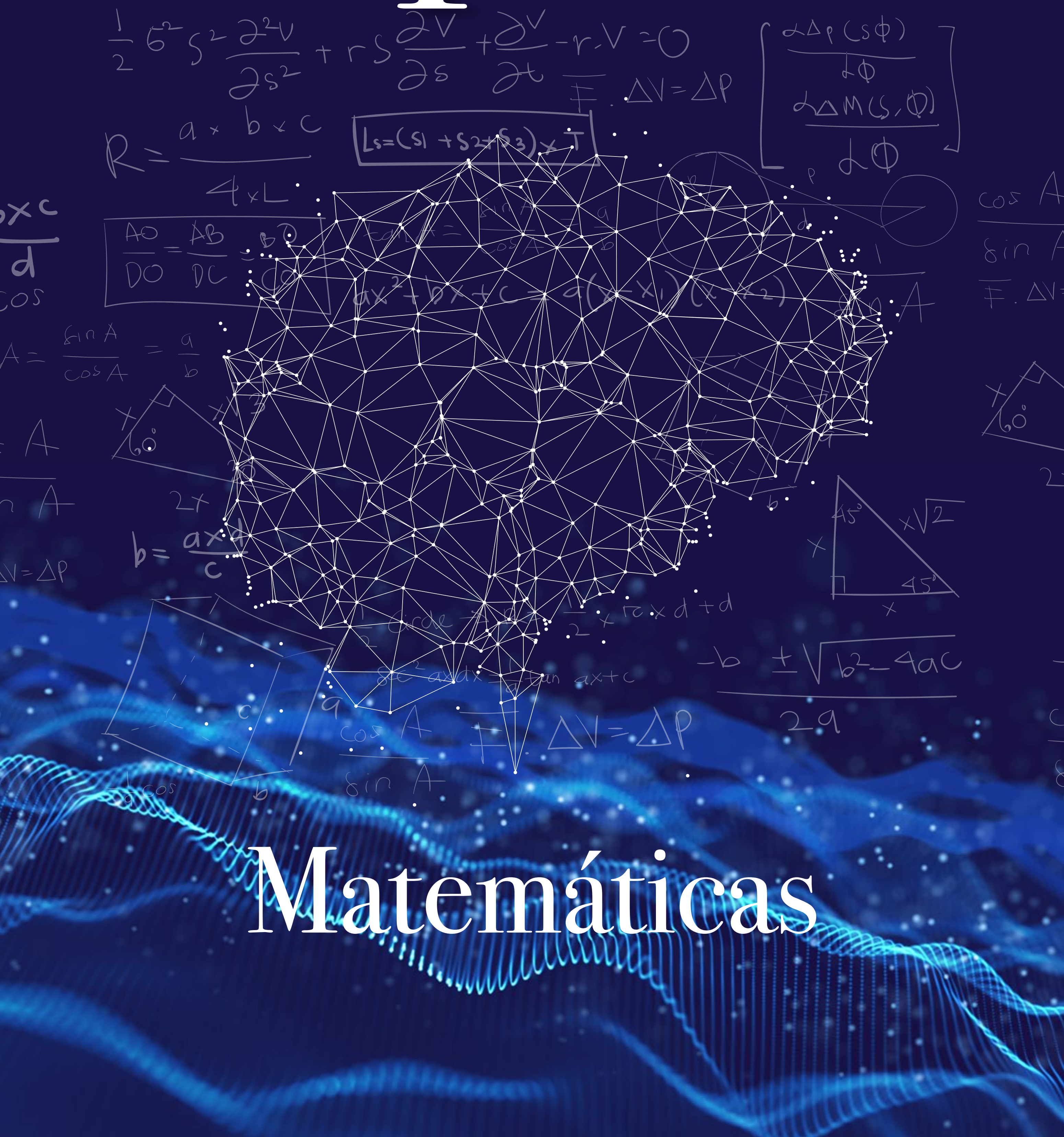
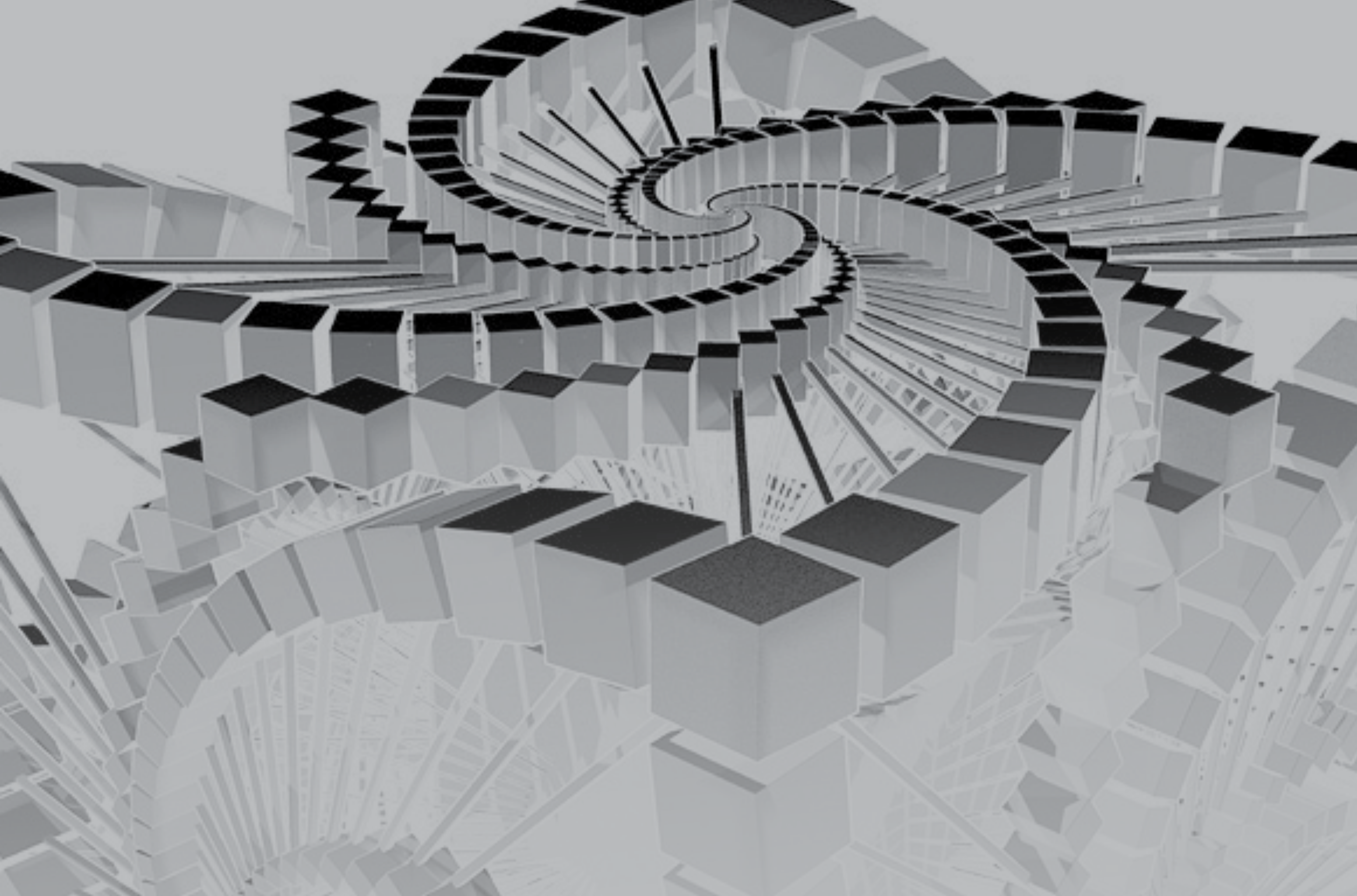
spinor

Dos facetas, información y divulgación
un solo objetivo, comunicar



Matemáticas



Índice

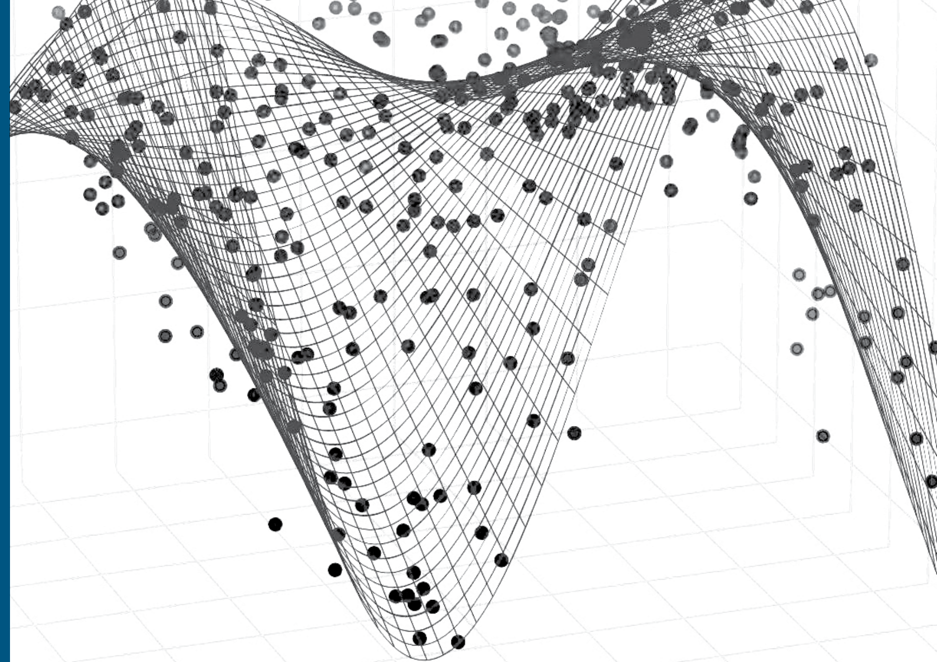
BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
1578

spinor

Dos facetas, información y divulgación
un solo objetivo, comunicar

Revista de la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado

SPINOR, año 13, núm. 46, enero-febrero de 2023, es una publicación bimestral editada por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, con domicilio en 4 sur 104, Col. Centro, C.P. 72000, Puebla Pue., y distribuida a través de la Dirección de Divulgación Científica de la VIEP, con domicilio en Torre de Gestión Académica y Servicios Administrativos, 6° Nivel. Avenida Central, Ciudad Universitaria. C. P. 72570, Puebla Pue., Tel. (52) (222) 2295500 ext. 5729, www. viep.buap.mx, revistaspinor@gmail.com, Editor responsable: Dr. Arturo Fernández Téllez, arturo.fernandez@correo.buap.mx. Reserva de Derechos al uso exclusivo 04-2017-062916010700-102. ISSN: (en trámite), ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Con Número de Certificado de Licitud de Título y Contenido: (16523), otorgado por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas de la Secretaría de Gobernación. Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación.



Presentación

Integrantes de la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (fcfm) soñaron con abrir un espacio en el corazón de nuestra institución, en donde los interesados en la matemática pudieran saber sobre los diversos temas que la constituyen. Bajo esa inspiración surgieron estos nueve artículos, que se presentan en este número de Spinor:

- "Enumeración de posibilidades asociadas a una vida social agitada"
- "Reflexiones a propósito de la historia de la Transformada Rápida de Fourier"
- "Algunos problemas de dimensión en matemáticas"
- "De los algoritmos al concepto y del concepto al algoritmo"
- "El concepto de estructura matemática"
- "El papel de la matemática en el desarrollo del conocimiento científico"
- "La colcha de la señora Perkins"
- "Una aproximación a la dimensión fractal de la costa de Irlanda"
- "Paradojas I: Autorreferencia"

Esperamos que encuentren interesante el número 46 de Spinor y los invitamos a participar con sus comentarios. Estaremos encantados de recibir cualquier sugerencia, comentario, consejo, idea, iniciativa u observación; para esto, pueden escribir al e-mail: fernando.maciasromero@viep.com.

Un agradecimiento profundo al doctor Arturo Fernández Téllez por invitarnos a divulgar nuestro trabajo. También queremos agradecer, con toda el alma, a nuestros colegas autores por la dedicación y el sumo y excelso trabajo que han realizado para obtener este resultado a la altura que merecen todos nuestros distinguidos lectores. Asimismo, agradecemos a los distinguidos árbitros que con sus comentarios mejoraron la calidad de nuestros trabajos. Muchas gracias por dejar huella.

Enumeración de posibilidades

asociadas a una vida social agitada

Víctor Hugo Vázquez Guevara
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

Resumen

En esta contribución se discutirán algunas nociones básicas de técnicas de conteo enumerativas, con la ayuda de un contexto social, para exponer su potencial como herramienta aritmética susceptible de ser aplicada incluso desde el nivel básico.

Palabras clave: combinatoria, enumeración, principios de conteo

Introducción

Una de las primeras encomiendas con que todo estudiante de Matemáticas se enfrenta, incluidos los pequeños en etapa preescolar, es saber cuántos objetos con determinadas características existen. Por ejemplo:

1. El número de arreglos lineales que pueden hacerse con piezas de Lego de colores.
2. La cantidad de equipos de cinco para jugar un partido de baloncesto.
3. El número de formas en que pueden seleccionarse respuestas de opción múltiple en un examen.
4. Descifrar la secuencia genómica a partir de pequeños fragmentos de ADN, etc.

Está claro que algunos de estos ejemplos son más complejos que otros; sin embargo, todos están relacionados con la idea de contar. Para lograrlo, disponemos de una herramienta tanto simple (y, por tanto, elegante) como poderosa y versátil, que es conocida como principio básico de conteo, que, *grosso modo*, afirma lo siguiente (Ross, 2018):

Si un experimento puede resultar en cualquiera de n_1 posibilidades y, para cada una de ellas, un segundo experimento puede resultar en alguna de n_2 opciones...., y, finalmente, el k-ésimo experimento puede resultar en alguno de n_k resultados, entonces existen $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$ resultados conjuntos para los $\underline{k}$ experimentos.

Un poco de historia

Posiblemente, el antecedente más antiguo de un problema de enumeración es el ofrecido por el libro *I Ching*, que es el antiguo libro chino de las mutaciones (1200 a. C.) [2], el cual se cree que describe la situación presente de quien lo consulta y predice el modo en que se resolverá el futuro. Los símbolos que se consultan en este libro son llamados hexagramas y están formados por 6 líneas, cada una de las cuales puede contener algunos de dos símbolos; yin y yang. El problema, en este caso, es saber el número de símbolos diferentes que pueden escribirse.

Otro antecedente procedente del mundo antiguo se encuentra en el problema 79 del papiro de Rhind (s. VII a. C.), el cual dice que en un propiedad compuesta por 7 casas, cada casa tiene 7 gatos: cada gato se come 7 ratones, cada ratón se come 7 gramos de cebada y cada grano de cebada produce 7 medidas. ¿Cuánto suma todo?

Ya en el siglo XVII, Frans van Schooten, Blaise Pascal y Marin Mersenne trabajaron en el llamado triángulo de Pascal de manera formal desde distintos puntos de vista: combinatorio, algebraico, musical. Sin embargo, se conocen versiones anteriores a este triángulo; por ejemplo, Al-Kraji, en 1007; Zhu Shijie, en 1303; Ibn Munim, en 1303; Cardano, en 1570, o Tartaglia, en 1556. A su vez, es en este periodo que la palabra combinatoria hace su aparición con el trabajo *Dissertatio de Arte Combinatoria* de Wihem Leibniz, en donde se abordan, entre otras cosas, los problemas de permutaciones y combinaciones (Leibniz, 1923).

Papiro de Rhind

Marin Mersenne

Blaise Pascal

Frans van Schooten

El principio básico de conteo en acción

En un contexto más coloquial y posiblemente interesante para aquellos con una vida social altamente activa, supongamos que algún individuo tiene cierto número de conocidos, digamos N, y que, enfrentándose a diversas situaciones sociales, le interesa saber el número de formas en que le es posible disponer a sus amistades en subconjuntos con determinadas características, por ejemplo: arreglos lineales, disposiciones circulares, o bien, elegir subgrupos con algún tipo de restricción adicional.

» Este escenario, aparentemente simple, puede tornarse un tanto complicado si nuestro individuo se compromete a invitar a cenar a sus conocidos, mientras no logre agotar todas las disposiciones posibles.

De manera natural, la primera enumeración consta en dilucidar el número de formas en que el individuo en cuestión puede disponer sus N conocidos en una fila, para otorgarles un regalo diferente, dependiendo del lugar que cada persona ocupe (o bien, el lugar en el que lleguen a alguna fiesta). Este escenario, aparentemente simple, puede tornarse un tanto complicado si nuestro individuo se compromete a invitar a cenar a sus conocidos, mientras no logre agotar todas las disposiciones posibles. Como consecuencia del principio multiplicativo, tenemos que existen $N \times (N-1) \times \ldots \times 2 \times 1$ formas en que pueden realizarse tales asignaciones. En este caso, cada experimento corresponde a la asignación de alguna persona en cada una de las N posiciones. Al producto anterior se le suele llamar el factorial de N y se simboliza por $N!$ Desde este punto, es posible observar que el factorial de N crece muy rápido conforme el número de conocidos aumenta, por ejemplo *10!=3 628 800 y 20!* es un número que tiene diecinueve dígitos!!!!!!

Volviendo al "problema" de tener cierta vida social, y considerando que, por alguna limitante de espacio, al multicitado individuo solo le es posible convocar a k de sus conocidos, y manteniendo el interés en el problema de dar regalos diferentes a los afortunados que fueron invitados, notamos que el principio multiplicativo nos lleva concluir que existen $N \times (N-1) \times \ldots \times (N-k+1)$ formas de realizar tal ordenación, que puede reescribirse como:

$$\frac{N!}{(N-k)!} \qquad (1)$$

Una situación ligeramente diferente tiene lugar si en una nueva reunión con cupo para k personas el individuo en consideración va a comprar regalos iguales para los asistentes (que es equivalente a que el orden en que lleguen sea irrelevante). Bajo estas condiciones, resulta de interés contabilizar el número de grupos que pueden construirse.

