en el que por cada secuencia fuente s de longitud $k = 4$, es decir, s está constituido de 4 bits (recodar que estamos trabajando con los dígitos binarios 0 y 1), se transmitirá una secuencia t (palabra-código) de longitud $N = 7$ bits, donde los $M = 3$ bits de chequeo de paridad estarán en función de los $k = 4$ bits fuentes. A continuación describiremos el método de codificación sistemático del [7, 4]-código de Hamming, la representación gráfica de dicho método está mostrada en la Figura 4, (cf. [Mac03], [Gom17]). Dado un arreglo $s = s_1s_2s_3s_4$ de cuatro bits, se obtendrá un arreglo $t = t_1t_2t_3t_4t_5t_6t_7$ de siete bits. El arreglo t de los siete bits transmitidos está representado en tres círculos intersectados. Los primeros cuatro bits transmitidos $t_1t_2t_3t_4$, son iguales a los cuatro bits fuentes $s_1s_2s_3s_4$, es decir, $t_1 = s_1$, $t_2 = s_2$, $t_3 = s_3$ y $t_4 = s_4$, cuyos bits son colocados en las intersecciones de los círculos como se muestra en la Figura 4. Luego, los tres bits de chequeo de paridad $t_5t_6t_7$ son colocados de tal manera que la suma de los bits dentro del círculo siempre de 0 usando aritmética módulo 2: el primer bit de chequeo de paridad t_5 es 0 sí la suma de los primeros tres bits es par, y 1 sí la suma es impar, claramente usando aritmética módulo 2, $s_1+ s_2+ s_3 = t_5$ (mód 2), entonces de acuerdo a nuestra representación gráfica el primer círculo en sentido de las manecillas del reloj representa el primer chequeo de paridad; el segundo bit de chequeo de paridad t_6 es la paridad de los tres últimos bits fuentes, $s_2 + s_3 + s_4 = t_6$ (mód 2), con lo cual el segundo círculo representa al segundo chequeo de paridad; y el tercer bit de chequeo de paridad t_7 es la paridad de los bits fuentes uno, tres y cuatro, $s_1+ s_3+ s_4= t_7$ (mód 2), y el tercer círculo representa al tercer chequeo de paridad. Y así, obtenemos la palabra-código $t = s_1s_2s_3s_4t_5t_6t_7$, la cual es obtenida a partir de la codificación sistemática por el [7, 4]-código de Hamming.

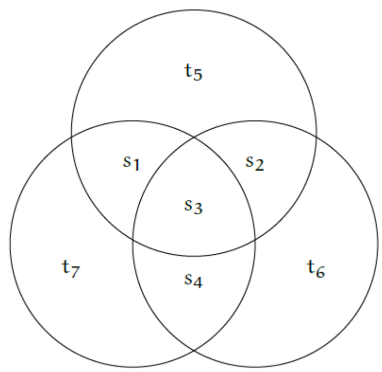


Figura 4: Representación gráfica del método de codificación sistemático del [7, 4]-código de Hamming.

Ejemplo 1. En la Figura 5 se muestra la palabra-código transmitida $t_5 = 1000101$ que fue obtenida para el caso $s = 1000$. Es fácil ver, que los primeros cuatro bits de t son los mismos bits de s, y luego los tres bits de chequeo de paridad 101 se obtienen de las respectivas paridades de los círculos, es decir, $s_1+ s_2+ s_3= 1+0+0 = 1$ (mód 2) así $t_5= 1$; $s_2 + s_3 + s_4 = 0 + 0 + 0 = 0$ (mód 2) luego $t_6 = 0$: y $s_1 + s_3 + s_4 = 1 + 0 + 0 = 1$ (mód 2) obteniendo $t_7 = 1$. Por eso la palabra-código obtenida de $s = 1000$ es $t = 1000101$.