Está claro que existen similitudes con respecto al caso abordado anteriormente y que la cantidad en cuestión está relacionada con la expresión *(1)*. Sin embargo, es necesaria una discusión más profunda; para ello, consideremos un arreglo fijo de tamaño k, digamos $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. En el marco anterior (en el que el orden de llegada a la fiesta es importante), dicho arreglo es considerado diferente a cualquier otro arreglo que contenga a los mismos k invitados, pero en orden distinto. No obstante, si el orden de llegada no importa, entonces la situación es diametralmente opuesta, en el sentido de que dos arreglos que contengan a los mismos integrantes serán ahora considerados iguales, a pesar de que el orden no sea idéntico. Una vez más, el principio multiplicativo asegura que para cada conjunto de tamaño k, existen $k!$ disposiciones posibles, mismas que, en el nuevo paradigma, colapsan en una sola. Así, para hallar el cometido, tenemos que dividir el número de arreglos posibles, en donde el orden es relevante, entre el número de estos, que serán ahora considerados iguales, es decir:

$$\frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Esta cantidad suele referirse como coeficiente binomial de N en k y se simboliza por $\binom{N}{k}$ y puede interpretarse como el número de formas en que pueden elegirse k

objetos de un total de *N* sin que el orden sea importante.

Supongamos esta vez que no habrá regalos y que estamos interesados en contabilizar el número de formas en que podemos acomodar a los invitados en una mesa circular de tamaño apropiado. Si tuviéramos que dar una respuesta irreflexiva, concluiríamos que habría *N!* formas de hacerlo. Sin embargo, si elegimos alguno de los *N!* arreglos posibles, notamos que, al disponerlos en una mesa circular, aparecen repeticiones. Si, por ejemplo, *N=3* y etiquetamos a los tres conocidos como *A, B* y *C*, los arreglos *ABC, BCA* y *CAB*, que en una línea son diferentes, en un arreglo circular se ven igual. En general, cada arreglo circular cuenta con *N* arreglos lineales que decantan en él. De aquí que existan solamente *(N-1)!* arreglos circulares. Análogamente, si el individuo contara con una mesa circular con solo *k* lugares, entonces podría conseguir un total de *(N-k)!* posibles formas de sentarse.

» Supongamos esta vez que no habrá regalos y que estamos interesados en contabilizar el número de formas en que podemos acomodar a los invitados en una mesa circular de tamaño apropiado.

Una nueva cuestión se asoma si los invitados a una fiesta están de antemano categorizados en dos grupos; por ejemplo, zurdos (Z) y diestros (D), sin la posibilidad de que haya ambidiestros y, por tanto, *Z+D=N*. Asumamos, además, que nos asalta el interés de conocer el número de grupos posibles en los que haya exactamente *i* diestros y *j* zurdos (obviamente, el grupo de invitados será de *i+j* invitados), sin regalos de por medio. Aquí, el principio multiplicativo nos conduce a que, primero, es necesario considerar el número de congregaciones de tamaño *i* de diestros, de las que pueden lograrse $\binom{D}{i}$ y que para cada una de ellas existen $\binom{Z}{j}$ grupos de zurdos de tamaño *j*; así, por el mismo principio, existen $\binom{D}{i}\binom{Z}{j}$ grupos consistentes de *i* diestros y *j* zurdos.

De manera paralela, podemos plantear la siguiente situación relacionada con el azar: Si reuniremos a *k* de *N* posibles invitados y el orden de llegada no es importante, ¿cuál es la probabilidad de que dos de ellos en particular no asistan juntos porque no son amigos?

Para dar respuesta, es necesario suponer que, si las asignaciones son al azar (entendiendo este término desde el punto de vista más intuitivo, que es asumir que no hay control, sesgo, ni predisposición alguna al hacer las disposiciones), entonces encontrar la probabilidad deseada se remite a calcular la división del número de casos favorables entre el número de casos totales. En lugar de buscar directamente el número de grupos de tamaño *k* que pueden formarse sin que dos de los invitados en particular asistan juntos, busquemos en cuántos asisten juntos y restemos esta cantidad al total de grupos de tamaño *k*. Así, el número de casos favorables es $\binom{N}{k}-\binom{N-2}{k-2}$, ya que, si dejamos entrar a la reunión a los dos invitados en conflicto, solo restan *N-2*, de los que es necesario elegir *k-2* de ellos. Por lo que la probabilidad de que dos invitados en particular NO asistan juntos es:

$$\frac{\binom{N}{k}-\binom{N-2}{k-2}}{\binom{N}{k}}$$

El contexto anteriormente descrito es solo un escenario un tanto jocoso para mostrar la versatilidad y potencia de la enumeración.

De manera similar, pueden plantearse muchas más preguntas probabilísticas relacionadas con los asistentes, dependiendo de las restricciones que podamos imaginar, por ejemplo:

1. *¿Cuál es la probabilidad de que s*olo zurdos asistan a la fiesta?
2. *¿Cuál es la probabilidad de que* algún invitado en particular asista a la reunión?
3. Si suponemos que los *N* conocidos asistirán (y que *N* es exorbitantemente grande), que todos tienen un teléfono celular idéntico, que al llegar a la fiesta los meterán en una caja negra y que al irse tomarán cualquiera al azar, ¿cuál es la probabilidad de que nadie se lleve su propio teléfono? La respuesta es: aproximadamente *1/e*, en donde *"e"* es el número de Euler.

Conclusión

El contexto anteriormente descrito es solo un escenario un tanto jocoso para mostrar la versatilidad y potencia de la enumeración. En particular, se intentó ilustrar que con un conocimiento aritmético elemental asequible, prácticamente, cualquier persona que tenga clara la idea de multiplicar puede responder cuestiones enumerativas cada vez más complejas y, por tanto, útiles e interesantes.

Desde luego que lo expuesto aquí, y sus implicaciones, pueden extrapolarse con la debida abstracción e imaginación a contextos de diversas áreas —entre ellas, Biología y Química (Ellman, Stoddard y Wells, 1997), Finanzas (Wang *et al.*, 2021) y Machine Learning (Ojala y Garriga, 2010)—. Sin embargo, esa encomienda corresponde al lector que así lo requiera y que cuenta con ambas cualidades, o bien, a aquel que cuente con la paciencia suficiente y busque una dirección adecuada para adquirirlas.

Referencias

Ellman, J., Stoddard, B. y Wells, J. (1997). Combinatorial thinking in Chemistry and Biology. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *94*(7), 2779-2782.

I Ching. El libro de los cambios. El proyecto del I Ching de Eranos (2022). Traducción directa del chino por Rudolf Ritsema, Shantena Augusto Sabbadini y Cruz Mañas Peñalver, colección Luz de Oriente. Editorial Cántico.

Leibniz, G.W. [1923](1666). *Dissertatio de arte combinatoria. Sämtliche Schriften und Briefe*; Philosophische Schriften (Gerhardt) Bd. IV p. 30. Akademie Verlag.

Ojala, M. y Garriga, G. C. (2010). Permutation Tests for studying classifier performance. *Journal of machine learning research*, 11(6), 1899-1863.

Ross, S. M. (2018). *A first course in Probability*. Pearson.

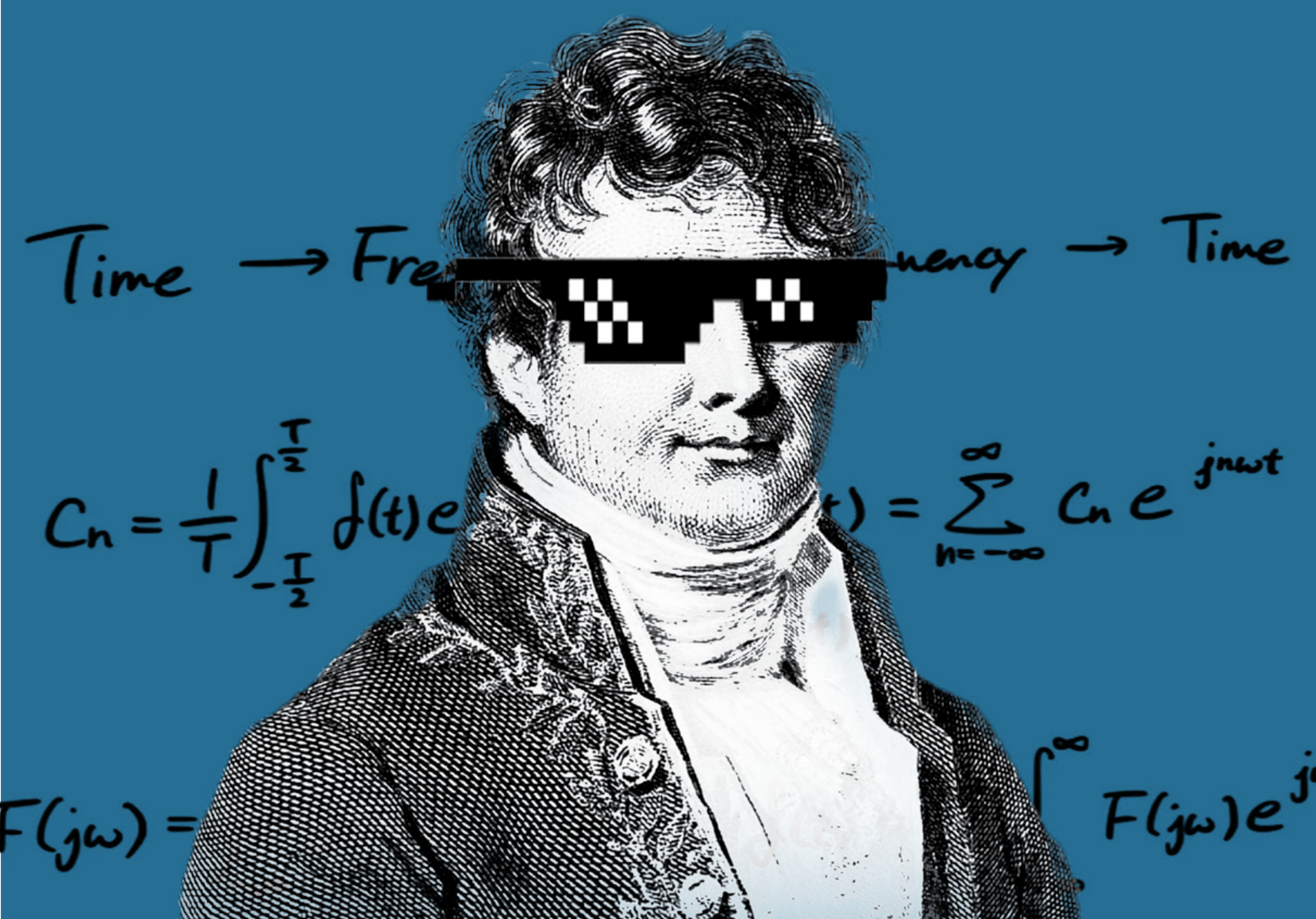
Wang, X. *et al.* (2021). Designing a Combinatorial financial option market. *Proceedings of the 22nd ACM Conference on Economics and Computation* (pp. 864-883). Budapest, Hungary.

Reflexiones a propósito de la historia de la

Transformada Rápida de Fourier

Moisés Soto-Bajo, Andrés Fraguela Collar
Investigadores por México Conacyt, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, BUAP

Introducción
La Transformada Discreta de Fourier (DFT) es una versión finita de las series de Fourier. Se trata de una herramienta que sirve para analizar el comportamiento oscilatorio de señales discretas (N-uplas numéricas). El resultado es el espectro, que permite realizar este análisis y obtener una descomposición en términos de modos simples, con respecto a un rango de frecuencias dado. Desde un punto de vista matemático, la DFT no es más que un cambio de base formada por los modos (véanse Heideman, Johnson y Burrus, 1984, 1985, y Rockmore, 2000).



$$X = (x_\mu)_{0\le\mu<N} \qquad , \qquad \widehat{X}(\nu) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=0}^{N-1} x_\mu \, e^{2\pi i \frac{\mu\nu}{N}} \qquad (0\le \nu < N)\,.$$

$$\left\{ e_\nu = \left(\frac{e^{2\pi i \frac{\nu\mu}{N}}}{\sqrt{N}}\right)_{0\le\mu<N}\right\}_{0\le\nu<N}.$$

$$c_0 = e_0\,, \left\{c_\nu = \left(\sqrt{\frac{2}{N}}\cos\left(2\pi\,\frac{\nu\,\mu}{N}\right)\right)_{0\le\mu<N}\right\}_{1\le\nu\le\lfloor\frac{N}{2}\rfloor} , \left\{s_\nu = \left(\sqrt{\frac{2}{N}}\sin\left(2\pi\,\frac{\nu\,\mu}{N}\right)\right)_{0\le\mu<N}\right\}_{1\le\nu\le\lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor}.$$

Figura 1: Definición de la dft y bases ortonormales asociadas

Los modos oscilatorios simples surgen como restricción a un mallado uniforme de ondas sinusoidales, definidas por una frecuencia de oscilación, típicamente entera, y la fase. Hay que tener en cuenta el efecto de la discretización, para no desligar el concepto de frecuencia de su interpretación como velocidad de oscilación.

La Transformada Rápida de Fourier (FFT) es una familia de algoritmos para calcular de manera eficiente y económica la DFT (para una exposición detallada, véanse Heideman, Johnson y Burrus, 1984, 1985; Frigo y Johnson, 1998; Rockmore, 2000, y, especialmente, Duhamel y Vetterli, 1990). Esencialmente, el cálculo de la DFT requiere la inversión de una matriz, una operación cuya complejidad es proporcional a N^2 operaciones. En la práctica, esto implica enormes tiempos de cómputo. Históricamente, el cálculo de la DFT se convirtió en un verdadero cuello de botella en los trabajos científicos y técnicos que requerían este tipo de análisis frecuencial (Cooley, Lewis y Welch, 1967). Sin embargo, explotando la estructura algebraica de las señales sinusoidales, las FFT reducen la complejidad del cálculo de la DFT al orden de N log(N) operaciones, mejorando incluso la precisión (véase Cooley, 1987).

Las FFT supusieron una verdadera revolución en el procesamiento digital de señales y el análisis numérico, entre otras áreas. A medida que el desarrollo de la tecnología digital permitió aumentar considerablemente la potencia de cómputo de los equipos, estos algoritmos hicieron posible el manejo de grandes cantidades de datos (véanse Heideman, Johnson y Burrus, 1984, 1985; Cooley, 1987; Duhamel y Vetterli, 1990, y Rockmore, 2000).

Los métodos FFT están basados en el llamado *divide-and-conquer approach* (véase la discusión en Duhamel y Vetterli, 1990). La idea básica es subdividir (recursivamente en este caso) un problema complicado en otros más simples de resolver, de manera que la complejidad final resulte inferior. Esta es una filosofía general que reverbera con la etimología de análisis, y que el lector haría bien en no echar en saco roto.

En este trabajo no se propone hacer una revisión histórica de los trabajos científicos que desarrollan estas ideas, pues esta historia está bien documentada (véanse Cooley, Lewis y Welch, 1967; Heideman, Johnson y Burrus, 1984, 1985; Cooley, 1987; Duhamel y Vetterli, 1990, y Rockmore, 2000). En ella aparecen grandes mentes trabajando en problemas de diversa índole: ajuste de trayectorias orbitales, análisis de presión barométrica, la corrección de desviaciones en las mediciones de brújulas en barcos, el estudio de las mareas, el estudio de las variaciones diarias de la temperatura, difracción de rayos X en cristales... Por no hablar del desarrollo de *tests* sismológicos

$$2\pi i\,\frac{(N-\nu)\,\mu}{N} = 2\pi i\,\mu - 2\pi i\,\frac{\nu\,\mu}{N}\,.$$

Figura 2: Nótese el índice y la frecuencia de oscilación resultante

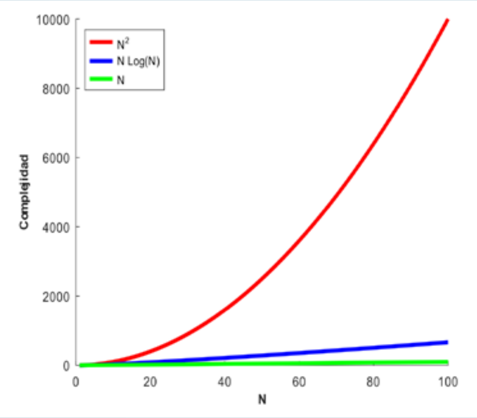


Figura 3: Diferentes órdenes de complejidad

para la detección de pruebas nucleares, o la detección de submarinos nucleares por análisis de ondas acústicas en plena Guerra Fría. La referencia más temprana (1805) es de los trabajos de Gauss sobre el cálculo de órbitas de ciertos asteroides a partir de mediciones, donde desarrolla una técnica *ad hoc* con el tipo de problema que necesitaba resolver.

Toda esta historia refleja la fecundidad de la investigación multi, inter y transdisciplinaria, ejemplificada en los trabajos pioneros citados anteriormente, pero, sobre todo, en los encuentros y eventos científicos relatados en Cooley (1987), en los que se plantearon cuestiones provenientes de problemáticas reales que requerían análisis teóricos e implementaciones computacionales prácticas para ser aplicadas.

Por otra parte, esto nos lleva a reivindicar la lectura de referencias clásicas, en especial para los estudiantes (yendo incluso más allá de los comentarios finales en Cooley, 1987; véase también Duhamel y Vetterli, 1990). Al peinar la literatura académica a contrapelo, pueden recuperarse ideas interesantes que han sido pasadas por alto en compilaciones posteriores, con el noble, lícito y necesario propósito de hacer más accesible el material.

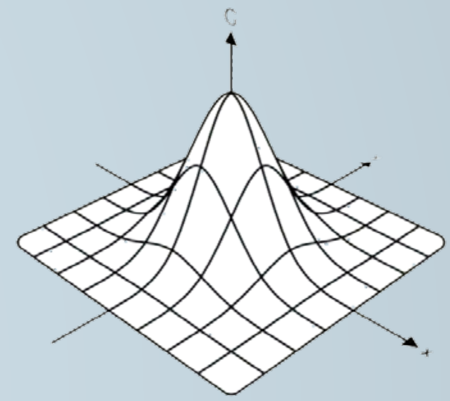
Efectivamente, el algoritmo FFT parece haber sido redescubierto en múltiples ocasiones, aunque el trabajo de Cooley y Tukey (1965) se considera seminal en esto. ¿Cómo fue posible que estas aportaciones se pasaran por alto tanto tiempo, siendo resultados de tanta relevancia, estando publicados, e involucrando a insignes científicos?

En los trabajos pioneros, los métodos desarrollados tenían como objeto el cálculo de los primeros armónicos para señales experimentales pequeñas; esto era suficiente en las aplicaciones involucradas, para la magnitud de error y el tipo de datos que se podían manipular (véanse Heideman, Johnson y Burrus, 1984, y Heideman, Johnson y Burrus, 1985). Se manejaban como técnicas de cómputo, frecuentemente auxiliadas con tablas numéricas, cuyo propósito era más bien ahorrar tediosos procesos de cálculo mecánico hecho a mano. Por tanto, no se veían como técnicas generales (nótense los cambios de enfoque entre trabajos y épocas relatados en Cooley, 1987).

Para poner lo anterior en contexto, especialmente para la audiencia más joven, conviene recordar que el auge de las computadoras electrónicas digitales, y, por tanto, de la programación y los algoritmos, se dio a partir de la segunda mitad del siglo XX —es interesante referir aquí el relato de aquella época proporcionado en Cooley (1987), contado por uno de sus protagonistas—.

Difícilmente se encuentra lo que no se está buscando. Sirva esto para alertar sobre la relevancia de tener perspectiva a la hora de valorar las ideas, yendo más allá de los resultados inmediatos. La búsqueda en

En los trabajos pioneros, los métodos desarrollados tenían como objeto el cálculo de los primeros armónicos para señales experimentales pequeñas; esto era suficiente en las aplicaciones involucradas, para la magnitud de error y el tipo de datos que se podían manipular



Google académico del artículo de Cooley y Tukey (1965) arroja un resultado de más de 18 000 citas, lo que atestigua la relevancia científica de este trabajo y otros relacionados (véanse también Duhamel y Vetterli, 1990, y Rockmore, 2000). ¿Por qué este trabajo y no otro? Se podría decir que Cooley y Tukey tuvieron la visión de demostrar la potencialidad de una idea, ya pensada por otros anteriormente.

Por supuesto, conviene matizar que hay momentos históricos y circunstancias específicas, en honor a la verdad. Citando a Víctor Hugo, "No hay nada más poderoso que una idea a la que le ha llegado su tiempo".

A modo de conclusión, lo anterior se puede sintetizar así: en la ciencia como en la vida, suele ser provechoso evaluar de forma pausada, profunda y crítica, superando tesis evidentes o inmediatas. Al contrario de lo que la inercia suele hacer parecer, frecuentemente lo urgente no es lo más importante.

Difícilmente se encuentra lo que no se está buscando.

Referencias

Cooley, J. W. (1987). The re-discovery of the fast Fourier transform algorithm. *Microchimica Acta*, *93*, 33-45.

Cooley, J. W., Lewis, P. A. y Welch, P. D. (1967). Historical notes on the fast Fourier transform. *Proceedings of the IEEE*, *55*(10), 1675-1677.

Cooley, J. W. y Tukey, J. W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of computation*, *19*(90), 297-301.

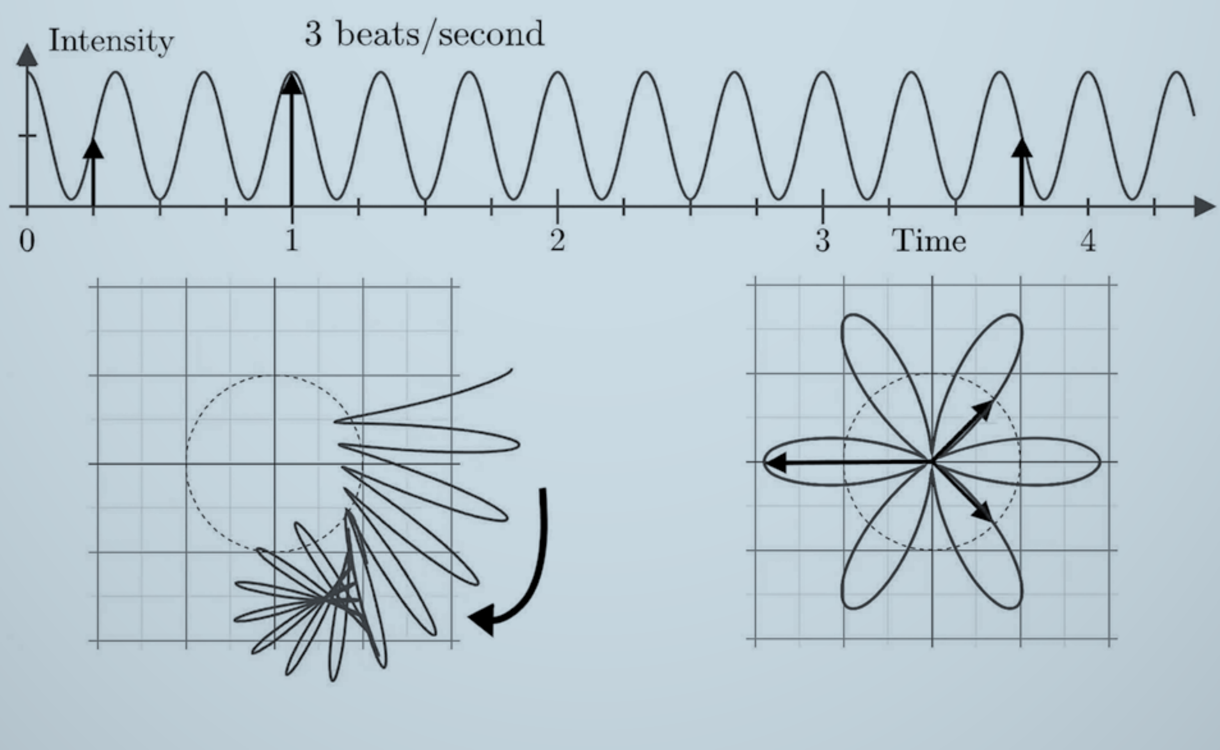
Duhamel, P. y Vetterli, M. (1990). Fast Fourier transforms: a tutorial review and a state of the art. *Signal processing*, *19*(4), 259-299.

Frigo, M. y Johnson, S. G. (1998). FFTW: An adaptive software architecture for the FFT. En *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP'98 (Cat. No. 98CH36181)* (Vol. 3, pp. 1381-1384). IEEE.

Heideman, M., Johnson, D. y Burrus, C. (1984). Gauss and the history of the fast Fourier transform. *IEEE Assp Magazine*, *1*(4), 14-21.

______________ (1985). Gauss and the history of the fast Fourier transform. *Archive for history of exact sciences*, 265-277.

Rockmore, D. N. (2000). The FFT: an algorithm the whole family can use. *Computing in Science 8 Engineering*, *2*(1), 60-64.



• Algunos problemas de • dimensión en matemáticas

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero

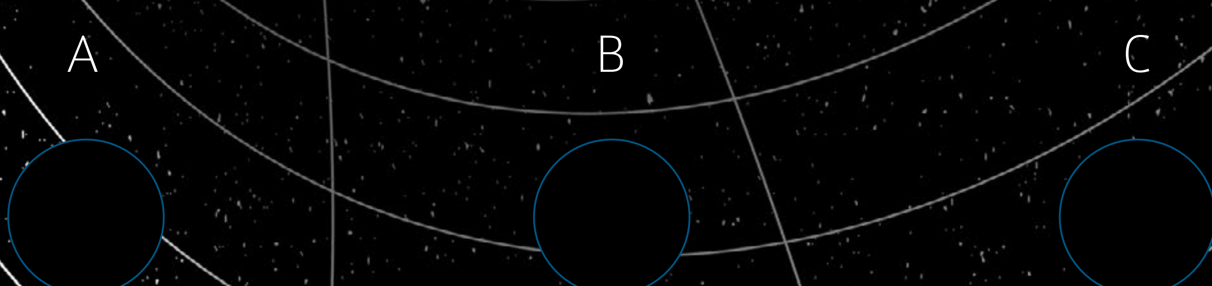
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

Veamos algunos problemas interesantes que hemos venido actualizando desde 2015 (véase Castañeda Alvarado, 2007, y Herrera Carrasco, 2015). Para nuestros propósitos, créanos que la recta real tiene dimensión uno, así como que cualquier intervalo también tiene dimensión uno, y acepte que cualquier subconjunto discreto tiene dimensión cero.

Problema 1

A, B y C son tres puntos en la recta real. Supongamos que C está situado entre A y B. ¿Podemos unir los puntos A y B, con un segmento contenido en la recta sin que dicho segmento "toque" al punto C? ¿Cómo podemos unir A y B con una "curva" sin pasar por el punto C?

Nótese que, para solucionar este problema, se tiene que salir de la recta y "entrar" al plano (R^2 =RxR). Es decir, tenemos que entrar a una dimensión superior (véase Herrera Carrasco, 2015, Problema 1).



> Hay quienes afirman que la vida inteligente no podría haberse desarrollado en un espacio de dimensiones 4 (), 5 (), ..., porque estos espacios no permiten órbitas planetarias estables (pregúntele a los físicos).

Problema 2

Dados seis puntos en el plano Cartesiano (R^2), una cada uno de ellos con todos los demás. No se permite que el "camino" tenga cruces, tampoco que caminos diferentes se crucen; solo se pueden tocar en los extremos. ¿Podemos realizar "estas uniones" sin salirnos del plano?

Veamos una situación "práctica": se trata de llevar luz, agua y teléfono a tres casas, pero sin que se crucen los caminos: solo se pueden tocar en los extremos. Toda la "figura" debe estar contenida en el plano.

¿Podemos realizar "estas uniones" sin salirnos del plano?

Nótese que, para solucionar este problema, se tiene que salir del plano y "entrar" . Es decir, tenemos que entrar a una dimensión superior.

Hay quienes afirman que la vida inteligente no podría haberse desarrollado en un espacio de dimensiones 4 (R^4), 5 (R^5), ..., porque estos espacios no permiten órbitas planetarias estables (pregúntele a los físicos). Entonces, la vida inteligente debería desarrollarse en 1 (R^1), 2 (R^2) o 3 (R^3) dimensiones, pero, por los ejemplos anteriores, en dimensiones 1 (R^1) y 2 (R^2) no es posible, pues un cerebro requiere una gran cantidad de células nerviosas unidas de dos en dos mediante nervios que no deben cortarse. Así que la única forma de hallar vida inteligente sería en un espacio de dimensión 3 (R^3) (véase Herrera Carrasco, 2015, Problema 2].

Problema 3

Se construye una casa sin puertas, ni ventanas, ni hoyos en ninguna de las paredes, techo y piso. Supongamos que tenemos un punto P dentro de la casa, y un punto Q fuera de la casa. ¿Podemos unir el punto P con el punto Q, con un segmento (camino), de tal manera que dicho segmento no toque el techo, las paredes, ni el piso de la casa (sin hacer hoyos)?

¿Podemos solucionar este Problema sin salirnos de R^3?

Nótese que, para solucionar este problema, se tiene que salir del y "entrar" a . Es decir, tenemos que entrar a una dimensión superior (véase Herrera Carrasco, 2015, Problema 4).

Problema 4

Que tiene ocupados a matemáticos y biólogos moleculares). Para este problema, véase Castañeda Alvarado, 2007, p. 5.

Se sabe que la molécula humana del ADN es una "doble hélice". Su longitud es como un cable largo de alrededor de dos metros, que habita dentro de una célula de una milésima de centímetro. La única forma de que una molécula de esta longitud esté en un espacio tan pequeño es que se encuentre extremadamente enrollada y torcida. Esta molécula se duplica formando una copia exacta al lado de la original. La pregunta que se tiene es: cuando están torcidas y entremezcladas, ¿cómo se separan estas dos moléculas o cables paralelos para poder alejarse y formar nuevas moléculas?

Los biólogos conjeturan que hay enzimas especiales que usan la siguiente técnica: cortan temporalmente una de las moléculas; dejan pasar un trozo de la otra molécula, sin perder los dos extremos producidos por el corte, y finalmente reconectan los dos pedazos del nudo, reconstruyendo la molécula de ADN. Haciendo esto muchas veces se logra la separación de las dos moéculas. El problema aquí es el siguiente

¿Cómo se estudia la operación de estas enzimas tan importantes en la vida y reproducción de las células?

Lo que han hecho los biólogos es crear moléculas circulares de ADN fuera de la célula; después, meterlas en una solución con la enzima bajo estudio y, para estudiar el resultado de la acción de la enzima, se quita la enzima y se coloca un "relajante" para que las moléculas no estén enrolladas y torcidas. Bajo el microscopio electrónico se ven nudos formados en los círculos de ADN; es decir, como si uno hubiera tomado una cuerda, hecho un nudo y después pegado sus extremos. La topología ha desarrollado teorías y métodos para distinguir los distintos nudos, por ejemplo, el grupo de un nudo, los polinomios de Alexander y de Jones o por medio de espacios recubridores.

En el caso de la acción de las enzimas, algunos nudos no aparecen y otros, con alta frecuencia. Con esta información, los matemáticos tratan de sugerir algunas hipótesis sobre el mecanismo de la intervención de las diferentes enzimas, por ejemplo:

- Una de las enzimas crea todos los nudos.
- Otra hace cortes únicamente cuando una parte específica de la molécula está al lado de otra parte específica.
- Otra hace siempre un doble corte y deja pasar dos trozos de la molécula antes de volver a pegar.

Recientemente, los químicos interesados en la síntesis de nuevos compuestos han empezado a voltear la vista hacia la Teoría de Nudos e intentan obtener nuevos compuestos al cambiar la forma en la cual los átomos están conectados, tomando como base la clasificación de los nudos.

Referencias

Castañeda Alvarado, E. (2007). Tauromaquia Topológica. *CIENCIA ergo-sum, Revista Científica Multidisciplinaria de Prospectiva*, *14*(3), 339-344.
Herrera Carrasco, D. (2015). La dimensión en Matemáticas. *Revista Saberes y Ciencias*.

Algunos problemas de dimensión en matemáticas

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

Veamos algunos problemas interesantes que hemos venido actualizando desde 2015 (véase Castañeda Alvarado, 2007, y Herrera Carrasco, 2015). Para nuestros propósitos, créanos que la recta real tiene dimensión uno, así como que cualquier intervalo también tiene dimensión uno, y acepte que cualquier subconjunto discreto tiene dimensión cero.

Problema 1

A, B y C son tres puntos en la recta real. Supongamos que C está situado entre A y B. ¿Podemos unir los puntos A y B, con un segmento contenido en la recta sin que dicho segmento "toque" al punto C? ¿Cómo podemos unir A y B con una "curva" sin pasar por el punto C?

Nótese que, para solucionar este problema, se tiene que salir de la recta y "entrar" al plano ($R^2 = RxR$). Es decir, tenemos que entrar a una dimensión superior (véase Herrera Carrasco, 2015, Problema 1).

Hay quienes afirman que la vida inteligente no podría haberse desarrollado en un espacio de dimensiones 4 (), 5 (), ..., porque estos espacios no permiten órbitas planetarias estables (pregúntele a los físicos).

Problema 2

Dados seis puntos en el plano Cartesiano (R^2), una cada uno de ellos con todos los demás. No se permite que el "camino" tenga cruces, tampoco que caminos diferentes se crucen; solo se pueden tocar en los extremos. ¿Podemos realizar "estas uniones" sin salirnos del plano?

Veamos una situación "práctica": se trata de llevar luz, agua y teléfono a tres casas, pero sin que se crucen los caminos: solo se pueden tocar en los extremos. Toda la "figura" debe estar contenida en el plano.

¿Podemos realizar "estas uniones" sin salirnos del plano?

Nótese que, para solucionar este problema, se tiene que salir del plano y "entrar" . Es decir, tenemos que entrar a una dimensión superior.

Hay quienes afirman que la vida inteligente no podría haberse desarrollado en un espacio de dimensiones 4 (R^4), 5 (R^5), ..., porque estos espacios no permiten órbitas planetarias estables (pregúntele a los físicos). Entonces, la vida inteligente debería desarrollarse en 1 (R^1), 2 (R^2) o 3 (R^3) dimensiones, pero, por los ejemplos anteriores, en dimensiones 1 (R^1) y 2 (R^2) no es posible, pues un cerebro requiere una gran cantidad de células nerviosas unidas de dos en dos mediante nervios que no deben cortarse. Así que la única forma de hallar vida inteligente sería en un espacio de dimensión 3 (R^3) (véase Herrera Carrasco, 2015, Problema 2].

Problema 3

Se construye una casa sin puertas, ni ventanas, ni hoyos en ninguna de las paredes, techo y piso. Supongamos que tenemos un punto P dentro de la casa, y un punto Q fuera de la casa. ¿Podemos unir el punto P con el punto Q, con un segmento (camino), de tal manera que dicho segmento no toque el techo, las paredes, ni el piso de la casa (sin hacer hoyos)?

¿Podemos solucionar este Problema sin salirnos de R^3?

Nótese que, para solucionar este problema, se tiene que salir del y “entrar” a . Es decir, tenemos que entrar a una dimensión superior (véase Herrera Carrasco, 2015, Problema 4).

Problema 4

Que tiene ocupados a matemáticos y biólogos moleculares). Para este problema, véase Castañeda Alvarado, 2007, p. 5.

Se sabe que la molécula humana del ADN es una "doble hélice". Su longitud es como un cable largo de alrededor de dos metros, que habita dentro de una célula de una milésima de centímetro. La única forma de que una molécula de esta longitud esté en un espacio tan pequeño es que se encuentre extremadamente enrollada y torcida. Esta molécula se duplica formando una copia exacta al lado de la original. La pregunta que se tiene es: cuando están torcidas y entremezcladas, ¿cómo se separan estas dos moléculas o cables paralelos para poder alejarse y formar nuevas moléculas?