La Tabla 1 muestra las palabras-código t generadas por cada una de las 2ˆ4 = 16 combinaciones de los cuatro bits fuente, las cuales son las secuencias fuente s. Esas palabras-código tienen la propiedad especial de que cualquier par difiere uno del otro en al menos tres bits, ésta cualidad se define como distancia mínima del [7, 4]-código de Hamming. Si denotamos a C como el conjunto de las palabras-código, entonces el conjunto de las palabras-código para el [7, 4]-código de Hamming es:

C = {0000000, 0001011, 0010111, 0011100, 0100110, 0101101, 0110001, 0111010, 1000101, 1001110, 1010010, 1011001, 1100011, 1101000, 1110100, 111111}.

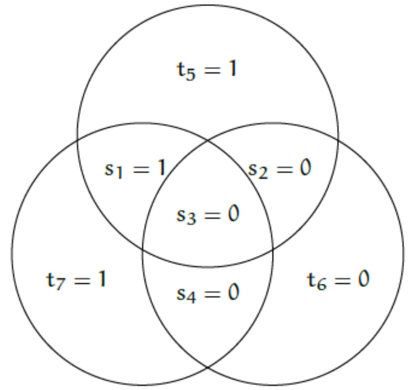


Figura 5: Palabra-código t = 1000101, secuencia fuente s = 1000.

s	t	s	t	s	t	s	t
0000	0000000	0100	0100110	1000	1000101	1100	1100011
0001	0001011	0101	0101101	1001	1001110	1101	1101000
0010	0010111	0110	0110001	1010	1010010	1110	1110100
0011	0011100	0111	0111010	1011	1011001	1111	1111111

Tabla1: Las 16 palabras-código t del [7, 4]-código de Hamming.

Decodificación del [7, 4]-código de Hamming

La tarea de decodificar la secuencia recibida r es menos simple. Debemos recordar que cualquiera de los bits pueden ser intercambiados, incluidos los bits de paridad cuando la palabra-código t sale del canal. Si asumimos que el canal es un canal simétrico binario (CSB) y que todas las secuencias fuentes son equiprobables, entonces la decodificación óptima identifica la secuencia fuente s cuya codificación t difiere de la secuencia recibida r en pocos bits.

Se puede resolver el problema de la decodificación, midiendo qué tan lejos está r de cada una de las dieciséis palabras-código en la Tabla 1 y entonces escogemos el más cercano. ¿Hay un camino más eficiente de encontrar la secuencia fuente más probable?

Para el [7, 4]-código de Hamming existe una solución gráfica al problema de decodificación, basado en la Figura 4 de codificación, (cf. [Mac03]). Dada la palabra-código t la cual es transmitida sobre un canal simétrico binario y es afectada por la presencia de ruido $e = e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7$ obteniendo así la secuencia recibida $r = r_1r_2r_3r_4r_5r_6r_7$ con $r = t + e \pmod 2$, esta secuencia r va ser decodificada para hallar la secuencia de salida $\hat{s} = \hat{s}_1\hat{s}_2\hat{s}_3\hat{s}_4$ y la secuencia de salida $\hat{s}$ tiene que ser lo más parecido posible a la secuencia fuente s.

La tarea de decodificación es encontrar los bits que fueron intercambiados, es decir, aquellos que no satisfacen las reglas de paridad. El patrón de error cuando no se satisfacen los chequeos de paridad es llamado **síndrome**, y pueden ser escritos como una secuencia binaria $z = z_1z_2z_3$ cuyas componentes de la secuencia tienen valor de, 1 sí el chequeo de paridad no es satisfecho ó 0 sí es satisfecho, pasando a través de los chequeos en el orden de los bits r_5, r_6, y r_7.