Los biólogos conjeturan que hay enzimas especiales que usan la siguiente técnica: cortan temporalmente una de las moléculas; dejan pasar un trozo de la otra molécula, sin perder los dos extremos producidos por el corte, y finalmente reconectan los dos pedazos del nudo, reconstruyendo la molécula de ADN. Haciendo esto muchas veces se logra la separación de las dos moéculas. El problema aquí es el siguiente

¿Cómo se estudia la operación de estas enzimas tan importantes en la vida y reproducción de las células?

Lo que han hecho los biólogos es crear moléculas circulares de ADN fuera de la célula; después, meterlas en una solución con la enzima bajo estudio y, para estudiar el resultado de la acción de la enzima, se quita la enzima y se coloca un "relajante" para que las moléculas no estén enrolladas y torcidas. Bajo el microscopio electrónico se ven nudos formados en los círculos de ADN; es decir, como si uno hubiera tomado una cuerda, hecho un nudo y después pegado sus extremos. La topología ha desarrollado teorías y métodos para distinguir los distintos nudos, por ejemplo, el grupo de un nudo, los polinomios de Alexander y de Jones o por medio de espacios recubridores.

En el caso de la acción de las enzimas, algunos nudos no aparecen y otros, con alta frecuencia. Con esta información, los matemáticos tratan de sugerir algunas hipótesis sobre el mecanismo de la intervención de las diferentes enzimas, por ejemplo:

- Una de las enzimas crea todos los nudos.
- Otra hace cortes únicamente cuando una parte específica de la molécula está al lado de otra parte específica.
- Otra hace siempre un doble corte y deja pasar dos trozos de la molécula antes de volver a pegar.

Recientemente, los químicos interesados en la síntesis de nuevos compuestos han empezado a voltear la vista hacia la Teoría de Nudos e intentan obtener nuevos compuestos al cambiar la forma en la cual los átomos están conectados, tomando como base la clasificación de los nudos.

Referencias

Castañeda Alvarado, E. (2007). Tauromaquia Topológica. *CIENCIA ergo-sum, Revista Científica Multidisciplinaria de Prospectiva*, *14*(3), 339-344.

Herrera Carrasco, D. (2015). La dimensión en Matemáticas. *Revista Saberes y Ciencias*.

Juan Angoa Amador
David Herrera Carrasco
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

De los algoritmos al concepto y del concepto al algoritmo

En la educación matemática, es común asegurar que alguien sabe matemáticas si, ante cualquier problema, después de organizar los datos, propone una secuencia de pasos que permitan acceder al resultado, que, por lo general, es único y, además, es consecuencia de ir agotando la secuencia de pasos, ya que se asegura que no es posible que este único algoritmo no genere "la respuesta". Esto debido a que los maestros de matemáticas suelen sancionar el orden en que se desarrollan los pasos, y pobre de aquel que haya omitido alguno o, peor, que haya usado algún otro proceso o que no haya obtenido la única respuesta.

No obstante, los algoritmos funcionan bajo situaciones muy restringidas, como es la evaluación bajo bien identificadas operaciones, o, más simple, bajo un problema de simple realización de operaciones claramente enunciadas. "No te salgas del camino y solo intenta llegar al final del camino" sería el mejor consejo para quien "aprende" matemática.

Pero ¿qué sucede cuando no hay caminos y solo tenemos un gran espacio sin senderos y, lo peor, debemos marcar metas por nuestros propios recursos? El algoritmo se vuelve inútil y se convierte en un fardo pesado para alcanzar la libertad del pensar y, sobre todo, de crear.

Cuando lo que se manipula son conceptos y se tiene conciencia de esto, lo que menos importa es el algoritmo, y se decide, más bien, bajo la tutela de la comprensión del concepto, por la creación de nuevos algoritmos.

En este sentido, del gran cuerpo de la matemática, debemos distinguir qué queremos aprender, pues, de la localización de la región por aprender, deviene la

» En general, hay un desconocimiento profundo de lo que es un concepto; sin embargo, no debemos abandonar el objetivo de alcanzar el concepto en aras de generar caminos seguros para el cálculo.

preponderancia del concepto o el algoritmo, y no existe una sola estrategia para enseñar la matemática, ya que hay una gran multitud de caras de ésta; más bien, bajo una síntesis entre el algoritmo y el concepto emerge la estrategia adecuada.

Cuando todo se reduce a alcanzar el concepto, esta hazaña aburre a más de uno, puesto que solo se quiere manipular algoritmos sin importar su impacto en un modelo conceptual de más largo alcance. Sin embargo, ante estas limitaciones de la audiencia, podemos plantear un sistema de seducción, para finalmente romper su oposición al concepto.

Debido a que tenemos una responsabilidad para la matemática, la cual es no desacreditar su espíritu, su enseñanza debe ser, en última instancia, la instauración de senderos para acceder a ese gran espíritu, que nos dice que siempre es posible matematizar cualquier realidad, con la construcción de un sistema conceptual.

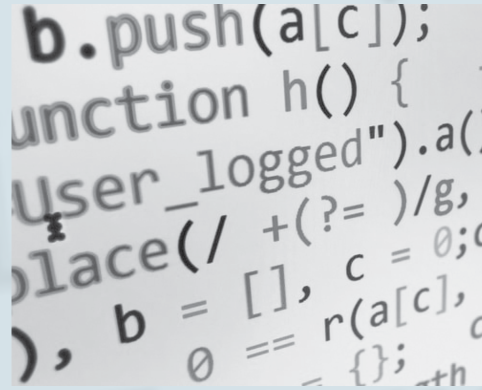
Pero el algoritmo es la forma popular de la matemática. Para el vulgo, matemático es aquel que hace cuentas. En general, hay un desconocimiento profundo de lo que es un concepto; sin embargo, no debemos abandonar el objetivo de alcanzar el concepto en aras de generar caminos seguros para el cálculo. Este retorno al concepto trata de exhibir una cara humana de la matemática, la cual es la de la humanidad haciendo esfuerzos para dominar la realidad al tratar de conocerla a fuerza de conceptos.

No obstante, el algoritmo también tiene un papel importante en el duro trance de acercarse al concepto, ya que es el que permite entrenarse en el duro trajín de manipular conceptos matemáticos: intente sumar sin saber contar, y luego entender el abstracto concepto de operación sin sumar. Así, de la mecánica acción de realizar operaciones se puede acceder al abstracto concepto de operación binaria.

Aún no hemos explorado la construcción del concepto a través de la mecanización de acciones, pero, tradicionalmente, tenemos que, seguramente, si lo repites, en algún momento lo transformarás por otra realidad; es decir, construirás un camino para su comprensión. La repetición es un camino seguro para la habilidad artística. Claro, estamos hablando, en este caso, de una habilidad manual, y en matemática, de una habilidad mental. Pero ¿repetir procesos calculatorios nos prepara para comprender el concepto?

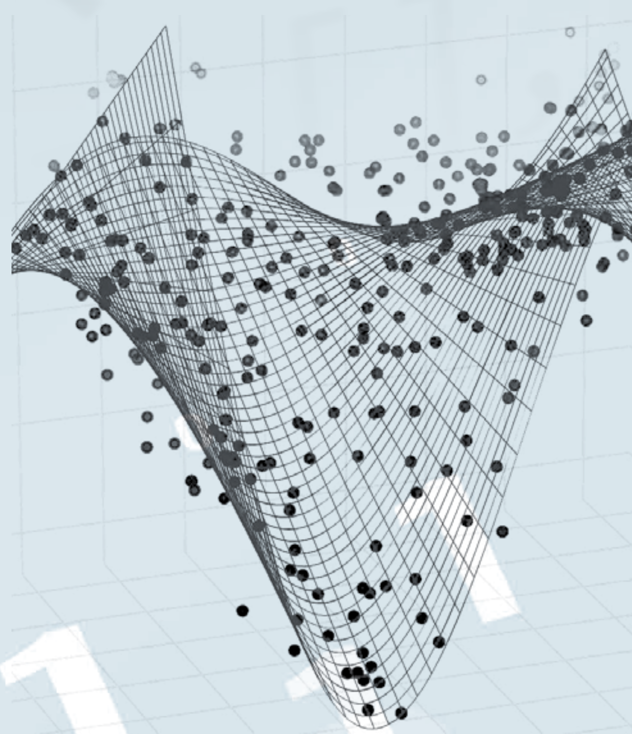
Los pedagogos de la matemática, por cierto, siempre apelan, en el mejor de los casos, a generar la habilidad mental de repetir procesos mediante el modelado con otros procesos. Así, el recurso óptico para modelar situaciones cuantitativas es muy usado: las regletas de colores o el geoplano modelan la suma y las fracciones. De este modo, se evita el número para generar habilidades calculatorias mediante la manipulación de entes "reales y visibles". Pero ¿realmente se están acercando al número, o solo se sale del paso para generar habilidades mentales también visibles?

Lo visible, como expresión hegemónica del existir, marca la cultura de la imagen que estamos viviendo: lo que no ves, no



Ejemplos de algoritmo

La matemática no está hecha solo de matemática, aunque su cuerpo así lo aparente. Por ello, debemos iniciar un trabajo de investigación de todas esas prácticas que, pensamos, se vuelven estratégicas para coadyuvar a alcanzar el concepto.



existe. Pero el mundo invisible de los conceptos tiene una existencia profunda, ya que vive dentro de los cerebros de los hombres sin necesidad de un monitor o una pantalla, solo el lenguaje y la relación social los exterioriza. En estos artefactos pedagógicos en donde se desechan los conceptos por no tener visibilidad, se está desechando también la profunda actividad de los hombres que crean cosas invisibles: los conceptos.

Pero ¿qué alternativa damos para deambular del algoritmo al concepto? Primero que todo, la meta siempre debe ser el concepto. Cualquier camino para darle imagen debe ser solo eso: un camino, no una sustitución, y el maestro debe estar consciente de eso.

Está claro que el algoritmo por sí solo no nos permitirá acceder al concepto, por lo que debemos acompañarlo por el desarrollo de otros referentes conceptuales, como el lenguaje y la relación social, una rica vida social, expresada por una multiplicidad de contactos y de acciones entre seres humanos; sobre todo, la esencialidad de la actividad realizada en esos grupos marcará una rica vida interior y una fuerte acción conceptual, al menos eso creemos, pero debemos entender, en un primer acercamiento, que solo la repetición no nos acercará al concepto, pues debemos incorporar prácticas de lenguaje y de vida social. La matemática no está hecha solo de matemática, aunque su cuerpo así lo aparente. Por ello, debemos iniciar un trabajo de investigación de todas esas prácticas que, pensamos, se vuelven estratégicas para coadyuvar a alcanzar el concepto.

Nuevamente, creemos que todo proceso educativo es un sendero hacia el concepto, y acceder a un concepto es, en realidad, tener un pedazo de humanidad en la mano, lo cual nos amplifica como seres humanos. De esta manera, debemos reconocer el carácter formativo de la educación, pero, sobre todo, su carácter re-creativo; en el sentido en que nos hacemos otros al aprender. Así, trascendemos al incorporar los conceptos a nuestro interior: cuando ya tenemos un concepto, podemos interrelacionarlo con otros conceptos, podemos deducir propiedades y, sobre todo, cuando podemos proponer nuevas relaciones y crear otros conceptos.

En verdad, la educación no solo es informativa y generadora de habilidades mecánicas en el sentido de repetir protocolos, sino que, esencialmente, es una senda para la creación.

Sugerimos al lector consultar las siguientes referencias que son metodologías para estudiar el cuerpo de la matemática.

» En verdad, la educación no solo es informativa y generadora de habilidades mecánicas en el sentido de repetir protocolos, sino que, esencialmente, es una senda para la creación.

Referencias

Lorenzo, J. de (1971). *Introducción al estilo matemático*. Madrid: Tecnos.

___________ (1998). *La matemática: de sus fundamentos y crisis*. Madrid: Tecnos.

El concepto de estructura matemática

José Juan Angoa Amador,
Fernando Macías Romero

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas BUAP

Introducción

Advertencia. El texto que sigue está inspirado y basado en el texto de Angoa Amador (2019). Queremos compartir a un amplio auditorio este texto, por eso lo reciclamos en esta revista.

Podemos intuir que, cuando un hombre piensa al mundo, impone un sistema de reglas conceptuales a la nube de información que percibe. En sus primeros tiempos de vida, esta nube de información es producida esencialmente por sus percepciones, que pasan por un cerebro, el cual las traduce a conceptos. Tiempo después, producto de su vida social y educación, la percepción de la exterioridad es un mensaje en que la sensoriedad y la racionalidad conviven por algunos instantes. Rápidamente, casi sin sentirlo, el mensaje es racionalizado, imponiéndole o dominándolo por medio de estructuras conceptuales. Esta descripción solo es útil para resaltar que ese inevitable proceso de pensar el "mundo" conlleva necesariamente a imponerlo o apresarlo en un paralelo mundo conceptual.

Desde los primeros filósofos, atareados en explicar este proceso de conocer, y ante el sorpresivo e inexplicable hecho de un mundo de los conceptos y otro de las percepciones, que se ensamblan produciendo el conocimiento, las respuestas fueron pragmáticas, pero insuficientes. En este trabajo describiremos el increíble y básico hecho de crear estructuras que modelen un mundo que se cataloga por real, ya que el "grado" de intervención del hombre es reducido a su mínima expresión.

El hombre, como el rey Midas, marca todo lo que piensa, siente o percibe con su sello de lo humano: el

» la estructura tiene un aspecto metodológico y es una estrategia para la acción, en la medida en que es un plano conceptual del fenómeno, en donde prevemos comportamientos impredecibles, usando solo la percepción del fenómeno

toque dorado. No aceptar este hecho es aceptar un misterioso mundo del que no se puede decir nada, ya que aún no es nuestro y, lo peor, ni nos interesa, ya que no nos lo hemos apropiado. El mundo que interesa es el universo apropiado, dígase humanizado. El hecho de producir un mundo de conceptos paralelo al mundo real no sobrevalora la racionalidad; más bien, la sitúa como el discurso humano del mundo, el cual se escribe en conceptos, pero la racionalidad es solo una parte de ese mundo humano que resulta de intervenir en el mundo. El arte, la religión, la filosofía y la matemática son otras tantas expresiones de la cultura humana que surgen de ese constante proceso de apropiarse del mundo, agrandando al ser humano.

Algunos modelos conceptuales

Desde el nacimiento de la lógica con Aristóteles, nos encontramos con que la lógica nace como la teoría de la esencia de los procesos demostrativos y de deducción. Estos procesos son comunes a todas las formas de manipular conceptos e intentar organizar la presentación de la información. El feliz hallazgo de procesos comunes genera la certeza de una estructura; es decir, un esquema general de comportamiento, así como una propuesta de partes que se entrelazan en ese esquema, las cuales se definen abstractamente; o sea que son entes que, si bien tienen una motivación real, su presentación es conceptual.

En *El Órganon*, la parte de la obra de Aristóteles que trata de los procesos deductivos, se nos presenta esta teoría como una

Aristóteles

metodología, no como un filosofar. Es decir, este saber debe estar en el centro de la ciencia, como parte insustituible de todo proceso de conocer. Esto significa que es la estructura de los procesos deductivos: la expresión abstracta del conocer.

Otro ejemplo: cuando se conoce la cantidad y su forma abstracta en la ciencia griega, esta se presenta como relaciones cualitativas de los segmentos, y la geometría se convierte en la estructura de lo cuantitativo. En otras culturas que no alcanzan el nivel de abstracción de los griegos, lo numérico se expresa en nociones algorítmicas, que son una expresión particular de lo numérico, a saber, el cálculo. Estas culturas no alcanzan una estructura para su universo numérico, solo encuentran relaciones particulares descriptivas que capturan su sabiduría sin llegar al esquema general de un número.

Así, en la cultura griega, el espacio es descrito a un nivel de estructura de la que devienen múltiples estructuras, como la de los números, pero, además de racionalizar el espacio, la geometría, al proponer un esquema conceptual de el espacio, valida y vuelve este espacio el único posible entorno material; este espacio pensado se vuelve norma material para pensar otros espacios, convirtiendo a otro tipo de espacios en imposibles. Recuérdense las geometrías no-euclidianas y el imposible mundo que describían; así que la estructura se puede volver referencia óntica, es decir, referente material.

Sin embargo, la cualidad abstracta de la estructura, en donde las partes y sus reglas de interacción son enunciadas en el mundo conceptual, tiene, paradójicamente, consecuencias que tienen una existencia "real", en la medida en que generan estrategias de acción de los seres humanos. Y, recíprocamente, el mundo real llena de contenido a la forma al aportar conocimientos que buscan su expresión formal en las distintas ciencias, solo que la forma, al abandonar su expresión material y estar en forma conceptual, puede suceder como antesala de un proceso enajenante, y no reconocer su instancia material que vive y sobrevive en sus entrañas.

De este modo, la estructura tiene un aspecto metodológico y es una estrategia para la acción, en la medida en que es un plano conceptual del fenómeno, en donde prevemos comportamientos impredecibles, usando solo la percepción del fenómeno.

La matemática: sistema de estructuras

Cuando la cultura humana logra sistematizar su experiencia en un esquema general de conceptos, donde los fenómenos se visten de estructura para poder visualizarlos:

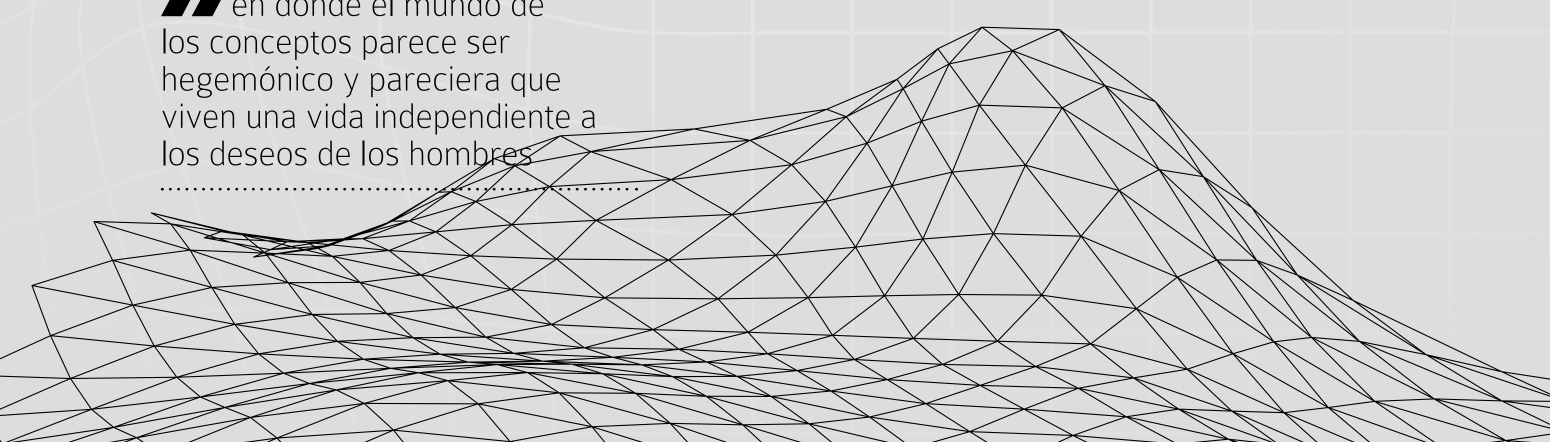
1. Ha conocido múltiples fenómenos que soportan cierta analogía.
2. Tiene la madurez social e histórica para producir el sistema conceptual que sea el recipiente de tales analogías.

Es en la matemática en donde el mundo de los conceptos parece ser hegemónico y pareciera que viven una vida independiente a los deseos de los hombres. Por ello, debe ser afirmación fundamental que, aunque el cuerpo de la matemática sea en esencia puro concepto, son creación de los seres humanos.

Por otro lado, una vez que tenemos estructuras que permiten deducir otras y crear otras, tal parece que podemos olvidar el mundo y concentrarnos en esta dialéctica de estructuras, y así hacer y desarrollar la matemática, pero esto es cierto como un momento del desarrollo de la matemática, ya que, en cierto momento, la forma debe nutrirse de contenido, a fin de revitalizarse y alcanzar la riqueza necesaria para seguir cumpliendo su función de ser la expresión abstracta del mundo.

No podemos quedarnos con la pura estructura como razón y objetivo de la matemática, aquí es cuando la comprensión del sustrato social del conocer nos conecta a

Es en la matemática en donde el mundo de los conceptos parece ser hegemónico y pareciera que viven una vida independiente a los deseos de los hombres



> La matemática, como una superestructura de estructuras, es válida no solo por razones descriptivas del discurso matemático.

los hombres con los hombres y nos recrea y crea las necesidades sociales de una comunidad. En este universo, en donde lo humano se reconoce en lo humano por medio de su práctica social, es en donde la forma se reinventa al asumir nuevos contenidos generados por nuevos protagonistas y proyectos sociales.

Debemos resaltar que la forma es un momento insustituible del conocer y que, junto con la apropiación de nuevos contenidos y, por tanto, la creación de nuevos territorios a formalizar, este juego se convierte en la verdadera dialéctica de la forma y el contenido, en la cual la matemática reconoce su esencia y su sino.

La matemática, como una superestructura de estructuras, es válida no solo por razones descriptivas del discurso matemático. Una parte de los matemáticos están invirtiendo un gran esfuerzo para describir la matemática y sus enlaces entre estructuras diferentes con puentes que traducen a una en la otra. De esta manera, se vuelve más manejable el enorme universo de conocimiento matemático, pero solo poniendo la gran lupa de la analogía podemos ver la gran similitud de naturalezas y, a partir de esa similitud o diferencia, podemos entender la naturaleza de varias áreas de la matemática que, en realidad, pueden tener metodologías diferentes, pero se pueden unificar bajo una naturaleza común viéndolas como parte de algo común. Así, estableciendo hilos conductores entre territorios alejados, se recortan las distancias y el deambular matemático se convierte en un lugar seguro.

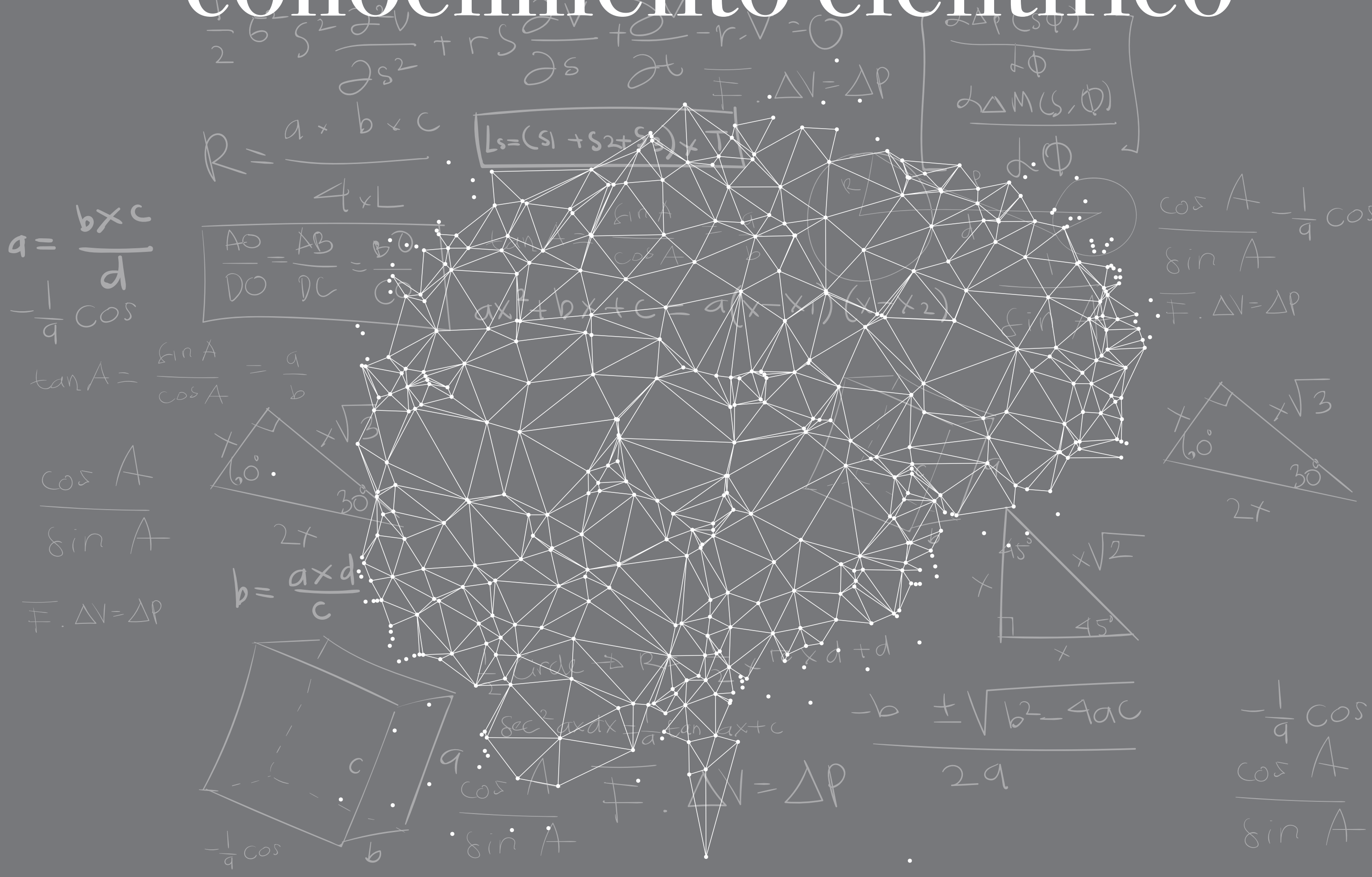
La estructura matemática

Comentamos que una estructura se incorpora al universo con vida propia, invalidando otra parte de la realidad que se contradiga con ella (la geometría euclidiana); esta expresión fetichizada de las estructuras solo es justificada por razones ideológicas, pero si aceptamos que la razón es poseedora de una capacidad de guía en la práctica, esta explicita el sobreentendido de que aceptamos que la razón por calidad propia reproduce al mundo de manera adecuada para poder ser transformado. Los modelos racionales del mundo y la matemática es uno de ellos: coinciden lo suficiente con el universo para guiar su transformación, y esto es una fe humana que acompaña al hombre en su historia.

Referencia

Angoa Amador, J. J. (2019). Concepto de una estructura matemática. *Revista Axolote* (3), 10-11.

El papel de la matemática en el desarrollo del conocimiento científico



Andrés Fraguela Collar, Moisés Soto-Bajo

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas BUAP,
Investigadores por México Conacyt

La matemática y la astronomía han sido las dos primeras ciencias que han acompañado a la humanidad a lo largo de diferentes periodos, desde las civilizaciones más antiguas. En particular, el papel que ha jugado la matemática en cada uno de esos periodos ha ido de la mano de las exigencias y necesidades de los sistemas socioeconómicos imperantes en cada uno de ellos. Aunque históricamente el conocimiento se ha ido acumulando desde mucho antes de su registro, los historiadores de la matemática distinguen cuatro etapas fundamentales en su desarrollo como ciencia (véase Ribnikov, 1991).

» El trabajo físico se convirtió en un atributo solamente de los esclavos y artesanos, en tanto que la aristocracia se dedicaba a la filosofía y la ética del individuo.

La primera de ellas, que comenzó desde los tiempos más remotos y llegó hasta los siglos VI y VII antes de nuestra, fue en la que los conocimientos matemáticos estaban relacionados con las exigencias domesticas de la vida del hombre, lo cual dio lugar a la necesidad de contar y de introducir las nociones más rudimentarias sobre lo que hoy conocemos como fracciones. La exigencia de medir áreas de las parcelas de tierra, volúmenes de diferentes vasijas y de piezas para la construcción, entre otras actividades, condujo a la acumulación del material práctico que sentó las bases de la más simple geometría.

A pesar de que la matemática de ese periodo no puede ser considerada una ciencia teórica, todo el conocimiento empírico producido dio lugar a que, hacia finales de ese periodo, comenzaran a aparecer algunos problemas matemáticos en la antigua Babilonia y China, los cuales no tenían un significado puramente doméstico, dando lugar a las primeras ideas en cuanto a la sistematización e interpretación teórica del conocimiento práctico acumulado hasta el momento.

La segunda etapa, llamada de las magnitudes constantes, corresponde al auge de la matemática como ciencia teórica y abstracta. Si bien en la primera etapa de su desarrollo la matemática se planteaba como pregunta fundamental ¿cómo?, ahora, en la segunda, la pregunta fundamental es ¿por qué? Durante este periodo, tanto la historia de la Grecia antigua como del Oriente se caracterizó por el enriquecimiento de ciertas clases y el empobrecimiento de otras. En esta época, el trabajo físico se convirtió en un atributo solamente de los esclavos y artesanos, en tanto que la aristocracia se dedicaba a la filosofía y la ética del individuo. Esta atmósfera favoreció la discusión de los fundamentos de la matemática. Los antiguos griegos, al sistematizar y generalizar los métodos de solución de problemas numéricos, fundaron la aritmética: ciencia de los números y las operaciones con ellos, y alcanzaron un alto grado de perfección lógica en el desarrollo de la geometría, en cuya construcción se aplicó por primera vez el método axiomático, mientras que la matemática del Oriente preparaba los fundamentos del álgebra.

Pitágoras y Boecio, como representantes de los métodos de cálculo que se disputan la supremacía en la Edad Media: el ábaco y las cifras.

Euclides fue un matemático y geómetra griego. Se le conoce como "el padre de la geometría"

> El estímulo fundamental para el desarrollo de la matemática fue la exigencia de la técnica y los problemas ingenieriles planteados por la arquitectura, la navegación y el arte militar

La tercera etapa, que se ha denominado de las magnitudes variables, se caracterizó por la extensión del concepto de relación cuantitativa. En ella, el estímulo fundamental para el desarrollo de la matemática fue la exigencia de la técnica y los problemas ingenieriles planteados por la arquitectura, la navegación y el arte militar. Fue así que se pasó del estudio de las magnitudes constantes a investigar la dependencia entre las magnitudes variables; es decir, a la representación matemática de los procesos. En ese momento comienzan a fijarse las ideas de continuidad, movimiento y cambio, y aparece el concepto de función, introducido por R. Descartes que, según Engels, constituyó un punto de viraje en la ciencia, ya que gracias a él los conceptos matemáticos pudieron representar al movimiento y, con ello, la dialéctica.

Un momento decisivo en esta etapa fue la fundación del cálculo diferencial e integral, debido a dos matemáticos y filósofos: el inglés I. Newton (1642-1727), y el alemán G.V. Leibniz (1646-1716), con lo cual la ciencia obtuvo un potente aparato para la investigación cuantitativa de los procesos en ingeniería y ciencias naturales. En ese tiempo, aunque según la definición del enciclopedista francés del siglo XVIII, D'Alembert, la matemática era una ciencia que se dedicaba a estudiar las propiedades de las magnitudes numerables y medibles del mundo real, ya comenzaban a aparecer opiniones de matemáticos como R. Descartes y G.V. Leibniz, quienes afirmaban que la matemática podía aplicarse no solamente a las formas espaciales del mundo en que vivimos y a sus magnitudes y relaciones cuantitativas, sino también a otros conceptos abstractos como, por ejemplo, al razonamiento.

El comienzo de la cuarta etapa del desarrollo de la matemática está relacionado con el descubrimiento del destacado matemático ruso N. I. Lobachevsky (1742-1856), de una geometría no euclidiana, y con los trabajos de E. Galois (1811-1832), matemático francés, sobre la teoría de grupos y campos, los cuales causaron una verdadera revolución del papel de la abstracción en la matemática. Este nuevo salto cualitativo no fue casual, sino que estuvo condicionado por la repercusión social que tuvieron la primera Revolución Industrial y los acontecimientos políticos en Europa occidental relacionados con la victoria de la burguesía sobre el feudalismo y el absolutismo. Esto motivó que el desarrollo exitoso de la matemática se realizara primero en países como Francia y, después, en Alemania y Rusia, donde se acentuaron la exigencia del desarrollo tecnológico y socioeconómico y la ruptura ideológica con el pasado. Fue precisamente en estas condiciones que se cuestionó la autoridad de la bimilenaria geometría de Euclides, apareciendo diferentes interpretaciones de sus postulados, las cuales dieron lugar a nuevos sistemas de axiomas de la geometría en espacios multidimensionales que encontraron rápidamente su aplicación en múltiples problemas de la física, química, economía y sociología.

Este proceso de generalización y de creación de nuevas abstracciones que dieron lugar a potentes teorías influyó también cualitativamente en el desarrollo del álgebra, en cuyo centro de atención surgieron problemas no solamente relacionados con la solución de ecuaciones, sino con el estudio de diferentes estructuras algebraicas sobre conjuntos de naturaleza arbitraria. Este enfoque abstracto de los objetos y las operaciones sobre ellos halló su expresión más completa en la teoría de conjuntos, en estrecha relación con la fundamentación lógica y filosófica de la matemática y en el método axiomático estrechamente relacionado con ella, generándose un nuevo método universal de creación de conocimiento que rápidamente abarcó toda la matemática.

Es por lo anterior que a esta cuarta etapa del desarrollo de la matemática se le conoce como etapa del desarrollo de la abstracción, la cual se ha convertido en el objeto de estudio de la matemática y el principal motor interno de su desarrollo. Sin embargo, en la etapa actual, en que la humanidad se encamina hacia la *sociedad del conocimiento*, el pensamiento y el conocimiento matemático (véase Fraguela, 2016) juegan un papel que va mucho más allá de la producción de conocimiento matemático puro.

En primer lugar, si bien es cierto que históricamente el desarrollo de la matemática se ha visto estimulado por la mecánica y la física y que esa interacción recíproca se ha intensificado con el impetuoso desarrollo de la física moderna, hay que resaltar que, en la actualidad, la matemática ha sobrepasado las fronteras tradicionales de la física y la ingeniería para convertirse en una parte integrante del fundamento teórico de muchas otras ciencias, al proveerlas de un nuevo instrumento de trabajo científico, que es la modelación matemática y la aplicación del pensamiento lógico matemático en la conceptualización y el estudio de problemas complejos que aparecen en todas las ramas del conocimiento (véase Fraguela, 2018).

Por otra parte, hay que destacar el importante papel del *pensamiento lógico matemático* (véanse Fraguela, Rosas, Brambila, Aquino, 2018, y Fraguela, Rosas, 2022) en la formación académica de las jóvenes generaciones, ya que esta forma de pensamiento ha resultado un instrumento insustituible para desarrollar las capacidades intelectuales necesarias que estimulen la creatividad y la innovación, los cuales son los ingredientes fundamentales para el desarrollo de la sociedad del conocimiento.

Por ello, podemos concluir que el desarrollo científico y tecnológico actual y, por ende, el desarrollo social, incluyendo los avances de las herramientas más recientes para extraer conclusiones prácticas a partir de grandes volúmenes de información como son el Big Data y la IA, requieren del pensamiento y el conocimiento matemático y del sustento científico que brinda la modelación matemática.