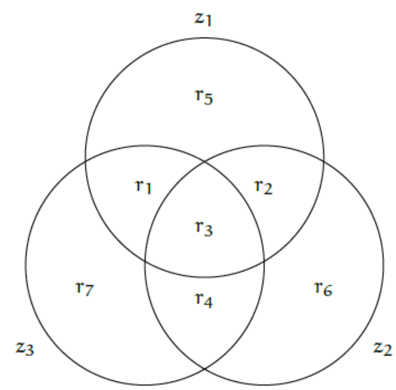


Figura 6: Secuencia recibida $r = r_1r_2r_3r_4r_5r_6r_7$ con su síndrome $z = z_1z_2z_3$.

La decodificación del [7, 4]-código de Hamming es descrita a continuación con ayuda de la Figura 6. Nuestro objetivo es comprobrar que se cumplan las siguientes igualdades $r_1+ r_2+ r_3 = r_5$ (mód 2), $r_2 + r_3 + r_4 = r_6$ (mód 2) y $r_1+ r_3+ r_4= r_7$ (mód 2), para lo cual basta con checar la paridad de $r_1+ r_2+ r_3 +r_5$, $r_2 + r_3 + r_4 + r_6$ y $r_1+ r_3+ r_4+ r_7$; y luego tomar una decisión óptima. Entonces al obtener la palabra recibida $r = r_1r_2r_3r_4r_5r_6r_7$ nos concentramos en los 4 bits que están en el primer círculo (en sentido de las manecillas del reloj) de la Figura 6, es decir, en $r_1r_2r_3r_5$, entonces al sumar los bits tenemos que $r_1+ r_2+ r_3 +r_5 = 0$ sí la cantidad de 1´s es par, o bien, $r_1+ r_2+ r_3 +r_5= 1$ sí la cantidad de 1´s es impar. Al obtener 0 de la suma diremos que la igualdad $r_1+ r_2+ r_3 = r_5$ se cumple, pero en caso de obtener 1 de la suma diremos que la igualdad $r_1+ r_2+ r_3 = r_5$ no se cumple y además que alguno de los bits involucrados posiblemente fue intercambiado. Al final de dicho análisis obtenemos el primer bit z_1 que forma parte del síndrome z. A esto nos referimos al decir que estamos realizando el chequeo de paridad. Ahora, este proceso se repite para los 4 bits del segundo círculo $r_2\ r_3\ r_4\ r_6$ con lo cual obtenemos el bit z_2, y para los 4 bits del tercer círculo $r_1r_3r_4r_7$ obteniendo el bit z_3. Una vez realizado esto tenemos al síndrome $z= z_1z_2z_3$ que nos dará una idea de cuál es el bit intercambiado y poder tomar la decisión óptima

Síndrome z	000	001	010	011	100	101	110	111
Bit intercambiado	ninguno	r_7	r_6	r_4	r_5	r_1	r_2	r_3

Tabla 2: Síndrome de decodificación para llevar a cabo la toma de decisión óptima.

La Tabla 2 muestra los resultados del algoritmo de decodificación para el [7, 4]-código de Hamming, enlistando la secuencia síndrome z junto con el bit intercambiado, y obteniendo esto, es posible tomar la decisión óptima de decodificación, siempre y cuando solo se haya afectado a un bit del bloque.

Ejemplo 2. Como un primer ejemplo para ilustrar la decodificación del [7, 4]-código de Hamming, asumimos que la palabra-código transmitida fue t = 1000101, que es tomada del Ejemplo 1 de codificación, y que el ruido e = 0100000 afecta al segundo bit, así la secuencia recibida es r = t + e = 1000101 + 0100000 = 1100101. Escribimos la secuencia recibida r = 1100101 dentro de los tres círculos como mostramos en la Figura 7.

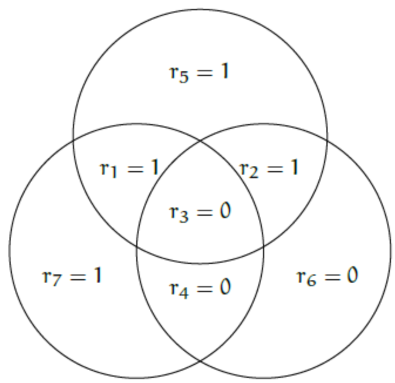


Figura 7: r = 1100101 es el secuencia recibida.

Verifiquemos si el chequeo de paridad de cada círculo es par, en caso de no obtener chequeo de paridad par, los círculos de los cuales su paridad sea impar son trazados en líneas punteadas como se muestra en la Figura 8. En sí, el síndrome para cada chequeo de paridad de los círculos es z =110, porque los primeros dos círculos (en sentido de las manecillas del reloj) tienen chequeo de paridad impar, esto es, paridad 1, recordar que para calcular el chequeo de paridad del primer círculo debemos sumar los bits dentro de éste, así $r_1+ r_2+ r_3 +r_5= 1 + 1 + 0 + 1 = 1$, la suma de los bits del segundo círculo es $r_2 + r_3 + r_4 + r_6 = 1+0+0+0 = 1$; y el tercer círculo tiene chequeo de paridad par, es decir, paridad 0, porque la suma de los bits de este círculo es $r_1+ r_3+ r_4+ r_7= 1+0+0+1 = 0$, (no olvidar que las operaciones usan aritmética módulo 2).

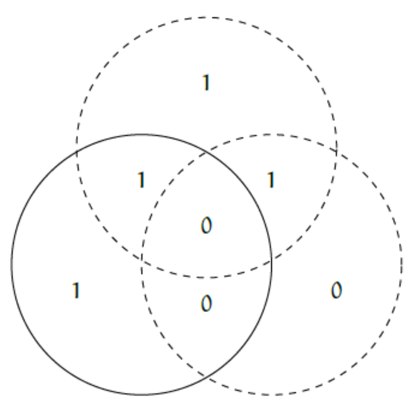


Figura 8: El síndrome es z = 110, porque tenemos dos círculos de chequeo de paridad impar y solo uno de chequeo de paridad par.

Para resolver la tarea de decodificación, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿podemos encontrar al bit que fue intercambiado adentro de todos los círculos de chequeo de paridad impar y afuera de todos los círculos de chequeo de paridad par? Si es así, el bit intercambiado sería la causa o razón del síndrome observado. En este caso el bit r_2= 1 afecta adentro de los dos círculos de chequeo de paridad impar y no afecta el círculo de chequeo de paridad par, Figura 9, ningún otro bit tiene esta propiedad, así r_2= 1 es el único bit capaz de explicar el síndrome z =110. Para hallar el bit que fue intercambiado, r_2= 1 mostrado en la Figura 9, dada la Figura7, procedemos de la siguiente manera: lo primero que debemos realizar (como ya lo hicimos) es calcular el chequeo de paridad de cada círculo, y obtuvimos que los dos primeros círculos tienen chequeo de paridad impar y el tercero chequeo de paridad par, esto es, síndrome z =110, Figura 8; ahora descartaremos todos los bits que están en el círculo de chequeo de paridad par, para este caso los bits descartados son r_1= 1, r_3= 0, r_4 = 0 y r_7= 1, con esto los únicos sospechosos son r_2= 1, r_5= 1 y r_6 = 0 que están en los círculos de chequeo de paridad impar excluyendo la intersección con el círculo de chequeo de paridad par, ilustrado en la Figura 10. Finalmente teniendo los bits sospechosos, pondremos nuestra atención en el bit que está en la intersección, r_2= 1, pues éste pareciera ser el bit que provoca que la paridad de estos círculos resulte ser impar, nuestra idea se basa en esto debido a que al haber realizado la codificación teníamos en cuenta que se obtenía un chequeo de paridad par en cada círculo. Por lo tanto, habremos encontrado el bit intercambiado, r_2= 1, Figura 11. Y por último cambiaremos el valor de este bit r_2= 1 por r_2= 0, como en la Figura 11, obteniendo así, chequeo de paridad par en cada círculo. Entonces la secuencia resultante de la decodificación de r = 1100101 es 1000101, además, después de haber tomado la decisión óptima de decodificación concluimos que la secuencia de salida es $\hat{s}$ = 1000, y es exactamente la misma que la secuencia fuente s = 1000.