Referencias

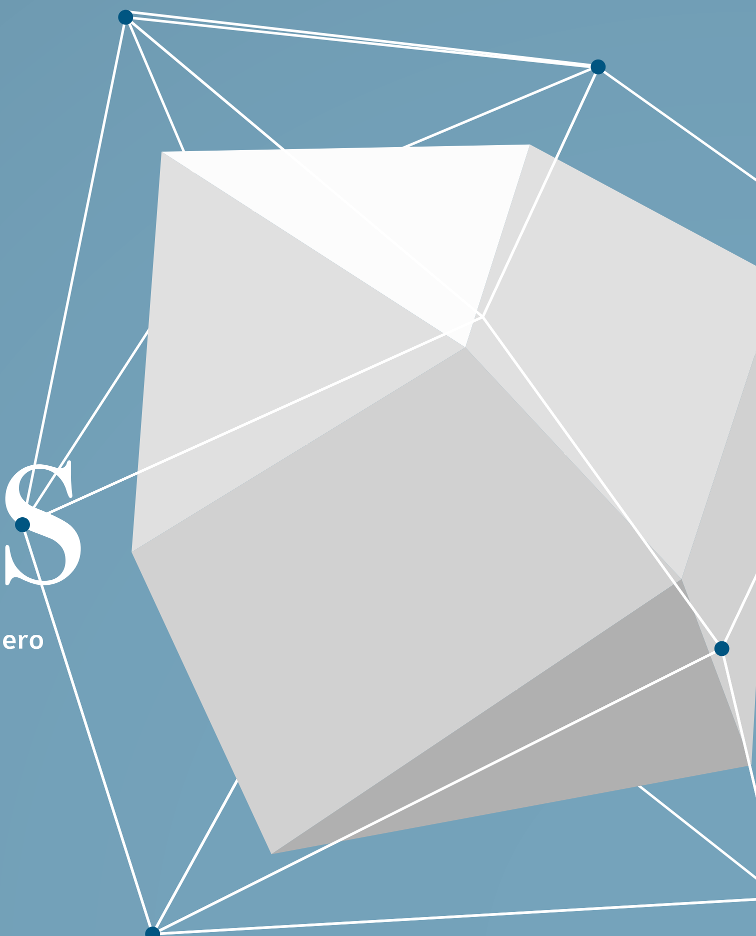
Fraguela Collar, A. (2016). Imaginación y conocimiento. De Descartes a Freud. En *Génesis y evolución del conocimiento y pensamiento matemático* (pp. 187-211). Corinter Humanidades / Gedisa Editorial.

Fraguela Collar, A., Rosas-Colin, C. P. (2022). *Formación docente y calidad educativa: Un modelo alternativo con especificaciones operativas para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*. Gedisa Editorial.

Fraguela Collar, A., Rosas-Colín, C. P., Brambila Paz, F. y Aquino Camacho, F. A. (2018). *Marco de Referencia. Competencias lógico-matemáticas para el ingreso a la Educación Superior*. BUAP.

Ribnikov, K. (1991). *Historia de la Matemática*. Editorial Mir.

» El desarrollo de la matemática se ha visto estimulado por la mecánica y la física y que esa interacción recíproca se ha intensificado con el impetuoso desarrollo de la física moderna.



La colcha de la señora Perkins

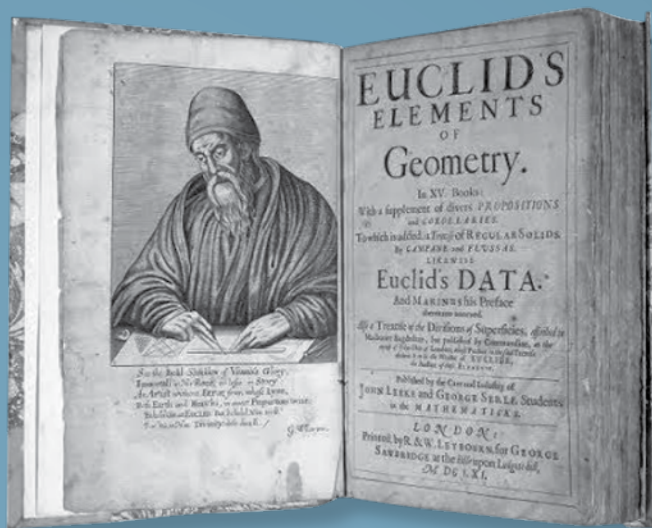
Agustín Contreras Carreto, Fernando Macías Romero
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas BUAP

Dedicado a K. Perkins (por A. Contreras) y a la memoria de John H. Conway y de Alexander Bykov (por los dos autores).

"Allí arriba hay mucho espacio libre"
J. H. Conway

Los *Elementos* de Euclides de Alejandría (alrededor del 300 a. C.) constituyen la primera exposición axiomática exitosa, como texto y como arquetipo, durante casi dos mil años. Uno de los logros más reconocidos de Euclides en esta obra es su audaz decisión de incluir como axioma al "Quinto Postulado" o postulado de las paralelas, atreviéndose a transgredir el precepto aristotélico de que los axiomas debían ser cortos y convincentes. Realización del hermoso cuento de Andersen, nació feo entre los axiomas, como el famoso patito entre los patos, pero terminó siendo cisne, el más importante axioma de la geometría, aquel que caracteriza a la geometría euclidiana, equivalente a cada uno de los teoremas más útiles de esta geometría, como el Teorema de Pitágoras.

A través de los 13 libros de los *Elementos*, la humanidad ha conocido una teoría del área de polígonos, desarrollada en sus primeros cuatro libros, sin fórmulas numéricas ni semejanza, solo basada en añadir o sustraer figuras congruentes, y en adecuadas disecciones, que fue formalizada posteriormente por la noción de contenido en

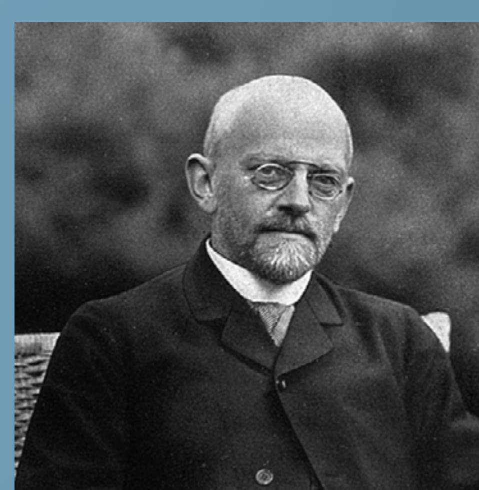


la fundamentación de Hilbert; en el libro 6, la teoría de semejanza de triángulos de los pitagóricos, pero, ahora sí, con demostraciones completas, incluyendo el caso inconmensurable, basadas en la profunda teoría de las proporciones de Eudoxo (alrededor de 400-347 a. C.), que Euclides expone en el libro 5, celebrado por los analistas del siglo XIX como el mejor de todos; en los libros 7, 8, 9 y 10, la teoría de números, también de los pitagóricos, pero con conceptos nuevos, como las irracionalidades cuadráticas, o demostraciones nuevas y elegantes, como la de la infinidad de los números primos.

En cuanto al Quinto Postulado, Euclides, como miles de matemáticos posteriores a él, intenta demostrarlo para convertirlo en teorema, pero, a diferencia de estos, no se queda en ese empeño, sino que lo acepta como el patito feo de los postulados. Sin embargo, la duda de si se puede quitar como axioma y deducirlo como teorema, se convirtió en uno de los problemas abiertos más importantes (junto con la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo) hasta el siglo XIX, cuando se resolvió con la aparición de las geometrías no euclidianas. En los últimos libros de los *Elementos*, Euclides trata los sólidos platónicos, los prismas y las pirámides, y una teoría del volumen (o contenido) de estas figuras, pero lo hace, en el caso de las prismas y paralelepípedos, generalizando lo logrado para los polígonos en los primeros cuatro libros, una teoría elemental de área basada en la disección de figuras y comparación de contenidos, como mencionamos antes.

Sin embargo, sin proponérselo, Euclides dejó otro problema abierto por milenios al no tratar la teoría del volumen de pirámides de manera análoga a la teoría del área de polígonos y de prismas: con una teoría del contenido que pudiera resolverse por medio de disecciones. En el caso de las pirámides, desarrolla la teoría del volumen apelando a la teoría de exhaución de Eudoxo, lo cual equivaldría a usar argumentos de límite o el cálculo integral, como diríamos ahora. ¿Por qué Euclides no trató el volumen de las pirámides sin usar la "herramienta pesada"? El enorme matemático Carl Friedrich Gauss (1977-1855) hizo notar que, si esto se lograra, se obtendría una teoría elemental del volumen de poliedros. Este problema abierto quedó planteado por él desde 1844. Aún en su legendario comunicado en el Congreso de Matemáticas de París en 1900, David Hilbert preguntó —como el tercero de 23 problemas (simplificado por nosotros el enunciado)—: ¿Sería posible caracterizar los poliedros de igual volumen como aquellos que pueden descomponerse en el mismo número de tetraedros iguales? En el mismo año, 1900, Max Dehn, alumno de doctorado de Hilbert, respondió negativamente: existen dos poliedros de igual volumen que, sin embargo, no son equidescomponibles (no es posible cortar el primero en un número finito de piezas poliédricas que puedan ensamblarse de modo que quede armado el segundo). Esto mostró que, si Euclides

» En el caso de las pirámides, desarrolla la teoría del volumen apelando a la teoría de exhaución de Eudoxo, lo cual equivaldría a usar argumentos de límite o el cálculo integral, como diríamos ahora.


David Hilbert

no pudo evitar el sofisticado método de exhaución para definir la noción de volumen, no fue por falta de capacidad matemática; es simplemente que este paso al límite o uso del análisis es imprescindible. Como en el caso de la demostración del Quinto Postulado, si Euclides no lo logró, es que no se podía.

Algo muy emocionante de este tercer problema de Hilbert es que entender su solución no es nada difícil y casi se puede resumir en un comunicado como este; es una bella introducción a la teoría de los invariantes topológicos en los que Dehn resultó ser un maestro. Esa era nuestra intención original, pero una noticia en Internet de un caso análogo desvió nuestra atención: "Una estudiante de doctorado, Lisa Piccirillo, en menos de una semana resolvió un famoso problema matemático que llevaba medio siglo sin respuesta". Nos interesamos en la noticia por dos razones: primero, por la analogía con el problema planteado por Hilbert: su alumno de doctorado lo resuelve en poco tiempo y de manera ingeniosa mediante la introducción de invariantes topológicos. Lisa Piccirillo, matemática que trabaja en geometría y topología de dimensiones bajas (como Max Dehn), resuelve rápidamente, de manera ingeniosa y también usando invariantes topológicos, un problema abierto de teoría de nudos planteado por John Horton Conway desde 1970 (Piccirillo, 2020).

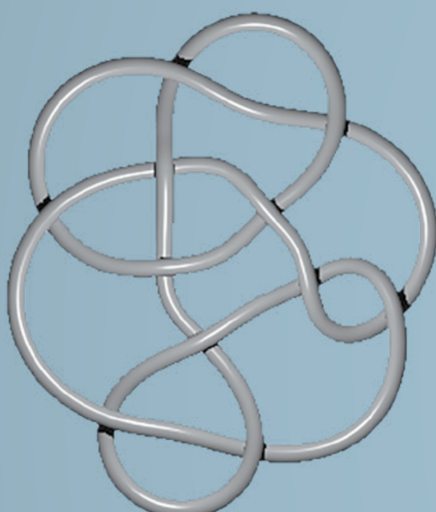
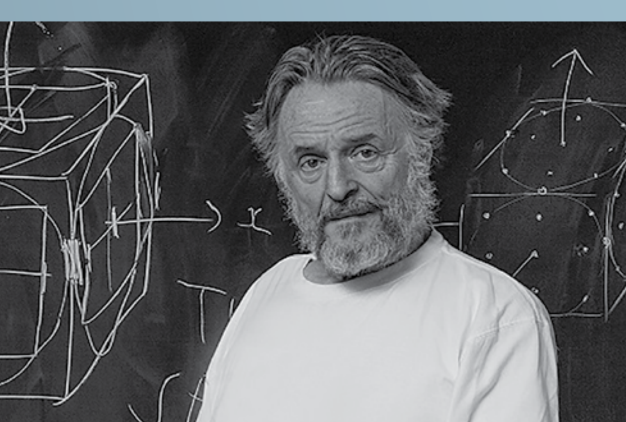


Fig. 1. El nudo de Conway

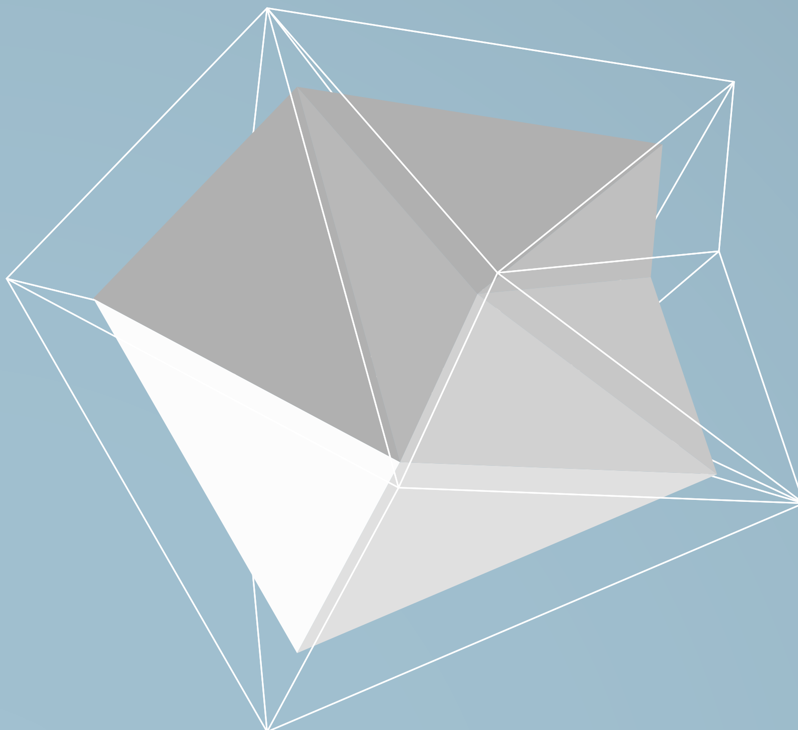
De nuevo, dejaremos la descripción de este problema y su solución para otra posible contribución. La segunda razón de nuestro interés en la noticia fue que en ella se informaba que el gran matemático de la Universidad de Cambridge, John Horton Conway, murió de Covid el 11 de abril de 2020.

Casi toda la obra de John H. Conway (1937-2020) está enmarcada en el ámbito de la matemática pura, principalmente en teoría de grupos, teoría de nudos, teoría de números, teoría de la probabilidad, teoría de juegos y teoría de códigos (él se consideraba un geómetra clásico. En este campo estudió las simetrías de redes de cristal). En 1967, por ejemplo, Conway descubrió un nuevo grupo que algunos han llamado "Constelación de Conway", el cual contenía a todos, menos a dos, de los "grupos esporádicos" entonces conocidos. Su hallazgo produjo apasionantes consecuencias, tanto en teoría de juegos como en teoría de números. El grupo de Conway está fuertemente ligado a un descubrimiento anterior de John Leech: un empaquetamiento extremadamente denso de esferas unitarias del espacio 24-dimensional, donde cada esfera está en contacto con otras 196560. Y es que, como Conway comentó entonces, "allí arriba hay mucho espacio libre" (véase Thompson, 1983).



John H. Conway (1937-2020)

Uno de los inventos más famosos de Conway es su "Juego de vida", que pertenece a la clase de juegos de simulación, a causa de sus semejanzas con el surgimiento, decadencia y alteraciones que experimentan los seres vivos (para una exposición detallada de dicho juego, véase Gardner, 2004). Sobre este juego, Martin Gardner expresó: "El juego [de vida] hizo a Conway inmediatamente famoso, pero también abrió un campo entero de investigación



Este investigador encontró otras dos cuadraturas perfectas simples de cuadrados de lado 110, pero cada uno tenía un orden de 22.

matemática, el campo de los autómatas celulares". De este modo, es considerado uno de los más bellos modelos de computación. Conway disfrutaba con la matemática recreativa y, a pesar de que fue muy productivo en este campo, solo excepcionalmente publicó sus descubrimientos. Una excepción fue su artículo "La colcha de la señora Perkins" (Conway, 1964), donde despliega un problema de disección que describimos a continuación:

La cuadratura del cuadrado es el problema que consiste en teselar o seccionar un cuadrado cuyo lado tenga por longitud un número natural (un "cuadrado entero") usando otros cuadrados enteros de lados paralelos al original. Es una tarea fácil, a menos que se establezcan condiciones adicionales. La restricción más estudiada es que la cuadratura sea perfecta; es decir, que los tamaños de los cuadrados utilizados sean todos diferentes. El orden de la cuadratura de un cuadrado es el número de los cuadrados que la constituyen. La cuadratura de un cuadrado es simple si ningún subconjunto del conjunto de los cuadrados que la constituyen forma un cuadrado o un rectángulo; en cambio, la cuadratura es compuesta si no es simple.

En 1978, el matemático e informático teórico holandés A. J. W. Duijvestijn logró una configuración de orden mínima para la cuadratura perfecta simple de un cuadrado; lo hizo en un cuadrado de lado 112, utilizando solo 21 cuadrados. Su disección forma el logotipo de la Trinity Mathematical Society. Este investigador encontró otras dos cuadraturas perfectas simples de cuadrados de lado 110, pero cada uno tenía un orden de 22. Son las cuadraturas perfectas simples de cuadrados, mínimas en cuanto a la longitud del lado del cuadrado original.