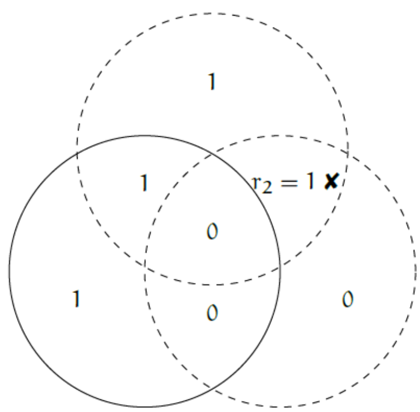


Figura 9: r_2= 1 es el bit capaz de explicar el síndrome z =110.

Ejemplo 3. Nuevamente tomemos a la secuencia transmitida t = 1000101, y ahora supongamos que el bit central r_3 es el bit intercambiado, es decir, es el afectado por el ruido e = 0010000, luego la secuencia recibida es r = 1010101. Continuando con su decodificación calculamos el chequeo de paridad de cada círculo, tenemos que los tres círculos tienen chequeo de paridad impar, como mostramos en la Figura 12. Ahora, para identificar al bit intercambiado nos fijaremos en el bit que está en la intersección

de los tres círculos, ya que ese bit interviene en los tres chequeos de paridad, así el bit r_3= 1 es identificado como el bit sospechoso que afecta dentro de los tres círculos y es capaz de explicar el síndrome z = 111.
Una vez identificado el bit intercambiado r_3= 1, modificaremos su valor por r_3= 0, con lo que después de la decodificación de r = 1010101 obtenemos la secuencia resultante 1000101, Figura 13, entonces la secuencia de salida es ŝ = 1000 la misma que la secuencia fuente s = 1000, con lo que podemos decir que la decodificación volvió a resultar óptima.

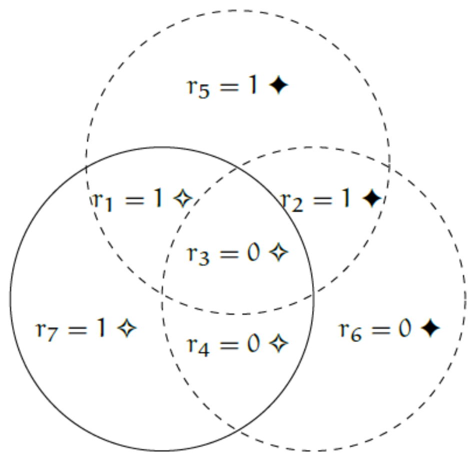


Figura 10: r_1, r_3, r_4 y r_7 son los bits descartados (G); y r2, r5 y r6 son los bits sospechosos (F).

Finalmente, en la Figura 13 mostramos que la paridad de cada círculo vuelve a ser par pues en este caso el error fue una vez más corregido.

Notemos que en los dos ejemplos anteriores, era un solo bit el intercambiado o afectado por el ruido, entonces si tratamos de intercambiar alguno de los 7 bits, encontraremos que un síndrome diferente es obtenido en cada caso, siete síndromes no-cero, uno para cada bit. Hay otro síndrome, el síndrome cero que indica que ningún bit fue intercambiado. Así, si el canal es un canal simétrico binario con un nivel de ruido pequeño f, la decodificación óptima de no intercambiar más de un bit, depende del síndrome, como mostramos en la Tabla 2. Sin embargo, también ocurre que cada síndrome podría ser causado por otro patrón de ruido, pero cualquier otro patrón de ruido que tenga el mismo síndrome podría ser menos probable porque eso involucraría un gran número de eventos ruidosos.

Nuestra siguiente pregunta sería: ¿qué ocurre si el ruido realmente intercambia más de un bit? La respuesta a dicha pregunta está dada por el Teorema 1 cuya demostración se puede encontrar en cualquier libro de Teoría de Códigos (cf. [Lop14] para una introducción muy sencilla al tema).

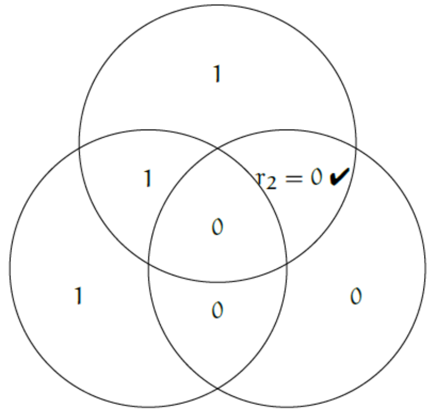


Figura 11: El valor de r_2= 1 es cambiado por r_2= 0, obteniendo así paridad par en cada círculo.

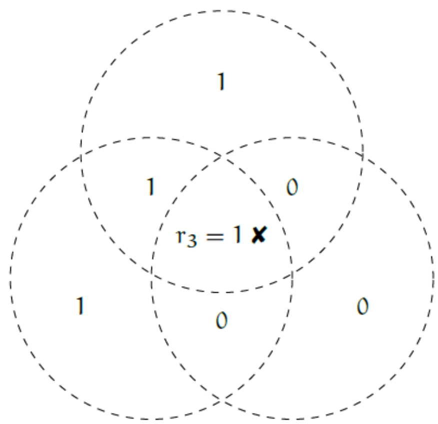


Figura 12: Cuando el bit r_3 es afectado por el ruido, ocurre que los círculos tienen paridad impar.

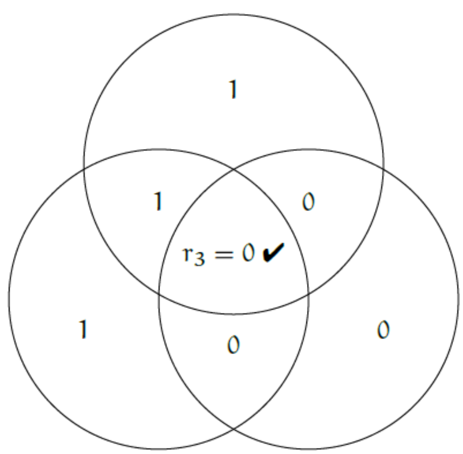


Figura 13: Al corregir el error la paridad de cada círculo vuelve a ser par.

Teorema 1. Un código C con distancia mínima d puede corregir [(1/2)(d -1)] o menos errores, corregir (1/2)(d-2) errores y detectar d/2 errores.

Obsérvese que [x] denota el mayor entero menor o igual a x, por lo anterior tenemos que el [7,4]-código de Hamming es un código corrector de un solo error ya que su distancia mínima d es igual a tres. Veamos que ocurre si el ruido intercambia más de un bit.

Ejemplo. Consideremos la situación cuando dos bits r_3 y r_7 son intercambiados, dado una vez más t = 1000101 con s = 1000, y sea el ruido e = 0010001 que afectará a dos bits, r_3 y r_7, tenemos que r = 1010100 como se ilustra en la Figura 14. Calculando el síndrome z =110 obtenemos dos círculos de chequeo de paridad impar y uno de chequeo de paridad par, como se ilustra en la Figura 15. Como el síndrome es z =110, hace sospechoso al bit r_2 de acuerdo a la Tabla 2, entonces al aplicar el algoritmo de decodificación óptima para ese supuesto bit intercambiado, en realidad obtenemos como resultado una secuencia decodificada con tres errores como mostramos en la Figura 16. Estaríamos diciendo que la secuencia resultante de la decodificación de r = 1010100 es 1110100 cuando la secuencia transmitida fue t = 1000101, más aún, la secuencia de salida resulta ser $\hat{s}$= 1110, pero en realidad sabemos que la secuencia fuente fue s = 1000, y en este caso concluimos que no resultó óptima la decodificación pues en lugar de corregir los dos errores, produjimos tres errores y obtuvimos algo muy distinto de la secuencia inicial. Con esto podemos decir, que si usamos el algoritmo de decodificación óptima, cualquier patrón de error con 2 bits intercambiados por el ruido, conducirá a una decodificación con una secuencia de 7 bits que contendrá tres errores. El [7,4]-código de Hamming no es capaz de corregir más de un error.