Una colcha de la señora Perkins es una cuadratura de un cuadrado, no necesariamente simple ni perfecta, pero con la restricción de que las longitudes de los lados de los cuadrados utilizados

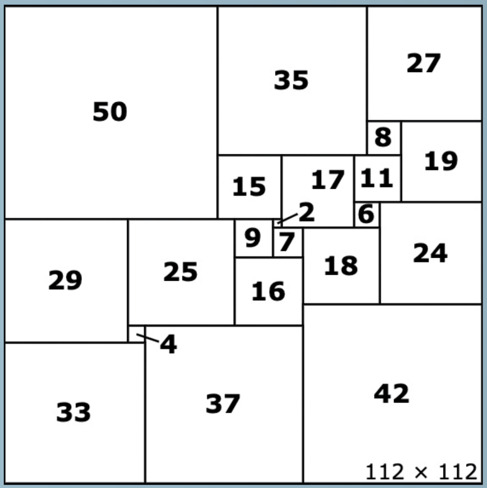


Fig. 2. Cuadratura perfecta simple mínima

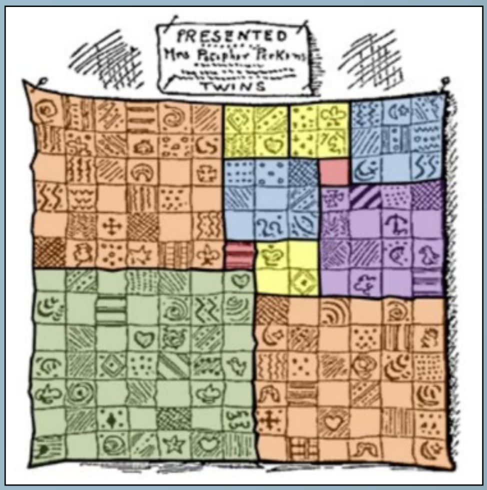
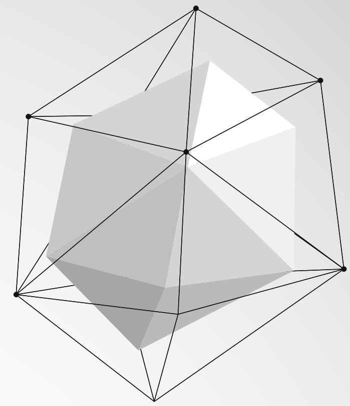
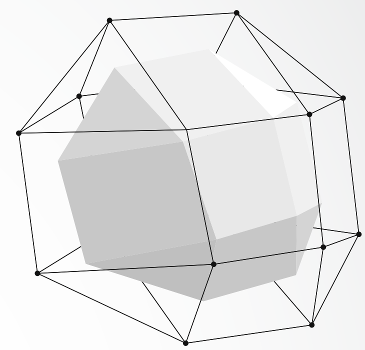


Fig. 3. Solución de Dudeney para n=13

Fig. 4. Colchas de la señora Perkins para n=1 a 18

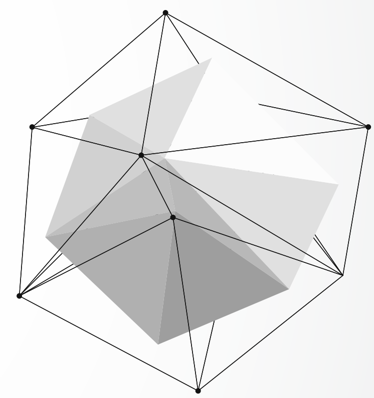


» La primera vez que se planteó este problema como un pasatiempo matemático se hizo para un cuadrado de lado 13. El nombre de "la colcha de Mrs. Perkins" vino de un problema en uno de los libros de Dudeney, donde él da una solución para n=13



en la disección constituyan un conjunto de número primos relativos, es decir, que su máximo común divisor sea 1 (cuadratura prima). El problema de la colcha de la señora Perkins es encontrar la distribución de cuadrados con el menor número posible de piezas cuadradas. La primera vez que se planteó este problema como un pasatiempo matemático se hizo para un cuadrado de lado 13. El nombre de "la colcha de Mrs. Perkins" vino de un problema en uno de los libros de Dudeney, donde él da una solución para $n=13$. Su orden es 11. Las longitudes de los cuadrados que forman esta cuadratura son 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 6, 6, 7.

Para $n=1$ la única solución posible es el mismo cuadrado. En la figura 4 presentamos las colchas de la señora Perkins para cuadrados de lados 1 a 18. Conway fue quien probó que estas cuadraturas eran colchas de Perkins.



Cuando la longitud n del cuadrado original crece, el orden $f(n)$ de la colcha de Perkins para dicha n no necesariamente crece. El primer ejemplo de esto es para $n=40$, para el cual $f(n)=16$, mientras que para $n=41$, $f(n)=15$. Se sabe que, para $n>1$, $\log_2 n < f(n) < 6 \log_2 n$. La cota inferior se debe a Conway y la superior, a Trustrum (1965).

Para terminar, recomendamos la lectura del hermoso libro "The book of Numbers" de John H. Conway y Richard K. Guy, de la colección Copernicus de la Springer-Verlag. Richard Kenneth Guy fue un matemático, británico como Conway, que trabajó frecuentemente con Paul Erdős y también con Conway, y colaboró mucho en la columna "Mathematical Games" de Martin Gardner. Guy falleció el 9 de marzo de ese aciago año 2020, pero no de Covid-19, sino de vejez: tenía 103 años.

De cualquier manera, dejamos este pequeño escrito como un pequeño homenaje póstumo a estos grandes y divertidos matemáticos y a nuestro querido colega Alexander Bykov, recientemente fallecido (3 de noviembre de 2022). Quién sabe a qué dimensión hayan arribado, pero ojalá se sigan divirtiendo juntos con las matemáticas; al fin y al cabo, "allí arriba hay mucho espacio libre".

Referencias

Conway, J. H. (1964). Mrs. Perkins's quilt. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, *60*(3), 363-368.

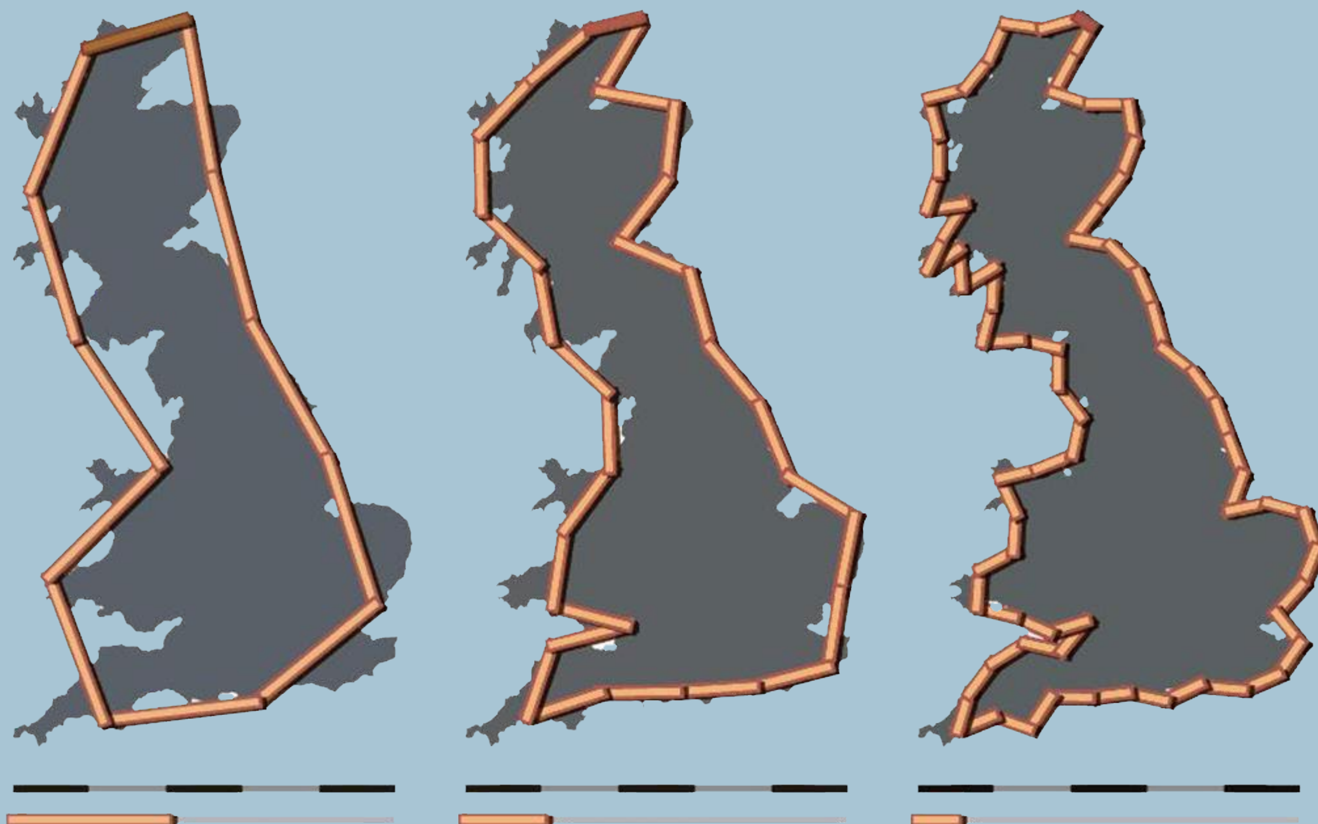
Conway, J. H. y Guy, R. (1998). *The book of numbers.* Springer Science & Business Media.

Gardner, M. (2004). *Ruedas, vida y otras diversiones matemáticas.* Labor

Piccirillo, L. (2020). The Conway knot is not slice. *Annals of Mathematics, 191*(2), 581-591.

Thompson, T. M. (1983). *From error-correcting codes though sphere packings to simple groups.* Mathematical Association of America.

Trustrum, G. B. (1965). Mrs. Perkins's Quilt. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 61(1), 7-11.



Una aproximación a la dimensión fractal de la costa de Irlanda

Laura Cano Cordero, Patricia Domínguez Soto , Wendy Rodríguez Díaz

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

Existen muchas maneras de estimar el "tamaño" o la "dimensión" de conjuntos "finos" o "altamente irregulares", que han sido propuestas para generalizar la idea de que puntos, curvas y superficies tienen dimensiones de 0, 1 y 2, respectivamente. Entre todas ellas, la dimensión de Hausdorff, definida en términos de la medida de Hausdorff, es la más antigua y ampliamente estudiada.

C. Carathéodory introdujo, partiendo de las construcciones de E. Borel y de H. Lebesgue, las más generales "medidas exteriores de Carathéodory". En particular, definió la medida "1-dimensional" o "lineal" en el espacio euclídeo n-dimensional, indicando que las medidas dimensionales podían ser definidas de forma parecida para otros enteros. Sin embargo, F. Hausdorff señaló que la definición de Carathéodory también era válida para s no entero. Ilustró eso, mostrando que el famoso conjunto ternario de Cantor tenía medida s-dimensional positiva, pero finita si $s = ln(2)/ln(3) = 0{,}6309...$. De este modo nació el concepto de conjuntos de dimensión fraccionaria, que más adelante se usaría para medir la dimensión de los fractales.

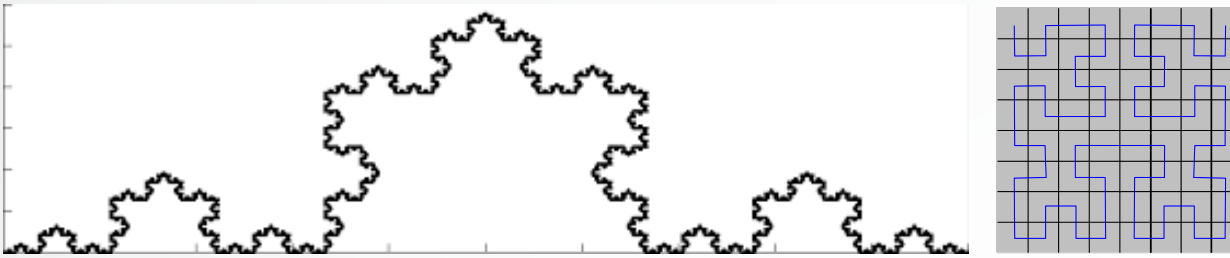


Figura 1. Curvas de Koch (izquierda) y de Hilbert (derecha)

Un objeto se dice fractal si tiene, al menos, una de las siguientes propiedades (véase Barnsley, 1988):

1. Es autosimilar;
2. La geometría clásica no puede representarlo;
3. Es un objeto con longitud o complejidad infinita;
4. Tiene una dimensión de Hausdorff-Besicovitch mayor a su dimensión topológica.

Los objetos fractales poseen otras propiedades, además de la autosimilitud. Por ejemplo, la curva de Koch tiene un perímetro infinito y la curva de Hilbert llena todo el plano (véase la figura 1). Las curvas mencionadas cumplen con la propiedad de ser autosimilares, pero ¿en qué difieren estas dos curvas? El matemático F. Hausdorff mostró una forma de clasificar los fractales, por medio de la dimensión fractal que se definirá más adelante.

Los fractales tuvieron una relevancia importante cuando fueron relacionados con la naturaleza. Por ejemplo, ¿cuánto mide la costa de Gran Bretaña? El artículo publicado por Benoit Mandelbrot (1967) menciona una forma de hacerlo, la cual se describe a continuación.

Elijamos una unidad de medida *s* y, tomando un punto de partida sobre la costa, marquemos un punto (de los posibles) que esté también sobre la costa, a una distancia igual a la unidad elegida. Tomando este primer punto elegido, repitamos el procedimiento el número *n* de veces necesario (observemos que *n* depende de *s*, es decir, $N(s)=n$), para abarcar la extensión de costa que queremos medir, y aceptemos que ese número multiplicado por nuestra unidad de medida es una aproximación de la longitud de la costa (véase la figura 2).

Se observa que cuanto menor sea la unidad de medida o nuestro compás, mayor será la longitud de la curva. Sin embargo, debemos recordar que este procedimiento es empírico; por lo tanto, es imposible considerar unidades de medida arbitrariamente pequeñas y precisiones cartográficas arbitrariamente grandes. Por ello, la validez de este razonamiento está limitada a ciertos rangos tanto para la unidad de medida como para la escala cartográfica. De cualquier manera, esta situación alerta acerca de que la longitud euclídea tiene un sentido diferente al que estamos queriendo desarrollar (véase Redondo y Haro, 2004).

Figura 2. Medición de la costa de Gran Bretaña

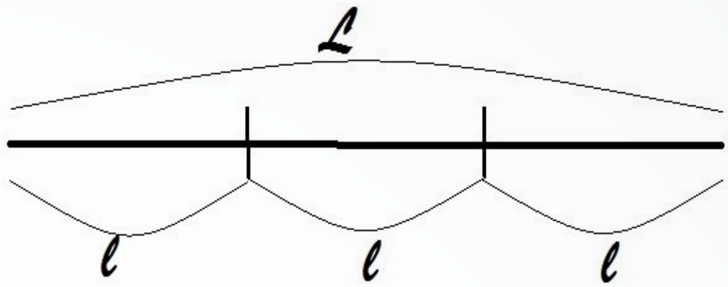


Figura 3. La recta

Podemos observar que cuanto menor es la escala de medición, mayor es su longitud. Eso hace complicado medir con precisión la costa de Gran Bretaña. Mandelbrot se dio cuenta de que la costa tenía características de un objeto fractal, por lo que midió algo más: la *rugosidad*. La dimensión fractal, denotada por de un objeto fractal, se obtiene de la siguiente fórmula:

$$L/l)^{D_f} = N,$$

Despejando D_f de la ecuación, se obtiene: $D_f = \frac{\ln(N)}{\ln(L/l)}$.

¿Qué significa este número y cómo se utiliza esta fórmula? Para entenderla, tomemos un ejemplo sencillo en el plano. Sea una recta, y dividamos en 3 partes iguales con longitud igual a , de donde tenemos que = 3 y = 3. Entonces, , y despejando concluimos que . En este ejemplo, la dimensión de la curva coincide con la dimensión de la recta (véase la figura 3).

Tomemos ahora un objeto más complicado en el plano: sea R un cuadrado, donde cada uno de sus lados tiene una longitud . Dividamos R en cuatro partes iguales, tomando los puntos medios de cada lado y trazando rectas para dividirlo. Observemos que cada una de sus partes tiene longitud = 2 y = 4; así , que es la dimensión del plano (véase la figura 4).

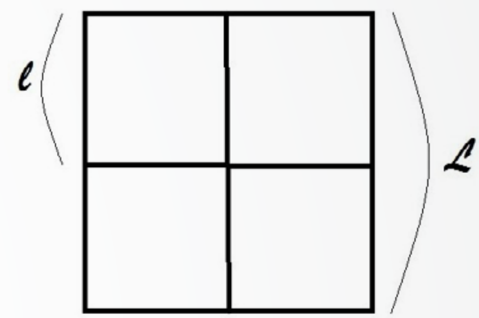


Figura 4. Puntos medios del cuadrado R

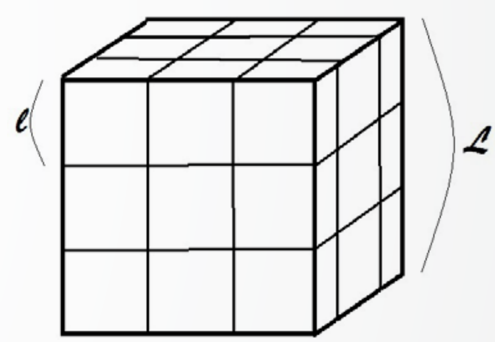


Figura 5. El cubo C

Realizando el mismo procedimiento con un cubo C, se dividirá en 9 partes. Se sabe que la longitud de un lado es y la longitud de cada una de sus partes es . Así, tenemos que = 3 y = 27. Así, , que es la dimensión del espacio 3-dimensional (véase la figura 5).

Las dimensiones fractales de la curva de Koch y la curva de Hilbert son y , respectivamente. Otros ejemplos de dimensiones de fractales son el triángulo de Sierpinski y el conjunto de Cantor . Observemos que la dimensión fractal en los ejemplos anteriores no es un número entero, excepto en la curva de Hilbert; esto sugiere que no todo objeto fractal tiene una dimensión fraccional, pero *sí* la mayoría.

El proceso antes mencionado en el plano y en el espacio 3-dimensional nos conduce a un método llamado conteo por cajas y que se puede utilizar, por ejemplo, para responder la pregunta

Para utilizar el método de conteo de cajas, también llamado *box-counting*, se dibuja una cuadrícula sobre la región de un país, en este caso, Irlanda, y se contabiliza el número de cuadros suficientes para cubrir el contorno o línea costera

¿cuál es la longitud de la costa de Gran Bretaña? Ahora bien, este procedimiento es útil para la costa de Gran Bretaña, pero ¿qué pasa con la costa de Irlanda?