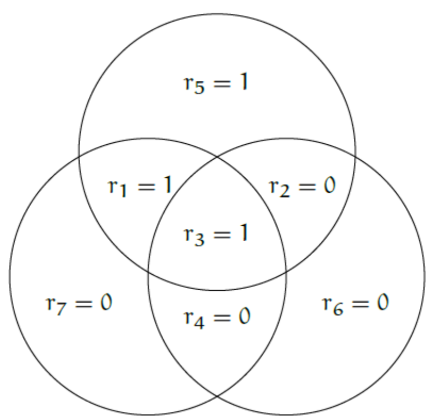


Figura 14: Situación cuando dos bits son afectados por el ruido, r_3 y r_7.

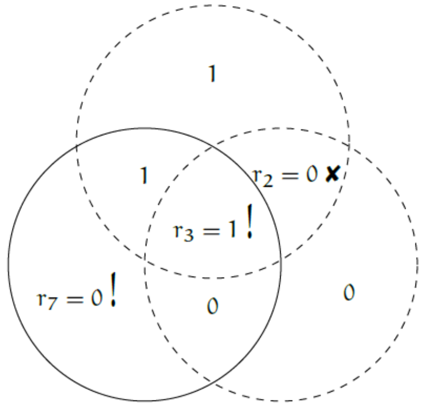


Figura 15: El síndrome para este caso es z =110 con lo cual se estaría diciendo que el bit sospechoso es r_2, pero sabemos que ese bit no es el intercambiado.

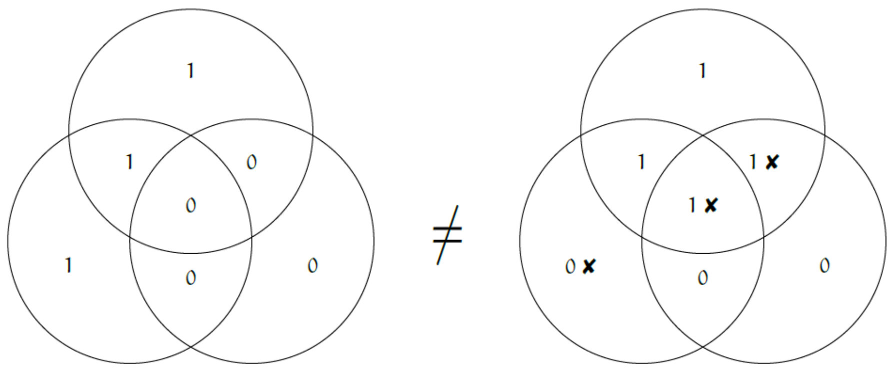


Figura 16: Decodificación no satisfactoria.

Este artículo de divulgación está basado principalmente en [Mac03] y [Gom17].

Referencias:

[Gom17] L. A. Gómez Texco, *Códigos LDPC: Un acercamiento*, Tesis de Licenciatura, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2017.
[Lop14] C. A. López-Andrade, *Códigos de Hamming*, En F. Macías Romero (Ed.), Matemáticas y sus aplicaciones 4 (1a ed., Cap. 1, pp. 5-33, ISBN: 978-607-487-791-5). Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, 2014.
[Mac03] D. J. C. Mackay, *Information theory, inference and learning algorithms*, Cambridge University Press, 2003.