Peitgen, Jürgens y Saupe (2004) mencionan que se pueden definir tres tipos de dimensión fractal que atiendan este asunto: dimensión de autosemejanza (DA), aplicable únicamente a fractales con autosemejanza estricta; dimensión de compás (DC), utilizada en curvas irregulares como fronteras de países, y dimensión por conteo de cajas (DCC), útil cuando el fractal no se subdivide en copias exactas de sí mismo (se puede aplicar en curvas irregulares, también, como costas de países al igual que en el caso anterior).

Para utilizar el método de conteo de cajas, también llamado *box-counting*, se dibuja una cuadrícula sobre la región de un país, en este caso, Irlanda, y se contabiliza el número de cuadros suficientes para cubrir el contorno o línea costera. La dimensión del fractal podrá ser calculada al analizar cómo cambia este número conforme hacemos cuadrículas con cuadrados más pequeños. En nuestro caso, realizaremos el cálculo mediante la ayuda del software Mathematica.

En Mathematica, la función CountryData permite obtener una lista de coordenadas de la costa o región en cuestión sobre un plano. Mientras que la función CoastlineBoxMap, luego de binarizar la imagen, seleccionará únicamente las casillas en las que se encuentra la línea costera. Observemos qué sucede con Irlanda utilizando la función CountryData:

```
In[•]:= coastlinepoints =
          Last[Sort[CountryData["Ireland", {"Shape", {"CylindricalEqualArea", 50}}]][[1, 3, 1]]];
```

De este modo, dada una región (Irlanda) y un número entero (12), se genera una imagen, donde la línea costera se encuentra dentro de una cuadrícula; además, se obtienen los valores $ln(1/r)$ y $ln\,N(r)$, donde r es la longitud del cuadrado y es el número de cuadrados necesarios para cubrir la línea costera (véase la figura 6).

```
CoastlineBoxMap["Ireland", 12]
```

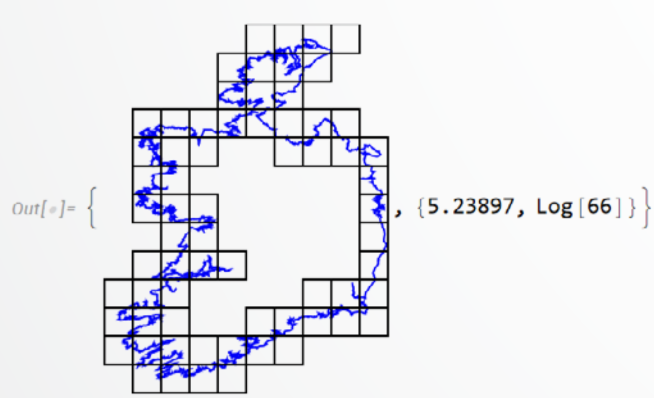


Figura 6. Costa de Irlanda

Repitiendo este procedimiento, considerando los enteros 10, 50, 100, 200 y 500, se obtienen cuadrículas cada vez más finas en el programa (véase la figura 7).

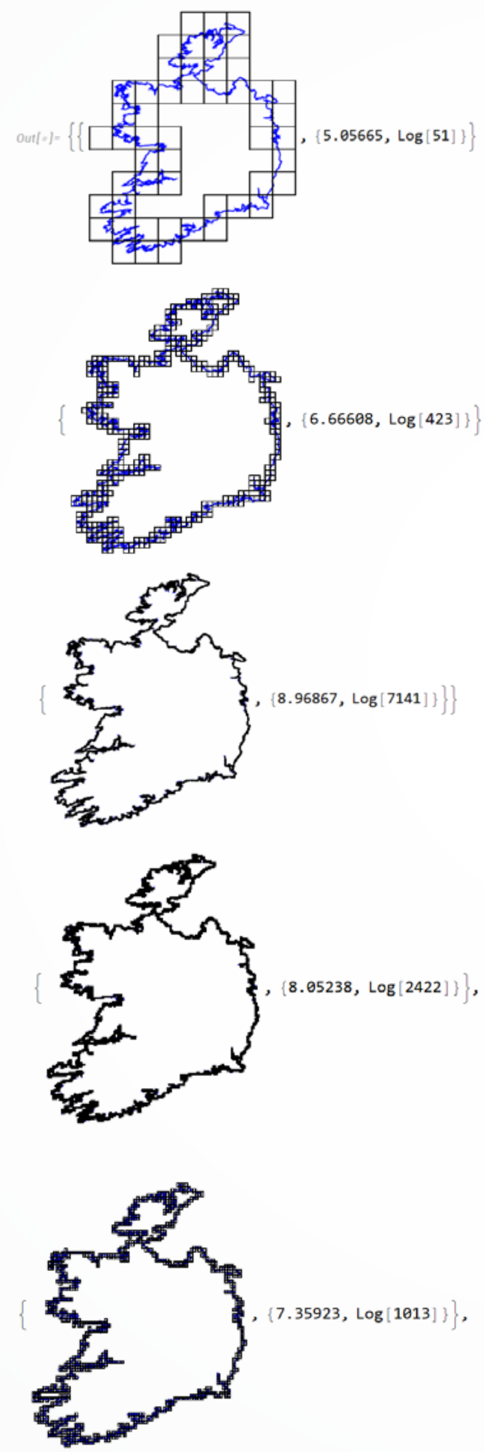
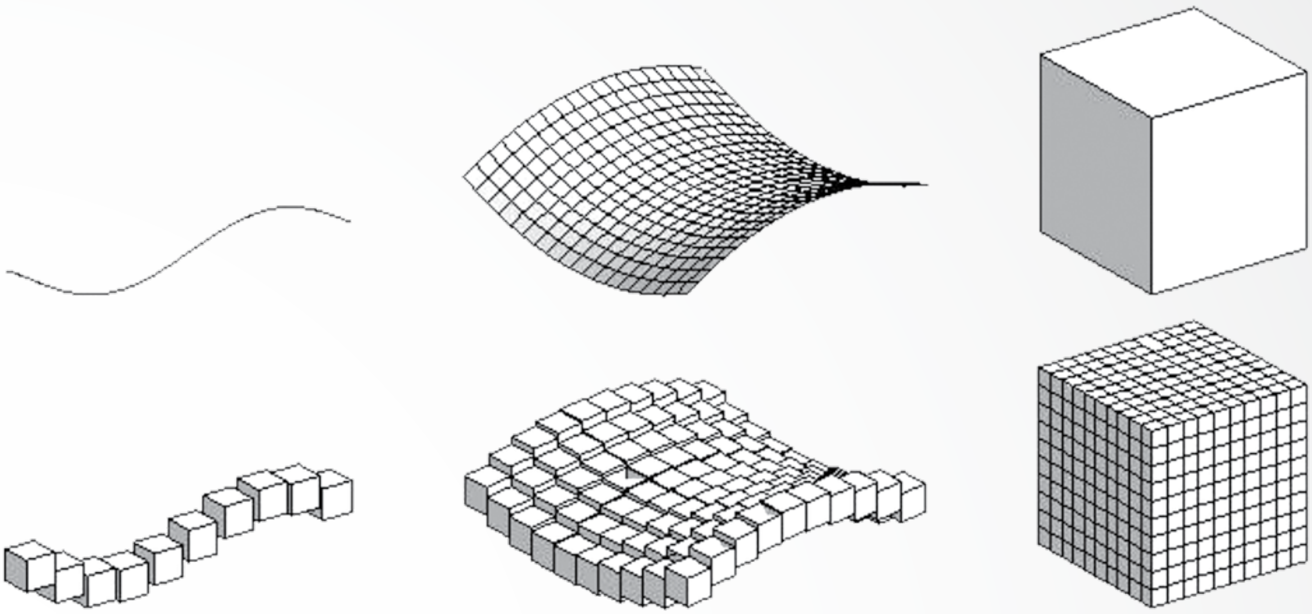


Figura 7. Cuadrículas utilizando CountryData



Método de conteo de cajas, también llamado box-counting,

Para continuar, debemos advertir que es necesario tener conocimiento de escalas logarítmicas y ajuste lineal de datos empíricos. En un sistema cartesiano, tomemos en el eje de las abscisas el logaritmo del inverso de nuestra unidad de medida, y en el de las ordenadas, el logaritmo de la aproximación de la longitud de la costa. Utilizando el método de los mínimos cuadrados, existe una recta que ajusta con buena precisión el conjunto de datos representados. Haciendo uso de la información anterior, y utilizando el software Mathematica, se hace un ajuste lineal mediante la función CountryFractalDimension, donde se toma la pendiente de la ecuación lineal fit generada por la función LinearModelFit (véase la figura 8).

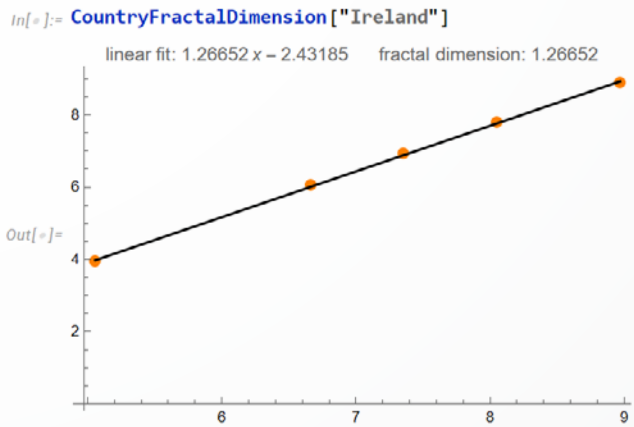


Figura 8. Función CountryFractalDimension

Así, obtenemos que una aproximación de la *dimensión fractal de la costa de Irlanda* es 1.26652.

Observemos que D es una medida de la rugosidad de un perfil o plano con discontinuidades. Por ejemplo, (i) si $D=1$, implica que la superficie es plana y lisa; (ii) si $1 < D < 2$, implica que la superficie tiene un "grado" de rugosidad en el sentido coloquial de la palabra. Para este caso, algunos autores consideran que si $D = 1.125$, la superficie es ligeramente rugosa; si $D = 1.250$, la superficie es rugosa; si $D = 1.375$, la superficie es muy rugosa, y si $D = 1.5$, la superficie es extremadamente rugosa. *La costa de Irlanda fluctúa entre rugosa y muy rugosa.*

Referencias

Barnsley, M. (1988). *Fractals everywhere*. Academic Press.
Mandelbrot, B. (1967). How long is the coast of Britain? Statistical, Self-Similarity and Fractional Dimension. *Science New Series*, *156*(3775), 636-638.
Peitgen, H., Jürgens, H. y Saupe, D. (2004). *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Springer.
Redondo, A. y Haro, M. (2004). Actividades de geometría fractal en el aula I. *Suma* (47), 1928.

Paradojas I

Autorreferencia

Agustín Contreras Carreto, David Herrera Carrasco
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

— ... "Sucedió, pues, que tomando juramento a un hombre, juró y dijo que para el juramento que hacía, que iba a morir en aquélla horca que allí estaba, y no a otra cosa. Repararon los jueces en el juramento, y dijeron: 'Si a este hombre le dejamos pasar libremente, mintió en su juramento y, conforme a la ley, debe morir; y si le ahorcamos, él juró que iba a morir en aquella horca, y habiendo jurado verdad, por la misma ley debe ser libre'. Pídese a vuestra merced, señor gobernador, qué harán los jueces de tal hombre...".

—¿Qué haces, Kurt?

—Estoy leyendo *El ingenioso hidalgo Don Quijote de la Mancha*, mamá; es para mi clase de literatura. El maestro también nos dejó buscar unas palabras en el diccionario, pero hay una que no encontré. ¿Qué significa heterológico?

—¿Heterológico?... Mmm. ¡Ah! Creo que un adjetivo es heterológico cuando no se describe a sí mismo. Por ejemplo, "monosílabo" es heterológico, porque no es una palabra de una sílaba, pero "esdrújula" sí es una palabra esdrújula y por eso no es un adjetivo heterológico. ¿Comprendes?

—Creo que sí, pero ¿"heterológico" es un adjetivo heterológico?

—Pues no sé, pero me late que sí lo es.

—Pero si fuera heterológico, no se describiría a sí mismo y entonces no sería heterológico.

—Bueno, entonces no es heterológico.

—Pero entonces se describiría a sí mismo y sería heterológico

—¡Ay niño! Yo ya no entiendo. Pero ¡mira! Ya llegó tu papá. Mejor pregúntale a él.

El niño corre hacia la puerta con los brazos abiertos para entrelazarlos con los de su padre, que lo recibe alzándolo hasta el techo.

—Pá, te tengo una pregunta de mi tarea de literatura.

—Antes pregunto yo, pilluelo. Me encontré a tu maestra de música y me dijo: "Señor Gödel, Kurt no vino hoy a la clase". ¿Por qué, hijo?

—Es que la maestra es muy enojona. El otro día nos explicó lo que es un canon y nos puso a escuchar la "Ofrenda Musical" de Bach, que tiene un canon a tres voces en el que su tema empieza en do y, cuando termina, ya no está en do, sino en re, para terminar en mí y recomenzar, para terminar en fa sostenido, y así se sigue hasta que en el sexto cambio de tono queda uno de nuevo en do. Yo le dije a la maestra que eso parecía un "bucle extraño", como el que aparece en el cuadro de nuestra sala, en el que unos monjes suben y suben, pero siempre regresan al mismo sitio.

—¡Es mi cuadro preferido de Escher! Mira, se llama "Subiendo y bajando". Aquí tenemos otro de Escher en el que una mano dibuja a la otra mano, y esta a su vez dibuja la primera. Es curioso, ¿verdad? En los dos cuadros, el pintor representa un proceso de interminable retorno, pero de manera finita.

—¡Sí, pa! Eso es lo que se llama un "bucle extraño".

—Bueno, ¿y qué te dijo la maestra?

—Solo pegó en la mesa y dijo: "¡Ándale, niño! ¡Demonio!".

—Ja, ja. Pero no vuelvas a faltar a su clase, ¿eh? Bueno, y ¿qué pregunta me ibas a hacer de la tarea de literatura?

—¡Ah, sí! Que si es verdadera o falsa la frase: "esta frase es falsa".

En eso se escucha la voz de la madre que, desde la cocina, había escuchado toda la conversación.

—¡Ajá! Así que es en esa clasecita de literatura de donde salen tus preguntitas "capciosas".

—No, má. No son capciosas, son paradójicas. Una paradoja es una afirmación que no puede ser ni verdadera ni falsa; se originan en lo que papá y yo llamamos bucle extraño. Mira esta revista que se llama *Spinor* y que trajo papá. Sale cada tres meses y en ella cuentan cosas interesantísimas. Por ejemplo, mira lo que dice este artículo que se llama "Paradojas I": "En todas estas paradojas, que podríamos llamar semánticas, los conceptos están encubiertos por palabras; no ocurre lo mismo con las que dieron origen a las crisis en los fundamentos de la matemática, llamadas paradojas lógicas. En 1885, George Cantor (1845-1918) formuló una teoría muy atractiva y vigorosa de diferentes clases de infinitos, conocida con el nombre de Teoría de Conjuntos. Sin embargo, Bertrand Russell (1872-1970) dividió a los conjuntos en dos categorías: los normales, que no se contienen a sí mismos como elementos, y los anormales, que sí se contienen a sí mismos. Así, el conjunto de todos los niños curiosos es normal, puesto que, al no ser dicho conjunto un niño curioso, no se contiene a sí mismo como elemento. Por otro lado, el conjunto de todos los conceptos sí es un concepto y entonces es un conjunto anormal, se autodevora como bestia emanada, más de la fantasía del Barón de Münchhausen que de

Russell. La paradoja aparece cuando intentamos preguntarnos: ¿A qué clase pertenece el conjunto R de todos los conjuntos normales? Como puede comprobar nuestro atento lector, R no es ni anormal ni normal, ¿qué cosa es entonces? ¿Podrán construirse paradojas de este jaez en otras ramas de la matemática? Si, como parece, el fenómeno de la autorreferencia o bucle extraño es el culpable de estas paradojas, ¿por qué no eliminarlas de raíz de la matemática?".

Los párrafos anteriores ilustran una conversación ficticia en el seno de la Familia Gödel. Durante su infancia, en la ciudad checa de Brno, Kurt Gödel fue un niño tan curioso, tan lleno de ansias de saber, tan preguntón, que su familia lo llamaba Herr Warum, expresión alemana que significa "El señor por qué". Hemos aprovechado estas virtudes del niño Gödel para introducir, a través de esta conversación, varias paradojas que han influido en las matemáticas y sus fundamentos. Las soluciones a los problemas generados por ellas en el seno de la matemática, propuestas por distintos matemáticos como Bertrand Russell, David Hilbert y el mismo Gödel, son muy interesantes, y quisiéramos hablar de ellas y de sus posibles aplicaciones en la solución de paradojas que suelen aparecer en la comunicación humana, pero el tiempo y el espacio se nos están terminando. Solo incluiremos el siguiente dato curioso, que parecería otro bucle extraño.

Kurt Gödel (1906-1978), considerado por muchos como el más grande lógico matemático de por lo menos el siglo xx, ingresó a la Universidad de Viena en 1923, con la intención de estudiar física. En esos años, Philip Furtwängler, un matemático alemán especializado en aritmética superior, quien se había doctorado en Gotinga bajo la dirección de Félix Klein, enseñaba en la Universidad de Viena. El joven Gödel quedó tan impactado por las clases de Furtwängler que abandonó su decisión de estudiar física y se volcó en las matemáticas.

Furtwängler terminó sus estudios en Gotinga en 1896 y permaneció allí hasta 1912, año en que se incorporó a la Universidad de Viena. En 1895, llegó a Gotinga el gran matemático David Hilbert, invitado por Félix Klein, para juntos convertir a la Universidad de Gotinga en el mejor centro de investigación matemática del mundo, cosa que lograron en esa época. Seguramente, en Gotinga se conocieron Philip Furtwängler, quien hizo que Gödel se dedicara a las matemáticas, y David Hilbert, cuyo trabajo matemático de toda la década de 1920 (su propuesta de solución a los fundamentos) se vería destruido por los teoremas de Gödel (¡la escuela de Klein y Hilbert generando a quien la devora!).

¡No se pierda la segunda parte de esta bella historia!

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

1578