Carlos Alberto López Andrade

Actividades del mes de Enero-Febrero

Coloquio Mensual Academia de Matemáticas

Auditorio FCFM, BUAP
Día: 30 de Enero 12 hrs

PONENTE: Profesor Agustín Contreras Carreto
TÍTULO: ¿Por qué las negras?

RESUMEN: En la práctica de la música hay dos consideraciones de suma importancia. La primera es la consonancia: dos o más sonidos son consonantes si, al hacerlos sonar simultáneamente, suenan bien. El estudio acerca de cómo obtener los sonidos consonantes con uno dado, se estudió desde hace muchísimos años, dando lugar a las diferentes escalas musicales, entre ellas, las escalas pitagóricas. La segunda consideración es la transposición o modulación: transponer una melodía a un tono más alto significa reproducirla con otros sonidos, respectivamente más altos, pero con la conservación exacta entre las frecuencias de los sonidos que en ella se usen. Veremos, en esta plática, que tener una escala musical que conste sólo de sonidos consonantes entre sí y que permita transponer melodías sin salirse de ella, es un problema que teóricamente es tan imposible de resolver como la cuadratura del círculo, pero que en la práctica se ha podido resolver con aproximaciones. Una de las mejores soluciones aproximadas es la escala bien temperada de 12 notas en cada octava, como en el teclado de un piano. No bastarían las teclas blancas: las negras también se necesitan.

¡¡¡ Traigan su taza. Habrá café !!!

Inicio de las festividades del 70 aniversario de la FCFM, BUAP

Auditorio FCFM, BUAP

Día: 7 de febrero de 9:30 a 14 horas

Tres Conferencias (Matemáticas, Física y Actuaría)
Mesa redonda de 13-14 hrs

Publicaciones de la Academia de Matemáticas

Libro de Matemáticas y sus aplicaciones de la FCFM , BUAP

Publica capítulos expositorios y artículos de investigación. Los trabajos recibidos para su publicación son sometidos a un estricto arbitraje.
Se invita a enviar trabajos para el tomo de 2021. Los trabajos deben ser enviados a alguno de los Editores: David Herrera Carrasco dherrera@fcfm.buap.mx yFernando Macías Romero fmacias@fcfm.buap.mx

Libro de Topología y sus aplicaciones de la FCFM , BUAP

Publica capítulos expositorios y artículos de investigación. Los trabajos recibidos para su publicación son sometidos a un estricto arbitraje.
Se invita a enviar trabajos para el tomo de 2021. Los trabajos deben ser enviados a alguno de los Editores:
José Juan Angoa Amador jangoa@fcfm.buap.mx
Raúl Escobedo Conde escobedo@fcfm.buap.mx
Manuel Ibarra Contreras mibarra@fcfm.buap.mx
Agustín Contreras Carreto acontri@fcfm.buap.mx
La publicación del libro es anual, según sean las condiciones económicas del cuerpo académico de topología y sus aplicaciones.

Libro Una introducción al algebra lineal, autores, Juan Angoa, Manuel Ibarra, Raúl Linares y Carlos Lopez Andrade, ed. Dirección General de Publicaciones- BUAP.
Este libro pretende desarrollar los dos cursos de álgebra lineal que ofrece nuestra facultad y algo más.

Se invita a la comunidad a enviar trabajos de divulgación, problemas matemáticos para resolver, comentarios, etc., al e-mail axolote.fcfm@gmail.com

Las contribuciones deberán estar escritas en word con letra times de 12 puntos

Compiladores: *Docentes de la Academia de Matemáticas, véase lista de docentes en: www.fcfm.buap.mx/academiam/*

Responsables de la Edición: *José Juan Angoa Amador, Patricia Domínguez Soto, Manuel Ibarra Contreras, Agustín Contreras Carreto*

Colaboradores Estudiantes: *Josué Vázquez Rodríguez , Emilio Angulo Perkins, Jesús González Sandoval*

Diseño logo: *Santiago Sienra y Guillermo Sienra*

axolote'
Revista mensual de la Academia de Matemáticas